CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2006, Año 1, Número 1

CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA LECCIÓN DE MATEMÁTICAS[1]

Angel Ruiz
www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz
CIMM Matemática, UCR; AIEM Matemática, UNA.
Cristian Alfaro
crisalfaro2002@yahoo.es
Escuela de Matemática, UNA.
Ronny Gamboa
Escuela de Matemática, UNA.
ronny132000@yahoo.com

Resumen

Se hace un estudio sobre los objetivos fundamentales que debe tener una lección de matemáticas; para ello se hace una distinción entre conocimientos conceptual y *procedimental*, y su asociación con diferentes visiones sobre las matemáticas. Se afirma la necesidad de potenciar las formas de razonamiento y pensamiento matemático, abstracto, con base en andamios pedagógicos y culturales apropiados. Se puntualiza elementos pedagógicos en esa dirección y se enfatiza la relevancia de una estrategia basada en la resolución de problemas, y se reseñan aspectos de la experiencia japonesa sobre esta temática.

Abstract

We analyze the main objectives for the development of a mathematics lesson, clarifying conceptual and procedural knowledge and their association to different visions about mathematics and its nature. We strongly support the relevance of the conceptual and abstract dimensions of mathematical instruction upon the use of pedagogical and cultural leverage. It is strongly supported the utilization of a Problem Solving strategy, in this context we summarize some dimensions of the Japanese experience.

Palabras clave

Educación Matemática, Pedagogía, Matemáticas, Problemas.

Uno de los temas claves de la Educación Matemática es cómo debe ser el desarrollo de la lección para generar aprendizaje efectivo (podría usarse el término “significativo”, como en Ausubel (1968), pero dentro de una perspectiva más amplia) por parte de los estudiantes en torno al conocimiento matemático, tanto en sus contenidos como en el uso de sus métodos. De igual forma, se plantea como objetivo el fortalecimiento de destrezas en el razonamiento abstracto, lógico y matemático, cuyas aplicaciones no sólo se dan en

[1] Este artículo salió a la luz pública en el año 2004, publicado como: “Aprendizaje de las matemáticas: *conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas.”* Revista *UNICIENCIA*, Vol. 20 Número 2, 2003, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

las ciencias y tecnologías sino en toda la vida del individuo. De alguna manera, es éste el verdadero laboratorio y taller en el cual se condensa todo: aquí adquiere sentido toda la formación recibida por parte de los profesores así como las condiciones curriculares, pedagógicas, matemáticas e incluso de infraestructura que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje; se invocan muchos vectores.

Vamos a concentrarnos aquí, sin embargo, en algunos aspectos propiamente pedagógicos en el desarrollo de la lección. Las preguntas emergen: ¿qué debe aprenderse en una lección de matemáticas? ¿Cuál debe ser la orientación más conveniente para lograr éxito en el aprendizaje efectivo de las matemáticas por medio de la lección? En relación con lo primero, una lección de matemáticas debe proporcionar aprendizaje en el lenguaje y la cultura matemáticos, los algoritmos y procedimientos específicos de las matemáticas, destrezas de cómputo y medición pertinentes, pero también formas de razonamiento y destrezas en la construcción de modelos de naturaleza matemática, y entrenamiento y habilidades para la formulación y resolución de problemas. Todos estos objetivos deben ser realizados. ¿Qué se debe privilegiar estratégicamente? El dilema, para empezar, se puede poder en términos de cuáles dimensiones de las matemáticas deben poseer un énfasis en los procesos de enseñanza: ¿los aspectos conceptuales o aquellos de procedimiento?

CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS, NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

Para buscar una respuesta, en primer lugar, vamos a precisar los términos que usaremos. El *conocimiento conceptual* es aquel que se conecta fácilmente a otro conocimiento. Mientras tanto, el conocimiento de procedimientos, *procedimental*, refiere a los símbolos y las reglas que se memorizan sin relación con el entendimiento de esos símbolos y reglas. Estas dimensiones participan en la definición de los alcances de una clase. Puede llamarse este último también conocimiento *algorítmico*. Como bien consignan Monereo *et al*:

> "… llamamos a un procedimiento *algorítmico* cuando la sucesión de acciones que hay que realizar se halla completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema o de la tarea (por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón). En cambio, cuando estas acciones comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo (por ejemplo, planificar una entrevista o reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos más fácilmente manipulables) hablamos de procedimientos *heurísticos". (*Monereo *et al,* 1998*)*

Procedimientos heurísticos están íntimamente asociados a conocimiento conceptual.

En las visiones más tradicionales en la Educación Matemática se afirma que lo esencial es el dominio de los aspectos de cómputo antes de abordar los contenidos conceptuales. En esta visión se demanda un rendimiento rápido en el arte del cómputo, y el manejo de técnicas. Se afirma que en algún momento –siempre posterior- se tratará con los aspectos conceptuales. Sin embargo, la mayor parte de las veces sucede que el espacio destinado a los procedimientos es demasiado grande y la conexión con los conceptos, con la comprensión, se ve profundamente debilitada. De hecho, la mayoría de las lecciones que se desarrolla en Costa Rica en los niveles de primaria, secundaria y universidad enfatizan procedimientos. Las evaluaciones se suelen orientar hacia esos algoritmos y reglas. En las universidades, para ofrecer un ejemplo en este nivel educativo que podría tener incluso mayor preocupación por los aspectos conceptuales, los primeros cursos de cálculo diferencial no enfatizan el significado o aplicaciones de conceptos como los de la derivada o la integral, sino la colección enorme de reglas de derivación o métodos de integración. Los exámenes no son proyectos o construcción de modelos, sino repetición más o menos mecánica de técnicas.

Las visiones educativas más modernas, sin embargo, subrayan el carácter conceptual de las matemáticas y la importancia de relacionar los conceptos con los que el estudiante ya posee; en particular, lo que se llama el conocimiento informal que previamente los estudiantes poseen, y su bagaje cultural. Y se apunta a la utilización de situaciones matemáticas no rutinarias que exijan una elaboración no mecánica. Una orientación en esta dirección empuja hacia la heurística, aplicaciones, modelos, que conecten con los entornos sociales y físicos, recursos a la historia que permitan evidenciar el estatus cognoscitivo de los conceptos empleados, … Por supuesto, adelantando nuestra opinión, en las matemáticas coexisten ambos tipos de conocimiento, el punto es desarrollar una estrategia eficaz que favorezca el aprendizaje; sin duda, los profesores deben buscar que los estudiantes establezcan las conexiones entre el conocimiento conceptual y el procedimental.

Toda esta discusión está en correspondencia directa con la percepción que se tenga sobre las matemáticas. Si se afirma que es, por ejemplo, un lenguaje desprovisto de contacto con el mundo empírico, como en el Neopositivismo, las implicaciones son de un tipo (Ayer, A. J. 1936). Si el punto de vista es *logicista* (como en Frege o Russell) se enfatiza la deducción, al margen de conceptos contextualizados o relaciones con el entorno (véase Ruiz, A. 1990). Si lo que se subraya son sus dimensiones formales y estructurales, su consistencia por ejemplo (Hilbert, D.), se plantea otra orientación (véase Ruiz, A. 1990). Y otra visión pedagógica emerge si se piensa en las matemáticas como reflejos inductivos empíricos (Mill). Se puede pensar en las matemáticas como ciencia de patrones abstractos (Resnik 1975 y 1982). El asunto puede ser más explícito en cuanto a los procedimientos; como bien reporta Vilanova *et al*:

> "Thompson (1992) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido." (Vilanova *et al*, 2001)

