

Las artes y la arquitectura como herramientas en la didáctica de la matemática¹

Mauricio José Orellana Chacín

Profesor Titular (J)

Facultad de Ingeniería

Universidad Central de Venezuela

Venezuela

juanorellana@cantv.net

Resumen²

En este artículo se presentan la didáctica de la matemática, las artes y la arquitectura como herramientas útiles en la divulgación y aprendizaje de la matemática. Se han abordado tres componentes fundamentales: la primera, presenta las diversas actividades que desempeñan los matemáticos y los docentes de matemática en cuanto a la parte conceptual, lo aplicado y lo pedagógico; la segunda, está enfocada hacia la matemática aplicada y vinculaciones de la matemática con otras áreas y, por último, la belleza de las obras de arte desde el punto de vista matemático. Para esto, se expone una gran variedad de ejemplos que vinculan la matemática y el arte.

Palabras clave

Matemática, arte, arquitectura, geometría, didáctica de la matemática.

Abstract

In this paper, the teaching of mathematics, the arts and architecture are presented as tools for outreach and learning of Mathematics. Three key components are addressed: First, the various activities performed by the mathematicians and mathematics teachers are presented in terms of the conceptual, the applied and the pedagogical. Second, it focuses on applied Mathematics and Mathematics connections with other areas and, finally, the beauty of works of art from the point of view of Mathematics. For this, we present a variety of examples that relate to Mathematics and Art.

Key words

Mathematics, Art, Architecture, Geometry, Mathematics Education.

¹ Este artículo se basa en la conferencia paralela que el autor presentó en la XII CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática) realizada del 15 al 18 de julio de 2007 en Querétaro, México.

² El resumen, las palabras clave, el abstract y las key words fueron agregados por los editores.

1. Planteamiento

En la enseñanza-aprendizaje (EA) de la matemática es usual, y bastante conocida, la utilización de la física, especialmente la mecánica, la ingeniería, la economía, y otras disciplinas. Dicha situación no está vigente en el caso de la arquitectura y mucho menos en las artes, donde hay un largo camino por recorrer. En este sentido, el autor ha dictado conferencias en instituciones de educación superior y de formación docente desde hace varios años, y algunas para docentes de la educación básica y diversificada (primaria y secundaria), mostrando la faceta de vinculaciones matemática-artes-arquitectura, ha escrito trabajos al respecto y concebido cursos para docentes de la educación secundaria y superior.

La importancia de relacionar matemática, artes y arquitectura, se debe a que *lo visual, la belleza de la visualización*, permite mostrar conceptos abstractos por intermedio de entidades físicas (Bruter, 2002). Asimismo con la música cuando al escuchar una melodía, asistir a un concierto, u otro espectáculo musical, expresamos con palabras la satisfacción que experimentamos mediante “esto es bello”, “que hermoso fue”, u otras frases análogas. Se trata en este caso de una “belleza auditiva”.

Además de la didáctica de la matemática, las artes (y la arquitectura) constituyen una herramienta útil en la divulgación de la matemática.³

Notemos que en los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME por sus siglas en inglés) hay un grupo temático sobre arte y matemática, iniciado en el ICME 7 en Québec (1992).

2. Marco teórico

Esto se apoya en tres mapas:

1) *El mundo matemático*.

En el mapa dado en la figura 1 se presentan las diversas actividades que desempeñan los matemáticos y los docentes de matemática en cuanto a la parte conceptual, lo aplicado y lo pedagógico. El grosor de las flechas indica la intensidad con que se desarrolla la enseñanza de la matemática según a quien se dirija.

³ Como es mencionado en varios artículos del libro de la “ICMI Study Series”, *The Popularization of Mathematics*, por Jean-Pierre Kahane & Geoffrey Howson (1990), University Press, Cambridge.

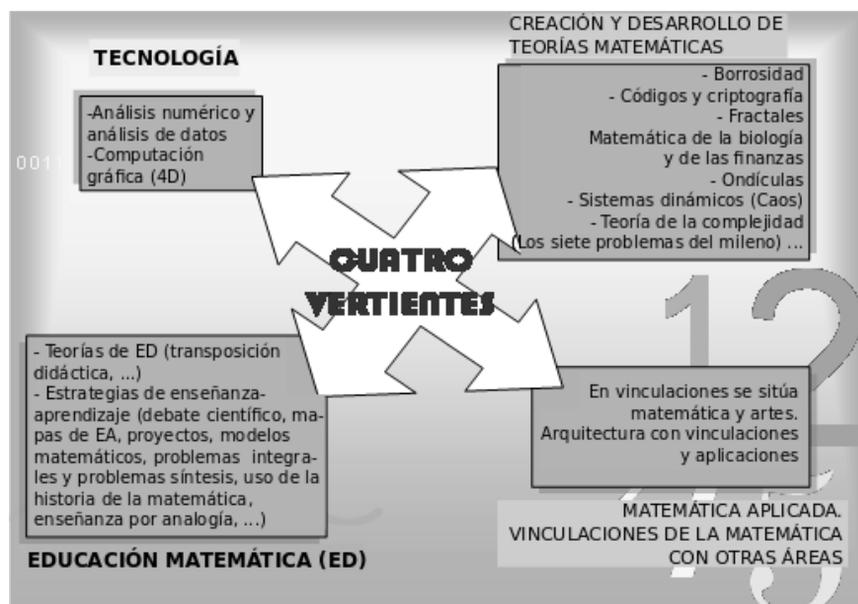


Figura 2: Vinculaciones de la matemática con otras áreas

2) *Las cuatro vertientes o corrientes del desarrollo de la matemática y la educación matemática a partir de la década de los setenta (y algunas en la década de los sesenta).*

De estas vertientes interesa, para los fines de este artículo, la referida a la matemática aplicada y vinculaciones de la matemática con otras áreas. En el caso de las artes no es adecuado decir “aplicación” de la matemática pues la misma no es utilizada para establecer leyes, demostrar propiedades, enunciar principios, como se hace en las ciencias y la ingeniería.

