Euler y el entrañable encanto del quehacer matemático[1]

Carlos Sánchez Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
carlossanchezfernandez@gmail.com

Aquellos que aseguran que las ciencias matemáticas
no tienen nada de lo bello están en un error.
Las formas que mejor expresan la belleza son el orden,
la simetría, la precisión.
Y las ciencias matemáticas son las que
se ocupan de ellas especialmente.

Aristóteles. *Metafísica*. Libro XII. Cap. III.

Resumen[2]

Se presenta una aproximación al problema de la inteligibilidad matemática en un marco teórico que privilegia la sinergia entre lo histórico, lo lógico y lo didáctico. Para ello, se describe detalladamente el problema de Basilea, como un caso de los más simples y atractivos en los comienzos del cálculo infinitesimal y que pretende conmemorar el tricentenario del nacimiento de Euler y al mismo tiempo mostrar cómo el conocimiento de la historia del pensamiento matemático se puede aprovechar para favorecer la inteligibilidad matemática y desentrañar algunos de los encantos que posee la Matemática. Se utilizan fuentes originales como Euler (2000) con la *Introducción al Análisis de los Infinitos* recientemente editada en castellano y otras referencias actualizadas como Dunham (2000), Dunham (2007), Sánchez & Valdés (2004) que el interesado puede utilizar como complementación. En definitiva la pretensión del autor es transmitir el auténtico y entrañable encanto del quehacer matemático.

Palabras clave

Historia de la Matemática, Euler, inteligibilidad matemática.

[1] Trabajo presentado en la *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, celebrada en Querétaro, México, en julio de 2007.

[2] El resumen, las palabras clave, el abstract y las key words fueron agregados por los editores.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2011. Año 6. Número 8. pp 123-133. Costa Rica

Abstract

We present an approach to the problem of mathematical intelligibility in a theoretical framework that privileges the synergy between the historic, logical and didactic. The problem of Basel is described in detail, as a case of the simplest and most attractive in the beginning of calculus and aims to commemorate the third centenary of Euler's birth. Also, we intend to show how the knowledge of the history of mathematical thought can be leveraged to promote mathematical intelligibility and unravel some of the charm that Math has. Original sources are used as Euler (2000) with the *Introducción al Análisis de los Infinitos* recently published in Spanish and other updated references: Dunham (2000), Dunham (2007), Sanchez & Valdés (2004), that can be used as complementary documents. In short, the author's claim is to convey the authentic and intimate charm of mathematical endeavor.

Key words

History of Mathematics, Euler, Mathematical intelligibility.

1. Introducción

En una de las conferencias plenarias del ICME 8 realizado en Sevilla, su presidente el profesor Guzmán (1996), declaraba:

> Euler es el gran maestro de todos los matemáticos posteriores a través de su obra. Y no solamente por el contenido, sino también por razón de la forma y modos de transmitir. La obra de Euler es en general, una muestra en ejemplos de lo que un buen enseñante de matemáticas debe hacer...

Ahora que en todo el mundo se recuerda el tricentenario del nacimiento de Leonard Euler es oportuno buscar algunos de estos ejemplos y aprender de ellos para mejorar nuestra actividad educativa. El estilo de pensamiento de Euler y su afán como activista del quehacer matemático nos parece muy conveniente para enfrentar los retos de la Educación Matemática actual.

De entre todos los retos actuales quisiera compartir algunas ideas para enfrentar los siguientes:

- Crear una asociación mental favorable hacia las matemáticas.
- Enseñar a apreciar la belleza y el encanto del quehacer matemático.

Para alcanzar estos objetivos contextualizo a continuación la obra de Euler.

