

La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con videos

Ángel Ruiz

Presidente, Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM.
Vicepresidente, International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
Director, Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas,
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
<http://angelruizz.com>
angelruizz@racsa.co.cr

Resumen

Se busca apuntalar el uso de videos en la investigación en Educación Matemática, por lo que se describen algunas de sus ventajas así como algunas de sus limitaciones. Se analizan tres estudios de videos sobre las lecciones en la enseñanza de la matemática: los dos primeros realizados dentro de las pruebas comparativas *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)* y el tercero: el *Learners Perspective Study (LPS)*, por un equipo de investigadores con una metodología más comprensiva desarrollada originalmente por David Clarke en Australia. Por medio de esos estudios se buscan detectar algunos elementos interesantes para la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Se establecen comparaciones y balances globales sobre el significado de estos estudios. Además, se incluye un apartado sobre las características particulares de la lección en Japón, la que ocupa un papel relevante en los estudios realizados. Las conclusiones apuntan a subrayar fortalezas, problemas y perspectivas de este tipo de estudios comparativos internacionales, en su relación con la labor de aula en matemáticas.

Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, aprendizaje de las matemáticas, estudios comparativos internacionales, lección de matemáticas, videos.

Abstract

It is intended to support the use of Video Technology in Mathematics Education Research, and for that reason advantages and limitations of this tools are described. Three studies of videos are analyzed about the lessons in the Teaching of Mathematics. The first 2 studies were

done within the *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)*, and the third one, the *Learners Perspective Study (LPS)*: by a team of researchers with a one more comprehensive methodology originally developed by David Clarke in Australia. By means of those studies we intend to detect some interesting elements for the practice of the Teaching of Mathematics. Global comparisons and reviews settle down on the significance of these studies. Additionally, a section about the characteristics of the Japanese Lesson is included, an issue which occupies an important place within these studies. The conclusions aim to emphasize strengths, problems and perspectives of this type of international comparative studies, in their close relation with the activity within the Mathematics classroom.

Key words

Teaching of Mathematics, Learning of Mathematics, International comparative studies, Lesson of Mathematics, Videos.

En los últimos 15 años se desarrollaron tres amplios estudios internacionales sobre las lecciones de matemáticas que usaron videos como principal apoyo para obtener su información de referencia: Primer estudio TIMSS 1995, Segundo estudio TIMSS 1999, y el Estudio *Learners' Perspective Study LPS*. Los primeros dos estudios guardan una estrecha relación, y el segundo complementa al primero. El tercero posee un enfoque totalmente distinto, e incluso crítico de los dos primeros. En este trabajo se van a analizar algunos de los elementos que aparecen en esos estudios.

1. El uso de videos

El uso de videos (películas) fue usado en estudios de carácter antropológico durante el siglo XX. Por ejemplo, informan Ulewicz & Beatty (2001): Margaret Mead y Gregory Bateson usaron cámaras fijas y en movimiento en Bali en los años 1936-1938, para estudiar comportamientos no verbales. Más adelante George y Louise Spindler realizaron estudios antropológicos en aulas dentro de algunos contextos culturales distintos: Schoenhausen, Alemania, y Roseville, Wisconsin, Estados Unidos –EUA- (Spindler & Spindler, 1992).

Tobin, Wu y Davidson (1989) usaron los videos para analizar significados culturales en la enseñanza preescolar en Japón, China y los EUA, aunque con el propósito de generar reflexión sobre las prácticas educativas distintas y la influencia de la cultura (de hecho, los videos apoyaron entrevistas realizadas por estos investigadores).



Figura 1: Foto de los antropólogos M. Mead y G. Bateson.

Si bien desde la tercera década del siglo pasado se ha introducido en investigaciones educativas el uso de videos, aunque esto fue realizado de una manera muy simple, no es sino hasta el Estudio de Videos TIMSS 1995 que se usó a fondo este importante recurso. Los estudios TIMSS 1995 y 1999, después de los primeros usos mencionados, fueron los más ambiciosos en lo que se refiere a la educación, y en particular en las matemáticas.

En un mundo cada vez más globalizado los estudios comparativos se han vuelto muy comunes, y aportan ventajas (así como plantean problemas distintos) para la comprensión de los procesos de enseñanza aprendizaje.

¿Ventajas de los videos? En los estudios sobre la práctica de aula que se han realizado ha predominado el uso de instrumentos que miden la percepción y las acciones de los protagonistas: cuestionarios, censos, grupos focales, etc. Estos instrumentos, sin embargo, son limitados en cuanto son fuentes muy indirectas de lo que sucede en un aula, lo que es algo efímero, no replicable. He aquí la relevancia de los videos: aportan una observación directa sobre lo que ha pasado en el aula, y revisable muchas veces.

Hiebert et al (2003) condensan muy bien los aportes generales de este tipo de estudios:

- Revelan las prácticas que uno tiene en un país con mayor claridad, por comparación con otras.
- Permiten descubrir nuevas alternativas.

- Estimulan la discusión sobre las escogencias que se pueden hacer dentro de un país.
- Profundizan la comprensión de la enseñanza por parte de los profesores.

Hay, sin embargo, muchos más elementos a favor del uso de videos:

- El estudio de diferentes estrategias de enseñanza con este grado de “visibilidad”, en distintos países, puede generar luz sobre sus posibles impactos en los aprendizajes.
- Posibilidad de múltiples reanálisis. Nuevas preguntas de investigación pueden contestarse con base en los videos existentes.
- Facilitan la colaboración entre investigadores con perspectivas distintas, que serían muy limitadas con otros métodos tradicionales.
- Los grandes avances modernos en la digitalización de videos y de extensas codificaciones y referencias permiten analizar múltiples situaciones de una manera efectiva y rápida. Lo que intensifica las posibilidades de mayor conocimiento.
- La misma codificación y sus análisis cuantitativos permiten observar detalles muy difíciles de apreciar con otro medios: por ejemplo, los tiempos dedicados a cada fase de la lección, o las interacciones entre estudiantes y profesores.
- Es posible la incorporación de otras fuentes o instrumentos como cuestionarios, entrevistas anteriores o posteriores a los videos, que permiten añadir aspectos culturales o contextuales.

Hiebert et al (2003) añaden:

- Los videos ofrecen la posibilidad de estudiar procesos complejos, llenos de múltiples detalles difíciles de captar por los mismos protagonistas en una forma simple (hay objetivos curriculares, acciones de varios protagonistas del aula, etc.).
- Los videos incrementan la confiabilidad en la comparaciones de lecciones en distintas circunstancias, especialmente separadas por miles de kilómetros: siempre se puede revisar una y otra vez una lección por parte de varios especialistas de distintos contextos para asegurar codificaciones homogéneas y consensuadas.
- Los videos permiten la codificación de perspectivas múltiples, que involucren a distintas personas y especialistas para obtener una visión más integrada y completa de la realidad que se estudia, lo que es usualmente muy difícil de captar por solo una persona.

- Los videos facilitan la integración de información cualitativa y cuantitativa, reenfocando y reconstruyendo el estudio de los mismos videos con ópticas distintas complementarias.
- Los videos facilitan la comunicación de resultados, pues los mismos expresan imágenes y representaciones explícitas o completas de fenómenos estudiados con una precisión o riqueza difíciles de obtener por otros medios.

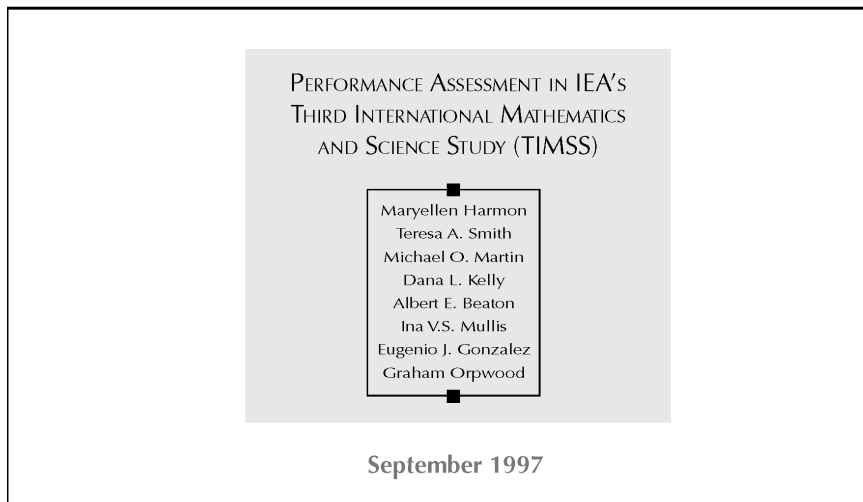
Lambert, citada por Ulewicz & Beatty (2001), consigna algunos usos educativos para los videos:

- Aprendizaje de una técnica específica de enseñanza.
- El uso de evidencia de que una técnica de enseñanza esté asociada a un aprendizaje.
- La exposición de nuevas ideas, inspiraciones o alternativas para el educador.
- La discusión y comprensión de las diferencias en la práctica de enseñanza, lo que puede permitir un lenguaje más preciso sobre la enseñanza que solo la caracterización de una práctica como buena o mala.
- Pueden ayudar al desarrollo profesional de los profesores, potenciando la enseñanza como una profesión basada en la práctica.

Hay, sin embargo, limitaciones y advertencias:

- ¿Cuáles son los tamaños óptimos de las “muestras”, para que las conclusiones tengan validez?
- ¿Cómo se asegura la credibilidad de los participantes en la investigación?
- ¿Es mejor incorporar (o no) otros medios complementarios a los videos mismos (cuestionarios antes y después, etc.)? Hiebert, por ejemplo, sostiene que con solo los videos y los subtítulos asociados se tiene suficiente información para el análisis.
- ¿Cuántos videos son necesarios para llegar a conclusiones sobre un determinado elemento?
- ¿Se requiere una muestra probabilística a nivel nacional para poder establecer una comparación internacional?
- Otros cuidados son necesarios: incluso, las decisiones de dónde colocar una cámara encierran premisas que a veces están ocultas, o son inconscientes. Esto se complica más cuando la investigación es internacional y emergen o participan diferencias culturales o nacionales evidentes.

International Association for the Evaluation of
Educational Achievement



TIMSS International Study Center
Boston College
Chestnut Hill, MA, USA

Figura 2: Imagen de un reporte general sobre el TIMSS 1995.

- También se pueden usar videos para subrayar prácticas exitosas en algunas latitudes. Como veremos, esto está implícito en las voluntades de algunos estudios. Sin embargo, se debe ser muy precavido puesto que se pueden pasar por alto diferencias contextuales o culturales relevantes, y no está claro que los videos sean suficiente prueba para demostrar una relación entre una práctica de enseñanza y resultados positivos en el aprendizaje (o que haya una correlación directa).

Los nuevos problemas refieren a muchos asuntos: la necesidad de lograr que los procedimientos en el manejo de las cámaras sea uniforme o estándar, las características y la validez de las muestras a seleccionar, la validez de la codificación de los elementos presentes en la situación, las fronteras de las imágenes que se obtienen (hasta dónde comunican la realidad, especialmente de muchas situaciones). Vayamos a las matemáticas.

2. Estudio de videos TIMSS 1995

El estudio TIMSS 1995 fue financiado por el gobierno de los EUA a través del *National Center for Education Statistics* y la *National Science Foundation* de ese país y organizado por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*.

2.1. Descripción general

Fue realizado en 1994 y 1995. De 41 países que participaron en el estudio TIMSS de ese año se escogieron Alemania, Japón y Estados Unidos para hacer ese estudio de videos. Se grabaron 100 lecciones completas en Alemania, 81 en Estados Unidos y 50 en Japón. Además de los videos se recogió material como copias de cuadernos de los estudiantes, hojas de trabajo y planeamiento de los educadores. También se les pidió a los educadores señalar los objetivos de la lección por medio de un cuestionario y decir si la lección que dieron era la usual, típica, para ellos.

Los aspectos enfocados con relevancia fueron:

- a) El entorno de trabajo. Es decir: número de estudiantes, aprendizaje por grupos o individual, acceso y uso de libros y materiales, interrupciones en el desarrollo de la lección. . .
- b) La participación de los estudiantes en la clase.
- c) Los métodos empleados por los educadores. Es decir: habilidades, resolución de problemas, el nivel de matemáticas, la coherencia interna, . . .
- d) La secuencia en las lecciones. O sea: la estructura de las lecciones, trabajo individual o de toda la clase, el papel de los maestros en los diferentes momentos, el discurso de la clase, las expectativas de desempeño. . .

¿Cómo se seleccionaron? Primero las escuelas, luego los profesores y finalmente las clases (Stigler y Hiebert, p. 19). Se tuvo cuidado en que la presencia de las cámaras no afectara el desempeño en casi todos los casos.

Una vez hechas las grabaciones se trataba de codificar lo que en ella aparecía mediante un trabajo muy meticuloso. Varios equipos de personas analizaron cuidadosamente cada uno de los videos. Los resultados de este estudio se pueden consignar en varias dimensiones. Para empezar nos vamos a concentrar en la estructura de las lecciones.

2.2. La estructura en las lecciones.

Un resultado importante según este estudio fue la determinación de lo que llamaron “guiones de la lección”, o incluso “patrones de la lección”, distintos

para cada uno de los países estudiados. Es decir, los investigadores concluyeron que había más cercanía entre las lecciones en cada país de lo que existía entre éstas y las de las otras naciones estudiadas. ¿Cuáles fueron estos guiones en lo que se refiere a la estructura de las lecciones? Se pueden sintetizar por medio de los siguientes diagramas:

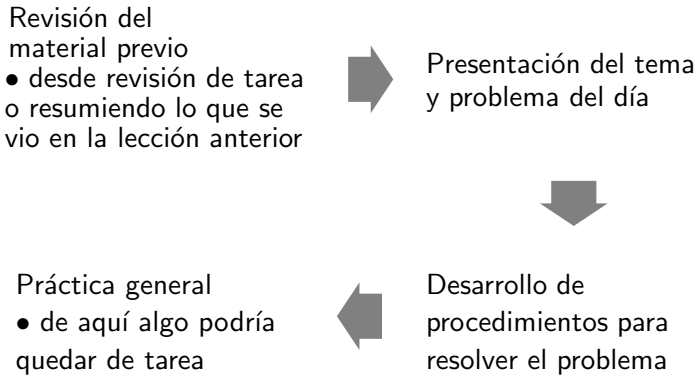


Diagrama 1: Guión de la lección en Alemania según TIMSS 1995.

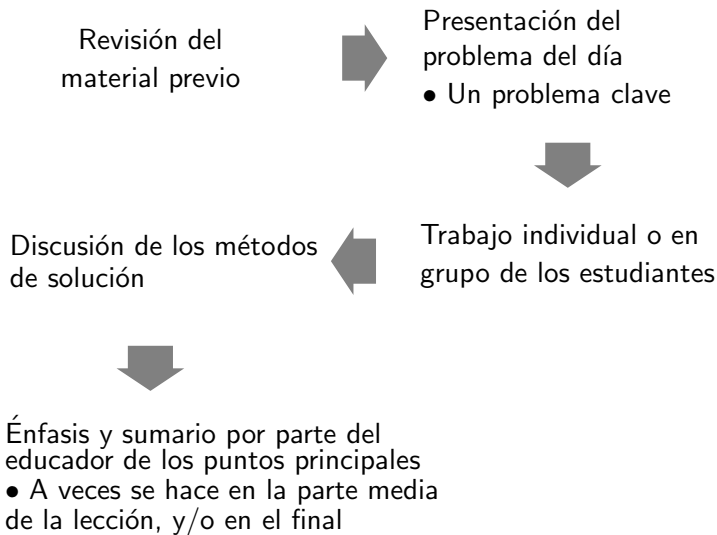


Diagrama 2: Guión de la lección en Japón según TIMSS 1995.

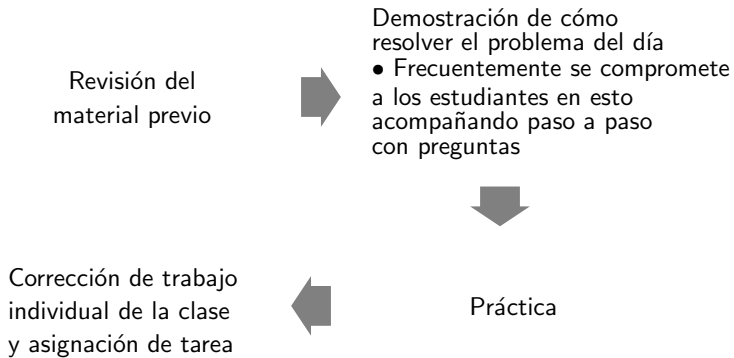


Diagrama 3: Guión de la lección en Estados Unidos según TIMSS 1995.

Los investigadores, si bien notaron la existencia de aspectos en común, también señalaron lugares distintos para cada acción.

... presentar un problema en Alemania establece el escenario para un desarrollo largo de procedimientos de solución, una actividad de toda la clase, guiada por el maestro. En Japón, la presentación de un problema es para desencadenar el trabajo de los estudiantes ya sea individual o en grupo, para desarrollar procedimientos de solución. En los Estados Unidos, la presentación del problema es el contexto para demostrar un procedimiento y establece el escenario para que los estudiantes practiquen el procedimiento. (Stigler y Hiebert (1999), p. 81)

¿Cuál es el origen de estos patrones? Stigler y Hiebert (1999) señalan:

... aunque los maestros aprenden algunas cosas sobre la enseñanza de su formación formal, la mayoría aprende de una participación cultural. Después de todo, los maestros pasan al menos 13 años en las aulas, como estudiantes, antes de que entren en programas de preparación de maestros (p. 83).

Es decir: la enseñanza es un asunto cultural, y por eso la cultura condiciona esa práctica.

Según Stigler y Hiebert (1999), creencias culturales son las que refuerzan los patrones que encontraron en esta investigación. Contraponiendo sus hallazgos en relación con EUA y Japón, para ellos, la clase típica en los EUA parte de la creencia que las matemáticas son un conjunto de procedimientos para resolver

problemas, aunque los maestros entiendan que las matemáticas están constituidas por más elementos (p. 89). Y además que: “el aprendizaje de términos y destrezas de práctica no son muy excitantes” y que, por eso mismo, deben introducirse “diversiones fuera de las matemáticas” (p. 89). Mientras tanto, en las lecciones japonesas aparecen otras creencias entre los profesores. Por ejemplo, las matemáticas son “un conjunto de relaciones entre conceptos, hechos y procedimientos” (p. 89), que las matemáticas “son intrínsecamente interesantes y que los estudiantes estarán interesados en explorarlas con el desarrollo de nuevos métodos para la resolución de problemas” (p. 90). Esto lo confirmaron con un cuestionario que pasaron a los maestros sobre los objetivos de la lección.