Ya el gran artista suizo Max Bill⁴ (1908-1994, arquitecto, pintor, escultor y diseñador) escribió en 1949:

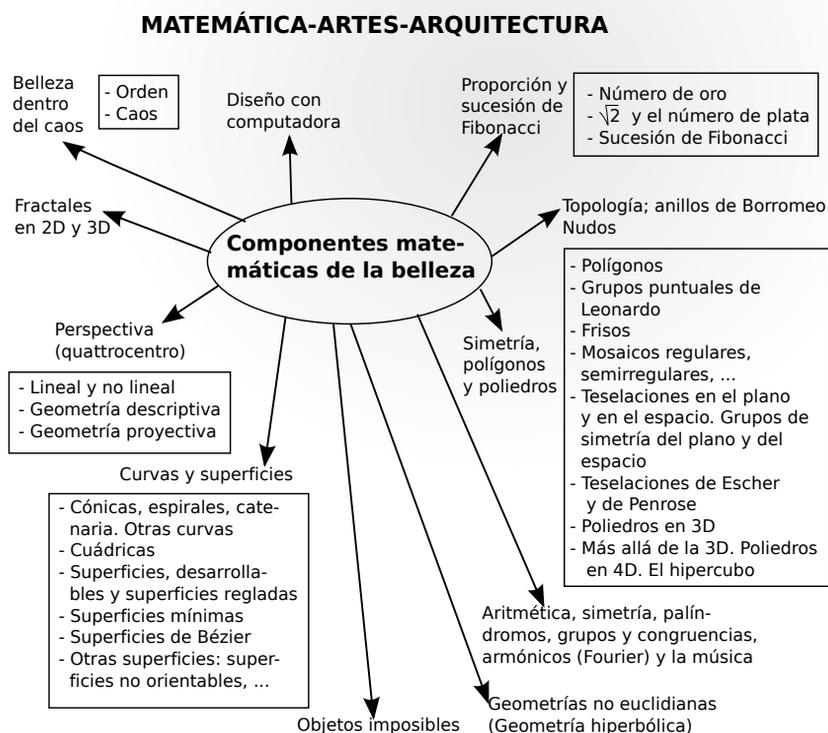
¿Hace falta decir que yo creo que un enfoque matemático del arte no se identifica en absoluto a ningún ingenioso sistema de cálculo que se base en fórmulas ya hechas? No obstante en lo que concierne a la composición, se puede afirmar que todas las escuelas artísticas, hasta la fecha han tenido fundamentos más o menos matemáticos. (Emmer, 2005, p. 73)

⁴ Max Bill fue uno de los primeros artistas en utilizar la banda de Möbius en escultura en una obra titulada “Banda sin fin” (1935), en granito de 4,5 m de altura.

3) *Once componentes de la belleza desde el punto de vista matemático*⁵.

La indicada como “Diseño con computadora” está presente en las otras pero se ha separado con el fin de destacarla.

En las conferencias, señaladas en la primera sección “planteamiento”, se presenta una galería de obras de arte y arquitectura (diapositivas) en las que se hace referencia y análisis de las componentes matemáticas intervinientes en dichas obras. Además, en aquellas dedicadas a los institutos de formación docente se dan ejemplos de tipo didáctico, algunos de éstos los presentamos en la próxima sección de metodología.



Otras que intervienen: Curvas de anchura constante, hélices, espacios fibrados, superficies algebraicas, superficies splines, grafos, ...

Figura 3: Matemática, arte, arquitectura

⁵ Al finalizar los tres ejemplos que desarrollaremos en la próxima sección se citarán, a título de información, una variedad de vinculaciones de la matemática con las artes, la arquitectura y la vida cotidiana, dando los nombres de algunos de los artistas, arquitectos, diseñadores, ingenieros y matemáticos que los han hecho posibles.

3. Metodología

- 1) Recopilación y análisis de trabajos vinculados con el tema en consideración.
- 2) Diseño de cursos sobre el tema.
- 3) Dictado de minicursos y conferencias acerca de las vinculaciones matemática- artes-arquitectura, desde hace más de diez años. En éstas se presenta, como se indicó anteriormente, una galería de obras de arte y arquitectura y el análisis de las mismas en cuanto a las componentes matemáticas del tercer mapa. El autor tiene recopilado unas 700 diapositivas en cuestión.
- 4) Algunos trabajos escritos (Orellana, 2002) y su contribución en (Fundación Empresas Polar y Últimas Noticias, 2006), además de los dos tomos previos (2004) auspiciados por la Fundación Empresas Polar y publicados en el diario Últimas Noticias (Carrera de Orellana, Chovet, Orellana y Valdivieso, 2007).

3.1. Ejemplos de tipo didáctico

1. Compensaciones o correcciones visuales

Frecuentemente es necesario escribir en columnas, torres o paredes; acerca de esto, el que quiera escribir algo en lo alto de manera que las letras cercanas a la parte más alta se vean tan grandes como las cercanas a la parte más baja, éste debe hacer las más altas más grandes que las inferiores... (Dureró, 1987, p. 158)

Lo escribió Dureró⁶ en el siglo XVI. Los problemas de geometría y visión vienen desde la Óptica de Euclides, puesto que un objeto que se aleja de nosotros aparece progresivamente de tamaño más pequeño y, al contrario, si se acerca se ve más grande. Este efecto visual debe ser tomado en cuenta cuando se construyen estructuras muy elevadas desde el piso, como estatuas, también con pinturas en techos muy altos, pues en tal caso nuestro ángulo visual es algo grande. Así, es necesario grabar motivos más grandes en lo alto de una columna monumental que en su base, si se quiere que los primeros sean percibidos del “mismo tamaño”, es decir bajo el mismo ángulo desde el punto de vista de un observador.