2. La obra de Euler

Euler nació en la ciudad de Basilea, famosa por haber recibido en su universidad y conservar los restos en su catedral de uno de los más grandes humanistas del renacimiento, Erasmo de Rotterdam (1469-1536). Quizás fueron las ideas progresistas de Erasmo en su obra *Sobre el método del estudio* (1511) contra el escolasticismo racionalista y con su insistencia en despertar ante todo el interés de los alumnos por el saber y la reflexión, las que impregnaron las obras de Euler de un estilo tan sugestivo y claro. Pero sin dudas quién influyó más en su inclinación por las matemáticas fue Johann Bernoulli quién, junto a sus hijos y sobrinos, marcó la vida científica de Euler no solo en su periodo de formación en Basilea, sino también más tarde durante sus largas estancias en las Academias de Ciencias de San Petersburgo y Berlín.

Johann Bernoulli, conocido como un arrogante pendenciero, pero también como el mejor enterado de los avances matemáticos de la época, pronto reconoció el talento de Euler, lo guió por los vericuetos de las Ciencias matemáticas, mantuvo con él una amplia correspondencia y siempre lo consideró su alumno más brillante. Para dar muestra de ello, refiramos tres calificativos que aparecen en tres cartas dirigidas a Euler en tres momentos diferentes de su vida:

- 1728: “sabio y talentoso joven”
- 1737: “célebre y agudo matemático”
- 1745: “Incomparable Leonhard Euler-líder de los matemáticos”

Realmente, en 1745 no existía mortal que pudiera compararse a Euler como matemático. Como se sabe, su vida estuvo consagrada a las Ciencias Matemáticas, entendiéndose con esto no sólo análisis, álgebra, geometría y teoría de números, las clásicas ramas de la llamada matemática pura, que constituyen 58 % de su obra, sino también mecánica y física que representa 28 %, astronomía 11 %, arquitectura y artillería 2 % y hasta música y filosofía con 1 %. Y este 1 % es significativo, porque a lo largo de su extensa vida Euler produjo más de 800 publicaciones. Sus obras completas *Opera Omnia* ya ocupan más de 80 volúmenes y aún no se han concluido. Sin lugar a dudas es el matemático más prolífico de la historia. Pero, con ser importante la cantidad de trabajos, el aprecio se debe más a la originalidad, belleza y agudeza de su obra que a su volumen.

A finales de 1988 en la revista internacional *Mathematical Intelligencer* apareció una convocatoria para elegir las 10 fórmulas más bellas de las matemáticas de todos los tiempos. Dos años después en la revista aparecieron los resultados

(Wells, 1990). No sorprendió a muchos que en la relación aparecieran cuatro fórmulas de Euler entre los cinco primeros lugares:

1. **La relación exponencial**: $e^{\pi i} + 1 = 0$, donde aparecen las 5 constantes matemáticas más populares 0, 1, π, e, i, que sirvió para comprender cómo definir los logaritmos de los números negativos.
2. **La fórmula de los poliedros convexos**: $L + V - A = 2$, que enlaza los tres elementos principales del poliedro, sus caras (L), sus vértices (V) y sus aristas (A).
3. **La densidad de los números primos**: $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$, que sirvió no sólo para dar una demostración nueva y directa de la infinidad de los números primos, sino que fue la primera tentativa de relacionar la aritmética, estudio de las cantidades discretas, con el Análisis, estudio de las cantidades continuas. Después de este trabajo de Euler la distribución de los números primos fue objeto de numerosas especulaciones antes de que otras hipótesis más precisas fueran formuladas.
4. **El problema de Basilea**: $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Detengámonos brevemente en la historia de este famoso problema para tratar de mostrar el encanto del quehacer matemático.

El interés de asignar un valor a las sumas infinitas nació en la edad antigua, ligado a especulaciones filosóficas y al cálculo de magnitudes geométricas y físicas. Estudiar si las sumas convergen hacia un número o si existe un valor plausible asignable a la suma de infinitos sumandos, ha sido uno de los retos de cualquier matemático que se precie. Y encontrar el valor preciso hacia el que converge una suma infinita de cierta dificultad siempre ha aportado prestigio y reconocimiento a su descubridor.