Las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas condicionan las ideas sobre su enseñanza. Procedimientos son el corazón en los EUA: se trata de generar las destrezas asociadas, con mucha práctica bien realizada (paso a paso) de los procedimientos (Stigler y Hiebert, 1999). Hay poco lugar para valorar, por ejemplo, el sentido o utilidad del error. Para los japoneses “pelear” con los problemas para resolverlos y luego discutir las posibles vías de solución es clave (p. 91).

De igual manera, los profesores en los EUA asumen que deben proporcionar la información suficiente a los estudiantes para completar sus tareas, al detalle y de la misma forma como se plantea en los ejercicios de práctica: “Los maestros actúan como si la confusión y la frustración son signos de que ellos no han hecho bien su trabajo” (p. 92). En Japón los educadores dejan que los estudiantes se enfrenten a los problemas, y “difícilmente mostrarán cómo resolver un problema en la mitad de la lección”.

Los maestros en los EUA ven como un problema las diferencias individuales de los estudiantes, pues obligan a colocar diferentes niveles de desempeño individual y adaptar diferentes instrucciones para distintos niveles; mientras, en Japón esto se aprecia como “una característica natural del grupo”, y puede favorecer la participación de más visiones o métodos o discusiones en la resolución colectiva de problemas y, además, permitir una “preparación más completa de la lección” por parte del maestro (p. 94).

Finalmente, para los japoneses la clase es casi “sagrada”: como si fueran “conferencias universitarias” o “servicios religiosos” (p. 95). Se planean meticulosamente, con su introducción, desarrollo medio y conclusión. Deben ser coherentes. Y “no tener interrupciones”. Stigler y Hiebert (1999) sintetizan:

En este sistema de creencias, las matemáticas se reconstruyen con relaciones entre ideas, hechos y procedimientos. Para entender esas relaciones, los estudiantes deben analizar problemas mate-

máticos y diferentes métodos que pueden usarse para resolverlos. Ellos deben enfrentarse a los problemas solos para lograr darle sentido a discusiones posteriores sobre cómo resolverlos y para entender el resumen final hecho por el maestro. Entonces, la lección debe decir una historia estrechamente conectada y coherente: el maestro debe construir un record visible de las piezas que ellos van develando para que las conexiones entre ellas se puedan trazar: y la lección no puede ponerse de lado o ser quebrada por interrupciones (p. 96).

En los EUA hay otra situación: la lección se desarrolla por módulos, con pocas conexiones entre ellos, y donde los procedimientos pueden realizarse en cualquier momento, ya sea en esa lección, o en otras. Aunque las interrupciones pueden resultar molestas, éstas no rompen la lección porque ésta no se concibe como un todo estructurado (p. 96).

Las conclusiones de estos investigadores sobre el papel de las creencias en el desarrollo de la lección y del aprendizaje de las matemáticas, se pueden yuxtaponer con las de Schoenfeld en cuanto a la resolución de problemas. Para los estudiantes de los EUA, mayoritariamente, un problema matemático debe poder resolverse en 5 o 10 minutos, y de lo contrario no se puede resolver o no tiene sentido. Y el enfrascamiento en problemas que no se resuelven no deja ninguna enseñanza. Para los estudiantes japoneses, no hay tiempos definidos rígidamente para resolver un problema, y aun si no se resuelve el problema se logra un aprendizaje. Para los estudiantes en EUA, el éxito en la resolución de problemas depende mucho de las habilidades innatas de los individuos, mientras que para los japoneses el trabajo y la persistencia provocan ese éxito.

2.3. Contrastación de estrategias de enseñanza según TIMSS 1995

Con base en cuadros e información del primer estudio TIMSS que mencionamos, vamos, en primer lugar, a consignar algunos asuntos centrales que nos parecen relevantes:

- a) Coherencia e integración cognoscitivas: la relación explícita sobre los temas desarrollados ya sea en la misma lección o en otras lecciones.
- b) El enfoque hacia temas matemáticos importantes: el porcentaje de lecciones con calidad baja, media o alta de sus contenidos matemáticos.
- c) Aprendizaje con comprensión: el peso de las actividades rutinarias, de aplicación o novedosas.
- d) Porcentaje de conceptos enunciados en la lección o conceptos desarrollados plenamente.
- e) Participación de los estudiantes con métodos de solución alternativos.

Antes de proseguir, sin embargo, conviene mencionar una interesante diferencia de partida en ese estudio: el número de problemas tratados en cada uno de los tres países fue distinto. Japón mostró el menor número de problemas mientras que Estados Unidos el mayor (Neubrand, J., 2006, p. 296).

a. Coherencia e integración cognoscitivas: la relación explícita sobre los temas desarrollados ya sea en la misma lección o en otras lecciones. Este asunto refiere al cierre o a la conclusión cognoscitiva que se realiza después de recorrer diferentes aspectos específicos en relación con los contenidos, conceptos o métodos matemáticos estudiados. Este cierre cognoscitivo se puede hacer en la misma lección, en otras lecciones posteriores o no hacerse. Según este análisis comparativo internacional, entre Alemania, Japón y los Estados Unidos se reveló que hay diferencias significativas entre estos tres países desarrollados.

En Japón: en más del 90 % de las lecciones el cierre se realizaría ya sea en la lección inmediata o en otra, aunque en general más en la misma lección. En Alemania y los Estados Unidos la situación es diferente: el cierre cognoscitivo o pedagógico se realiza en mucha menor proporción que en Japón y cuando se hace se hace en lecciones posteriores. Véase el gráfico 1.

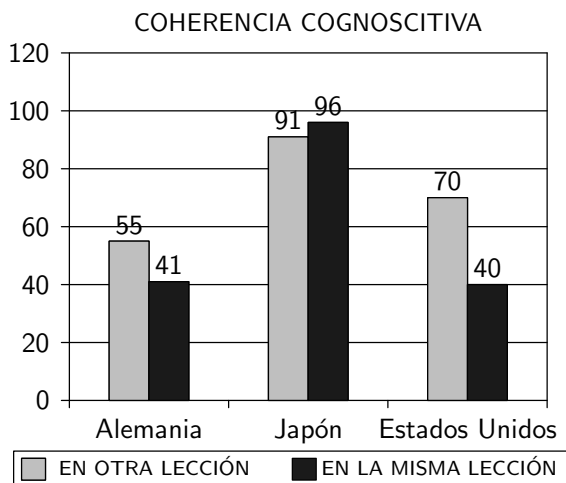


Gráfico 1: Coherencia cognoscitiva

b. El enfoque hacia temas matemáticos importantes: el porcentaje de lecciones con calidad baja, media o alta de sus contenidos matemáticos. Este estudio sostiene que en Japón predominarían las clases con calidad media, seguidos por aquellas de calidad alta, como en pocos contenidos de calidad baja. En Alemania los contenidos medios predominan pero con porcentajes muy

similares a los de calidad alta y baja. En los Estados Unidos los contenidos matemáticos de baja calidad predominarían notablemente, los de calidad alta serían insignificantes y un porcentaje de calidad media apenas se compara a los de calidad baja que se desarrollan en Japón.

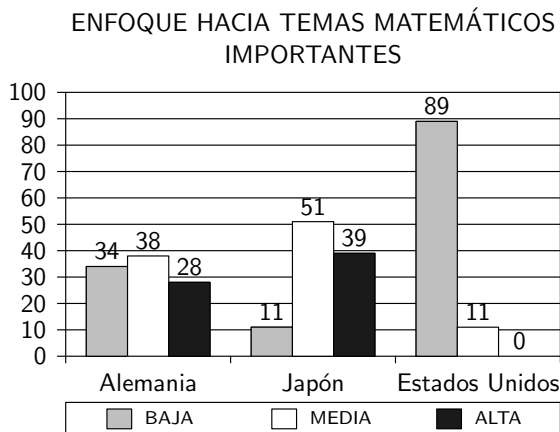


Gráfico 2: Enfoque hacia temas matemáticos importantes

Estos investigadores al consignar estos datos apuntaron un importante debate, que, adelantado nuestro criterio, apunta a que un énfasis en las dimensiones de menor nivel matemático debilita la formación en la naturaleza de las matemáticas, sus conceptos y métodos abstractos, así como restringe competencias matemáticas de mayor pertinencia.

c. Aprendizaje con comprensión: el peso de las actividades rutinarias, de aplicación o novedosas. Un tercer elemento que aportó el estudio es acerca del aprendizaje con comprensión: el porcentaje de trabajo en tipos de actividades ya sea rutinarias (con énfasis en procedimientos), de nuevas soluciones, y aplicaciones. En Japón, aquellas actividades que involucran nuevas soluciones y mayor pensamiento ocuparon la mayor parte, mientras que un poco más del 15 % se destinó a aplicaciones. La práctica de procesamiento rutinario tiene un porcentaje similar a aquella dedicada a las nuevas soluciones, alrededor del 40 %. En el caso de Alemania la práctica de procesamiento rutinario sobrepasa el 80 % y en los Estados Unidos el 90 %. En estos dos últimos países el tiempo dedicado a nuevas soluciones y aplicaciones fue muy bajo.

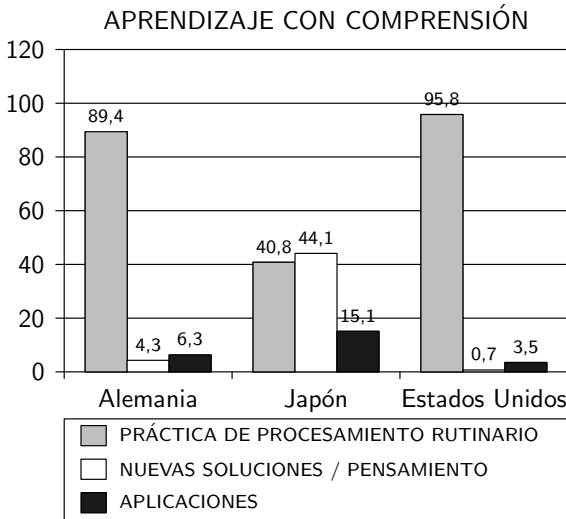


Gráfico 3: Aprendizaje con comprensión

Cuando se enfatiza lo rutinario, es muy probable que se dedique mucha atención a procedimientos más que a la comprensión y dominio de conceptos. Por eso, los resultados son coherentes con los otros aspectos que hemos comentado.

Es interesante señalar que en Japón habría diferencias en cuanto a la disciplina matemática considerada. Mientras en el caso del álgebra predominaron los énfasis en procedimientos (un 71 %) en geometría solo un 4 % es procedimental. El Alemania se observaron los problemas algorítmicos en un 91 % en álgebra y un 85 % en geometría (Neubrand, 2006, p. 300). En los EUA 83 % de los problemas de álgebra y 75 % de los de geometría fueron de ese tipo (Neubrand, 2006, p. 300). La conclusión apunta a que, en este estudio, el mayor énfasis que se encontró en tareas conceptuales en el caso de Japón fue debido a la forma como abordan la geometría.

d. Porcentaje de conceptos enunciados en la lección o conceptos desarrollados plenamente. Como se puede ver en la gráfica, en Japón 83 % de los conceptos sería desarrollado plenamente, casi igual que en Alemania (76,9 %).

DESARROLLO DE CONCEPTOS

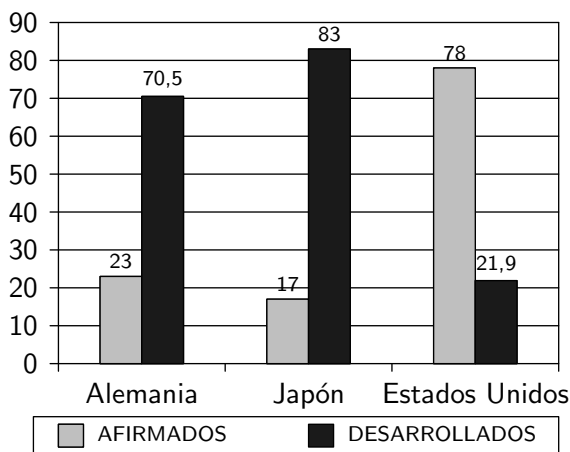


Gráfico 4: Desarrollo de conceptos

Esto es significativamente diferente en los Estados Unidos donde sólo un 21,9 % de los conceptos -se consigna- fueron desarrollados plenamente.

Otro de los hallazgos, que está relacionado con la anterior consideración, es relativo a la cantidad de contenidos en cada lección. Para Stigler y Hiebert (1999), las lecciones en Estados Unidos contienen “significativamente más tópicos que las lecciones japonesas, y significativamente más cambios de tópico a tópico que las lecciones alemanas y japonesas. Esto significa que los materiales curriculares en los Estados Unidos están tratando de cubrir más terreno que los materiales en otros países pero, como lo encontramos en la sección previa, están cubriéndolos con menor profundidad” (p. 62). Lo que esto invoca es un asunto que consideramos como un hallazgo para el aprendizaje efectivo: la conveniencia de establecer mayor profundidad que amplitud en el currículo para favorecer el aprendizaje (Ruiz, 2010).

e. Participación de los estudiantes con métodos de solución alternativos.

Como se puede apreciar en los gráficos siguientes, uno de los rasgos particulares de la lección japonesa es la participación estudiantil en la lección. Hay diferencias significativas entre Estados Unidos y Japón. El primer gráfico refiere al porcentaje de lecciones que incluyen la presentación por parte de los estudiantes de métodos alternativos. El segundo refiere al promedio de veces que participan los estudiantes con métodos alternativos en una lección.

**PORCENTAJE PARTICIPACIÓN
EDUCADORES-ESTUDIANTES EN LAS LECCIONES**

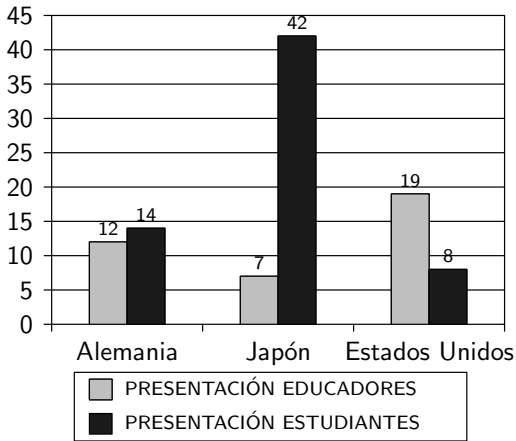


Gráfico 5: Porcentaje de participación con métodos alternativos de educadores estudiantes en las lecciones.

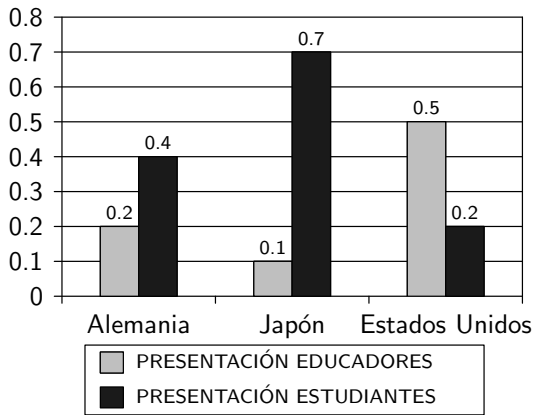


Gráfico 6: Promedio de presentación con métodos alternativos de educadores estudiantes en una lección

Un comentario de Stigler y Hiebert (1999):

Aunque el nivel de matemáticas era más alto en Alemania, en ambos países el educador es quien hace el trabajo mayor. En Japón, lo que parece que se da es lo inverso. La lección típica japonesa convoca más a los estudiantes a hacer el trabajo matemático. (p. 66).

Es otro tema relevante en la educación: aprendizajes activos solo se pueden desarrollar si el grueso de la actividad de aula logra la participación estudiantil.

2.4. Reanálisis del TIMSS 1995

Se han reanalizado los videos del TIMSS 1995 para poder extraer más conclusiones. Neubrand (2006), por ejemplo, informa que una de las diferencias o nuevas percepciones que el reanálisis ha señalado, en relación con Stigler y Hiebert (1999), reside en una distinción relevante entre álgebra y geometría. En los resultados sobre Japón esto posee mucha influencia por la forma como se enseña geometría en ese país. El reanálisis sostiene que se debe diferenciar con mayor precisión el tema de problemas propuestos y aquellos desarrollados en la clase (p. 295).

¿Cómo se hizo este reanálisis que consigna Neubrand? Se tomaron 22 videos de las lecciones del TIMSS 1995 de cada país, de álgebra y geometría y donde el trabajo individual era “más o menos extendido”. Se cambiaron y re-codificaron “las secuencias de problemas en las lecciones y la relación entre los problemas, creando una muestra de 1153 problemas” (p. 295). Se usó un instrumento de clasificación de problemas desarrollado por Neubrand (2002).

Las principales conclusiones del reanálisis se condensan en 3 dimensiones:

- Número de problemas y su implementación en las lecciones
- Tipos de problemas, según actividades cognitivas requeridas
- Problemas trabajados o compartidos con toda la clase.

a. Número de problemas y su implementación en las lecciones. El estudio reafirmó que el número de problemas propuestos en una lección era muy diferente entre EUA, Alemania y Japón. En este último se obtenía el menor número. No obstante se clasificaron los problemas en 5 tipos:

1. Problemas trabajados individualmente por estudiantes pero no compartidos en el trabajo general de la clase.
2. Problemas propuestos o solo revisados en trabajo general de la clase.
3. Problemas trabajados y resueltos en forma individual por los estudiantes y compartidos en el trabajo general de la clase.
4. Problemas trabajados y resueltos en ambos trabajo individual y en la clase general.
5. Problemas trabajados, resueltos y compartidos completamente en la clase general.

Un detalle interesante del reanálisis: las diferencias que aparecen entre los países en cuanto a los problemas resueltos son debidas a las categorías 1 y 2.

