

Álgebra moderna e a escola secundária¹

Ubiratan D'Ambrosio

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras²

Universidade de Campinas, S.P.

Brasil

Resumen³

En el presente trabajo el autor argumenta a favor de la necesidad de la introducción del álgebra moderna en los programas de estudio de matemática para la enseñanza secundaria, destacando su importancia pedagógica y el aspecto social implícito en dicha iniciativa. Las nuevas conquistas de esta importante área del conocimiento humano son fundamentales para que el país logre superar la barrera de su subdesarrollo cultural y económico.

Palabras clave

Álgebra moderna, programa de estudios de matemática.

Abstract

In this paper the author argues for the need for the introduction of modern algebra in the mathematics curricula for secondary education, highlighting its pedagogical importance and social aspects implicit in the initiative. The new achievements of this important area of human knowledge are fundamental to the country can overcome the barrier of cultural and economic underdevelopment.

Key words

Modern Algebra, Math Curriculum.

¹ Tomado de *Atualidades Pedagógicas* (Companhia Editora Nacional, São Paulo), Jan. - Abril de 1961 n° 49, pp. 15-19.

² Se guarda la referencia institucional del autor en el momento de la publicación de este trabajo por primera vez.

³ El resumen, las palabras clave, el abstract y las key words fueron agregados por los editores.

1. Breve história da álgebra e panorama da álgebra moderna

Deixando de apreciar os conhecimentos matemáticos dos povos pré-históricos, de que temos notícia por raras inscrições e comparações com algumas tribos que se encontram ainda hoje em estágio primitivo, podemos iniciar nossas apreciações pelos egípcios e babilônios, a quem devemos os mais antigos escritos matemáticos.

Como toda manifestação científica desses povos, a matemática se via dominada por preocupações de natureza religiosa e prática, restrita a uma elite sacerdotal, que a utilizava, sobretudo para manter e proteger as dinastias reais. Não obstante, já se notava um sistema completo de regras de cálculo com números inteiros e racionais positivos, alguns cálculos de áreas, e o manejo de equações de primeiro e segundo grau. Nenhuma tentativa, porém, de justificar as regras utilizadas, nem definir os conceitos e operações.

Já a ciência dos gregos, em especial a matemática, tem um aspecto bastante diverso. Embora tenha se originado das ciências orientais (o historiador grego Heródoto diz mesmo que o Egito é o berço da geometria), a matemática grega tem um caráter racional desde os seus primórdios. Ela procura enquadrar os conhecimentos de cada teoria no esquema que leva do mais simples aos mais complexos, fazendo com que ela dependa de um número reduzido de proporções iniciais. Assim, toda ciência é baseada numa lógica que permite edificar as diversas teorias.

Os Elementos de Euclídes (século III a.C.) desenvolveram em 13 anos toda a matemática até então conhecida, de acordo com o citado esquema. A Geometria contida nos Elementos é, com modificações superficiais, aquela ainda ensinada na Escola Secundária. Uma parte dos Elementos é dedicada à Aritmética. Encontram várias demonstrações formais de regras de cálculo. Mas, deve-se observar que a Geometria tem importância preponderante (basta notar que a teoria das Grandezas, que é a parte aritmética da obra, é essencialmente geométrica), o que provoca um menor desenvolvimento do cálculo algébrico.

Somente no século III, com Diofante de Alexandria, nota-se uma volta aos “calculadores”, que aplicam as regras empíricas aprendidas dos egípcios e babilônios, sem preocupações de caráter demonstrativo e geométrico. Desenvolveu-se então um Cálculo Algébrico abstrato, e é pela primeira vez adotado um símbolo literal para representar uma incógnita de uma equação.

Desde então, até o início do século XVI, se desenvolve na Europa a notação algébrica, além da difusão, por intermédio dos árabes, de Matemática grega e hindu sistematizada. Os números negativos são então introduzidos no Ocidente.

No início do século XVI, os matemáticos da Escola Italiana (Scipião del Ferro, Cardan, Tartaglia, Bombelli) descobrem a resolução, por radicais, das equações do 3º e 4º graus, e são forçados a introduzir os imaginários nos cálculos. Por outro lado, Viète e Descartes aperfeiçoam a notação algébrica, tornando-a próxima da atual.