La famosa Columna de Trajano en Roma (aproximadamente 40 m de altura incluyendo el pedestal), conmemorando las victorias del emperador Trajano (53-117) sobre los dacios (pueblo de Rumania), con un relieve esculpido en forma helicoidal (23 vueltas a la columna). Como se lee desde abajo, para

⁶ A. Dureró (artista y geómetra, Alemania, 1471-1528) escribió obras dirigidas a los pintores, canteros y arquitectos, entre otros.

lograr el efecto de perspectiva se hace necesario escribir las letras superiores ligeramente más grandes que las inferiores.



Figura 4: Columna de Trajano en Roma. Hélice circular dextrógira. Fotografía M. Orellana, agosto de 2008

¿Cuánto más grandes?

Para encontrar la respuesta observemos las siguientes figuras de Durero (1987), que sugieren la construcción matemática a realizar.

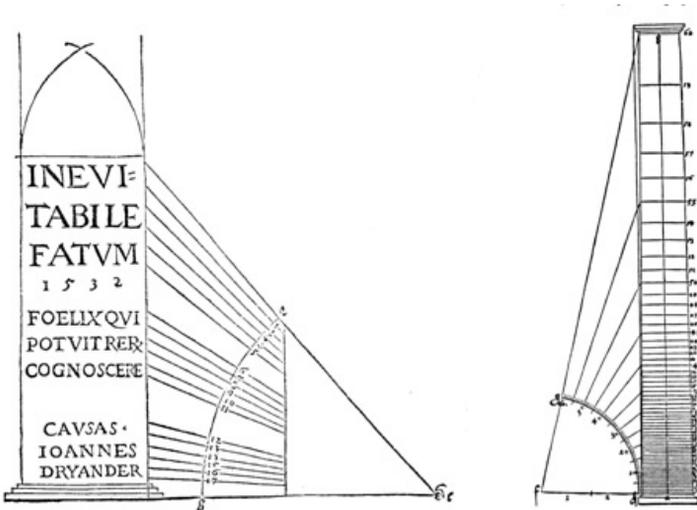


Figura 5: Figuras de Durero

En las mismas se observa que ángulos iguales proyectados sobre una recta subtienden segmentos verticales desiguales. Análogamente, segmentos verticales iguales proyectados sobre un arco subtienden ángulos desiguales.

La parte matemática entra ahora en juego mediante la función tangente explicada con el siguiente gráfico:

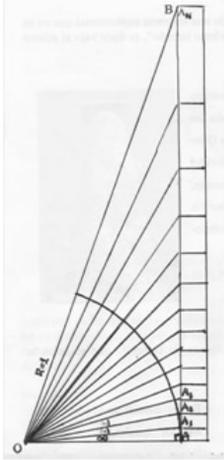


Figura 6: Función tangente

Consideremos $OA = 1$. Luego, los segmentos verticales miden $AA_1 = \tan \alpha$, $AA_2 = \tan 2\alpha$, \dots , $AA_N = \tan(n\alpha)$, si hay n ángulos α ($n = 14$ en el dibujo). Supongamos, para aclarar que $n = 5^\circ$, entonces (redondeando a 5 decimales): $AA_1 = \tan 5^\circ = 0,08749 < AA_2 = \tan 10^\circ = 0,17633 < \dots < AA_N = \tan 70^\circ = 2,74748$, lo cual es consecuencia de que la tangente es creciente en $[0^\circ, 90^\circ)$, no uniformemente (no es una función lineal). De forma general se tiene que $AA_2 = \tan 2\alpha \neq 2 \tan \alpha = 2AA_1$ y $0,08884 = A_1A_2 = AA_2 - AA_1 > AA_1$. Análogamente para los otros segmentos. Por lo tanto, este tipo de construcción, justificada en trigonometría, compensa la percepción visual para objetos elevados.

Se puede demostrar de manera general que resulta una sucesión creciente de segmentos.⁷

A medida que crece el ángulo visual la tangente crece y los segmentos verticales se hacen bastante grandes. El gran genio del Renacimiento italiano, Miguel Ángel (1475-1564), utilizó una construcción análoga a la de Durero (1987) para la decoración de la Capilla Sixtina en el Vaticano, como puede observarse en El Juicio Final en donde, al mirar una fotografía, las figuras superiores se ven más grandes pero al nivel de un observador colocado en el piso lucen de “un mismo tamaño”.

Un problema del mismo género fue planteado también el año que nació Durero, 1471, por Johannes Müller (llamado Regiomontano; Alemania, 1436-1476): “A qué punto sobre el piso debe levantarse perpendicularmente una vara para que aparezca lo más grande”.

Es posible que el mismo tenga su origen como un problema de arquitectura, de pintura o de escultura a los fines de encontrar la posición más favorable para mirar desde el piso una ventana, un cuadro o una estatua.

⁷ Apéndice I



Figura 7: El Juicio Final, de Miguel Ángel

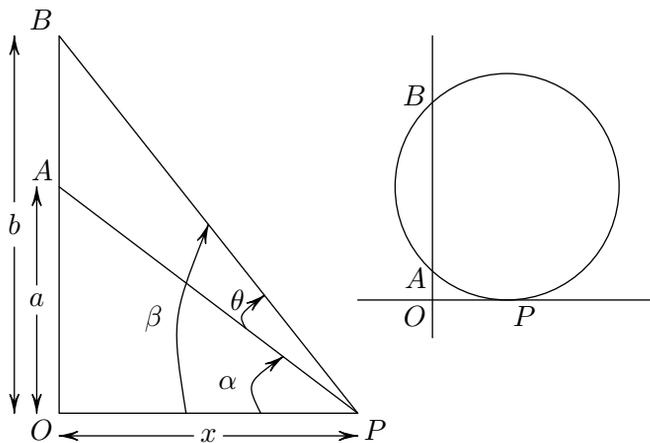


Figura 8: Esquema del problema

Sean $OA = a$, $OB = b$, $OP = x$, y los ángulos allí marcados. Se debe encontrar θ máximo (ángulo visual) que relacionamos con la distancia x mediante la función tangente o la función cotangente. Actualmente es un problema sencillo de extremos de una función:

$$y = \tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{b/x - a/x}{1 + (ba)/x^2} = \frac{(b - a)x}{x^2 + ab}.$$