Tanto en álgebra como en geometría considerados conjuntamente, los problemas relevantes (los que impactan más la lección) son los que pertenecen a las tres últimas categorías. Y aquí los números son similares: aproximadamente 3 en Alemania y Japón y 4 en los EUA; no obstante, mientras que en Japón estos problemas incluyen trabajo individual, casi nunca sucede eso en los EUA, y en Alemania ocurren ambos casos (Neubrand, 2006, p. 297).

b. Tipos de problemas, según actividades cognitivas requeridas. Neubrand (2002) establece 3 tipos de categorías para clasificar las tareas matemáticas presentes en una lección:

1. “Carácter del conocimiento”. Con esto se refiere a si el conocimiento que se invoca es procedimental o es conceptual, o una combinación de ambos.
2. “Complejidad del conocimiento”. Es decir, si se trata de un proceso de modelización o resolución de problemas. Entonces: si convoca una o varias unidades de conocimiento explícitamente en la resolución de la tarea o si son implícitas y deben ser extraídas por el resolutor desde su base original de conocimiento.
3. “Aplicación”. Si hay aplicaciones externas o internas a las matemáticas o no hay ninguna aplicación del todo (p. 298)

Los tres aspectos pueden dar origen a: tareas procedimentales y explícitas, o avanzadas.

Las conclusiones son interesantes: de nuevo, en el caso de Japón se observa una diferencia si se refiere al álgebra o a la geometría. En el primer caso predomina con un 71 % lo procedimental, sin modelización. Mientras que en la geometría se da un predominio de problemas conceptuales con aplicaciones internas a las matemáticas. Solo un 4 % son tareas procedimentales y explícitas.

Según Neubrand (2006), en el caso de Alemania predominan tareas procedimentales y explícitas tanto en el álgebra (90 %) como en la geometría (85 %). En los EUA: igual que en Alemania predominan mucho las tareas procedimentales y explícitas tanto en álgebra (83 %) como en geometría (75 %).

c. Problemas trabajados o compartidos con toda la clase. Neubrand (2006) resume las conclusiones: en los EUA la mayoría de los problemas trabajados totalmente o compartidos frente a toda la clase son tareas procedimentales y explícitas tanto en geometría como en álgebra. Entonces: “la lección en los EUA se dedica mayoritariamente a problemas que requieren pensamiento procedimental, sin modelización esperada” (Neubrand, 2006). Pero además: “los problemas avanzados solo se proponen en el trabajo individual de estudiantes y no se comparten frente al conjunto de la clase” (Neubrand, 2006). En Alemania hay algunas diferencias porque mientras que en la parte de álgebra dominan

los ejercicios de tipo procedimental y explícitos, en geometría se dedica la mitad a cada tipo de problema; es decir: un 50 % a procedimentales y otro 50 % a conceptuales y de modelización. En Japón: en álgebra predominan los procedimentales, aunque en una proporción menor que en EUA y Alemania. Lo interesante es que en geometría se resuelven problemas complejos en su vasta mayoría: en el trabajo individual los estudiantes deben enfrentar problemas complejos con aplicaciones dentro de las matemáticas y en el trabajo frente al conjunto de la clase se resuelve más de un 80 % de problemas complejos que se han planteado tanto en el trabajo individual como para el conjunto de la clase (Neubrand, 2006, 3001). Cabe mencionar que en la parte de álgebra los problemas más complejos se plantean también en el trabajo individual.

La conclusión más interesante a la que llega Neubrand (2006) es el lugar que juega la geometría en el caso japonés: presencia de pocos problemas procedimentales. Esto precisa las observaciones de Stigler y Hiebert (1999), en relación con la lección japonesa: el predominio de métodos de razonamiento más matemático en Japón obedece en gran medida a la manera como abordan la geometría (p. 303).

3. Estudio de videos TIMSS 1999

Un nuevo estudio a través de videos se hizo en relación con el TIMSS-R (*TIMSS Repeat*) de 1999, con un análisis similar al del año 1994-1995 (siempre con estudiantes de octavo nivel). Este, en conjunción con la International Association of the Evaluation of Education Achievement (IEA), fue conducido por el National Center for Education Statistics, del U.S. Department of Education, bajo un contrato con el LessonLab Research Institute de Santa Monica, California. El estudio de videos TIMSS 1999 se completó en dos fases separadas: la parte de matemáticas fue completada en marzo del 2003, y la de ciencias en abril del 2006. Los resultados fueron condensados en el documento *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMMS 1999 Video Study*, publicado en el 2003.

3.1. Descripción general

Uno de los objetivos de este nuevo estudio fue el saber si la organización de la lección y las tareas matemáticas en países con rendimiento alto en pruebas comparativas internacionales, como TIMSS, eran similares a lo que sucedía en Japón. La motivación original arrancaba de una percepción sobre los bajos rendimientos (relativamente) de los EUA en la prueba TIMSS 1995 (Hiebert et al, 2003, p. 9). Los países escogidos para el estudio tuvieron todos mejores resultados en esa prueba que los EUA.

Esta vez fueron analizados datos de 7 países: Australia, República Checa, Hong Kong, Japón, Holanda, Suiza y los EUA. En el caso de Japón, se usaron los videos que fueron recolectados en el estudio de 1995, para hacer las comparaciones: 638 lecciones de octavo año fueron recolectadas. Y los asuntos analizados fueron muy similares a los del estudio de 1995: la estructura de la lección, tiempos destinados al contenido, tareas, el flujo de la información en la lección, etc. (Neubrand, 2006).

Tabla 1
Países participantes en el Estudio de Videos TIMSS 1999. Rendimiento en TIMSS 1995 y TIMSS 1999

País	TIMSS 1995, puntuación en matemáticas		TIMSS 1999, puntuación en matemáticas
	Promedio	Error estándar	Promedio
Australia	519	3,8	525
República Checa	546	4,5	520
Hong Kong (SAR)	569	6,1	582
Japón	581	1,6	579
Holanda	529	6,1	540
Suiza	534	2,7	-
Estados Unidos	492	4,7	502
Promedio internacional	-	-	487

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003).

Nótese la gran distancia en la puntuación entre EUA y Japón o Hong Kong.

Otro detalle interesante de tomar en cuenta es la cantidad de horas destinadas a las matemáticas en cada uno de estos países, tanto por semana como por año.

Tabla 2
Tiempo medio destinado a trabajo matemático por semana y por año en el octavo grado, por país, 1999.

País	Tiempo medio estimado a trabajo matemático por semana (en minutos)	Tiempo medio estimado a trabajo matemático por año (en horas)
Australia	174	113
República Checa	179	90
Hong Kong (SAR)	175	105
Japón	200	116
Holanda	127	84
Estados Unidos	179	107

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003).

Japón superaba a todos los países en ambos tiempos consignados en ese año. La distancia entre Japón y Holanda fue la mayor.

Un elemento distinto al TIMSS 1995 en este nuevo estudio fue el énfasis dado a las prácticas instruccionales dirigidas directamente a las asignaciones de trabajo de aula a realizar por los estudiantes. Se puede afirmar que “se consideraron las asignaciones de trabajo de aula como las unidades que creaban el proceso instruccional” (Neubrand, 2006).

Pare empezar, un dato que suministran Hiebert et al (2003) concierne al tiempo destinado al trabajo independiente de los alumnos en un solo problema.

Tabla 3
Tiempo medio destinado a un problema independiente en la lección en el octavo grado, por país, 1999

País	Tiempo medio estimado a un problema (en minutos)
Australia	3
República Checa	4
Hong Kong (SAR)	4
Japón	15
Holanda	2
Suiza	4
Estados Unidos	5

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003).

De nuevo Japón, ofreció los mayores tiempos al trabajo con un solo problema. Esto pareciera indicar que se concentrarían en pocos problemas, a diferencia de los otros países donde el tiempo medio es similar.

Este asunto del número de problemas desarrollados en una lección es relevante para estudios comparativos. Por ejemplo, como reportan Wang & Murphy (2004): ya en 1990, Stigler y Perry comparando clase de quinto grado en Taipei y en Chicago encontraron que, después de segmentar la lección en intervalos de 5 minutos, 55 % de todos los segmentos en Taipei se enfocaron en un tópico comparado con un 17 % en Chicago. Más aun, otros investigadores encontraron que los maestros en China tendían a dedicar 40 minutos de su lección a la solución de solo un problema matemático, con la presencia de varias caminos de solución. Esto ya lo ha señalado Ma (1999): los maestros chinos estimulan soluciones múltiples de problemas propuestos.

Una diferencia de estos países con Japón es el porcentaje de lecciones en las cuales se asignan tareas para la casa. Véase la tabla 4.

Tabla 4
Porcentaje de las lecciones en la lección en el octavo grado en las que se asigna tarea para la casa, por país, 1999

País	Porcentaje
Australia	62
República Checa	78
Hong Kong (SAR)	69
Japón	36
Holanda	71
Suiza	61
Estados Unidos	57

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003), p. 57.

¿Obedecerá esto al mayor tiempo que se invierte por semana y por año en matemáticas en Japón? ¿A una estrategia pedagógica específica en este país?

Al analizar la presencia de demostraciones en las lecciones de matemáticas en estos países se encontró de nuevo otra diferencia con Japón.

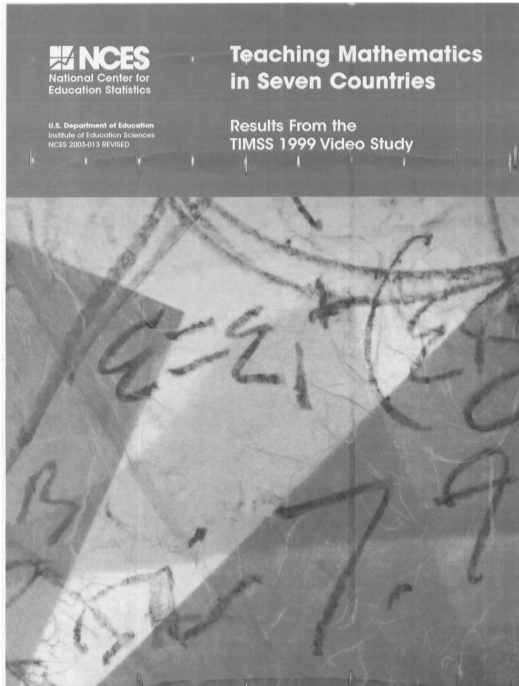


Figura 3: Portada del informe del TIMSS 1999 sobre el estudio de videos.

Tabla 5
Demostraciones en las lecciones, por país, 1999

País	Porcentaje medio de problemas en la lección que incluyeron demostraciones	Porcentaje medio de lecciones que incluyeron al menos una demostración	Porcentaje medio de lecciones que incluyeron demostraciones en las lecciones de geometría plana
Australia			
República Checa	1	5	4
Hong Kong (SAR)	2	12	5
Japón	26	39	35
Holanda			
Suiza	3	11	
Estados Unidos			

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003), pp. 74-75.

Si se analiza la presencia de las demostraciones en las columnas 2 y 3 se observan otras diferencias de Japón con los otros países. Sin embargo, debido a que la muestra en Japón involucró más geometría, que exige más participación de argumentación y prueba, se analizó el subconjunto de lecciones destinadas solo a geometría plana, lo que se consigna en la columna 4 de esa misma tabla. Los datos muestran, de nuevo, la mayor presencia de demostraciones matemáticas. No obstante, Hiebert et al (2003) hacen un llamado a manejar con precaución esos datos, por lo pequeño de la muestra.

Otro asunto interesante es la conexión con problemas de la vida real o no de los problemas analizados en las aulas de estos países.

Tabla 6
Porcentajes promedio de problemas que se dieron con el uso de conexiones a la vida real, o solo usando lenguaje o símbolos matemáticos, por país, 1999

País	Con conexiones a la vida real	Solo lenguaje y símbolos matemáticos
Australia	27	72
República Checa	15	81
Hong Kong (SAR)	15	83
Japón	9	89
Holanda	42	40
Suiza	25	71
Estados Unidos	22	69

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003), p. 85.

Japón exhibe el menor porcentaje en problemas conectados con la vida real, y Holanda el mayor. El resto oscila entre 15 y 22 por ciento. La mayoría de esta conexiones fueron hechas por los profesores al principio de la lección.

¿Cuál es la presencia de métodos alternativos para resolver los problemas del aula? La siguiente tabla nos lo indica.

Tabla 7
Porcentajes promedio de problemas con más de una solución, por país, 1999

País	Porcentajes promedio de problemas por lección con más de una solución	Porcentajes promedio de lecciones con al menos un problema en el cual se presentó más de una solución
Australia	2	25
República Checa	2	16
Hong Kong (SAR)	4	23
Japón	17	42
Holanda	5	30
Suiza	4	24
Estados Unidos	5	37

Nota: Tomado de Hiebert et al (2003), p. 94.

De nuevo, Japón establece una diferencia.

Vamos ahora a analizar 4 situaciones adicionales, siguiendo la clasificación de Neubrand (2006):

- Problemas propuestos y declarados.
- Procesos matemáticos sugeridos por problemas declarados.
- Procesos matemáticos usados al resolver problemas.
- Problemas: de declarados a resueltos.

a. Problemas propuestos y declarados. En el reanálisis de los videos del año 1995, en Japón se observó que la mitad de subproblemas, asociados a asignaciones de trabajo o problemas principales de naturaleza procedimental, activaban conocimiento conceptual (Neubrand, 2006). Lo cual evidencia la necesidad de distinguir entre problemas “propuestos” y “resueltos” (pues en el proceso de resolución se puede cambiar el sentido, procedimental o conceptual del problema). Los términos se deben a Smith (2000). Esto lo observaron también Hiebert & Handa (2004) en el caso de Hong Kong.

b. Procesos matemáticos sugeridos por problemas declarados. El nuevo estudio de 1999 distinguió varios procesos cognitivos posibles de implicar en los problemas declarados:

- A1: Provocan el uso de procedimientos.
- A2: Invocan convenciones o ejemplos de conceptos.
- A3: Provocan conexiones o relaciones entre ideas, hechos y procedimientos matemáticos.

Se observó entonces: "... el predominio del A1 en todos los países excepto en el caso de Japón. Y además este último presentó el número más grande de problemas propuestos y declarados de A3, seguido de Holanda" (Neubrand, 2006). Los resultados se condensan en la gráfica.

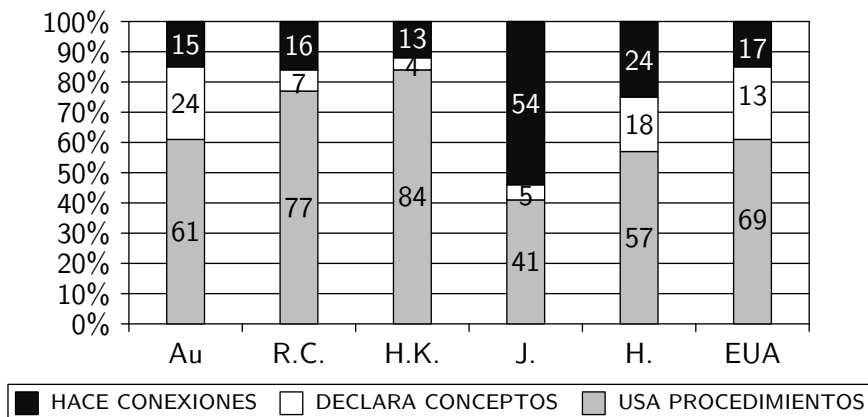


Gráfico 7: Porcentaje de problemas declarados por país. Au. Australia, R.C. República Checa, H.K. Hong Kong, J. Japón, H. Holanda, EUA. Estados Unidos de América. Fuente: Hiebert et al (2003).

En las comparaciones se debe tomar en cuenta que el número de problemas de geometría planteados en el caso de Japón eran más que en los otros países. Como hay más invocación de conocimiento conceptual en geometría, se concluye que esa es una posible explicación en estos países debido a la presencia de un menor número de tareas conceptuales en los países distintos de Japón.

Neubrand (2006) concluye:

... uno puede sugerir que favorecer las tareas que “provocan conexiones” parece ser una característica de los países con mejor desempeño y no una característica que diferencie los países del Este de los del Oeste. (...) la interpretación más probable es que entre los países de mayores logros hay caminos diferentes pero característicos para enseñar matemáticas, donde al menos se da un alto porcentaje de problemas del tipo “provocan conexiones” en algunos campos de las materias (p. 309).

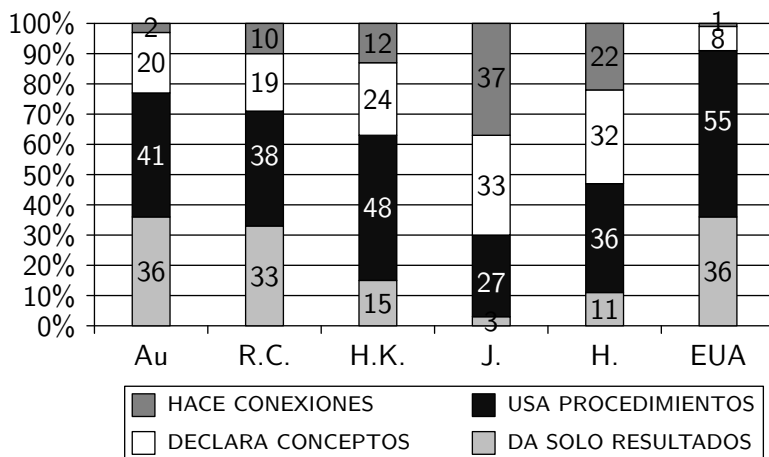


Gráfico 8: Porcentaje de problemas resueltos, por país. Au. Australia, R.C. República Checa, H.K. Hong Kong, J. Japón, H. Holanda, EUA. Estados Unidos de América. Fuente: Hiebert et al (2003).

c. Procesos matemáticos usados al resolver problemas. Los problemas que realmente impactan una clase son aquellos trabajados y resueltos frente al conjunto de la clase. Para Hiebert et al (2003) los problemas resueltos se pueden colocar en 4 categorías:

- B1: Problemas en los que solo se da la respuesta.
- B2: Problemas resueltos a través de un procedimiento algorítmico (los pasos a seguir, no los conceptos involucrados).
- B3: Problemas en los que se mencionan las propiedades o definiciones que se usan sin dar argumentaciones matemáticas (las razones de su uso, por ejemplo).
- B4: Problemas que hacen conexiones explícitas con las relaciones y argumentos matemáticos al resolver los problemas.

Los resultados usando esas categorías se consignan en el gráfico 8.