De meados do século XVII ao fim do século XVIII, os desenvolvimentos do Cálculo Infinitesimal relegaram a Álgebra à segundo plano; mas esta ressurgirá depois com C. F. Gauss e E. Galois, já com o caráter de Álgebra Abstrata.

C. F. Gauss, estudando as formas quadráticas, introduz pela primeira vez a idéia de operação entre entes que não são números. F. Galois introduz a noção de grupo na teoria das Substituições, que ele usou para estudar as equações algébricas.

Veremos, posteriormente, que estas idéias são básicas na álgebra moderna, e constituem mesmo uma de suas características principais.

Atualmente, consideramos a álgebra como estudo de operações algébricas, independentemente da natureza dos objetos aos quais eles se aplicam.

A idéia de operação algébrica é bastante simples: a um par de elementos de um conjunto E fazemos corresponder um terceiro elemento do conjunto, e aqui a idéia de função está evidente. Isto é, o par (x, y) de elementos de E vai em z de E . A esta correspondência chamamos “lei de composição interna”.

Distinguimo-la de outras, denominadas “lei de composição externa” onde se trabalha um conjunto E e um conjunto A de “operadores”, a lei de composição externa faz corresponder a um par (a, x) onde a é um operador e x um elemento de E , um elemento y de E . Um vetor opera deste modo.

Dando uma ou mais leis de composição (internas ou externas) em um conjunto E , temos uma “estrutura algébrica” em E . O estudo destas estruturas constitui a álgebra moderna.

Há inúmeras espécies de estruturas algébricas, caracterizadas pelas leis de composição que as definem e pelos “axiomas” que se referem a estas leis.

Uma estrutura algébrica das mais simples e fundamentais é o grupo comutativo: é um conjunto E , no qual se dá uma lei de composição interna, $+$: (y, x) par de elementos de E vai em z de E (éste elemento de E composto a partir de x e y representados por $x + y$, ou seja, $z = x + y$), satisfazendo:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade)
2. $x + y = y + x$ (comutatividade)
3. Existe em E um elemento e tal que $x + e = x$ para todo x de E
4. Para cada elemento x de E existe em E um elemento x' tal que $x + x' = e$. Demonstra-se que e e x' são únicos.

Exemplos de grupos comutativos são freqüentes:

- 1) Números inteiros, onde a lei de composição é a adição usual (com a multiplicação usual não é).
- 2) Números racionais, com adição usual.
- 3) Números racionais não nulos com a multiplicação usual.
- 4) Polinômios inteiros, com a adição usual de polinômios.
- 5) Vetores no plano, com a soma dada pela regra do paralelogramo.
- 6) Horas do relógio (na realidade a lei de composição é externa)

Outras estruturas fundamentais da álgebra são:

Anel: é um conjunto E com duas leis de composição interna $+$ e \times que satisfazem:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. Existe um elemento e em E tal que $x + e = x$ para todo x de E
4. Para cada elemento x de E existe um elemento x' tal que $x + x' = e$
5. $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
6. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
7. $x \times y = y \times x$
8. Existe em E um elemento u tal que $x \times u = x$ para todo x de E .
Demonstra-se que u é único.

Corpo: é um conjunto E com duas leis de composição interna $+$ e \times satisfazendo 1 8 e

9. Para cada elemento $x \neq e$ de E existe um x^\wedge tal que $x \times x^\wedge = u$.
Demonstramos que x^\wedge é único.

Exemplos de anéis e corpos:

1. O conjunto de todos os números inteiros com as operações soma e produto usuais é um anel, mas não é corpo. Neste caso

$$e = 0, \quad u = 1, \quad x' = -x \quad \text{e} \quad x^\wedge = 1/x.$$

2. O conjunto dos polinômios inteiros com as operações habituais é um anel, mas não é um corpo.

3. O conjunto dos números reais é um corpo com as operações usuais, além de ser um anel.

Usando os axiomas, pode-se demonstrar teoremas que traduzem propriedades conhecidas. Por exemplo:

TEOREMA: Num grupo, a equação $a + x = b$ sempre tem solução.