Derivando en relación a x e igualando a cero se obtiene $x = \sqrt{ab}$, esto es la media geométrica de las alturas de los bordes inferior y superior de la vara (ventana o cuadro). Fácilmente se construye x con la circunferencia que pasa por A y B y es tangente al piso OP , lo cual se deduce con la potencia del punto O respecto de dicha circunferencia ($OP^2 = OA \cdot OB$).⁸

Este ejemplo, derivado de la perspectiva y la arquitectura, pone en juego diversos contenidos matemáticos: función tangente o función cotangente de ángulos, derivadas, ángulos en una circunferencia, potencia de un punto respecto de una circunferencia, medias aritmética y geométrica, desigualdades.

2. Cálculo sobre pirámides

El gran historiador griego Herodoto (ca.485–425a.C.) visitó el valle de Giza en el s. V a.C., tomó algunas medidas sobre la Gran Pirámide (Khufu, en griego Keops), una de las Siete Maravillas del mundo antiguo, e interrogó a algunos de sus moradores, entre ellos al Sumo Sacerdote, en relación a cómo y por qué se determinaron las medidas de la Gran Pirámide. La respuesta fue: “La Pirámide fue construida tal que el área de cada cara lateral sería igual al área de un cuadrado cuyo lado es igual a la altura de la Pirámide”.

Sabemos que tal pirámide es de base cuadrangular.



Figura 9: Pirámides en el valle de Giza

La imagen (figura 9) muestra las tres pirámides: Micerinus, Kefren y Keops en el valle de Giza. Esta última data de 2480 a.C.±5.

En Egipto se construyeron unas cincuenta pirámides. Una de ellas es la de Maydun, la pirámide desplomada que es escalonada, cuyo triángulo meridiano

⁸ Apéndice II

obtenido al extrapolar los lados es un triángulo de oro $72^\circ - 36^\circ - 72^\circ$. En cambio, en la de Keops el triángulo meridiano VEF es $52^\circ - 76^\circ - 52^\circ$.

¿Cuáles relaciones cuantitativas podemos deducir a partir de este dato y de la respuesta del Sumo Sacerdote?

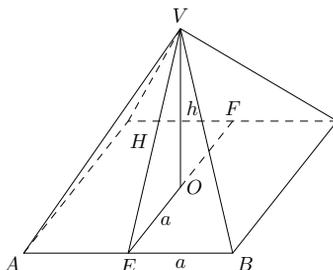


Figura 10: Esquema de la pirámide

Sean $AB = 2a$ el lado del cuadrado base, h la altura de la pirámide y H la altura de una cualquiera de sus caras triangulares, como la indicada mediante VAB .

Según lo expresado por el Sumo Sacerdote se tiene $h^2 = aH$.

Como $H^2 = h^2 + a^2 = aH + a^2$, se deduce que $(H/a)^2 = H/a + 1$, ecuación cuya raíz positiva es el número de oro

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Luego, $H/a = \phi$.

De otra parte, de $h^2 = aH$ se deduce $H^2/h^2 = H/a = \phi$, de donde $h/a = H/h = \sqrt{\phi}$.

Estas relaciones se comprueban mediante mediciones que hizo Herodoto: el perímetro de la base $L = 8a = 2000$ codos. Como 1 codo = 46 cm, entonces $L = 920$ m y el lado $2a = 230$ m. De otra parte, originalmente la altura media $h = 146,4$ m, por lo tanto, comprobamos que: $h/a = 146,4/115 \approx 1,273 \approx \sqrt{\phi}$ ($= 1,272 \dots$, error porcentual 0,079%). Como $H = \sqrt{h^2 + a^2} \approx 186,166$, se tiene $H/a \approx 1,619 \approx \phi$ (error porcentual 0,062%). Además $\angle OEV = \arctan h/a \approx 51,849^\circ \approx 52^\circ$ el ángulo de inclinación de la pirámide en la parte más baja (en el medio el ángulo cambia a $43,5^\circ$).

Para la arista mayor de la pirámide, VB , se tiene: $VB = \sqrt{H^2 + a^2} = a\sqrt{(H/a)^2 + 1} = a\sqrt{\phi^2 + 1}$ y de aquí se deduce que $VB/a = \sqrt{\phi^2 + 1} = \sqrt{\phi + 2} \approx 1,902$ (pues $\phi^2 = \phi + 1$); además $VB \approx 218,821$ m.

Otra relación interesante fue encontrada por Kepler: Si Δ denota 4 veces el área de una cara lateral ($4 \cdot aH = 4 \cdot h^2 \approx 85732 \text{ m}^2$) y S el área de la base cuadrada ($230^2 \text{ m}^2 = 52900 \text{ m}^2$), resulta que $(\Delta + S)/\Delta = \Delta/S$ pues $\phi = 1/\phi + 1$.

De otra parte, haciendo “la cuadratura” del círculo “físicamente” mediante una cuerda y con un equipo de trabajadores tirando de la misma, de tal forma que la longitud de la circunferencia y el perímetro de la base cuadrada sean iguales ($2\pi R = 8a$) y construyendo la pirámide de tal manera que su altura sea el radio R , resulta $h = R = 8a/2\pi = 4a/\pi$, entonces $\tan(\angle OEV) = h/a = 4/\pi$, de donde $\angle OEV = \arctan 4/\pi \approx 51,855^\circ \approx 52^\circ$ (con $\pi = 3,1416$). Además $h = 4a/\pi \approx 146,42$ y $L/h = 920/146,42 \approx 6,283 \approx 2\pi$.

¿Cuál fue el factor en el diseño de la Gran Pirámide, ϕ o π ?