En el siglo XVII ya se conocía que la serie armónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

formada por los inversos de los números naturales no es convergente; sus sumas parciales crecen indefinidamente sin estar acotadas por ningún valor finito.

También se conocía la suma de algunas series con términos simples, pero cuyas sumas parciales crecían con un aparente capricho. Por ejemplo, en 1672 el prestigioso físico y matemático Chistian Huygens le planteó al joven abogado y diplomático Gottfried Wilhelm Leibniz este reto:

Calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots$$

La respuesta de Leibniz, tras unos pocos días, fue original y reflejó una mente ingeniosa:

$$S = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots\right]$$

Escribió esas fracciones sumando de esta otra forma:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \quad \dots$$

Sustituyendo en la serie obtuvo:

$$S = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots\right] = 2 \cdot 1 = 2.$$

Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyó un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la *Royal Society* en 1673 y Leibniz se esforzó por hallar la suma exacta, pero no lo consiguió.

Leibniz comunicó a sus corresponsales Jacob y Johann Bernoulli el problema, y les dijo que en apariencia debía tener una solución tan simple como la de los números triangulares inversos. Y así lo pensaron Jacob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo no marchaba bien.

No fue difícil demostrar por comparación que su suma estaba acotada superiormente por la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, es decir por 2:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9} < \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{16} < \frac{1}{10}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad \dots \quad \text{para } n > 1.$$

Pero el resultado preciso de la suma se les negaba, hasta tal punto que lanzan públicamente este grito de socorro: “Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos”.

Desde entonces al problema se le conoce como *Problema de Basilea*.

3. Euler y la solución del problema de Basilea

En 1729 Euler recibió una carta de su amigo Christian Goldbach donde le señala un método de aproximación que lo lleva a estimar el valor entre $1,64$ y $1,66$. Goldbach reta a Euler para que lo mejore. En el momento de recibir este desafío, Euler, que contaba solo 22 años de edad, se encontraba en la Academia de San Petersburgo enfrascado en varios problemas concretos de cosmografía y de mecánica. Sin embargo, no se olvidó del reto y dos años más tarde, hizo pública una asombrosa aproximación de seis cifras decimales exactas: $1,643934$, transformando habilidosamente la serie en otra de convergencia mucho más rápida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} + (\ln 2)^2.$$

Varios años más tarde, un día que leía con interés una de las obras de Newton, la genialidad de Euler se desbordó al encontrar la idea de que el desarrollo en serie de la función seno estaba relacionado con la solución exacta del problema. Lo ingenioso será utilizar el desarrollo del seno no solo como sumas sino también como producto de infinitos factores. Newton, precisamente en esta obra, utilizaba con mucha eficacia la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces de los polinomios. Esto mismo intentó Euler con la serie de los inversos de los cuadrados.

Basándose en el desarrollo en series de potencias del seno:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Euler introduce la función:

$$P(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Utilizando el hecho de que los ceros de la función $P(x)$ se producen para los valores en que el numerador se anula (con excepción de $x = 0$, donde

$P(0) = 1$, es decir, para todo

$$x = n \cdot \pi, \quad \text{donde } n = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Entonces factoriza como si $P(x)$ fuese un polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\ldots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots \end{aligned}$$

Compara los términos de segundo grado en ambas expresiones:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$$

Y despeja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

> He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo...
>
> He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1.

Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735 y lamentablemente perdida.

Pero Euler no se detiene aquí. Entre 1740 y 1744, utilizando las mismas herramientas va a encontrar la suma de las series de los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$$

Ahora que su heurística (¡sin computadora electrónica!) lo ha llevado a tamaña hazaña está listo para incluir todos estos resultados en una obra más didáctica. Así, Euler (2000), en el capítulo X del tomo primero de la *Introducción al análisis de los infinitos* publicado en 1748, en la proposición 168, escribe una de las más llamativas páginas de la historia de las matemáticas:

> Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general
>
> $$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\dots$$
>
> que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo π; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con π.