Dem: Sendo a elemento do grupo, pelo 4, existe a' no grupo tal que $a' + a = e$. Da equação dada temos então $a' + a + x = a' + b$ ou $e + x = a' + b$ e pela 3 é $x = a' + b$.

Esta é efetivamente solução, pois $a + (a' + b) = b$.

Observa-se que esta propriedade nos diz como consequência que no grupo aditivo dos inteiros a subtração é sempre possível.

Porém, no anel dos inteiros a equação $ax = b$ nem sempre tem solução, pois com relação ao produto, o conjunto dos inteiros não é um grupo.

Outro exemplo:

TEOREMA: Num anel, $e \times a = e$ para todo a do anel.

Dem: $e + e = e$ (pela 3.)

$a \times (e + e) = a \times e$ (efetuando a operação \times com elementos iguais).

$a \times e + a \times e = a \times e$ (pela 5.)

$a \times e = e$ (pela 3. com a unicidade de e).

Existem inúmeras outras estruturas, das quase não cogitaremos.

Nota-se, claramente, que álgebra moderna é axiomática, e confrontada, sob êste aspecto, com a geometria, leva inúmeras vantagens. Citemos principalmente a simplicidade da natureza dos objetos, das operações, dos axiomas e dos teoremas. Além disso, o sistema axiomático é logicamente perfeito. Com a geometria atingimos isto só com algo do tipo dos Fundamentos da Geometria de Hilbert.

Êste aspecto de ciência axiomatizada é um forte característico da matemática atual. Outro caráter da matemática atual, que dia a dia se evidencia e se generaliza, é a primazia das estruturas e técnicas algébricas.

Com relação à Geometria, por exemplo, o célebre Programa de Erlangen de Felix Klein, em 1872, já mostrou como a Geometria se enquadrava perfeitamente no esquema algébrico.

Um conjunto de transformações geométricas, com a lei de composição que associa a duas transformações a transformação obtida pela aplicação sucessiva das duas transformações dadas é um grupo.

Por exemplo, as translações, as rotações, as simetrias, constituem grupos de transformações. A cada um destes grupos pode-se associar algumas propriedades geométricas que são invariantes pelas transformações do grupo. Por exemplo, a distância entre dois pontos é invariante por translações.

Assim, podemos falar na Geometria associada ao grupo de transformações G como o estudo das propriedades geométricas invariantes pelos elementos de G .

A geometria Elementar é a geometria associada ao grupo dos deslocamentos rígidos (translações, rotações e reflexões); nela se estudam propriedades como comprimento, área, congruência, paralelismo, perpendicularismo, semelhança, e outras. Mas o estudo da semelhança tem seu lugar natural na geometria associada ao grupo das semelhanças, onde não mais se estudam propriedades de caráter métrico.

Infelizmente, as idéias de Klein têm sido pouco consideradas. Haja vista a mistura de teoremas de semelhanças com teoremas métricos, a quase nula importância dada às transformações de figuras nos programas, e a esdrúxula colocação do teorema de Euler para poliedros.

Na matemática aplicada, nota-se sempre crescente aplicação da álgebra. Estruturas algébricas, estudadas do ponto de vista puramente abstrato, servem, como instrumento indispensável, à tecnologia e às ciências de natureza sociológica.

A Psicologia da Criança e do Adolescente, desenvolvida por *Jean Piaget* e sua escola, mostra uma correspondência entre as estruturas algébricas e os mecanismos operatórios da inteligência, regidos por uma forma de reversibilidade, paralela à existência de inverso que surge no axioma 4 de grupos. Segundo Jean Piaget, o grupo é uma tradução simbólica de certos caracteres fundamentais do ato de inteligência; a possibilidade de uma coordenação de ações e de reversibilidade.