Los problemas del tipo B1 tuvieron porcentajes elevados solo en República Checa, Australia y los EUA. Un poco menos en Hong Kong y Holanda. Y solo un 3% en el caso de Japón (Neubrand, 2006). Con más problemas tipo B4 aparece Japón y luego Holanda.

Una observación que consigna Neubrand (2006): los EUA y Australia prácticamente no resolvieron problemas del tipo B4.

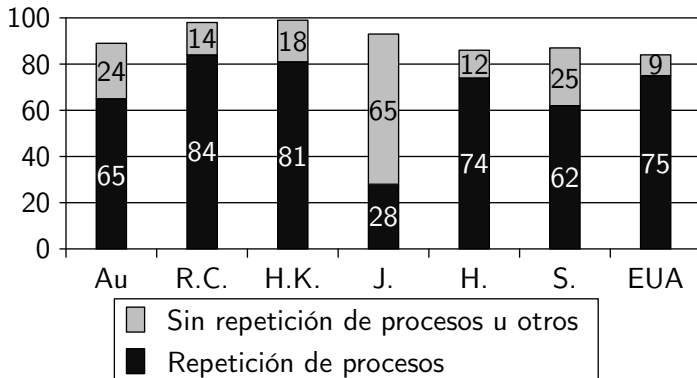


Gráfico 9: Porcentaje promedio de tiempo privado por lección dedicado a repetir procedimientos. Au. Australia, R.C. República Checa, H.K. Hong Kong, J. Japón, H. Holanda, EUA. Estados Unidos de América, S. Suiza. Fuente: Hiebert et al (2003).

d. Problemas: de declarados a resueltos. Hubo problemas que, al proponerlos, aparecían como de tipo A1, pero en su resolución se convirtieron en A3: un 22 % de los problemas en Japón (Neubrand, 2006). Esto también se dio en Hong Kong y en Holanda. No en Australia ni en los EUA.

¿Qué pasó con los problemas inicialmente propuestos de tipo A3 a la hora de resolverlos? En Hong Kong, República Checa, Japón y Holanda preservaron su carácter, pero no en los EUA, y en parte en Australia (Neubrand, 2006).

Otro asunto: ¿qué tipo de problemas predomina en el trabajo individual o de pequeños grupos en el aula? Solo en el caso de Japón los estudiantes se vieron confrontados a problemas avanzados de resolución de problemas, y conceptualmente complejos. En el resto de países predominaron procedimientos repetitivos.

Los resultados del estudio de videos TIMSS 1999 son compatibles con los del año 1995. Consignan, según Neubrand (2006), al menos dos importantes asuntos:

- La unicidad de la lección japonesa en cuanto a sus métodos de enseñanza de las matemáticas.
- Una perspectiva en los países de alto rendimiento hacia la inclusión de problemas que provocan conexiones de ideas, métodos y procedimientos matemáticos.

Mientras que en el Estudio de Videos TIMSS 1995 sus coordinadores parecían sacar la lección que lo que había que copiar era la lección de Japón debido a

su performance en las pruebas TIMSS 1995, en el nuevo estudio, Hiebert et al (2003), que consignan sus hallazgos, expresan que no se puede sacar una lección similar, puesto que todos estos países de alto rendimiento en esas pruebas mostraron una gran diversidad de diferencias en sus formas de enseñanza (p. 14).

Un buen ejemplo de estas diferencias es el que existe entre Japón y Hong Kong.

Tabla 8
Similitudes y diferencias en las lecciones de Japón y Hong Kong (SAR)

Variable de la lección	Japón	Hong Kong
Revisión	24 % de la lección	24 % de la lección
Nuevo contenido	76 % de la lección	76 % de la lección
<ul style="list-style-type: none"> ■ Introducción del nuevo contenido 	60 %	39 %
<ul style="list-style-type: none"> ■ Práctica del nuevo contenido 	16 %	37 %
Problemas (como propuestos)	Hacen conexiones (54 % de los problemas)	Usan procedimientos (84 % de los problemas)
Actividad privada por el estudiante	Algo más allá de práctica de procedimientos o una mezcla (65 % del tiempo de trabajo)	Práctica de procedimientos (81 % del tiempo de trabajo).

Nota: Hiebert et al, 2003, p. 150.

No hay diferencias en el porcentaje de tiempo asignado a la revisión y los nuevos contenidos en los dos países, pero sí una grande en la composición interna del tiempo destinado a introducir nuevo contenido o practicar con él. Lo mismo sucede con el tipo de problemas favorecido: en Hong Kong los procedimentales, en Japón otros. Y el trabajo estudiantil de práctica en Hong Kong es mayor que en Japón.

Ambos países puntuaron en los primeros lugares de la pruebas TIMSS 1995 y 1999.

En esta discusión, sin embargo, hay que tener precaución en torno a las diferencias culturales que podrían intervenir en torno a lo que podría representar lo procedimental en los contextos de Japón y Hong Kong (o en China en general). Podríamos invocar una observación interesante de An, Kulm, Wu, Ma & Wang (2006) quienes, al comparar las diferencias culturales entre los EUA y China señalan: en los EUA los profesores separan la comprensión conceptual y el desarrollo procedimental en dos dimensiones distintas, los procedimientos aparecen aquí como una colección de pasos. Mientras, en China: "... los

profesores si bien enfocan más procedimientos, éstos reconocen la interrelación entre las dos áreas y creen que los conceptos pueden ser abstraídos de los desarrollos procedimentales y que el principal objetivo de la comprensión conceptual y el desarrollo procedimental es el desarrollo de habilidades de pensamiento en el estudiante” (p. 457). En China: “procedimiento” apela a actividades de comparación, análisis, aplicación y síntesis. Es decir, que a “través de los procedimientos se puede generar comprensión conceptual”. Lo mismo opina Leung (2006): para los chinos la enseñanza procedimental no significa repetición mecánica sin comprensión (“la comprensión es un proceso continuo, no de blancos y negros”), sino que a través de la práctica los estudiantes van ganando comprensión. Especialmente si los ejercicios de procedimientos van variando de manera sistemática (p. 42-43). Una creencia se invoca: conceptos y procedimientos son importantes por igual, y “la enseñanza de las matemáticas es la enseñanza del método del pensamiento” (An, 2004, p. 462).

Gu, Huang & Marton (2004) llegan a afirmar una “enseñanza por variación” como uno de los rasgos claves de la enseñanza en China, que incluso explicaría los buenos resultados que los estudiantes chinos obtienen en pruebas comparativas internacionales. Brevemente, se consignan dos formas de variación: conceptual y procedimental. En el primer caso, se realiza de dos maneras: por un lado, mostrando materiales visuales u otras instancias, variando los aspectos no esenciales de un concepto (para captar su esencia), y, por otro lado: mostrando lo que no será el concepto (contraejemplo). En ambas formas de variación conceptual se pretende que el estudiante experimente los conceptos en diversas o múltiples maneras (Gu, Huang & Marton, 2004, p. 315). Se caracteriza como un proceso “estático”. La variación procedimental (Gu, 1981) se asume más bien como un proceso “dinámico” en el que se van creando “andamios” de manera sistemática para la formación de un concepto. Se trata de crear “un sistema jerárquico de procesos de experiencia a través de la formación de conceptos o etapas de solución de problemas” (Gu, Huang & Marton, 2004, p. 324). Mientras que en las teorías de Dienes la formación de conceptos se subraya como dinámica, en la de Gu lo dinámico se da en la “variación procedimental”.

Algunas de las conclusiones a que llega este estudio son las siguientes:

En esos 7 países, de alto rendimiento en las pruebas TIMSS, hay algunos rasgos en común:

- La mayoría de estos estudiantes de octavo año recibieron matemáticas a través de resolución de problemas, al menos un 80 % en promedio del tiempo de las lecciones se dedicó a resolver problemas matemáticos.

- En los 7 países las lecciones se organizaron incluyendo trabajo de toda la clase (público), en pequeños grupos o individualmente. Al trabajar privadamente en la mayoría de los países se realizó el trabajo individualmente más que en grupos o en parejas.
- En promedio, las lecciones de todos estos países incluyeron revisión del contenido previo y también atención a nuevo.
- Al menos un 90 % de las lecciones usaron textos o hojas de trabajo de algún tipo.
- Los profesores hablaron más que los estudiantes en una razón de 8 a 1 palabras respectivamente.

También se encontró una variedad de métodos de enseñanza entre los países. Incluyendo la duración de tiempo para introducir nuevos contenido, la coherencia a lo largo de los problemas matemáticos y dentro de su presentación, los tópicos cubiertos, y la complejidad procedimental de los problemas escogidos, y las prácticas de aula en relación con el trabajo individual y las labores en el aula.

4. Learner's Perspective Study, LPS

En el año 2006 se publicaron los resultados de otro estudio internacional comparativo con videos: el *Learner's Perspective Study* LPS. Este estudio inició en 1999 y ha ido incorporando distintos países. La visión de este estudio fue, sin embargo, muy diferente de la que fundamentó los estudios TIMSS. En esencia, complementar los estudios que enfocaban la actividad del profesor, con otros aspectos y un enfoque: la actividad y percepción del estudiante.

En el corazón de sus fundamentos está la idea que la actividad del aula es una práctica colaborativa construida con la participación del educador y el estudiante, y no se puede fragmentar en enseñanza y aprendizaje.

4.1. Descripción general

LPS recogió secuencias de al menos 10 lecciones usando 3 cámaras de video, así como una reconstrucción de los participantes en las lecciones obtenidas en entrevistas motivadas por los videos después de las lecciones; también incluyó datos producto de pruebas y cuestionarios así como copias de los materiales escritos (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006). En cada clase previamente se trabajó durante una semana para familiarizarse, con filmación de videos y entrevistas post lección para que estudiantes y maestros se acostumbraran a la presencia de los investigadores. En cada país, se enfocaron hacia

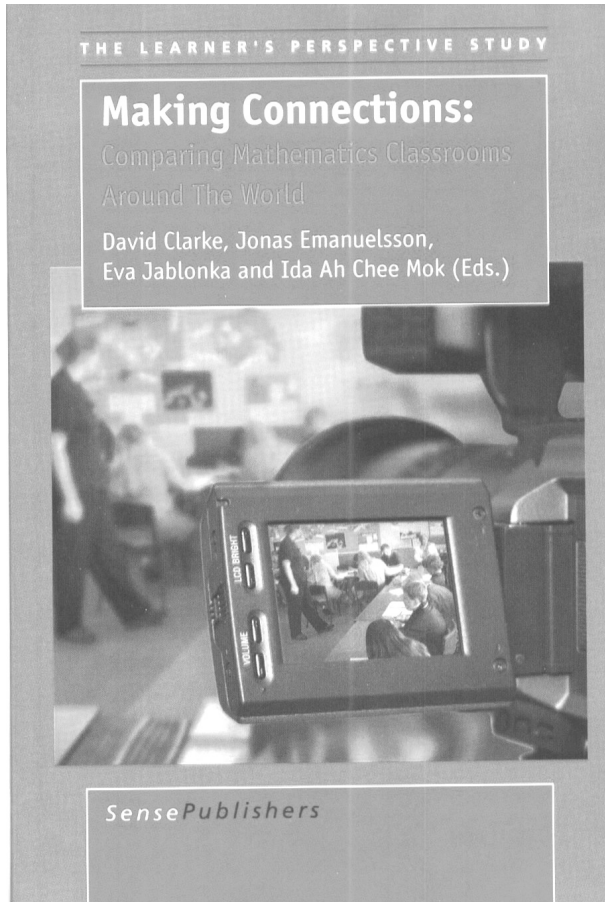


Figura 4: Portada del libro *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*.

las clases de 3 maestros, que fueron seleccionados por considerarse –según sus comunidades locales– maestros competentes. En cada país, entonces, se generaron al menos 30 lecciones “bien impartidas”, involucrando 120 videos, 60 entrevistas de estudiantes, 12 entrevistas de maestros, notas de campo de los investigadores y los datos de pruebas y cuestionarios así como material escrito escaneado de los estudiantes. Los criterios para la “competencia” fueron en esencia: “visibilidad como presentadores en conferencias para otros maestros”, “papel de liderazgo en organizaciones profesionales” y “aclamación por colegas y estudiantes” (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006, p. 8).

Originalmente, el estudio se planteó para complementar investigaciones sobre el desempeño estudiantil y las prácticas de enseñanza en Australia, Alemania, Japón y los EUA (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006, p. 1). Los datos fueron, ya en definitiva, completados en los siguientes países: Australia, China (Hong Kong, Shangai y Macao), la República Checa, Alemania, Israel, Japón, Corea, Filipinas, Singapur, Sudáfrica, Suecia y los EUA.

Los promotores del proyecto LPS fueron Clarke, Keitel y Shimizu, sobre la base de un metodología desarrollada por Clarke (1998) y que, también, se puede ver descrita en Clarke (2001).

¿Por qué el énfasis en lecciones impartidas por profesores competentes y no en la búsqueda de una lección promedio? Para los investigadores del LPS esta decisión apela a lo que ellos consideraron resulta de interés para un profesor: no tanto saber sobre la lección supuestamente promedio de uno o varios países, sino estar informado de lo que profesores muy competentes hacen en sus lecciones, para poder tener a mano estrategias exitosas para sus propias lecciones (Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 43).

Para estos investigadores, el objetivo en los estudios TIMSS de buscar una muestra nacional representativa generaba la consecuencia inmediata de analizar solo una lección. Más aun:

El poder para hacer generalizaciones sobre patrones nacionales en cuanto a una estructura de la lección se compró al costo de una menor fuerza explicatoria en relación con las condiciones antecedentes y consecuentes por medio de las cuales podían ser entendidas las motivaciones y consecuencias de las acciones de los maestros. Similarmente, el interés de los investigadores en la práctica de la enseñanza condujo a enfocar exclusivamente la “comunicación pública” dejando de lado una documentación del trabajo colaborativo “privado” de los estudiantes (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006, p. 10).

De alguna manera, estos investigadores se colocan en una perspectiva que asume cuestionamientos a muchos de los estudios comparativos internacionales. Retoman el criterio de que las comparaciones internacionales del rendimiento de estudiantes como PISA o TIMSS, producen, además de comparaciones, concepciones de lo que es importante valioso en la educación matemática. Por eso invocan las palabras de Keitel y Kilpatrick (1999) en su fundamentación teórica: “Un pseudo consenso ha sido impuesto (primeramente por el mundo angloparlante) a través de los sistemas de tal manera que el currículo puede asumirse como una constante más que una variable, y tal que la operación de otras variables pueda ser examinada”. Keitel y Kilpatrick (1999, p. 253) también afirman la existencia de un “currículo internacional idealizado”, y por lo tanto demasiado abstracto. Para Clarke, Emanuelsson, Jablonka y Mok (2006), “El análogo de ese currículo idealizado es una clase idealizada con participantes idealizados” (p. 4). Por eso el objetivo de estos investigadores con LPS era más bien incrementar la “sensibilidad cultural y contextual” en los estudios comparativos internacionales, reportando sobre la diversidad de prácticas de maestros competentes en diversas partes del mundo (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006, p. 4).

Los investigadores de LPS consideran que su estudio generó resultados más “finos”, precisos, debido a su metodología, pues sus datos eran más “comprehensivos”.

4.2. La secuencia en las lecciones

Estos investigadores tomaron en cuenta las secuencias consignadas por Sigler y Hiebert en el caso de Alemania, Japón y los EUA, y exploraron su presencia en los datos que recolectaron. Es decir, por ejemplo, en el caso de los EUA: revisión de material previo, demostración de cómo resolver el problema de día, practica y corrección del trabajo individual de los estudiantes y asignación de tarea. Para ellos, de primera entrada, estas categorías eran vagas.

Sus conclusiones, en el fondo, apuntan a que, si bien encontraron esas categorías en los EUA, no ocurría esa secuencia como un “patrón regular recurrente” en la estructura de las lecciones estudiadas (Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 34). Esto mismo encontraron en el caso de las lecciones en Alemania y Japón. Un ejemplo: mientras que Sigler y Hiebert no encontraron típica la asignación y el chequeo de tareas para la casa en la lección japonesa, LPS encontró que sí estaba presente en todas las 3 secuencias de lecciones que estudiaron en ese país (Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 41).

Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu (2006) condensan su opinión: “Los maestros cuyas lecciones hemos consignado mostraron poca evidencia de un patrón de lección consistente, y más bien variaron la estructura de sus lecciones intencionalmente a través de la secuencia de un tópico (p. 41).

Para Shimizu (2006), el patrón afirmado por Stigler y Hiebert no funciona en el caso de la lección japonesa por dos razones básicas: por un lado, por la diversidad en la estructura que encontraron en las diferentes lecciones en la que se desarrolló un tópico o varios tópicos, y, en segundo lugar, porque los elementos en un patrón suelen tener significados distintos dependiendo del momento particular en la secuencia de lecciones.

Este estudio no buscó identificar patrones nacionales de enseñanza. Lo que buscaban era similitudes y diferencias en lecciones “bien impartidas” en los países estudiados (Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 34). Incluso en el caso de Japón sugieren que se debe utilizar un conjunto más amplio de categorías para analizar las actividades en la lección japonesa, que el usado por Stigler y Hiebert con 5 categorías. Por eso, aunque los investigadores del LPS expresan su “simpatía con el objetivo de encontrar patrones y estructura en la práctica del profesor en la clase”, consideran que las categorías que usaron Stigler y Hiebert eran demasiado “incluyentes” (es decir, que incluían demasiadas categorías, que más bien deberían identificarse por separado). Tanto para el caso de Alemania como de los EUA, LPS también propone aumentar el número de categorías.

¿Por qué ofrece algo más el LPS que el estudio de videos TIMSS-R? En parte, según los investigadores del LPS: porque TIMSS-R no puede contestar a preguntas del tipo “¿cuáles fueron los antecedentes por lo que se usó cierta actividad? ¿Propósito instruccional? ¿Consecuencias en el aprendizaje?” Para poder responder ese tipo de asuntos se requeriría de un grado de documentación mayor, incluyendo secuencias de lecciones, entrevistas de profesores y estudiantes, etc.

Como señalamos en la introducción de este trabajo, aquí hay un debate metodológico. ¿Es válido introducir estos otros medios aparte de los videos y sus codificaciones? ¿La presencia de esos otros instrumentos introduce mayores niveles de subjetivismo en el proceso?

Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu (2006) subrayan lo que ven como una diferencia en el TIMSS 1999: “El Informe del *Estudio de videos TIMSS-R* (Hiebert et al, 2003) reinterpretó la idea de modelos de lección representativos nacionalmente (por implicación, si no fue una afirmación explícita) y consignó ‘firmas de una lección’ (Hiebert et al, 2003, pp. 123-151)”. Con este concepto mencionado, Hiebert et al construyeron una forma de ver cómo ciertos elementos de la lección aparecían con mayor intensidad dentro de una lección. Por ejemplo, la revisión de material anterior, que encontraron aparecía con mayor frecuencia en el primer 20 % de la lección y decrecía en el resto de la misma. LPS se replantea el asunto: situarse en un momento de la lección (por ejemplo, al

pasar un 40 % del tiempo de la lección) y analizar ahí la frecuencia en la que aparecen ciertos elementos de la clase.

4.3. Eventos de la lección

Esta óptica condujo en LPS a buscar una forma distinta de distinguir similitudes y diferencias en los estudios comparativos internacionales. Para el LPS los resultados obtenidos apuntaron a la existencia de otras unidades dentro de las lecciones, que, en su opinión, son elementos más adecuados para desarrollar los estudios comparativos: los “eventos de la lección”. Con ello se refieren a asuntos como:

- comienzo de la lección,
- final de la lección,
- número de introducciones al contenido que se va a tratar,
- importancia dada por el profesor a las síntesis cognoscitiva,
- forma de presentación de la primera tarea en el aula,
- los tareas de aprendizaje que se plantea en la lección,
- tiempos y acciones del profesor al estar los estudiantes en el trabajo individual o de subgrupos,
- participación de los estudiantes en la pizarra frente al conjunto de la clase, etc.

Los propósitos de este estudio, entonces, se enfocaron hacia la búsqueda del movimiento de estos eventos en los 12 países que participaron, con el objetivo de: “... expandir el repertorio de los profesores de estrategias instruccionales a través de información sobre una variedad de formas y funciones en que los eventos de la clase se desarrollan en las lecciones de profesores competentes en el mundo” (Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 44).

Debe mencionarse, sin embargo, que la primera vez que se usó el término “Evento de la lección” para realizar estudios comparativos legítimos en las lecciones de matemáticas fue en el año 2003: en una reunión de la *American Educational Research Association* (Mo y Kaur, 2006, p. 148).

Vamos a consignar algunos ejemplos de la manera cómo se analizaron los videos en LPS, en el caso de algunos de estos “eventos de la lección”.

a. El comienzo de la lección. Este evento de la lección fue analizado por Mesiti & Clarke (2006) con base en los videos tomados en los siguientes países: Australia, EUA, Japón, y Suecia. Ellos hicieron un recuento de los principales componentes que encontraron, divididos en 6 categorías distintas globales:

1. Pre-educativas (sin entrar en materia)
 - *De administración (control de asistencia, ...)*
 - *De organización (distribución de equipo, ...)*
 - *De estímulo educativo general (sobre responsabilidad estudiantil, coordinación de actividades sociales, ...).*
2. Revisión (el profesor ya cubrió el tema anteriormente)
 - *Actividades de calentamiento (trabajo estudiantil en silencio, 5 minutos, ...)*
 - Respuestas cortas no relacionadas
 - Respuestas cortas relacionadas
 - Corrección de tareas individualmente
 - *Actividades de recapitulación y repaso*
 - Problemas rutinarios
 - Problemas no rutinarios
 - Preguntas de la tarea
3. Instrucción (un tema o concepto no conocido se introduce)
 - *Presentación de problemas*
 - *Reflexión estructurada*
 - *Introducción de habilidades o conceptos*
 - *Aplicación a un contexto simple*
 - *Uso de un contexto elaborado*
4. Práctica de los estudiantes
 - *Actividad independiente guiada*
5. Evaluación de los estudiantes
 - *Con propósitos de diagnóstico*
 - *Con propósitos de evaluación formal*
6. Corrección (resolución de un problema, ...)
 - *Corrección en toda la clase*
 - Dirigida por el profesor
 - Dirigida por el estudiante
 - *Corrección del trabajo individual*
 - Preguntas de la tarea

En LPS se detectaron algunas secuencias de estos componentes de manera dominante, que fueron llamadas por estos investigadores: “secuencias icónicas” (p. 55 y sgtes.).

S1. La familiaridad genera comprensión

- Revisión: Actividades de calentamiento (Respuestas cortas no relacionadas, y Respuestas cortas relacionadas).
- Corrección: Corrección en toda la clase (Dirigida por el profesor, Dirigida por el estudiante)

Esta fue predominante en las lecciones estudiadas en los EUA (Mesiti y Clarke, 2006).

S2. Instrucción conectada

- Revisión: Actividades de recapitulación y repaso (Problemas rutinarios, Preguntas de la tarea).
- Instrucción: Presentación de problemas (Introducción de habilidades o conceptos).

S3. De lo específico a lo general.

- Revisión: Actividades de calentamiento (Respuestas cortas no relacionadas).
- Corrección: Corrección en toda la clase (Dirigida por el profesor).
- Instrucción: Presentación de problemas (Reflexión estructurada).

S4. Revisión corregida dirigida por estudiantes

- Revisión: Actividades de calentamiento (Corrección de tareas individualmente).
- Corrección: Corrección del trabajo individual (Preguntas de la tarea).
- Corrección: Corrección en toda la clase (Dirigida por el estudiante).

En este caso los dos primeros se hacen simultáneamente.

S5. Guía educativa: Actividades pre-educativas.

S6. Presentación elaborada de problemas

- Instrucción. Presentación de problemas (Uso de un contexto elaborado). Las secuencias usadas predominantes por los profesores competentes seleccionados en LPS expresan, cada una de ellas, varios elementos clave:
- El énfasis relativo que el profesor le da a la estimulación cognitiva y afectiva de los estudiantes en el comienzo de la lección (Secuencia 1).

- La situación de la lección particular dentro de la secuencia curricular y el tópico y la naturaleza de las conexiones (en ambas direcciones), las cuales los profesores se sienten obligados a promover (Secuencia 2);
- El significado acordado por el profesor a tales estrategias instruccionales como la repetición (Secuencia 1), reto, o la contextualización elaborada del contenido (Secuencia 6) . . .
- El énfasis relativo que el profesor acuerda a formulaciones matemáticas específicas o generales, la relación entre ellas, y el desarrollo óptimo de esa relación (Secuencia 4) (Mesiti y Clarke, 2006, p. 70).

b. El cierre de la lección. En el Japón, esta parte se llama “Matome”. Y puede ocurrir al final propiamente o, también, en mitad de la lección para concluir algunos temas (Shimizu, 2006, p. 133). El uso de “Matome” no es único, depende del momento en la secuencia de lecciones. Por ejemplo, se puede usar para encontrar conexiones u objetivos con temas de distintas lecciones de la secuencia. ¿Cuáles son las principales funciones encontradas? Subrayar los puntos clave de la lección, “promover la reflexión de los estudiantes sobre sus experiencias al revisar lo que han hecho”, preparación para la introducción de nuevos conceptos, y el establecimiento de conexiones con los tópicos previos y el que se desarrolla en el aula.

Shimizu (2006) resume su análisis con base en las clases de octavo grado de Australia, Alemania, Hong Kong, Japón, China (Shangai), y los EUA:

- En el caso de Shangai, el uso de “Matome” es similar al japonés, aunque en todas las lecciones estudiadas éste se hizo al final de la lección (Shimizu, 2006).
- En el caso de los EUA, “Matome” no fue un evento “consistente estructuralmente” como en Japón, pero sí fue identificado.
- En Australia, los cierres no se dan dentro o al final de la lección sino más bien al final del desarrollo de un tópico después de varias lecciones. Sin embargo, sí usan el principio de la lección para retomar los temas estudiados en la lección o lecciones anteriores.
- En Hong Kong, la situación es muy similar a la de Japón y Singapur. Pero el profesor resume y subraya los puntos clave solo muy ocasionalmente.
- En Alemania: “en el evento de la lección los profesores añaden algo o hacen algunos comentarios sobre los procedimientos de los estudiantes para resolver un problema. Pero no parece común para ellos concluir la lección mencionando algo que hicieron antes en la lección” (Shimizu, 2006, p. 140).

El estudio LPS confirma la relevancia para los japoneses de un cierre. Para ellos, en efecto la clase es como una obra de teatro que requiere un comienzo, un desarrollo medio y un final, el final es como un clímax, y la clase en mucha medida se construye en función de ese clímax.

Shimizu (2006) consigna muy bien la clara relación entre este uso del Matome en la lección japonesa con el proceso de institucionalización que ha señalado Brousseau (1997).

c. Entre pupitres. O’Keefe, Xu y Clarke (2006) analizaron el evento de la lección llamado “Kikan-Shido”, la acción del profesor en el momento que deja trabajos individuales o de grupos, y se mueve entre los pupitres. Su análisis se hizo con base en 18 clases situadas en Berlín, Hong Kong, Melbourne, San Diego, Shangai y Tokio.

Estos autores establecen una categorización interesante de los propósitos y acciones que realiza el profesor en este tipo de actividades, que vale la pena consignar aquí:

Monitoreo de la actividad de los estudiantes (observación del progreso de los trabajos y la tarea de casa).

- Selección de trabajo: los estudiantes se escogen para compartir su trabajo, o los métodos o razonamientos con toda la clase.
- Progreso del monitoreo: el profesor camina alrededor de la clase observando el progreso de los trabajos . . .
- Interrogación de estudiantes: una indagación que busca una respuesta.
- Monitoreo de si se finalizó la tarea de casa.

Actividad de orientación de los estudiantes (el profesor ofrece información, provoca respuestas de los estudiantes para promover reflexión, etc.)

- Estímulo a los estudiantes: motivación y soporte.
- Dar instrucciones y consejos en el pupitre
- Orientación a través de preguntas
- Redireccionamiento de los estudiantes.
- Respondiendo preguntas
- Dar consejo en la pizarra
- Orientación a toda la clase.

Organizativas: (el profesor distribuye y colecciona materiales, organiza la distribución física del aula, . . .

- El profesor distribuye materiales sobre la el trabajo planteado.
- El profesor colecciona materiales de los estudiantes.
- El profesor acomoda físicamente el aula.

Conversación social: el profesor conversa con los alumnos sobre temas que no son de la materia . . .

- Relacionadas con la escuela o colegio.
- No relacionadas con la escuela o colegio.

O’Keefe, Xu y Clarke (2006) concluyen que hay muchas variaciones en los tiempos que los profesores dedican a esta parte de la lección, tanto en lo que se refiere a la comparación entre países (lo que destinan en la primera, segunda, . . . lecciones), o dentro de la secuencia en cada país (destinan menos o más tiempo a lo largo de las 10 lecciones estudiadas). Todo esto en dependencia de las necesidades para el desarrollo de un tópico. Por eso subrayan:

La variación en el uso de Kikan-Shido a través de 10 lecciones impartidas po HK-T3 (el profesor 3 en Hong Kong) . . . confirma que . . . cualquier intento de caracterizar la práctica de un profesor por medio del patrón de una sola lección ignora la selección planeada por el profesor de elementos estructurales de acuerdo a la localización de la lección en la secuencia de un tópico (O’Keefe, Xu y Clarke, 2006, p. 92).

d. Los alumnos al frente de la clase. Jablonka (2006) analizó las formas y funciones del evento de la lección “Estudiantes en frente de la clase”, en 6 clases de Alemania, Hong Kong y los EUA. Sus hallazgos se pueden resumir en la tabla 9.

Las diferencias son relevantes. Las funciones no son las mismas. Y hay asuntos de contexto. Por ejemplo, en las clases de Hong Kong, el uso de la pizarra no se podía caracterizar como un evento “público”, porque era un trabajo que no necesariamente era para toda la clase (Jablonka, 2006, 118). Algunos detalles observados:

- En los 6 casos aquí estudiados se dieron “presentaciones silenciosas” por parte de los estudiantes.
- También, se observó una tendencia de los profesores de “apropiarse” de las soluciones presentadas por los estudiantes.
- Solo en el caso de una lección entre 60 hubo un largo periodo de presentación por parte de estudiantes ofreciendo una explicación coherente del trabajo de un grupo y respondiendo a las preguntas de sus compañeros y no las del profesor (Jablonka, 2006, p. 119).

Tabla 9

Estudiantes en frente de la clase, en 6 clases de Alemania, Hong Kong y los EUA

Funciones	Formas	Clases
Una oportunidad adicional para obtener un comentario del profesor	Los estudiantes escriben soluciones en la pizarra después de la práctica mientras otros estudiantes continúan trabajando en las asignaciones individualmente. Especialmente se pide a los estudiantes que tienen problemas (solo en HK1).	HK1, HK3
Resolviendo una nueva tarea en público	A los estudiantes se les pide resolver partes de una tarea no familiar en público.	A3, HK1, EUA2
Haciendo público un trabajo	Uno o más estudiantes escriben soluciones en la pizarra después de un periodo de práctica, después de un calentamiento o de la tarea; el profesor pregunta a los estudiantes o se extiende en las soluciones si está incorrectas. Los otros estudiantes comparan con su propio trabajo. Ocasionalmente 2 estudiantes colaboran en la pizarra (solo en EUA2).	A1, A3, EUA1, EUA2
Haciendo público y explicando un trabajo	Los estudios presentan y dan un recuento coherente del trabajo completo y ocasionalmente son interrumpidos por el profesor. Los estudiantes explican su trabajo y responden las preguntas hechas por otros estudiantes mientras el profesor escucha (Solo en A1).	A1, EUA1, EUA2
División del trabajo entre profesor y estudiantes	Los estudiantes señalan partes de los dibujos, tablas y gráficas en la pizarra, dibujan un esquema, completan en una tabla (EUA2) o ayudan al profesor en una demostración (A3).	A3, EUA2
Mostrando el trabajo	Muestran productos del trabajo de grupo en afiches o en pequeñas pizarras bancas; el profesor evalúa e ilumina el proceso.	EUA2

Notas. A: Alemania. EUA: Estados Unidos. HK: Hong Kong.

Los números a la par de las iniciales consignan la clase (el profesor) a la que hacen referencia, pues usaron en LPS 3 profesores, y secuencias de al menos 10 lecciones para cada uno.

Tomado de (Jablonka 2006, p. 118).

- Al frente de la clase, los estudiantes no se inician en “hablar matemáticas”, es decir no hacen mucha argumentación matemática.
- Hay temor en los estudiantes de expresar en frente de la clase sus argumentos o constructos verbales porque se sienten más vulnerables: se pueden equivocar, o el profesor les puede corregir. La atmósfera de la clase es competitiva (Jablonka, 2006, p. 120).

e. El manejo de nuevo contenido. Uno de los asuntos más interesantes del estudio LPS fue acerca de la introducción de nuevo contenido en la lección.

En primer lugar, para Häggsström (2006) la relevancia del tema arranca de los hallazgos ya presentes en la comunidad de educación matemática que sostienen que, al estudiar cómo se dan las lecciones en países de gran desempeño educativo, las dimensiones que realmente cobran importancia en la práctica de aula no están tan asociadas con el uso de textos, la organización de la clase, o si la instrucción está liderada por el profesor o centrada en el estudiante. Y más bien: “Para entender las diferencias en el aprendizaje por parte de los estudiantes, estas variables parecen tener menos importancia que cómo es tratado el contenido matemático por el profesor y los estudiantes” (Häggsström, 2006, p. 187). Este autor invoca los mismos hallazgos por Stigler y Hiebert (2004):

Un enfoque en la enseñanza debe evitar la tentación de considerar solamente los aspectos superficiales de la enseñanza: la organización, los instrumentos, el contenido del currículo y los textos. La actividad cultural de la enseñanza los caminos en los cuales los profesores y estudiantes interactúan sobre una materia- puede ser más potente que los materiales curriculares que usan los profesores (p. 15).

Un comentario pertinente que nos añade elementos sobre los estudios de videos analizados aquí: ninguno de estos estudios estuvo interesado particularmente en qué matemática era enseñada en las lecciones (Häggsström, 2006, 187). Este investigador estudió 3 lecciones bajo el LPS, en Hong Kong, Shangai y Suecia, y usó la “teoría de la variación” (Marton y Booth, 1997; Runesson y Marton, 2002, Marton, Runesson y Tsui, 2004) como sustrato teórico.

En esencia, la “teoría de la variación” considera que hay objetivos de aprendizaje en una lección, compuestos de varios elementos o aspectos. El aprendizaje de un elemento ocurre cuando se experimenta una variación: ver este elemento de una manera nueva. Si un elemento se da por asumido, y no hay variación, entonces las oportunidades para que haya aprendizaje son mucho menores. De alguna manera, esto querría decir que el arte de la enseñanza persigue crear estas variaciones, y para ello se deben poner en movimiento diferentes estrategias pedagógicas.

La presencia o ausencia de variaciones en el desarrollo de un contenido revelaría, entonces, las estrategias que se siguen en la lección.

Häggsström (2006) consigna con el uso de una tabla sus hallazgos para 3 lecciones de los lugares mencionados en torno a un tema común en las lecciones analizadas: el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Tabla 10
Patrones de variación

Aspecto del concepto	Hong Kong	Shangai	Suecia
Un método para la resolución de problemas	X		X
Hay diferentes sistema de ecuaciones		X	
Dos ecuaciones	X	X	X
▪ Pueden integrarse en una sola expresión		X	
Dos incógnitas		X	
▪ No 3 incógnitas		X	
Incógnitas de grado 1		X	
▪ No son de grado 1: $(x + y)^2$, xy , $1/y$		X	
Las mismas incógnitas en ambas ecuaciones	X		X
▪ No tiene que estar presentes en ambas ecuaciones		X	
Se pueden usar diferentes letras		X	

Notas: La X significa aspectos de tema usado elaborados y expuestos a la variación en el aula.

Un espacio vacío indica que el aspecto en cuestión se asume y se mantiene invariante durante su introducción.

Häggsström (2006, p. 196)

La tabla muestra que aunque en el caso de la lección en Shangai el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas no se plantea para la resolución de problemas, se busca generar más variaciones que en las clases observadas de Hong Kong y Suecia. Una de las razones de estas diferencias, profundizando su estudio, la encontró en el uso fuerte de ejemplos y contraejemplos que crea importantes contrastes en el curso de la clase provocando variaciones (Häggsström, 2006, p. 197).

Otro de sus hallazgos importantes: el tamaño de la clase no hizo diferencia en las oportunidades de aprendizaje que estudió. De hecho, la lección en la que más variaciones se provocaron fue en la de Shangai, que tenía el número mayor de estudiantes en el aula.