Además, no olvidemos que en el s. VI a.C. Thales determinó la altura de una pirámide utilizando la sombra de un bastón y la semejanza de triángulos rectángulos. Este ejemplo, con la obra excelsa de la arquitectura egipcia, pone en juego diversos contenidos matemáticos relacionados con ϕ , π , área de triángulos, teorema de Pitágoras, teorema de Thales (semejanza de triángulos), error porcentual, aunado a la riqueza de la parte histórica. En Ghyka (1998) hay un estudio bastante completo de la pirámide de Keops.

3. Espirales

El gran genio del Renacimiento, Leonardo da Vinci⁹ (1452-1519) se apoyaba frecuentemente en la naturaleza para el diseño de sus obras:

Así, se tiene el yelmo de Escipión el Africano y el estudio de Leda basado en la amonita, mostrando el cabello arreglado como una espiral logarítmica, lo que utilizó en “Leda y el cisne” (1519).



⁹ Leonardo encarna el ideal del Renacimiento en cuanto a la unidad de la ciencia, la tecnología y las artes. Dos de sus citas famosas relacionadas con matemática son: a) “No me lea quien no sea matemático”; b) “Ninguna investigación puede ser ciencia a menos que ella siga su camino a través de la exposición matemática y la demostración”.

Figura 11: Fuente: Theodore A. Cook “The Curves of the Life” (1914).



Figura 12: Estudio de Leda y Leda y el Cisne de Leonardo Da Vinci

Mostramos otra vinculación con el mito de Leda, en el s. XX:



Figura 13: Leda Atómica
Salvador Dalí

Salvador Dalí (España, 1904-1989; uno de los máximos exponentes del surrealismo) también pintó a Leda, en “Leda atómica” (1949). Este cuadro lo comenzó a trabajar en 1945, posterior a la explosión de la bomba atómica en Hiroshima, y lo concluyó en 1949.

Aquí un organizador es el pentagrama vinculado con la proporción divina ϕ .

Dalí realizó varios estudios y en la armonía con el pentagrama intervino el matemático húngaro Matila Ghyka de quien Dalí era amigo¹⁰.

El mito de Leda es el siguiente: Leda (hija del rey de Etolia, Testio, y de Eurítemis) se casó con Tindáreo. Zeus, padre de los dioses del Olimpo, se enamoró

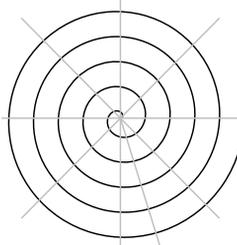
¹⁰Dalí, así como Leonardo, intentó fusionar arte y ciencia. Tuvo contacto y vínculos de amistad con renombrados científicos, algunos de ellos matemáticos, como M. Ghyka, René Tom y Thomas Banchoff y los premios Nobel Severiano Ochoa, Denis Gabor, James Watson e Ilya Prigogine. Dalí expresó: “Los pensadores y literatos no me aportan absolutamente nada. Los científicos, todo, incluso la inmortalidad del alma”.

de Leda y como ésta no lo aceptaba, se convirtió en cisne. Se dice que la misma noche que Tindáreo se unió con Leda también lo hizo Zeus, en forma de cisne, y de esta unión resultaron dos huevos de los que nacieron gemelos: Cástor y Pólux (conocidos como los Dioscuros) y Helena y Clitemestra, uno de cada pareja era mortal y el otro inmortal. Helena es la famosa de la Ilíada, esposa de Menelao, raptada por Paris y llevada a Troya, lo que provocó la guerra entre los griegos y los troyanos. Cástor y Pólux, héroes mitológicos de Esparta, están identificados como las dos estrellas más brillantes de la constelación Géminis (tercer signo del zodiaco).

En relación con Leda atómica de Dalí, se señala que Dalí se identificó con Pólux y su hermano fallecido, Salvador, podría representar al hermano gemelo mortal, Cástor y, de la otra pareja, su hermana Ana María sería la mortal Clitemestra y Gala, su esposa y musa quien le sirvió de modelo, la divina Helena.

Las dos espirales más usuales son *la espiral de Arquímedes o uniforme* y *la espiral logarítmica o equiangular*. En la de Arquímedes las vueltas tienen el mismo ancho, están en progresión aritmética, y en la logarítmica el ancho de las vueltas crece en progresión geométrica, como mostramos a continuación:

Las vueltas tienen el mismo ancho (progresión aritmética).



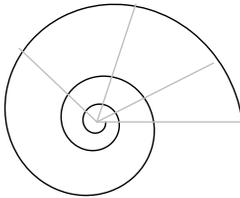
Espiral de Arquímedes:

$$\rho = a\theta, \quad a > 0.$$

$$P_0(\rho_0, \theta_0), \dots, P_n(\rho_n, \theta_n)$$

con $\theta_n = \theta_0 + n\alpha$, $\rho_n = a\theta_n$,
 $n \geq 0$
 $\rho_n - \rho_{n-1} = a\alpha$

El ancho de las vueltas crece en progresión geométrica.



Espiral Logarítmica:

$$\rho = ae^{b\theta}, \quad a, b > 0.$$

$$\ln \rho = b\theta, \quad a = 1.$$

$$\rho_n = ae^{b\theta_n}$$

$$\rho_n / \rho_{n-1} = e^{b\alpha}$$

Caso $\theta_0 = 0$, $\alpha = 2\pi$, $\theta_n = 2\pi n$

Coloquemos dos ejemplos más recientes: un relieve (1982, Ex Nihilo, La Creación) de Frederick Hart (Estados Unidos, 1943-1999) y un vitral de Rodney Winfeld (1974, El vitral del espacio, conmemorando el lanzamiento del Apolo XI en 1969 por la NASA), ambos en la Catedral Nacional de Washington D.C.



Figura 14: La Creación de Hart (Foto de M. Orellana, 2006) y vitral de Winfeld.