2. A Álgebra Moderna na Escola Secundária

Um ponto que reputo fundamental na escola secundária é transmitir aos alunos a ciência atual. É absolutamente fora de propósito que um professor de Português ensine e exija dos alunos ortografia do século XIX. No entanto, a Matemática ensinada na Escola Secundária é, em grande parte, da antiguidade: a álgebra, particularmente, é tipicamente babilônica, dada com uma série de procedimentos impostos sem justificativa.

Além disto, é sumamente prejudicial que se desligue completamente a Matemática Secundária da verdadeira Matemática de nossa época. E o ensino de uma ciência completamente desligada do ambiente cultural específico da

época, só poderia ter valor utilitário. Mas este ainda é mais duvidoso. Uma porcentagem mínima da Matemática constante de nossos programas serve pra algum fim. Para uma pessoa que na vida diária use apenas as quatro operações, a matemática foi apenas o tormento de seus anos escolares, servindo-lhe pouco. Para outra, que abrace uma carreira em que a matemática seja indispensável, pouco do que estudou lhe será útil. Só um tabu tem mantido o prestígio da matemática nas Escolas. Mudança de programas visando melhor estruturação penso ser irrealizável, pelo menos no período de uma geração. Há toda uma escala de interesses em jogo, e, além disso, não conseguirá atualizar e preparar o professorado para nova orientação.

Julgo perfeitamente possível uma mudança, até certo ponto espontânea, dentro dos programas tradicionais. Seria conseguida mediante a intensificação dos Cursos de Férias como os que são promovidos pela CADES, com o concurso das Universidades. Tais cursos seriam organizados de modo a criar entre os alunos um ambiente de Matemática Moderna. Seriam apresentadas teorias avançadas e atualizadas, naturalmente com critério. Programas assim têm sido desenvolvidos pela “Association des Professeurs de Mathématiques l’Enseignement Public”, pela “Association for Teaching Aids in Mathematics” (Grã-Bretanha), pela “Société Belge des Professeurs de Mathématiques”, pelo “The National Council of Teachers of Mathematics” (USA), pelas diversas secções da Comissão Internacional para o Ensino da Matemática (na qual não figuramos).

Visar-se-ia apresentar aos professôres um panorama da Matemática Moderna, evidenciando como podemos relacioná-la com a Matemática dos Cursos Secundários, e em que medida esta pode ser influenciada por aquela, alcançando melhor rendimento e encaminhando maior numero de jovens para as carreiras científicas, o que é fundamental na nossa luta para escapar da condição de gigante subdesenvolvido.

Simultaneamente, procurar-se-ia reavivar nos professôres o gôsto e o entusiasmo pela matéria, que sabemos tende a desaparecer com algum tempo de magistério, em condições intelectualmente embrutecedoras, repetindo várias classes, num mesmo dia de às vêzes até 12 aulas, a mesma matéria de vários anos.

Soma-se a isso a falta de ambiente cultural e a falta de publicações específicas (normalmente os professores têm acesso apenas aos livros didáticos das Editôras que titia um corpo de popaganda eficiente).

Êste aspecto mereceu a seguinte apreciação de Henri Lebesgue: “É um problema difícil e sempre aberto saber como ajudar os professôres de matérias científicas do ensino médio a encontrar na ciência que êles estudaram e da qual ensinam os rudimentos, um alimento para seus pensamentos. Como con-

seguir que sua vida intelectual não se separe de seus afazeres profissionais, não se oponha a êles, e que então êles cumpram sua tarefa com mais alegria e orgulho e, portanto, com maior eficiência?”

Isto exigiria que os professôres se deslocassem de suas cidades para os centros onde se realizam os cursos, o que se poderia facilitar com a concessão de pequenas bôlsas para a sua manutenção. Além disso, a distribuição de livros editados pelo Ministério e excursões de equipes de professôres por cidades do interior, passando algumas horas em cada uma delas, pronunciando conferências e trocando pontos de vista e sentindo as dificuldades do corpo docente, procurando orientá-lo, teria excelentes resultados, como indica o sucesso dos cursos da CADES. Embora de realização irregular, seria crescente e com reais vantagens sôbre as classes experimentais, que a meu ver apresentam o grave inconveniente da seleção “a priori” dos alunos. A oportunidade de receber ensino moderno deve ser dada mais largamente, em regiões dirersas, e não só naquelas cujo alto padrão econômico possibilite a criação de classes experimentais. Note-se que as regiões menos desenvolvidas normalmente dão às carreiras de ciência pura muitos elementos, talvez em virtude da pouca oportunidade dada aos profissionais da indústria, em geral insipiente nessas regiões.