Otra visión de las matemáticas, cercana al constructivismo filosófico y al cuasiempirismo (a lo Imre Lakatos o recientemente Philip Kitcher o Paul Ernest; véase Ruiz, A. 2003):

> "Una visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. La idea que subyace a esta visión es que "saber matemática" es "hacer matemática". Lo que caracteriza a la matemática es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. La idea de la enseñanza de la matemática que surge de esta concepción es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión de la Educación Matemática está en agudo contraste con la anterior en la cual el conocimiento." (Vilanova *et al*, 2001)

¿Qué son, entonces, las matemáticas? Las matemáticas deben verse, ya en nuestra opinión, como una ciencia natural aunque con características específicas (que incluso empujan hacia una *reinterpretación* de lo que son las ciencias). Las implicaciones de esto son varias: como ciencia natural, empuja una relación íntima entre las matemáticas y el mundo material y social. En términos epistemológicos: una relación mutuamente condicionante entre el objeto y el sujeto, una interacción de influjos recíprocos y cambiantes. También, se plantea una relación entre las matemáticas y las otras ciencias: una íntima vinculación teórica e histórica del conocimiento científico, lo que las hace un instrumento imprescindible para el progreso de éstas. Nuestra perspectiva de fondo:

> "… las matemáticas obtienen sus nociones elementales del mundo físico que siempre interviene y las operaciones o acciones que el sujeto realiza a partir de aquellas también corresponden al mundo. Las abstracciones originales, las abstracciones "*reflexivas*" (que son las que señala Piaget), y todos los diferentes tipos de abstracciones (siempre más o menos subjetivas) están vinculados a la realidad. En la gestación, desarrollo y utilización de los métodos de las matemáticas el sujeto nunca deja de recibir la influencia directa del objeto. Nuestra propia naturaleza posee características generales biológicas o físicas que corresponden al resto del universo. … los resultados matemáticos no son simples generalizaciones inductivas ni tampoco son réplicas mentales impresas por el objeto en un sujeto pasivo; varios factores siempre interactúan. La aplicabilidad o la armonía de las matemáticas con el mundo no se puede explicar con énfasis unilaterales colocados ya sea en el papel del sujeto o en el del objeto. Para nosotros: en algún lugar de la relación entre ambos es que se encuentra la mejor explicación." (Ruiz, A. 2000)

Podemos añadir que las matemáticas refieren al análisis de situaciones reales y a los procesos para representarlas en una forma simbólica abstracta adecuada (Davis, P. y Hersh, R. 1981).

Si adoptamos estos últimos puntos de vista, la conclusión es tajante: el propósito de la Educación Matemática no puede ser planteado prominentemente como la memorización de hechos y el desarrollo de cálculos y sus destrezas asociadas. Es decir, una formación basada en los aspectos de procedimiento, la repetición y memorización de éstos, debilita las posibilidades para crear habilidades en el razonamiento matemático y corresponder apropiadamente con la naturaleza de ésta como disciplina cognoscitiva. El asunto es más grave aun: una Educación Matemática basada en procedimientos y manipulación de símbolos (a veces sin sentido), con poca relación con los conceptos, formas de razonamiento y aplicaciones, es un poderoso obstáculo para que los estudiantes puedan comprender el valor y la utilidad de las matemáticas en su vida.