La espiral logarítmica pasa por cinco codos en el relieve (ordena la escultura) (Atalay, 2006). En la Creación (Ex Nihilo, sacar de la nada), figurativamente: fuera del caos que precede a la Creación. Se refiere a la creación de los humanos mostrando la vida emergiendo de la nada: “Una representación del género humano emanando del torrente arrollador del caos”. F. Hart expresó: “Yo veo Ex Nihilo (de la nada), el arco del portal central, como una simple expresión de la Creación, como la metamorfosis del espíritu y la energía divina. Las figuras emanan del vacío del caos, capturadas en el momento de la transformación eterna -la majestad y misterio de la fuerza divina en un estado apropiado”.

En cuanto al “Vitral del Espacio” (Space Window), tiene incrustado en el polo de la espiral un pedazo de roca lunar de 3,5 millardos de años de antigüedad. Es como un ocho con una doble connotación: la trayectoria del vehículo espacial y el símbolo de infinito, (Atalay, 2006).

En la naturaleza, en el arte y en la arquitectura son frecuentes las hélices y las espirales, especialmente la espiral logarítmica. Las hélices y las espirales figuran en muchas conchas de moluscos, en cuernos de animales, en el orden jónico, en la cultura Celta, en la doble escalera circulatoria en el Museo del Vaticano diseñada por Leonardo da Vinci, en cabezas de violines, en el diseño del museo Guggenheim en Nueva York de Frank Lloyd Wright (la rampa en espiral inspirada en la cámara del Nautilus), escalera en espiral del Arco de Triunfo en París. Además, el vuelo de los halcones para atacar a su presa se realiza según esa espiral (espiral equiangular).

¿Qué razón matemática hay para ese uso intensivo de la espiral logarítmica, además de suministrar belleza y organización en arte y arquitectura?

Jacobo Bernoulli (Suiza, 1654-1705) le dedicó un tratado y la denominó *Spira Mirabilis* (espiral maravillosa). Es una espiral equiangular (la única curva que tiene esta propiedad), es invariante por muchas transformaciones: por inversión, es su propia evoluta¹¹, es su propia curva podaria o pedal, es su propia cáustica, una homotecia lo que hace es rotarla.



Figura 15: Tumba de Jacobo Bernoulli

Por lo mismo, en la tumba de Bernoulli, en Basilea, está grabado “*Eadem mutata resurgo*” (*Aunque me cambien, volveré a aparecer de la misma forma*). También se dice: *Mudada, resurge por el mismo camino*.

Finalizamos con una obra de M. Escher (Holanda, 1898-1972): Superficie esférica con peces (1958, grabado sobre madera con dos planchas, diámetro 32 cm).

¹¹ La cicloide tiene la misma propiedad con la diferencia que la evoluta de una cicloide es otra cicloide idéntica pero cambiada de lugar respecto de ella.



Figura 16: Superficie esférica con peces, Escher.

Las loxodromas de la esfera o curvas de igual rumbo son las que cortan a los meridianos bajo ángulo constante. En el mapa de Mercator (1569) los paralelos, los meridianos y las loxodromas se representan como rectas. En cambio, en la proyección estereográfica desde el polo Norte, los paralelos se proyectan en circunferencias concéntricas en el polo Sur (S), los meridianos en rectas que pasan por S y las loxodromas en espirales logarítmicas de polo en S.

Notamos que en ese grabado de Escher (figura 16) los peces son de mayor tamaño cuando están cerca del ecuador y son más pequeños cerca de los polos. Son dos filas alternas de peces blancos y negros que nadan en espiral (loxodromas) partiendo del polo visible. Aquí se tiene una “representación del infinito” con dos centros: el inicio y el fin entre los cuales se desplazan los peces.

Observemos que en estos tres ejemplos, lo primero que se presenta es un contexto histórico o artístico o arquitectónico y, a posteriori, lo correspondiente a matemática. No siempre es posible hacer esto pero luce lo más conveniente.

Existe gran “variedad de ejemplos” vinculando matemática-artes-arquitectura, y la vida cotidiana, útiles como herramienta en la didáctica de la matemática. Se derivan del tercer mapa e indicaremos a continuación algunos de ellos, colocando entre paréntesis los nombres de artistas, arquitectos, diseñadores, ingenieros y matemáticos, relacionados con los mismos, así como títulos de algunas obras. Entre otros:

1. *Curvas*: cónicas, catenarias, espirales, hélices, loxodromas, hipocicloides, curvas de anchura constante especialmente el triángulo de Reuleaux (Leonardo da Vinci, J. Bernoulli, Diego Velázquez, Jesús Soto, Patricia van Dalen, Eero Saarinen, V. Tatlin, A. Gaudí, M. Escher, Frederick