Introduzir o espírito da álgebra moderna nos atuais programas consegue-se com relativa facilidade, e seria passo decisivo para a atualização, indispensável, do nosso ensino.

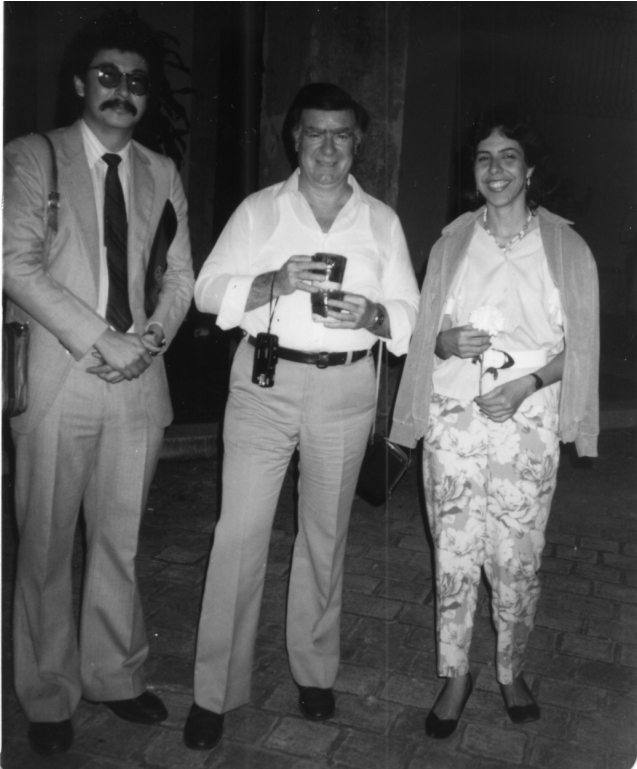
Quando se dá as propriedades dos números, é perfeitamente razoável que se faça uma esquematização seguindo os axiomas da estrutura a que pertence o conjunto estudado. E as propriedades significativas são aquelas que estão nesses axiomas.

Quando se passa de um tipo de número para outro, pode-se evidenciar o que se ganha do ponto de vista algébrico: propriedades, implícitas nos axiomas, e possibilidades de novas operações.

Estudando sistemas matemáticos aparentemente desligados, como números inteiros, polinômios e transformações de figuras no plano, que do ponto de vista algébrico são intimamente relacionados, não é razoável que se deixe de frisar êste aspecto.

Bem situar determinados capítulos, pela sua hierarquia estrutural, dentro de um esquema lógico, e não simplesmente abandonando a parte do programa para a qual não sobrou tempo.

Termino, citando uma frase de Alfred North Whitehead, da palestra “Mathematics and Liberal Education”, publicada no “Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the South Eastern Part of England”, vol. I, NerI (1912); “*Se o ensino da Matemática não for agora reavivado por um ar de realidade, não podemos esperar que ela sobreviva com um elemento importante na educação liberal do futuro.*”



VI CIAEM, 1985, Guadalajara, México. A. Ruiz, U. D'Ambrosio, y Vania Dos Santos.



VI CIAEM, 1985, Guadalajara, México. De izquierda a derecha: E. Sebastiani (Brasil), A. Ruiz (Costa Rica), U. D'Ambrosio (Brasil), I. Harding (Chile-Alemania), E. Lluís (México), G. Sánchez (España).



X CIAEM, Maldonado, 1999, Uruguay. E. de Faria y U. D'Ambrosio.



XII CIAEM, 2007, Querétaro, México. C. Vasco y U. D'Ambrosio.



U. D'Ambrosio y A. Ruiz, Canoas, Brasil, octubre 2010.