Es posible estar de acuerdo con una aproximación que enfatiza los aspectos conceptuales en la formación matemática, sin embargo una cosa es declararlo y otra cosa es realizarlo. En la mayoría de ocasiones las lecciones se desarrollan dando dominantemente un gran espacio a la solución mecánica de ejercicios rutinarios, con poca presencia de problemas o proyectos que involucren varias formas de razonamiento o diferentes disciplinas matemáticas. Los sistemas de evaluación, por ejemplo, tienden a favorecer los procesos memorísticos y la presencia mayoritaria de los llamados problemas de un solo paso. Son comunes en varios países, en particular en pruebas masivas, los exámenes estandarizados de selección única que, en general, no poseen ejercicios de varios pasos mentales. No es, por supuesto, que la metodología de la selección única en exámenes, normalmente a corregir por lectora óptica, no pueda poseer ejercicios de una mayor complejidad. Lo que sucede es que el sistema fomenta evaluaciones con ejercicios de un solo paso, cargados de repetición, aplicación rutinaria y mecánica. Para dar un ejemplo: las pruebas del Bachillerato en Costa Rica. Esto, por supuesto, a la larga condiciona los procesos educativos de una manera más global. La formación se restringe a contenidos y mecanismos que serán evaluados con este tipo de estrategias de evaluación, con debilidades profundas en la profundidad y utilidad de las matemáticas. Otro ejemplo: en la clase se suelen evadir los problemas complejos porque éstos requieren un tratamiento más amplio, que consume normalmente más tiempo de la lección. Y la estructura de las jornadas educativas y los currículos, y la misma presión de pruebas nacionales, parecieran no permitir adoptar otro tipo de estrategia. Varios factores en los *curricula* dominantes de diferentes maneras apuntalan una enseñanza conductista cargada de metodologías y didácticas preprogramadas. Todo esto, presente en la formación matemática de muchos países, constituye uno de los problemas más graves para que un sistema educativo pueda responder a los retos de un planeta sometido a una extraordinaria tensión y en donde el conocimiento se ha vuelto la piedra de toque (Ruiz, A. 2001).

Una vez que se ha establecido el valor estratégico de los razonamientos matemáticos abstractos, y el significado de los conceptos, el debate recae naturalmente sobre cuál debería ser la mejor orientación pedagógica para lograr el aprendizaje de las matemáticas y su mejor utilización dentro de un sistema educativo.

En lo que sigue, entonces, vamos a puntualizar algunos elementos metodológicos para fortalecer una orientación en ese sentido. Empezamos por lo más general.

LA LECCIÓN DE MATEMÁTICAS

El desarrollo de la lección exige una evaluación cuidadosa de sus objetivos: el más apropiado para una lección de matemáticas debe ser siempre apuntar hacia las formas de razonamiento más general, propiamente matemáticas. Cuando el objetivo se reduce a enseñar la solución de un problema específico o un procedimiento particular solamente, el resultado en la formación matemática es muy débil. Puesto de otra forma: se trata de encontrar en los aspectos específicos particulares la estructura cognoscitiva y la dimensiones abstractas involucradas; es decir, establecer un puente entre lo particular y lo abstracto, no quedarse en lo particular, y tampoco, por supuesto, en solamente lo abstracto. Esto es muy importante. Nunca se puede perder de vista que las matemáticas son ciencias de lo abstracto; puesto de otra manera: la disciplina de las matemáticas trabaja los aspectos más generales de la realidad. El objeto de la física o la biología es otro. La intervención de los sentidos es mayor en estos últimos. Las operaciones mentales involucradas también son otras. Las matemáticas, aunque referidas a un mundo material y social, se han construido de manera cíclica y permanente como construcciones cognoscitivas cada vez más alejadas del mundo sensorial. No obstante, sus formas de razonamiento y de creación intelectual se mantienen íntimamente asociadas a otras partes del conocimiento humano.