Pero el espíritu inquieto y perspicaz de Euler no podía sentirse satisfecho con este resultado. Además, faltaban las sumas en el caso de n impar. En 1750 publica otro artículo donde señala los valores aproximados de las series armónicas de orden impar $n=2k+1$, para $k=1,2,\dots,7$. Y en su famoso *Tratado de Cálculo Diferencial* de 1755, al fin consigue exponer una elegante fórmula que relaciona el valor de las series armónicas de orden par con los números racionales de Bernoulli B_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=(-1)^{k-1}\frac{2^{k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$$

y entusiasmado lanza la conjetura sobre el caso impar:

$$¿\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+1}=\frac{p}{q}\pi^{2k+1}\,?$$

Los esfuerzos de Euler para probar la validez de esta conjetura fueron vanos. Pero puede servirle de consuelo que aún hoy, 255 años después, no se ha conseguido ni validar ni refutar su conjetura.

Lo más que se ha conseguido en la conjetura de las sumas de Euler $\zeta(2k+1)$ ha sido probar la irracionalidad de algunos de los valores. En efecto, en fecha tan cercana a nosotros como 1976, el francés Roger Apéry probó la irracionalidad para $n=3$. En el año 2000 se consiguió demostrar que existen infinitos valores de n impar para los que la suma es irracional. El último resultado hasta ahora conocido es de 2002, cuando el ruso Vladimir Zudilin, un joven investigador de la Universidad Lomonosov de Moscú, probó que al menos uno de los primeros valores para $n=5,7,9,11$ es también irracional.

Pero, ¿cuáles son de la forma $\frac{p}{q}\pi^{2k+1}$? Hasta el momento (noviembre de 2008) no sabemos nada mejor. La conjetura de Euler sigue siendo todo un misterio.

4. ¿Qué nos enseña Euler y la historia del problema de Basilea?

Ante todo que el cacareado rigor lógico depende del tiempo, de la madurez de las ideas en el enfrentamiento de los problemas. Por otra parte, y no menos importante, que la belleza del quehacer matemático no está en lo que apreciamos superficialmente, que uno de sus valores inestimables reside precisamente en la búsqueda perseverante *del orden, la simetría y la precisión* en las profundidades del pensamiento. Solo después de realizar ese maravilloso viaje a las entrañas históricas y epistemológicas del pensamiento matemático y comprender su mecanismo de desarrollo, cómo se hace y para qué nos sirve la matemática, entonces y solo entonces, nos convertimos en sus admiradores incondicionales y estamos en condiciones de convencer a otros de sus encantos intelectuales.

Estoy seguro que a muchos nos ha pasado que en los primeros encuentros con la música llamada "culta" la hemos sentido fría, austera, enigmática. Su belleza la hemos ido percibiendo poco a poco, pero cuando aprendemos a apreciarla nos seduce para siempre. En la pintura, la literatura, el cine y en todas las expresiones artísticas podemos encontrar ejemplos semejantes. Cuando logramos despertar nuestros sentimientos estéticos hacia la obra, entonces nos deja una huella imperecedera. Y ¿por qué no puede ser igual o parecido en la matemática?

Y ¿quién debe guiar al joven ávido de saber por el camino hacia la residencia de las bondades de la matemática?, ¿quién debe sensibilizar a los aprendices para que aprecien la verdadera belleza de las fórmulas y teoremas matemáticos? Por supuesto que los profesores de matemáticas. Y ¿cualquier profesor es capaz de lograr esto? Nos parece evidente que para ser un tal profesor se necesita una formación y un íntimo deseo de trasmitir la auténtica belleza de la Matemática.