Esto es muy interesante: el tamaño de la clase es una variable que se valora mucho en los contextos educativos y es objeto de debate. El tamaño es relevante: con pocos estudiantes, y en dependencia del nivel educativo, se puede facilitar la adopción de más estrategias pedagógicas. Una clase grande ofrece un reto mayor al profesor, lo que invoca el uso de estrategias pedagógicas cuidadosas que deben adecuarse a ese entorno.

En este contexto, las características de la enseñanza en China, donde intervienen creencias y criterios culturales, juegan un papel crucial en relación con el manejo de clases grandes. Podemos traer a colación la opinión de An (2004) que identifica como una estrategia central el método instruccional de “Aprendizaje preguntando” y “Aprendizaje repasando”. Las conclusiones de An (2004) fueron recolectadas con base en una investigación realizada con 4 grupos de quinto grado de escuela, en la provincia china de Jiangsu. El método, en esencia, plantea el diseño por parte del profesor de preguntas y problemas (en diferentes niveles de dificultad, por capas) para promover y apoyar el razonamiento de los estudiantes. Las respuestas deben ser respondidas algunas oralmente y otras por escrito. Estas preguntas y problemas refieren primero a la materia vista anteriormente, para reforzar los temas previos; y con eso empieza cada lección: una práctica de repaso (en ocasiones en competencia entre estudiantes). Se da un cierto énfasis en las respuestas orales. Por medio de las preguntas se puede guiar al estudiante en la comprensión de conceptos matemáticos y en la corrección de posibles errores en los razonamientos por parte de los estudiantes. El diseño de la lección por medio de estas preguntas y problemas en niveles ofrece una orientación para el planeamiento que debe hacer el profesor (An, 2004, pp. 476-479).

¿Cuál es el origen de este método? Remite a la tradición propiamente Confuciana planteada en los *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático (Jiuzhang Zhuanzu)* de la Dinastía Tang (581-618 d. C.): una colección de 246 problemas orientados a dar métodos para resolver asuntos de la vida cotidiana en ingeniería, topografía impuestos, etc. (y que jugó en esa zona del planeta un rol parecido al de los *Elementos* de Euclides). Para el Confucianismo: el conocimiento implica un proceso de cuestionamiento del conocimiento nuevo a la vez que una retención de conocimiento previo. Incluso la palabra “conocimiento” en chino se compone de 2 verbos: “aprender” y “preguntar”, y “aprender” a su vez se forma con otras dos: “aprender” y “repasar” (An, 2004, p. 465). La idea confuciana: “al repasar se aprende nuevo conocimiento” [Cai & Lai, 1994, citados por An (2004, p. 465)]. Este método que invoca preguntar y repasar en la enseñanza aprendizaje se ha usado por siglos en China (An, 2004, p. 466).

Esta estrategia pedagógica puede usarse efectivamente en clases de gran tamaño.

5. Patrones nacionales

En la descripción de esos estudios de videos existe un debate explícito: ¿hay patrones nacionales en las lecciones de las matemáticas? Las respuestas han sido distintas: con base en el estudio TIMSS 1995 para los EUA, Alemania y Japón, Stigler y Hiebert (1999) afirman que sí, e incluso señalan las secuencias distintas dominantes en cada país, y otros elementos de la lección. TIMSS 1999 asume esta óptica y establece un análisis más específico, que incluye más países. LPS adopta una visión distinta, cuestionando esta posición y manifestándose, más bien, por otro tipo de estudio que busca colocar la atención de los investigadores en las similitudes y diferencias de los “eventos de la lección” entre los países, especialmente de lecciones “bien impartidas” por profesores “competentes”. Las posiciones sobre esto no se reducen a éstas: por ejemplo, Le Tendre, Baker, Akiba, Goeling y Wiseman, citados por Givvin et al (2005), afirman, con base en cuestionarios llenados por los profesores que participaron en el TIMSS 1995, que, más bien, a lo largo del mundo lo que existe es un patrón global en lo que se refiere al trabajo de toda la clase, el individual y el que se da en grupo.

Givving et al (2005), investigadores participantes en el TIMSS-R, con base en los videos del TIMSS 1999, analizaron tres dimensiones básicas de la lección: el propósito de la lección, la interacción en el aula (discusión del conjunto de la clase o trabajo independiente por parte de los estudiantes) y el contenido de las actividades de las lecciones (cómo se presentan los problemas en el aula, como problemas individuales orientados a una actividad de toda la clase u orientados hacia el trabajo individual de los estudiantes). Para ello realizaron una codificación en cada una de estas dimensiones:

Esta metodología nos permite examinar los puntos en una lección dada cuando un elemento particular ha ocurrido y cómo muchas lecciones exhiben ese mismo patrón. Vamos a definir el resultado ‘patrón de enseñanza’ como la duración y secuencia de tipos particulares de actividades y eventos durante las lecciones diarias (Givving et al, 2005, p. 316).

Analizaron entonces puntos temporales (longitudes o cortes de tiempo), y examinaron qué pasaba allí.

En su estudio usaron dos criterios para determinar que un elemento de la lección era persistente en las lecciones de un país: “mayoría simple” de 51 % y “super mayoría” de 67 %.

Tabla 11
Propósito, interacción de aula y actividad de contenido
Elementos, Dimensiones y Definiciones

Dimensión y elementos estudiados	Definición
Propósito	
<ul style="list-style-type: none"> ■ Revisión de contenido introducido en una lección previa 	Para revisión, reforzamiento, conducción hacia nuevo contenido, chequear tareas para la casa o evaluar estudiantes
<ul style="list-style-type: none"> ■ Introducción de nuevo contenido 	Para adquirir conocimiento, conceptos, procedimientos o habilidades.
<ul style="list-style-type: none"> ■ Práctica o aplicación de contenido introducido en esta misma lección 	Para practicar, consolidar o aplicar conocimiento.
Interacción en el aula	
<ul style="list-style-type: none"> ■ Interacción pública 	Tiempo durante el cual había un diálogo público dirigido por el profesor o uno o más estudiantes.
<ul style="list-style-type: none"> ■ Interacción privada 	Tiempo durante el cual los estudiantes trabajaron en sus pupitres.
Actividad de contenido	
<ul style="list-style-type: none"> ■ Problema independiente 	Tiempo durante el cual un solo problema fue trabajado.
<ul style="list-style-type: none"> ■ Problemas concurrentes 	Tiempo durante el cual la clase trabajó o discutió problemas que fueron asignados como parte de un conjunto. Esto incluyó el tiempo durante el cual el conjunto de problemas fue asignado, trabajado privadamente, y trabajado públicamente.
<ul style="list-style-type: none"> ■ Ausencia de problema 	Tiempo que incluyó información matemática pero no problemas matemáticos.

Nota: Tomado de Givving et al, 2005, p. 321

Revisaron 638 lecciones sacadas del TIMSS 1999 (entre 50 y 140 de cada país). Y estudiaron la convergencia que podía existir en relación con toda la muestra (global, conjunto de países), y aquella convergencia dentro de cada país, todo en relación con las 3 dimensiones escogidas. Su expectativa inicial fue que debían existir mayores niveles de convergencia dentro de cada país, que aquellos a nivel global (Givving et al, 2005, p. 317).

Para la codificación usaron representantes de cada país y un especialista matemático en todo el proceso de desarrollo de esta codificación. Además, tenían dos grupos de asesores: uno de investigadores de cada país y un comité directivo compuesto por 5 investigadores norteamericanos en educación matemática.

La codificación se hizo así: identificaron 11 puntos temporales espaciados idénticamente: “el comienzo, el cierre y 9 puntos intermedios que se dieron en incrementos del 10 % del tiempo de la lección” (Givving et al, 2005, p. 320). Eso hacía 33 puntos temporales (pues eran 3 dimensiones). Y en cada uno de esos puntos, el estudio buscó si los elementos seleccionados (revisión, introducción de nuevo material o práctica) aparecía de manera “mayoritaria” o “super mayoritaria”.

La tabla 11 muestra las definiciones de los elementos dentro de cada una de las dimensiones estudiadas por estos investigadores.

Los hallazgos, según estos investigadores: el análisis reveló que las lecciones dentro de un país son más similares entre ellas que las lecciones de un país comparadas con las de otros (Givving et al, 2005, p. 323). Pero se dieron grandes diferencias en cuanto a los niveles de convergencia que existían dentro de cada país. Si se tomaba solo el estudio de la convergencia de los elementos considerados, los investigadores no pudieron concluir la existencia de patrones nacionales en la lección de los países estudiados.

Para tratar de profundizar en sus objetivos, los investigadores crearon entonces “patrones compuestos de la lección” en cada país. ¿Cómo? Graficando de una manera particular el número de lecciones ya codificadas durante cada uno de los intervalos constituidos por algunos segundos del tiempo de la lección. A esto le llamaron “marcas de la lección”. Su propósito: “ilustrar la naturaleza y el flujo de las lecciones dentro de cada país” (Givving et al, 2005, p. 327). Crearon algo así como un histograma para cada país.

Las conclusiones fueron muy cautas:

Aunque las tres dimensiones exploradas . . . mostraron niveles de convergencia a favor del argumento para patrones nacionales de enseñanza, las dimensiones desplegaron niveles distintos de apoyo. La interacción de la clase fue altamente convergente cuando

se usó la mayoría simple como el criterio pero se mantuvo como la dimensión más convergente cuando se pasó a usar el criterio de la super mayoría. Entonces, la dimensión de la interacción de aula mostró ser el patrón más consistente. En cuanto al propósito éste mostró el patrón menos consistente. Dentro de cada una de las dimensiones algunos elementos convergieron más que otros. La revisión, la interacción pública y los problemas independientes fueron los elementos más consistentes en términos de cuándo ocurrieron en las lecciones dentro de un país. Dimensiones y elementos diferentes presentados en este artículo pueden dar distintas impresiones acerca del grado en que existen patrones de enseñanza nacionales. Usando dimensiones y elementos no incluidos en estos análisis podrían dar todavía impresiones distintas”. (Givving et al, 2005, p. 339).

Eso sí: encontraron en Japón una mayor evidencia para un patrón nacional de la lección. Y un cierto nivel mayor de diferencias en Suiza, lo que explican por las diferencias de lengua y cultura que conviven en ese país.

¿Qué puede potenciar mayores niveles de convergencia en las lecciones de un país? Por un lado, los límites organizativos o físicos de la clase (número de estudiantes, tiempo de la lección), políticas nacionales en cuanto a la educación (ministerios de educación pública), un currículo nacional que se debe compartir. Sin embargo, para Givving et al (2005), en acuerdo con Stigler y Hiebert (1999), lo que más potencia las convergencias dentro de una país en cuanto a un patrón nacional de enseñanza es la “naturaleza cultural de la enseñanza”:

... los profesores frecuentemente aprenden a enseñar siendo aprendices durante al menos 16 años. Muchos estudios han mostrado que los profesores que empiezan reproducen o imitan a los profesores que tuvieron cuando eran estudiantes. No es difícil de ver que con el tiempo métodos particulares de enseñanza, incluyendo los detalles de cómo estructurar e implementar una lección, pueden ser compartidos y copiados (p. 340).

¿Y las variaciones entre países? En la enseñanza en el mundo hay más variabilidad que convergencia. Potenciadores de las diferencias son, por una lado, las diferencias individuales (experiencia, calidades, circunstancias), pero, también, las características dentro de un país que empujan diferencias, por ejemplo la frecuencia de evaluaciones dentro de la clase, que predominan en los EUA (Givving et al, 2005, p. 341), y la presencia de varios patrones internos de enseñanza que obedecen a diferencias marcadas entre etnias, culturas y lenguas (como en Suiza).

Para estos investigadores, se puede afirmar razonablemente la existencia de patrones nacionales de enseñanza, pero la extensión, presencia y naturaleza de estos patrones depende mucho de las características de cada país. Para ellos, no hay respuestas concluyentes sobre esta temática, y mucho depende de la amplitud de los lentes que se usen para examinar la situación. Si éstos son muy amplios se pueden encontrar patrones globales y nacionales, pero si se usan lentes menos amplios emergen diferencias. Se requerirán, entonces, mejores lentes y más investigaciones que arrojen luz sobre la naturaleza de la lección de matemáticas.

La investigación de Givving et al (2005), fue abiertamente cuestionada por Clarke, Mesiti, Jablonka y Shimizu (2006) en cuanto a la metodología seguida, en 4 aspectos:

- i. El lugar de la lección en el estudio: no se usó como fuente para explicar la variabilidad el lugar que juega una lección dentro de una secuencia de lecciones para el desarrollo de un tópico (tanto en su análisis como en la discusión siguiente);
- ii. La lección como unidad de análisis: no se abordó la posibilidad que los patrones de enseñanza se pueden manifestar en el nivel de una unidad instruccional diferente a la lección.
- iii. Independencia de categorías. Las tres dimensiones (Propósito, Interacción en el aula, y Actividad de contenido) no son independientes (...)
- iv. Codificación demasiado “inclusiva”. Las tres dimensiones (Propósito, Interacción en el aula, y Actividad de contenido), sobre las cuales su análisis comparativo fue realizado, se definieron de manera extremadamente simple, con lo que aumentaba la posibilidad de convergencias entre los países y menos la variabilidad entre las lecciones (p. 28).

A pesar de su crítica, Clarke, Mesiti, Jablonka y Shimizu (2006) no pretenden debilitar los intentos por estudios comparativos que consignent patrones de enseñanza en las naciones, pero sí que se use una lección aislada como unidad base de análisis.

Dentro de la misma perspectiva, Lopez-Real, Mok, Leung y Marton (2004), que participaron en la investigación de LPS, igualmente han cuestionado la existencia de un “patrón nacional”, en un artículo publicado antes de los libros “oficiales” que condensaron los resultados de LPS: Clarke; Emanuelsson; Jablonka & Mok, (2006) (Eds.) y Clarke; Keitel & Shimizu (2006) (Eds.). En

el caso de Japón, ellos subrayan que la lección típica japonesa que los estudios TIMSS 1995 y 1999 consignan, no corresponde al estereotipo asiático, no es la típica en esos países y que, más bien, si se parece a alguna es más al modelo “alemán” que describieron en aquella investigación, con conceptos explicados con mucho cuidado pero predominio de una transmisión directa –poca exploración de estudiantes) (p. 383). Con base en datos tomados de 3 lecciones consecutivas de un profesor competente, llegaron a conclusiones sobre la lección en China, que si bien no pueden generalizarse ofrecen importantes indicaciones de estilos de enseñanza en esa cultura. Ellos definen, a pesar de su cuestionamiento a la metodología de TIMSS, un “patrón de enseñanza”, y lo definen como: “los elementos identificables dentro de la práctica en el aula por un profesor, que ocurre repetidamente en un periodo de tiempo, y que juntas constituyen las características del estilo del profesor” (p. 409).

Para realizar su argumentación, estos últimos investigadores describen 2 modelos de enseñanza que -se interpretarían- emergen de TIMSS 1995 (sin que eso signifique que los acepten como precisos o válidos):

Los principales elementos de las lecciones en los EUA parecen ser la demostración y la práctica. Es decir, el profesor explica algunas nuevas técnicas o conceptos a la clase y esto es seguido por la demostración de varios ejemplos y una práctica por los estudiantes de ejemplos similares. La impresión general es de una matemática procedimental y una enseñanza muy directiva. En contraste, los principales elementos de las lecciones japonesas parecen involucrar resolución de problemas y discusión. Es decir, a los estudiantes se les presenta un problema desafiante para explorar al principio de la lección y después de intentar el problema, individualmente o en grupos, los intentos de solución son discutidos (p. 404).

Aunque los autores no asumen válidos estos modelos, los usan como un punto de partida para proponer lo que sienten es el modelo de enseñanza en China, a partir del estudio en Shangai. Y concluyen: éste es en esencia una combinación, donde los momentos dominantes (que más tiempo consumen) son:

- fase directiva inicial (como en los EUA), seguida de
- fase exploratoria (como en Japón), y otra de
- práctica guiada.

Esta secuencia se puede repetir.

El debate y las diferentes visiones persisten en el tiempo: recientemente, Stigler (2009) sigue apegado a sus “viejas” ideas:

La enseñanza es una actividad cultural. En Japón, los educadores todos enseñan más o menos de la misma manera. Lo mismo es cierto en los EUA. La mayoría de educadores no hacen lo que le enseñaron a hacer en sus programa de formación de profesores, sino que retroceden a rutinas culturales que son aprendidas implícitamente. La mayor parte de la enseñanza se aprende porque se ha experimentado por 13 años antes de decidir ser un educador. En Japón, los educadores le darán a los estudiantes problemas para resolver que ellos no han visto nunca. Nosotros no hacemos eso en nuestro país. En Japón tienen una gran tolerancia por lo que yo diría es “confusión en el aula.”

Ellos pondrán un problema matemático y nadie sabe qué hacer. Se sientan allí y sudan y parecen confundidos y se jalen el pelo y tratan de descubrir qué hacer. En los EUA si usted le da un problema matemático y alguien parece confundido, el profesor salta inmediatamente para parar la confusión. Las actividades culturales son muy difíciles de cambiar. Y una de las razones para eso es que hay una cantidad de fuerzas que trabajan en contra del cambio de normas culturales. Tenemos que reconocer ese hecho mientras tratamos de describir cómo mejorar la enseñanza.

6. La lección en Japón

En el análisis que hemos realizado en las páginas anteriores, emerge con fuerza la presencia de características particulares e incluso, para algunos, únicas, de la lección en Japón (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006; Neubrand, 2006; Shimizu, 2006 y 2009). Nos parece apenas pertinente para dar conclusión a este trabajo ofrecer algunas breves consideraciones sobre este tema.

Ha sido documentado el éxito educativo japonés en lo que se refiere a las matemáticas. Desde el *Primer Estudio Internacional de Matemáticas* en el año 1964, pasando por el *Segundo Estudio* en los años 1980 y 1982, y los recientes *Third International Mathematics and Science Study*, TIMSS (“Trends” ahora, los estudios comparativos realizados en 1995, 1999, 2003 ...), se ha tomado conciencia de este hecho. Y, precisamente, uno de los temas clave es el desarrollo de la lección. En muchos países el estilo de enseñanza de las matemáticas en la clase sigue un patrón muy común, *grosso modo*: una revisión del material previo y de la tarea dejada para resolver en la casa, exposición de un tema por

parte del profesor, ilustración de un ejemplo por parte del profesor, introducción de ejercicios a resolver, supervisión del trabajo realizado por estudiantes en la clase (trabajos normalmente individuales), revisión de estos problemas planteados en la clase y, finalmente, asignación de nuevas tareas para realizar en el hogar. Todo con un énfasis en procedimientos de bajo nivel que imitan a aquellos mostrados por el profesor.