Para la Educación Matemática no se trata de circunscribir los contenidos y objetivos educativos a realizar en un marco de las matemáticas consideradas como un cuerpo abstracto, sino de conducir a los estudiantes al dominio de conceptos, métodos y destrezas matemáticas a través de procesos pedagógicos y didácticos específicos. La Educación Matemática no es matemática pero tampoco es educación en general. El objetivo de la clase, entonces, busca fortalecer el razonamiento abstracto partiendo de la experiencia y el contexto del alumno, el conocimiento aprendido previamente. Esto significa el uso de escaleras y andamios apropiados. Este es el gran territorio de las didácticas específicas de las matemáticas. La historia de las matemáticas, las aplicaciones de las matemáticas y sus contextualizaciones, las motivaciones, la escogencia de las situaciones educativas, los instrumentos usados como textos o materiales audiovisuales, las tecnologías, etc., son relevantes en este contexto. La historia de las matemáticas puede ser usada de múltiples maneras, aunque su uso depende de la filosofía que se asuma (Ruiz, A. 2003). No sólo como interesantes anécdotas o la presentación de contextos para entender las construcciones matemáticas, sino como un recurso para determinar incluso la lógica de un currículo, por ejemplo el orden de presentación de algunos contenidos, o para realizar un vínculo con otras disciplinas cognoscitivas o la cultura en general. La historia puede ser usada para propiciar no sólo la confrontación con problemas de las matemáticas a partir de las condiciones históricas específicas que permiten valorar el significado de los resultados, sino también para la realización de los objetivos en la comunicación y verbalización de conceptos y procedimientos matemáticos. Los modelos matemáticos que permiten establecer su relación con el entorno social o físico también permiten valorar el significado y la utilidad de las matemáticas. Las tecnologías diversas pueden participar en este proceso no sólo para simplificar cálculos rutinarios y simples, ofrecer más tiempo para otras formas de razonamiento, sino también para, en algunos casos, “visualizar” matemáticas, aumentar procesos de interacción y actividad, o potenciar las posibilidades para el enfrentamiento con problemas matemáticos interesantes. Las nuevas tecnologías, especialmente aquellas de la comunicación, permitirían también abordar la interacción educativa a partir de la participación de más personas, incluso de diferentes latitudes (lo que enriquecería el proceso de enseñanza y aprendizaje). Aquí encuentra un sentido relevante el uso de las disciplinas dedicadas al análisis de datos como la estadística y la probabilidad, que permiten la construcción de modelos sencillos de usar en las matemáticas preuniversitarias.

Para favorecer el éxito en este trabajo de construcción de puentes hacia el dominio de pensamiento matemático, se vuelve importante que los conceptos y métodos de las matemáticas sean presentados *más como desarrollos que como reglas*. En la experiencia educativa existe la tendencia a buscar informar y ofrecer el conocimiento dado muy rápidamente al estudiante. Esto es así sobre todo en la educación preuniversitaria. La humanidad posee gigantescos edificios conceptuales en cada ciencia, en particular en las matemáticas, que pueden transmitirse. Sin embargo, más que un proceso de transmisión de información o de resultados cognoscitivos en la educación se trata de la formación en destrezas, razonamientos y capacidades. Aquí la ausencia de un redescubrimiento o reconstrucción impide la generación de esas capacidades. Cuando se insiste en los resultados y éstos se dan al margen de sus etapas constructivas lo que se potencia es la regla y el procedimiento al margen de su dominio conceptual. Esto es importante: la consecuencia implacable es una regla que conduce a la repetición mecánica. De igual forma, se potencia la memorización. Con ello, de nuevo, se debilita la oportunidad para generar razonamiento matemático y pensamiento abstracto. Aquí hay un llamado a usar algunas orientaciones constructivistas pertinentes.

Durante muchos años han dominado estrategias que se concentran en soluciones exclusivas o únicas en los problemas matemáticos de la educación preuniversitaria. Hasta el adjetivo de "exactas" ha podido usarse para deformar la naturaleza de las matemáticas y afirmar caminos unilaterales y exclusivos de las mismas. Con propósitos formativos, aunque expresión de la auténtica construcción matemática, es importante insistir en la existencia de múltiples estrategias de solución para los problemas; de otra forma no se estimula la creatividad y el razonamiento independiente. Las matemáticas se vuelven aburridas, llenas de reglas sin sentido, repetitivas, que afirman verdades que se consideran únicas e infalibles, conocimientos "exactos" sin interés. Puesto en otros términos: en la educación se trata de potenciar la búsqueda de soluciones alternativas y razonamientos diferentes a la hora de enfrentar una situación matemática. Falibilidad y diversidad se invocan en la formación matemática. Y asumirlas genera cambios importantes en la educación. (Ernest, 1991)