Uno de los primeros maestros criollos de Cuba expresó con firmeza que "*instruir puede cualquiera, educar solo quién sea un evangelio vivo*". En muchos trabajos de Educación matemática de las últimas dos décadas encontramos concordancia con estas palabras del presbítero José Agustín Caballero (1762-1835). Citemos un artículo de Alsina (2001), que nos atrajo significativamente desde su título: *Why the professor must be a stimulating teacher*. En este sintético artículo se critican varios mitos y prácticas que existen en la enseñanza de las matemáticas y lo recomendamos al interesado. En particular, se desmitifica la tradición del *self-made-teacher* que se ha extendido sobre todo en el nivel universitario. No basta ser un buen investigador, para ser un buen profesor. No es suficiente tener talento para el pensamiento lógico, para ser un comunicador eficaz.

Como dijera un matemático del siglo XX investigador y educador de muchas generaciones de científicos de primer nivel y que no escatimó tiempo, ni esfuerzo para divulgar las bellezas de la matemática, Andrei Nikolayevich Kolmogórov (1903-1987):

> De los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión y la comprenda como una ciencia viva, en desarrollo.

Para aprender la matemática como una ciencia viva hay que tomar en cuenta el recurso de la historia. No han sido pocos los pensadores que han señalado la importancia de la dialéctica entre lo lógico y lo histórico para lograr la mayor eficacia didáctica. Recordemos al menos, el influyente libro de Lakatos (1982) donde como apéndice, en la edición española, aparece una atractiva discusión sobre el enfoque deductivista y el enfoque heurístico del que reproducimos un fragmento a continuación:

> El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.

Nuestra propuesta parte del principio elemental de que una nueva cuestión de estudio debe presentarse formalmente al educando solo cuando éste se encuentre *suficientemente motivado*. Y para aproximarnos a este nivel de motivación consideramos que la historia de la matemática debe ser nuestra guía principal. (Sánchez & Valdés, 1999).

El nuevo paradigma de la enseñanza de la matemática tiene que considerar toda la experiencia anterior y discriminar aquello que no aporta, lo que esconde la esencia, lo que impide ver la belleza del quehacer matemático y dejar lo relevante, lo pertinente, lo que trasciende no sólo del punto de vista lógico o práctico, sino también del punto de vista estético. Entonces, y solo entonces, el profesor podrá convencer a sus alumnos para que se dediquen a la búsqueda de aquello que el sabio Aristóteles calificaba como las supremas formas de belleza: *el orden, la simetría y la precisión*. Tenemos que partir de la premisa que nadie esta obligado a seguir el complicado sendero de las matemáticas, ni tampoco de usarla en la solución de sus problemas. Nosotros con pasión debemos mostrar a todos, expertos y aprendices, matemáticos y no matemáticos, las bondades de las ciencias matemáticas y su lugar en la sociedad del conocimiento que se construye hoy. En definitiva, nuestro reto principal es lograr trasmitir el auténtico y entrañable encanto del quehacer matemático.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2001). *Why the professor must be a stimulating teacher*, en Derek Holton. Editores The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, pags. 3-12, Kluwer Acad. Publishers. Netherlands

Dunham, W. (2000). *Euler el maestro de todos los matemáticos*. Madrid: Editorial NIVOLA.

Dunham, W. (2007). *The Genius of Euler: Reflection on his life and work*. Washington DC.: Mathematical Association of America.

Euler, L. (2000). *Introducción al análisis de los infinitos*. Editores A.J. Durán y F.J. Pérez. Sevilla: SAEM Thales.

Guzmán, M. (1996). *El papel del matemático en la educación matemática*, en Actas de ICME 8, Sevilla.

Lakatos, I. (1982). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Sánchez, C. & Valdés, C. (1999). *Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática*. Revista Ciencias Matemáticas. Vol. 17, N. 2, pp. 137-148.

Sánchez, C. & Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del Cálculo*. Madrid: Editorial NIVOLA.

Wells, D. (1990). *Are these the most beautiful?* Mathematical Intelligencer. Vol. 12, N. 3, 37-41.