- Hart, Rodney Winfeld, Frank Lloyd Wright, Edward Edwards, Zvi Hecker, Doerthe Gatermann, Helaman Ferguson, M. Emmer).
2. *Superficies, topología, nudos y anillos de Borromeo*: banda de Möbius, botella de Klein, esfera cornuda de Alexander, helicoides rectos, toros, paraboloides, hiperboloide de una hoja, paraboloides hiperbólicos, además de lo clásico con cilindros, conos y esferas (Leonardo da Vinci, Max Bill, M. Escher, Paul Ryan y John Lee, Jose de Rivera, Charles Perry, M. Escher, Bob Maiden, Charles Ray McBride, Ben van Berkel y Caroline Boos, Max Reinhardt, Nicky Stephens, Elisabeth Zimmermann, Keisho Ushio, V. Shújov, A. Pevsner, O. Niemeyer, Alfredo Jahn, Jan Berkam, F. Candela, E. Torroja, Guy Obata, Pier L. Nervi, Miguel Fisac, Angel Duarte, Paul Bloch, Norman Foster, Helaman Ferguson, John Robinson, Nathaniel Friedman).
 3. *La cuarta dimensión. Poliedros en tres y cuatro dimensiones. Diagramas de Schlegel*. (Kepler, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, E. Abbott, M. Duchamp, Max Weber, M. Escher, George Hart, Araka Isozaki, Sanford Ponder, Salvador Dalí, Buckminster Fuller, Jimmy Alcock, La Defense, José Yturralde, Attilio Pierelli, Jorge Castillo, Thomas Banchoff).
 4. *Superficies mínimas* (Plateau, J. L. Lagrange, K. Weierstrass, Otto Frei, Paul Bloch, Celso Costa, Enneper, H. F. Scherk, H. Ferguson, R. Longhurst, Brent Collins, D. Schwalbe, John Bruning, Andy Cantrell, Stan Wagon, M. Emmer).
 5. *Isometrías y grupos. Mosaicos, teselaciones periódicas y no periódicas, polígonos nazaríes* (La Alhambra, John Robinson, M. Escher, R. Penrose, Eleni Mylonas, Tony Robbin, Lisbeth Clemens, Arlene Stamp, Teja Krašek).
 6. *Geometría hiperbólica* (Coxeter, M. Escher, D. Dunham, H. Ferguson).
 7. *Fractales* (arquitectura de la India, B. Mandelbrot, Fractal de Sierpinski en el Anoka High School y la NCTM, Jackson Pollock, Arlene Stamp, Pedro Morales, Anrika Rupp, Damián Jones, Agustín Mancilla, Ron Eglash).
 8. *Perspectiva y geometría proyectiva* (Murales y esculturas egipcias, La vesica, arte bizantino, miniaturas en la Edad Media, A. Lorenzetti, Duccio, Giotto, Brunelleschi-Masaccio-Donatello, Leon Battista Alberti, Perugino, Rafael Sanzio, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, D. Velázquez, Dick Termes; G. Désargues, B. Pascal, G. Monge, V. Poncelet).

4. Resultados

La motivación y el interés despertado que han generado las distintas opiniones de los asistentes a las conferencias, evidenciadas en encuestas realizadas al finalizar las mismas (130 encuestas). Varios docentes han manifestado interés en incorporar estos temas a sus cursos.

5. Conclusiones

Este es un campo que se encuentra en etapa incipiente, donde hay un largo camino por recorrer. Aquí caben dos preguntas claves:

1) *¿De qué manera las artes y la arquitectura ayudan en la enseñanza-aprendizaje de la matemática?*

2) *¿Qué forma apropiada podemos utilizar para incluir las artes y la arquitectura en la dimensión pedagógica de la matemática?*

Matemática-artes-arquitectura, es propicio para que docentes de la última etapa de la educación secundaria, de los institutos de formación docente y las universidades, lo introduzcan en sus planes de estudio y realicen experiencias en tal sentido. Al respecto consultar Denner (2002) y Bruter (2002).

Concluimos con otra cita de Max Bill ante la pregunta: *¿Cómo puede la matemática ser útil a un artista?*

Bill responde:

La matemática no es sólo uno de los medios esenciales del pensamiento primario y, por tanto, uno de los recursos necesarios para el conocimiento de la realidad circundante, sino también, en sus elementos fundamentales, una ciencia de las proporciones del comportamiento objeto a objeto, de grupo a grupo, de movimiento a movimiento. Y ya que esta ciencia tiene en sí elementos fundamentales y los pone en relación significativa, es normal que estos hechos puedan ser representados, *transformados en imágenes*. (Emmer, 2005) (*Cursivas nuestras*)

Bibliografía

- Atalay, B. (2006). *Math and the Mona Lisa. The art and science of Leonardo da Vinci*. Smithsonian Books, Estados Unidos.
- Bruter, C. (2002). Mathematics and Art. Mathematical Visualisation in Art and Education. Springer. *Actas del coloquio de Maubege*.
- Carrera de Orellana, I., Chovet, R., Orellana, M. y Valdivieso, R. (2007). Un reto de divulgación matemática: encartados en un diario. *Comunicación científica en la XII CIAEM*, Querétaro, México.
- Denner, R. (2002). *Regards sur le colloque (Maubege) au travers de l'enseignement en classes de collège*. <http://arpam.free.fr/denner.htm>.
- Durero, A. (1987). *Instituciones de geometría*. Traducción del latín e introducción de Jesús Yhmooff Cabrera, Universidad Nacional Autónoma de México. Texto en latín data de 1535.
- Emmer, M. (2005). Visual mathematics: mathematics and art. En "The Visual Mind II" (Edit. M. Emmer), 59-90. *The MIT Press, Cambridge, Mass.* <http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/emmero505.pdf>
- Fundación Empresas Polar y Últimas Noticias (2006). *Matemática Maravillosa*. Caracas.
- Ghyka, M. (1998). *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*. éditions du Rocher. El original data de 1927.
- Gromov, M. (1998). Notices of the AMS, **45**, No. 7, 846-847.
- Livio, M. (2003). *The Golden Ratio. The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books, New York.
- Maor, E. (2002). *Trigonometric Delights*. Princeton University Press.
- Orellana, M. (2002). *La belleza desde el punto de vista matemático*. Conferencia inaugural en el Seminario Números y Figuras: Reflexiones matemáticas sobre las artes plásticas (2000). Comisión de Estudios Interdisciplinarios, Universidad Central de Venezuela, No. 15, 17-72.

Apéndices

I

La demostración general que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ forman una sucesión creciente, es la siguiente (Figura 6, página 142): $AA_{m-1} = \tan(m-1)\alpha$, $AA_m = \tan(m\alpha)$, $AA_{m+1} = \tan(m+1)\alpha$. Se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\tan(m+1)\alpha - \tan(m\alpha)}{\tan(m\alpha) - \tan(m-1)\alpha} \\ &= \frac{\tan[(m+1)\alpha - m\alpha][1 + \tan(m+1)\alpha \cdot \tan(m\alpha)]}{\tan[(m\alpha) - (m-1)\alpha][1 + \tan(m\alpha) \cdot \tan(m-1)\alpha]} \\ &= \frac{(\tan \alpha)[1 + \tan(m+1)\alpha \cdot \tan(m\alpha)]}{(\tan \alpha)[1 + \tan(m\alpha) \cdot \tan(m-1)\alpha]} \\ &= \frac{1 + \tan(m+1)\alpha \cdot \tan(m\alpha)}{1 + \tan(m\alpha) \cdot \tan(m-1)\alpha} \end{aligned}$$

Por reducción al absurdo se demuestra que ese cociente es mayor que uno (los ángulos considerados pertenecen al intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$ y la función tangente es creciente en el mismo).