¿Cuál es el esquema de la clase japonesa? El estudio de Stigler y Hiebert (1999) consignó un patrón que se puede calificar como una orientación basada en la resolución de problemas. De hecho, ya al margen que se acepte o no que ese es el patrón de la lección japonesa, la opinión de algunos es que el estilo de la lección japonesa integra muchos de los planteamientos en resolución de problemas que emergieron en los Estados Unidos en los años 80 y 90 del siglo anterior y que -una gran cantidad de investigadores afirma- Japón usaba desde los años 40 del siglo anterior. Una primera visión nos la aportan las características de ese patrón en cuanto al esquema de desarrollo de la clase, que repetimos:

- revisión de la lección anterior,
- presentación del problema del día,
- trabajo individual o en grupo sobre resolución de problemas,
- discusión de los métodos de solución, y
- énfasis en los puntos importantes y resumen de la lección.

Stigler y Hiebert (1999) afirman que existe un influjo cultural en la base de este tipo de patrón. Shimizu (1999), reseñado por Hino (2007, p. 508), sostenía que este “patrón” debe inscribirse en un uso tradicional del marco teórico japonés para el planeamiento y la implementación de las lecciones.

Los investigadores de LPS señalaron que los elementos a considerar en la lección japonesa deben ser más. Shimizu (2006), como parte del grupo que desarrolló LPS, propuso 13 posibles categorías que consignamos en la tabla 12.

No obstante, en otra ocasión el mismo Shimizu (2007, p. 185), vuelve sobre lo mismo: las características únicas de las lecciones de matemáticas japonesas son, resumidamente:

- presentación de problemas matemáticos que valen la pena de introducir en el aula (que son relevantes o interesantes matemáticamente),
- énfasis en la realización de conexiones matemáticas dentro de la lección y a lo largo de varias lecciones (coherencia cognoscitiva e interrelaciones),

- presentación e intercambio sobre los métodos diversos de solución dados por los estudiantes (participación activa de los estudiantes),
- clarificación de los objetivos de la lección (resumen por parte del profesor, cierre intelectual y pedagógico de la lección).

Tabla 12
Categorías para el análisis de la lección japonesa

Revisión de la lección previa*
Chequeo de la tarea
Presentación de un tópico
Formulación del problema del día
Presentación del problema del día*
Trabajo en subproblemas
Trabajo individual o en grupo de los estudiantes*
Presentación por parte de los estudiantes
Discusión de los métodos de solución*
Práctica
Énfasis y resumen del punto principal*
Asignación de tarea para la casa
Anuncio del siguiente tópico

Notas: * códigos de las actividades del patrón japonés planteado por Stigler y Hiebert (1999).

Fuente: Clarke, Mesiti, Jablonka & Shimizu, 2006, p. 40.

De alguna manera, se puede percibir la dinámica de esta lección, ya sea que se use una categorización u otra. Shimizu (2009) resume sus conclusiones sobre la lección en Japón:

- Los profesores organizan la lección alrededor de soluciones múltiples de un problema dentro de una modalidad dirigida a toda la clase (p. 312): reafirma lo que Stigler y Hiebert (1999) afirmaron: una clase “estructurada por la Resolución de problemas”, pero con la invocación de soluciones múltiples por parte de los estudiantes.
- En todas las fases de la lección donde se da un involucramiento relevante de los estudiantes (p. 314).
- Es posible evocar la metáfora de la lección como una obra de teatro con la necesidad de tener un clímax: KI-SHO-TEN-KETSU, que resume el punto de inicio KI hasta el resumen de la historia KETSU.
- Existe una correlación directa entre los valores, objetivos e intenciones deseadas por el profesor para el desarrollo de la lección y aquellos por

parte de los estudiantes: la respuesta directa a las acciones instruccionales de los maestros, en armonía, es la forma en que se desarrolla la práctica construida de manera compartida por profesores y estudiantes en el aula (p. 317).

- La valoración del pensamiento de los estudiantes se incorpora, también, directamente en los “Estudios de Lecciones” (lección-estudio), el mecanismo privilegiado para la formación continua y para el diseño de buenas lecciones en el Japón. En el “Estudio de lecciones”, uno de los rasgos centrales es la anticipación de la conducta y reacción de los estudiantes, de las formas posibles de su pensamiento, para así diseñar o planificar bien las lecciones: la discusión general de toda la clase depende de las soluciones aportadas por los estudiantes, y por lo tanto la anticipación de lo que pueda aportar el estudiante es central. Esto es: “el aspecto crucial del planeamiento de la lección en el enfoque japonés para la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas” (p. 318).

Para algunos autores no se puede comprender bien la naturaleza de la lección japonesa si no se toma en cuenta que se enfatiza en ella la cooperación y no la competencia (Kaiser, Hino & Knipping, 2006).

Sin duda, la naturaleza de la lección japonesa solo puede comprenderse en relación con las estrategias de resolución de problemas, y donde se invocan también varios factores, que incluyen no solo lo cultural y contextual, sino los mecanismos de formación continua y investigación acción. Pero hay otros aspectos.

El lugar central de la resolución de problemas es un asunto que se incorporó en Japón en la década de los 80 en el siglo pasado, precisamente cuando en los EUA el National Council of Teachers of Mathematics lanzaba su *Agenda for Action*, aunque una primera mención se puede consignar desde 1951 (Hino, 2007, p. 504). Este influjo se corporalizó en un contexto educativo en que se alejaban de las premisas de la reforma de las “Matemáticas modernas” (como sucedía en muchas partes del mundo), y constituyó el principal mecanismo para reexaminar la Educación Matemática en el Japón. Si bien se dio un “Back to Basics”, como también sucedió en otras latitudes, Hino (2007) sostiene que quedó como un principio que debían incorporar las matemáticas más modernas en el currículo para potenciar la creatividad y el pensamiento matemático. Sin embargo, tal vez lo más interesante de mencionar es que los primeros *First and Second International Mathematics Studies* revelaron que si bien los estudiantes japoneses mostraban buenas destrezas de cómputo no era así en cuanto al pensamiento matemático. La resolución de problemas se percibía también como la orientación para enfrentar esa situación de debilidad (Hino, 2007, p. 504).

Nagasaki (1990), reseñado por Hino (2007), afirmaba la existencia de 3 enfoques hacia la resolución de problemas: 1) como un objetivo de instrucción en la educación matemática hacia el desarrollo de la destreza en la resolución de problemas para potenciar el pensamiento, 2) como el proceso mismo de instrucción, para la adquisición de destrezas de pensamiento directamente relacionadas con la matemática, y 3) como el contenido de la instrucción, es decir los procedimientos, fases, o estrategias metodológicas de la resolución de problemas se enseñan como contenido. Para Nagasaki, este último enfoque es el que se apuntala en los años 80. Durante los años 1980-1995, se condujeron numerosas y amplias investigaciones científicas sobre resolución de problemas. De igual manera, muchas investigaciones prácticas, desarrolladas por los maestros y profesores en servicio (en espacios como los “Estudios de la lección”) se multiplicaron (Hino, 2007, p. 507). Estas últimas orientadas en dos direcciones: construcción de materiales de enseñanza para potenciar las destrezas estudiantiles, y, por otra parte, hacia la organización de la lección. Debe decirse, sin embargo, que la investigación sobre la organización de las lecciones no empezó en estos años por la resolución de problemas, ya desde los años 1960 se pueden consignar investigaciones; sin embargo la resolución de problemas jugó un papel crucial en la profundización y generalización de este tipo de investigaciones.

Se dio entonces una imbricación entre investigadores de universidades y educadores en servicio en torno al uso de la resolución de problemas, una unidad de propósitos colectivos. Casi todas las lecciones que se desarrollan en los “Estudios de lecciones” se realizan desde entonces siguiendo la resolución de problemas (Hino, 2007, p. 509). Los japoneses se “casaron” con la resolución de problemas, la ampliaron y la potenciaron. Se puede decir que la misma estructura y organización de la lección, aparte de los influjos culturales o las tradiciones de planeamiento e implementación de la lección, se deben asociar con el uso de esta estrategia y política educativa.

Un caso particular de la enseñanza con la resolución de problemas para lograr esos objetivos de apuntalar las destrezas de pensamiento matemático del estudiante, es el “open-ended approach”, un enfoque de final abierto. Según consigna Shimada (1997): durante los años 1971 y 1976 se dieron varios proyectos de investigación sobre la efectividad de los problemas de final abierto en la enseñanza japonesa. Un problema se llama “de final abierto” si es formulado de tal manera que tenga múltiples respuestas correctas incompletas; contrapuesto a problemas que poseen una y solo una respuesta predeterminada. La estrategia “de final abierto” es aquella en la que la lección empieza con un problema de final abierto “. . . luego procede con el uso de muchas respuestas correctas al problema para generar la experiencia de encontrar algo nuevo

en el proceso. Esto se puede hacer combinando el conocimiento propio que posee el alumno, destrezas o formas de pensamiento que han sido aprendidas previamente” (Shimada, 1997, p. 1). Lo que se busca con este enfoque es promover las destrezas de pensamiento matemático de gran nivel (Hino, 2007, p. 509).

Según Sawada (1997) esta estrategia posee ventajas y desventajas:

Ventajas

1. Los estudiantes participan más activamente en la lección y expresan sus ideas frecuentemente.
2. Los estudiantes tienen más oportunidades para hacer uso comprensivo del conocimiento y destrezas matemáticas.
3. Incluso los estudiantes de bajo rendimiento pueden responder al problema en maneras propias significativas
4. Los estudiantes son motivados intrínsecamente a dar pruebas
5. Los estudiantes tienen experiencias ricas en el placer del descubrimiento y reciben la aprobación de sus compañeros.

Desventajas

1. Es difícil hacer o preparar situaciones matemáticas con significado.
2. Es difícil para los maestros proponer problemas con éxito. A veces algunos estudiantes poseen dificultad para entender cómo responder y dar respuestas que no poseen significado matemático.
3. Algunos estudiantes de gran destreza pueden experimentar ansiedad sobre las respuestas
4. Los estudiantes pueden sentir que su aprendizaje es insatisfactorio debido a la dificultad de sintetizar con claridad. (pp. 23-24)

Se plantea como una estrategia complementaria de las actividades de enseñanza de la matemática regulares. Se incluye este tipo de problemas en todos los textos, aunque no son muchos (Hino, 2007, p. 508). Es evidente que no se puede usar este tipo de problemas en cada una de las lecciones, pero su inclusión como estrategia revela dimensiones interesantes de la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se pueden subrayar los éxitos de la Educación Matemática japonesa, pero también es interesante, a la vez, mencionar las advertencias. Hirabayashi (2006), por ejemplo, es muy agudo:

El estado actual del rendimiento de los estudiantes japoneses en matemáticas: podemos decir que lo hacen bastante bien comparados con otros países, pero ellos poseen una fuerte aversión hacia las matemáticas. Sí, lo digo en una manera algo cínica: parece que en nuestro país el objetivo de la Educación Matemática es hacer a los alumnos odiar las matemáticas, y en esto podemos haber tenido bastante éxito.

Pero, ¿cuál de los dos casos se puede considerar mejor: uno “no ser tan hábil pero que le gusten mucho de la matemática” y otro “ser hábil pero que no le gusten”? Yo preferiría el primero porque si les gusta la matemática, incluso si no la pueden hacer bien ahora, se puede esperar que la reaprendan de nuevo cuando sea necesario en el futuro, pero en la última opción nunca volverán a las matemáticas a lo largo de sus vidas (p. 51).

La opinión de Hirabayashi se entiende bien, sobre todo cuando varios estudios internacionales han demostrado que los estudiantes japoneses valoran mal, ofrecen bajos resultados en creencias y actitudes positivas hacia las matemáticas (Hino, 2007, p. 504; Mullis et al, 2004), algo que sin embargo no es ajeno a algunos otros países asiáticos (Leung, 2006, p. 40). No obstante, es interesante señalar que para abordar ese problema los japoneses están realizando cambios educativos desde hace años. Ya en 1998, el nuevo “Curso de estudio” (que es el documento oficial que ofrece las directrices y estándares educativos centrales del país, y que se revisa cada 10 años más o menos) estableció el “Disfrute de la actividad matemática” como uno de los objetivos de la educación matemática en las escuelas del país. Más aun, se ha empezado a apuntalar en sus investigaciones la modelización matemática hacia las aulas (Hino, 2007, p. 506), como una línea que permita conectar las matemáticas con el mundo real y promover un sentimiento más positivo y lúdico con esta disciplina.

Esta conducta de respuesta social ante las situaciones de conflicto o los puntos vulnerables, que determinan como colectividad que existen en su país, y el diseño, política y concentración de esfuerzos múltiples para abordarlas, es sin duda una característica que posee rasgos influenciados por la cultura específica de esa nación.

7. Conclusiones

La investigación sobre las lecciones es un tema central en la Educación Matemática internacional. Más aun si se considera que esta nueva disciplina y su

profesión asociada deben estar fundamentadas en la labor de aula. Es decir: con la presencia de un fuerte componente práctico.

El uso de los videos ofrece una gran variedad de posibilidades para progresar en el estudio de las lecciones, de formas que estudios tradicionales no podrían realizar. Sus amplias ventajas deben sopesarse con sus limitaciones, y con la participación mancomunada de otros instrumentos de investigación. Pero no hay duda que su utilización, y no solo para estudios comparativos de lo que sucede en el aula, sino como recurso metodológico dentro de la misma, está llamada a potenciarse extraordinariamente en la investigación educativa.

La comparación de los 3 principales estudios de videos en la Educación Matemática que hemos reseñado ofrecen hallazgos y provocan al mismo tiempo debates intelectuales que son cruciales. Podemos sistematizar algunas de las diferencias de LPS 2005 con los estudios TIMSS 1995 y TIMSS-R 1999, para ir a conclusiones:

- En los estudios TIMSS se estudió lecciones representativas en cada país (aisladas), mientras que en el LPS fueron *secuencias* de 10 lecciones.
- Como la perspectiva era la del “aprendiz”, en LPS usaron 3 cámaras para recoger entre otras cosas la acción de los estudiantes, tal como las conversaciones estudiante-estudiante en trabajos colaborativos en la clase.
- De igual manera, en el LPS se incluyó entrevistas posteriores a la lección con los estudiantes, lo que permitía recoger “múltiples subjetividades” presentes en las interacciones del aula (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006, p. 10).
- La escogencia de los maestros fue distinta: en los estudios TIMSS fue un proceso más o menos aleatorio, en el LPS fue una escogencia con criterios específicos (competencia de los profesores).
- Mientras que los estudios TIMSS deliberadamente no le dieron relevancia a la parte de la evaluación, LPS asumió que ese era un elemento importante, parte integral de la práctica de clase (Mesiti & Clarke, 2006, p. 54).

Los objetivos y la metodología de, por un lado, los estudios TIMSS 1995 y 1999 y, por otro, LPS, fueron distintos. Por lo tanto, es difícil hacer comparaciones de la mayor validez de uno sobre el otro. Sí se puede analizar el significado y la pertinencia de los objetivos de cada uno. ¿Cuál es el significado o utilidad de buscar un patrón nacional en la estructura de la lección? ¿Son más útiles y de mayor interés las descripciones precisas de lecciones impartidas por profesores competentes? No obstante, los datos consignados en LPS

en torno a la estructura de las lecciones plantean algunas interrogantes. Por ejemplo, en relación con la estructura sugerida por Sigler y Hiebert (1999) como representativa o patrón de tres países: ¿por qué tanta diferencia en relación con las 10 lecciones que consignó LPS? ¿Fue motivada por las diferencias en metodología o los profesores “buenos” no se apegan a una estructura o patrón nacional?

Los 3 estudios introducen unidades distintas para establecer las comparaciones: en el caso de TIMSS 1995 se trata de algunas acciones por el profesor (Revisión del material de la clase pasada, Presentación del problema del día, etc.), en el TIMSS-R sin romper con el anterior esquema se pone especial cuidado a las características de las “tareas de aula” (el manejo de los problemas, por ejemplo); en el LPS el énfasis son los “eventos de la lección”. No pareciera que deba haber una actitud de exclusión de una unidad de análisis en beneficio de otra. Pareciera que, independientemente de que la muestra que se use sea “representativa estadísticamente” o no, las categorías planteadas por Stigler y Hiebert son útiles para comprender también similitudes y diferencias de estrategias pedagógicas y de contextos, y posibilidades para incorporar posibles estrategias por parte del profesor. ¿Cuánto útiles y válidas son para el estudio comparativo? El estudio LPS pensamos no invalida los estudios TIMSS. No existe otro estudio que realmente invalide esos primeros estudios de videos en su conjunto. Ahora bien, la metodología seguida por LPS es más comprensiva que la de los TIMSS. Especialmente en el sentido que incluye más elementos (en particular participantes) a la hora de hacer la descripción de la lección. La participación de los estudiantes y el uso de secuencias de lecciones le da una posición superior. Sin embargo, la diferencia de partida en la escogencia del segmento de profesores y lecciones a estudiar, invalida cualquier pretensión de descalificar los resultados de uno con base en los resultados del otro.

Los estudios TIMSS provocan una gama de resultados muy importantes para la Educación Matemática. La comparación “con el otro”, aunque se tenga dudas en los criterios a seguir, ofrece nuevas perspectivas para el desarrollo de la disciplina y la práctica profesional.

En todo esto, hay algunos asuntos más generales, que merecen una recapitulación ulterior.

No se puede negar el peso fuerte de condicionantes culturales específicas (además de valores familiares, situaciones socioeconómicas del entorno, etc.) en las características de la organización y desarrollo de la lección en un país: contextos culturales, sociales y pedagógicos diferentes. Por ejemplo, podemos añadir, la conveniencia de la presentación y abordaje de un problema más difícil y complejo, de una calidad matemática alta, depende de algunas creencias

específicas. Si los estudiantes consideran que un problema matemático debe resolverse en cinco o menos minutos o que si le dedican un largo periodo a un problema infructuosamente y (no encontrar la solución) no aprenden nada, entonces en esta situación precisa se puede volver un elemento de desmotivación y fracaso. Por el contrario, si los estudiantes asumen que todo trabajo dedicado a un problema matemático, el tiempo que sea, va a redundar en su progreso cognoscitivo y pedagógico, la introducción de problemas complejos y de alta calidad matemática será abordada de una manera diferente. Igual sucede si los estudiantes piensan que hay que dedicar todo el tiempo que sea necesario a un problema y no sólo 5 minutos para resolverlo. Estas diferencias, como lo señalamos antes, se han estudiado comparativamente. Es un mérito de la investigación TIMSS 1995 y 1999 subrayar estos contextos culturales en la lección de matemáticas, y con medios de gran utilidad como los videos.

Muchos estudios internacionales confirman la existencia de “tradiciones distintas” en la Educación Matemática entre Occidente y Asia del Este, lo que incluso se refleja en las pruebas comparativas internacionales (Wu, 2006). Las matemáticas significan cosas distintas en culturas diferentes. Aunque se debe tener cuidado en no estereotipar modelos de enseñanza, ni hacer extrapolaciones. La investigación *Learners Perspective Study* revela que no es tan fácil encontrar una lección típica nacional, y que más bien pueden coexistir varias. Más que concentrarse en la búsqueda de un modelo nacional, es muy razonable, observar prácticas que parecen ser exitosas, o, mejor dicho, que pueden condensar algunos de los hallazgos internacionales sobre el aprendizaje y la enseñanza. Puesto en otros términos: más que pensar en un modelo japonés o alemán, habría que analizar en todas las experiencias documentadas prácticas apropiadas, mecanismos que puedan ser útiles en algunos países o en otros.

Los estudios comparativos internacionales, que no solo utilizan pruebas estandarizadas para mediciones frías y generales, se revelan como instrumentos muy importantes para comprender muchos de los aspectos de la Educación Matemática.

Podemos, para finalizar, invocar algunas de las dimensiones que mencionamos al describir el estudio de videos TIMSS 1995 (ya sea que caractericen o no un tipo de lección en un país), para expresar nuestras opiniones.

Es conveniente incluir como un objetivo en la lección la coherencia e integración cognoscitivas, y establecer una relación explícita sobre los temas desarrollados ya sea en la misma lección o en otras lecciones. Si se provoca una dispersión en los temas de una lección el resultado es una menor comprensión. Es esencial que se haga explícito el razonamiento matemático que se desarrolla, el pensamiento y la estructura intelectual involucradas. Dejar explícito el

sentido de las lecciones (los tópicos analizados) señala la participación-influjo del educador, que es el actor que posee un conocimiento más amplio del tema y es capaz de hacer síntesis y trazar las perspectivas de la materia que se enseña. El cierre y la guía de la lección son de las principales acciones que debe asumir el educador en una orientación que favorece la construcción cognoscitiva del aprendizaje. Si bien resulta apropiado que el estudiante lo obtenga como un proceso propio de abstracción, el cierre intelectual y formativo es tarea del profesor. Este cierre intelectual y pedagógico que expresa explícitamente el significado de los conceptos vistos en la lección, es, aunque solo parcialmente, a lo que apela la “teoría de las situaciones didácticas” en la llamada fase de “institucionalización”, como bien señala Shimizu (2009). Ahora bien, esto no necesariamente tiene que darse en cada una de las clases consideradas de manera aislada; puede resultar conveniente en otro momento, considerado adecuado por el profesor, dentro de una secuencia de lecciones.

¿Por qué es clave el enfoque hacia temas matemáticos importantes? Si el objetivo se reduce a mostrar la solución de un problema particular o un procedimiento solamente, no se provoca una formación matemática mejor. Las matemáticas son ciencias de lo abstracto y trabajan los aspectos más generales de lo que existe. Se debe encontrar en los elementos específicos la estructura de conocimiento y la abstracción de la disciplina; es decir, establecer un puente entre lo particular y lo abstracto, no quedarse en lo particular. Se trata de enfatizar los conceptos de alta calidad y pertinencia matemática que puedan dar sentido al tópico tanto para el estudiante como dentro de los objetivos de desarrollo de competencias y aprendizajes generales en la disciplina. Ahora bien, debe existir un equilibrio estratégico con el “andamiaje”: se requiere de andamios pedagógicos y pasos cognoscitivos y de aprendizaje, con “variación”, o como se quiera conceptualizar, que pavimenten el camino hacia la abstracción.

El debate sobre qué es lo decisivo si lo procedimental o lo conceptual ya ha sido superado, pero de una manera precisa: el aprendizaje conceptual arrastra tras de sí el procedimental. Pero lo procedimental se puede interpretar, como en China, con otra mentalidad. La presentación de procedimientos con “variación”, o el entorno pedagógico provocado por el profesor con “interrogaciones y respuestas”, permite dar salidas de comprensión de conceptos y métodos (bajo la premisa de que no existe una separación drástica entre lo procedimental y lo conceptual). Se debe tener un equilibrio de actividades rutinarias, de aplicación y novedosas, pero es decisivo salirse de los esquemas que solo favorecen lo rutinario. Todo apunta a dar un espacio amplio a actividades de pensamiento no rutinarias que sirvan para la generación de actividades de pensamiento más elevadas en busca de potenciar estas habilidades en los estudiantes, darle un lugar a la complejidad, puesto que el enfrentar situaciones complejas permite

la búsqueda de diferentes opciones: se invoca epistemología aquí, el alumno construye sus representaciones conceptuales por medio de un proceso complejo que parte de un conflicto “cognoscitivo” entre las concepciones que posee originalmente el alumno y el que va a resultar de la experiencia de aula (Ruiz, Alfaro y Gamboa, 2006).

Stigler (2009) tiene razón al invocar dos hallazgos importantes para el aprendizaje en la lección de matemática, que han sido consignados, por ejemplo, por Hiebert y Grows (2007): es clave que en el aula se establezcan relaciones matemáticas entre conceptos, procedimientos e ideas, y, por el otro lado, también, que los estudiantes se enfrenten durante un cierto tiempo con matemáticas importantes.

En nuestra opinión, el enunciar simplemente los temas y no desarrollarlos, es inapropiado; se arriesga con desperdiciar el tiempo en listados o referencias que no pueden ser aprehendidas por los estudiantes (a no ser por memorización mecánica). Muchas veces esto es producto de la ausencia de suficiente tiempo para hacerlo en el aula, pero también de concepciones equivocadas. Aunque, también, invoca el problema del privilegio de la amplitud sobre la profundidad, que es lo que suele predominar en la enseñanza aprendizaje de muchos países, y que constituye un gigantesco error.

Sin lugar a la duda, en la lección se debe favorecer la participación de los estudiantes con métodos de solución alternativos, múltiples estrategias, falibilidad y diversidad. Es una visión sobre la construcción cognoscitiva y el aprendizaje.

Puesto todo lo anterior de manera “inversa”, se trata de:

- no dejar de realizar las conclusiones y las interrelaciones cognoscitivas de los temas enseñados,
- no concentrarse en practicas rutinarias, repetitivas ni privilegiar conceptos de baja calidad matemática,
- no caer en el hábito de solo enunciar o listar sin desarrollar en profundidad los conceptos y temas, y
- no debilitar la participación activa y cooperativa de los estudiantes en particular potenciando soluciones únicas.

La Educación Matemática se orienta a detectar las mejores prácticas en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el mundo, no con el propósito de prescribir líneas sino de proporcionar un arsenal de recursos para el educador en cualquier parte del mundo. No obstante, es una dirección relevante la búsqueda de algunos patrones y un marco teórico integrador de prácticas efectivas. Hay una perspectiva hacia la integración de manera teórica de resultados en: aprendizaje, enseñanza, recursos educativos, dimensiones socioculturales.

Las pruebas y estudios comparativos internacionales que podemos llamar “holísticos”, por otra parte, revelan esas dos dimensiones: prácticas “exitosas” que podrían adecuarse lúcidamente en otros contextos, y la diversidad y especificidad de escenarios. Se cometería un error si solo se buscara empujar a la medición de resultados cognitivos abstractos y fríos, y se subestimara el estudio cuidadoso de los contextos socioculturales y políticos que afectan los medios y los mecanismos en que se desarrolla la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de las estrategias y lecciones en particular. Es aquí donde adquieren un lugar relevante estudios sociales, etnomatemáticos, antropológicos, y algunos más recientes en torno al papel de la política y el tema de la democratización de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En esta situación juegan, también, un papel relevante los estudios de lenguaje, tanto como la estructura de comunicación de significados de manera general y el significado de la diversidad lingüística; es una temática que se ha ido consolidando en los últimos 15 años. La práctica educativa como fenómeno asociado a la comunicación se invoca fuertemente aquí. Todo esto expresa el influjo de lo que es otra tendencia consolidada en la Educación Matemática: la sociología y antropología matemáticas. Una ampliación de este tipo de estudios se prevé en los siguientes años.

Como siempre, en torno a investigaciones internacionales es relevante conocer sus resultados, que se multiplican cada día y buscar y usar, con mentalidad crítica, ideas y derroteros lúcidos que podrían nutrir el progreso de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en cada país y región.

La comunidad de la Educación Matemática se orienta a potenciar una amplia gama de estudios comparativos internacionales, como éstos que hemos considerado aquí. El TIMSS 1995 fue el primero, con sus debilidades o puntos fuertes, constituyó una importante contribución para ofrecer una mejor comprensión de los secretos y misterios de la enseñanza de las matemáticas en el aula. El uso de videos es un recurso que, aunque todavía tiene un camino muy largo que recorrer, está llamado a impactar de una manera profunda la metodología de investigación en la educación matemática.

Referencias y bibliografía

- An, S. (2004). Capturing the Chinese Way of Teaching: The Learning-Questioning and Learning-Reviewing Instructional Model. En: Lianghuo, F.; Ngai-Ying, W.; Jinfa, C. & Shiqi, L. (Eds.) *How Chinese learn mathematics. Perspectives from Insiders*. Singapore: World Scientific.
- An, S.; Kulm, G.; Wu, Z.; Ma, F. & Wang (2006). The impact of cultural differences on Middle School Mathematics Teachers' Beliefs in the U.S. and China. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. (2006) (Eds.). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.

- Cai, X. & Lai, B. (1994). *Analects of Confucius*. Beijing: Sinolingua. Citado por An (2004).
- Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (2006) (Eds.). *textitMaking Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Clarke, D. J. (1998). Studying the classroom negotiation of meaning: Complementary accounts methodology. Chapter 7 en A. Teppo (Ed). *Qualitative research methods in mathematics education, número monográfico del Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, VA: NCTM, 98-111.
- Clarke, D.; Keitel C. & Shimizu, Y. (2006) (Eds.). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*, The Netherlands: Sense Publishers.
- Clarke, D.; Mesiti, C.; Jablonka, E.; & Shimizu, Y. (2006). Addressing the Challenge of Legitimate International Comparisons: Lesson Structure in the USA, Germany and Japan. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok (2006). The Learners's Perspective and International Comparisons of Classroom Practice. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Ernest P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*, London: The Falmer Pres.
- Givving, KB; Hiebert, J.; Jacobs, JK.; Hollingsworth, H. & Gallimore, R. (2005). Are There National Patterns of Teaching? Evidence from the TIMSS 1999 Video Study.
- Gu, L. (1981). The visul effect and pshychological implication of transformation of fugures in geometry. Citado por Gu, L.; Huang, R. & Marton, F. (2004).
- Gu, L.; Huang, R. & Marton, F. (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. En Lianghuo, F.; Ngai-Ying, W.; Jinfa, C. & Shiqi, L. (Eds.) *How Chinese learn mathematics. Perspectives from Insiders*. Singapore: World Scientific.
- Häggsström, J. (2006). The introduction of New Content: What is Possible to Learn? En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Hiebert, J. & Handa, Y. (2004). A Modest Proposal for Reconceptualizaing the Activity of Learning Mathematical Procedures. Trabajo presentado en la Annual Meeting of the American Research Association, San Diego.
- Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371 - 404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Hiebert, J.; Gallimore, R.; Garnier, H.; Givvin, K.; Hollingsworth, H.; Jacobs, J.; Chui, A.; Wearne, D.; Smith, M.; Kersting, N.; Manaster, A.; Tseng, E.; Etterbeek, W.; Manaster, C.; Gonzales, P. & Stigler, J. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results Form the TIMSS 1999 VideoStudy*. EUA: US Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, 39:503-514.

- Hirabayashi, I. (2006). A traditional aspect of Mathematics Education in Japan. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.
- Isoda, M; Stephens, M.; Ohara, Y. & Miyakawa, T. (Eds.). (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics*, Singapore: World Publishing Co.
- Jablonka, E. (2006). Student(s) at the Front: Forms and Functions in Six Classrooms from Germany, Hong Kong and the United States. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Keitel, C. & Kilpatrick, J. (1999). The rationality and irrationality of International comparative Studies. En G. Kaiser, E. Luna & I. Huntley (Eds.), *International comparisons in mathematics education* (pp. 241-256) London: Falmer Press.
- Le Tendre, G.K.; Baker, D.P.; Akiba, Mo.; Goesling, B. & Wiseman, A. (2005). Teachers' Work: Institucional Isomorphism and Cultural Variation in the US, Germany and Japan. *Educational Researcher* 30, No. 6 (2001): 3-15.
- Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.
- Leung, K. S. F. (2006). Mathematics Education in East Asia and the West: Does Culture matter? En En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.
- Lianghuo, F; Ngai-Ying, W.; Jinfa, C. & Shiqi, L. (2004). (Eds.) *How Chinese learn mathematics. Perspectives from Insiders*. Singapore: World Scientific.
- Lopez-Real, F; Mok, A.C.I.; Leung, K.S.F., & Marton (2004). Identifying a Pattern of Teaching: An Analysis of a Shangai Teacher's Lessons. En Lianghuo, F; Ngai-Ying, W.; Jinfa, C. & Shiqi, L. (2004) (Eds.). *How Chinese learn mathematics. Perspectives from Insiders*. Singapore: World Scientific.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F; Runesson, U. & y Tsui, A. (2004). The space of learning. En F. Marton & A. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of Learning* (pp. 3-40). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mesiti, C. & Clarke, D. (2006). Beginning the Lesson: The First Ten Minutes. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Mo, I.M.A.C. & y Kaur, B. (2006). "Learning Task" Lesson Events. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Mullis, I.; Martin, M.; González, M. & Chrostowski, S. (Eds.) (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Nagasaki, E. (1990). Problem solving. En Sin Sansu Kyoiku Kenkyukai (Ed.). *Sansu kyoiku no kiso riron (Basic theory of elementary mathematics education)*, pp. 134-146. Tokyo: Toyokan. Citado por Hino (2007).

- Neubrand, J. (2006). The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. (2006) *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.
- O'Keefe, C.; Xu, L.H. & Clarke (2006). Kikan-Shido: Between Desks Instruction. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.
- Ruiz, A. (2010). Conocimientos y currículo en la Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número 6, Año 5, abril, Costa Rica.
- Ruiz, A.; Alfaro, C. & Gamboa, R. (2006). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número 1, Año 1, setiembre, Costa Rica.
- Ruiz, A.; Barrantes, H. & Gamboa, R. (2009). *Encrucijada en la Enseñanza de las Matemáticas: la formación de educadores*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Runesson, U. & Marton, F. (2002). The object of learning and the space of variation. En F. Marton & P. Morris (eds.) *What matters Discovering critical conditions of classroom learning. Göteborg Studies in educational sciences* (pp. 19-37). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. En Becker, J & Shimada, S. *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia, USA: NCTM.
- Sekiguchi, Y. & Miyazaki, M. (2000). Argumentación y demostración en Japón. *Preuve. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Febrero 2002. Recuperado 2 de abril del 2009: <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/000102Theme/000102ThemeES.html>
- Shimada, K. (2007). Lesson Study: A Partnership among Education Sites, Board of Education, and Universities. En Isoda, M; Stephens, M.; Ohara, Y. & Miyakawa, T. *Japanese Lesson Study in Mathematics*, Singapore: World Publishing Co.
- Shimada, S. (1997). The Significance of an Open-Ended Approach. En Becker, J & Shimada, S. *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia, USA: NCTM.
- Shimizu, Y. (2006). How Do You Conclude Today's Lesson? The Form and Functions of "Matome" in Mathematics Lessons. En Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. The Netherlands: Sense Publishers.
- Shimizu, Y. (2007). What are the characteristics of Japanese Lessons Emerged by the International Comparisons? En Isoda, M; Stephens, M.; Ohara, Y. & Miyakawa, T. *Japanese Lesson Study in Mathematics*, Singapore: World Publishing Co.
- Shimizu, Y. (2009). Characterizing exemplary mathematics instruction in Japanese classrooms from the learner's perspective. *ZDM Mathematics Education* 41:311-318.
- Smith, M. (2000). A Comparison of the Types of Mathematical Tasks and How they were Completed Turing Eighth-grade Mathematics Instruction in Germany, Japan and the United States. Disertación doctoral, University of Delaware.

- Spindler, G. & L. Spindler (1992). Cultural process and ethnography: an anthropological perspective. In M. LeCompte, W. Millroy, and J. Preissle, eds., *The Handbook of Qualitative Research in Education* (pp. 53-92). New York, NY: Academic Press / Harcourt Brace.
- Stigler, J. (2009). Reflections on Mathematics Teaching and How to Improve It, Presentación (transcripción). *California Online Mathematics Education Times (COMET)*, Vol. 10, No. 12 - 9 Mayo 2009.
- Stigler, J. & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational Leadership*, 6 (5), 12-17.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.
- Tobin, J.; Wu, D. & D. Davidson (1989). *textitPreschool in Three Cultures: Japan, China, and the United States*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Ulewicz, M. & Beatty, A. (2001). (Eds.). *The Power of Video Technology in International Comparative Research in Education. Free Executive Summary*. EUA: National Academies Press. Descargado de <http://www.nap.edu/catalog/10150.html>, 13 de junio del 2009.
- Wang, T. & Murphy, J. (2004). An Examination of Coherence in a Chinese Mathematics Classroom. En Lianghuo, F.; Ngai-Ying, W.; Jinfu, C. & Shiqi, L. (Eds.) *How Chinese learn mathematics. Perspectives from Insiders*. Singapore: World Scientific.
- Wu, M. (2006). A comparison of Mathematics performance between East and West: What PISA and TIMSS can tell us. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.