En consecuencia

$$\frac{AA_{m+1} - AA_m}{AA_m - AA_{m-1}} = \frac{A_m A_{m+1}}{A_{m-1} A_m} > 1 \Rightarrow A_m A_{m+1} > A_{m-1} A_m.$$

II

¿Cómo construir una circunferencia que pase por dos puntos dados A, B y sea tangente a una recta dada t que no es paralela a la recta AB?

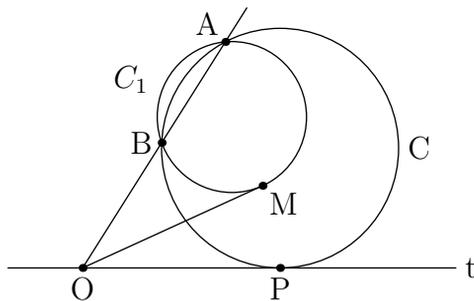


Figura 17: Esquema de la situación

Se traza una circunferencia C_1 que pase por A y B. La recta AB corta t en el punto O. Se traza la tangente OM a C_1 . Se verifica $OM^2 = OA \cdot OB = OP^2$,

de donde $OP = OM$ y esta igualdad determina el punto P . Ahora es fácil construir la circunferencia C que pasa por los tres puntos no alineados A , B y P . Otra solución con OP' a la izquierda de O .

Desde el punto de vista geométrico se puede comprobar que esa construcción suministra el ángulo visual máximo θ en el punto P , es decir que la circunferencia que pasa por los puntos A , B y el punto buscado P tiene que ser tangente a t .

Si C corta la visual horizontal en dos puntos M y N , entonces el ángulo APB subtendido por cualquier punto P en el segmento MN es mayor que los ángulos inscritos ANB (AMB) puesto que $\angle ANB = (\text{arco } AB)/2$, $\angle APB = (\text{arco } AB + \text{arco } A'B')/2 > (\text{arco } AB)/2$, pues P es un punto interior del círculo. Luego, el ángulo en P no sería el mayor.

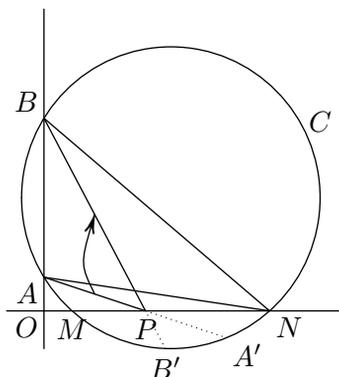


Figura 18: Esquema de la situación

En ese siglo no se había creado el cálculo infinitesimal y la solución tenía que ser de tipo geométrica (ángulos inscritos y ángulos interiores a una circunferencia) o algebraica (la propiedad que la media aritmética de dos números positivos es no menor que su media geométrica) (Maor, 2002, pp. 46-49): $y = \tan \theta = [(b-a)x]/(x^2 + ab) = [(b-a)/x]/[1 + (ab)/x^2] = (1/u)/(1 + v/u)$ siendo $u = x/(b-a)$, $v = ab/(b-a)x = (ab/x^2)/[(b-a)/x] = (ab/x^2)/(1/u)$. Luego, utilizando la desigualdad $u + v \geq 2\sqrt{uv}$, $u, v > 0$, y la igualdad teniendo lugar si y solo si $u = v$, resulta:

$$y = \tan \theta = (1/u)/(1 + v/u) = 1/(u + v) \leq 1/2\sqrt{uv}.$$

Como $\tan \theta = 1/(u + v)$ es creciente en el intervalo $[0^\circ, 90^\circ)$ y está acotada por $1/2\sqrt{uv}$, el máximo valor se alcanza con la igualdad $u = v$, esto es, $x/(b-a) = ab/(b-a)x$, de donde $x = \sqrt{ab}$.

Se puede proponer un ejemplo de tipo numérico como el siguiente: ¿ a qué distancia del pie de una estatua debe colocarse un observador de altura 1,7 m para ver lo mayor posible una estatua de 3,5 m de altura situada en un pedestal de 3 m?

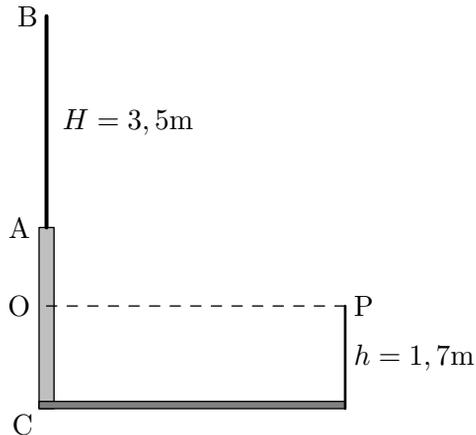


Figura 19: Esquema de la situación

Sea P el punto de corte de la recta que une los dos extremos verticales de la estatua con la horizontal a la altura de la cabeza del observador, $H = AB = 3,5$ m (altura de la estatua), $h = 1,7$ m (altura del observador), $CA =$ altura del pedestal = 3 m. Se tiene: $OA = 3 - 1,7 = 1,3$; $OB = 1,3 + 3,5 = 4,8$. $OP = \sqrt{4,8 \cdot 1,3} = \sqrt{6,24} \text{ m} \approx 2,50$ m. Este es el caso en que $h < CA$. Otro caso sería con $h > CA$, por ejemplo, vista desde la parte superior de un edificio. Si $h = CA$, es decir, el observador está situado a la altura de la estatua, la verá más grande cuanto más se acerque.