En el conductismo la estrategia pedagógica afirma sucesiones de pasos programados de lo simple a lo complejo. En una ambiciosa estrategia moderna es conveniente darle un lugar a la complejidad. Enfrentar situaciones complejas permite buscar diferentes opciones, algunas de las cuales estarán condenadas al error o el fracaso, y poner a prueba la evaluación global de la situación presentada, buscar diferentes alternativas, etc. Hay sustento epistemológico en esto. El estudiante construye un concepto "nuevo" por medio de un proceso complejo que parte de un conflicto "cognoscitivo" entre las concepciones que posee originalmente el alumno y el que va a resultar de la experiencia cognoscitiva. El aprendizaje debe verse de lo complejo a lo simple. Con Bouvier: es "la complejidad lo que confiere significado". Si las situaciones son demasiado simples" se convierten en obstáculos al provocar acciones automáticas y poco creativas: "Debemos entrenar a nuestros alumnos en la resolución de problemas y en el análisis crítico de situaciones complejas que no se presten fácilmente a tratamientos automáticos". De igual manera, esto convoca la posibilidad del error, que debe ser usado como instrumento formidable para familiarizarse con los límites y las posibilidades de las matemáticas. La complejidad permite entender con mayor propiedad lo que es la construcción matemática. Constituye también una oportunidad para, de nuevo, debilitar la idea equivocada de las matemáticas como disciplina infalible llena de certeza absoluta. Por esta misma razón, lo conveniente no es concentrar las lecciones en los ejercicios y problemas más sencillos, rutinarios. Más bien, de lo que se trata es de lograr un equilibrio entre distintos niveles de complejidad de los ejercicios, pero con el propósito persistente de fortalecer y trabajar con aquellos problemas y ejercicios que se escapan de lo rutinario. Cuando se enfatiza el cálculo sencillo o la aplicación inmediata de una fórmula se pierden importantes posibilidades para fortalecer el razonamiento y las destrezas matemáticas. En casi cualquier contenido es posible introducir ejercicios no rutinarios y aproximaciones que potencien la creatividad y la originalidad por parte de los estudiantes. Esto no es difícil. A veces, el solo hecho de crear una situación matemática en la cual haya que decidir alguna de las fórmulas a usar puede permitir un mejor desarrollo que simplemente concentrarse en la aplicación mecánica y repetitiva de la fórmula. Se trata de adoptar una orientación y asumir una preparación cuidadosa de la lección para efectuarla.

Hay otros asuntos que pueden considerarse relevantes para el desarrollo de una lección con el propósito de un aprendizaje efectivo. Por ejemplo, es importante tener objetivos precisos y concentrar bien la atención en los temas a tratar. Una dispersión en los temas de una lección conduce a una menor comprensión de los mismos. De igual manera, ya sea que se trate de una prueba formal o de un razonamiento informal, debe hacerse explícito el razonamiento matemático involucrado. Es decir, una vez que se han hecho los trabajos exploratorios y los estudiantes se han involucrado en el dominio de los conceptos y los procedimientos, es altamente conveniente que se extraiga de manera explícita el tipo de pensamiento y la estructura intelectual involucradas en la lección. Lo conveniente es que el estudiante lo obtenga por sí mismo como un proceso natural de abstracción y generalización, pero no puede dejarse de hacer el cierre intelectual y formativo que esto significa. Es tarea del profesor.

Si pensamos que la construcción cognoscitiva se afirma en lo que el estudiante ya ha aprendido entonces se vuelve fundamental que en la lección haya conexiones explícitas con resultados anteriores, ya sea que hayan sido desarrollados en la misma lección o que formen parte de los resultados obtenidos en otras lecciones. Es decir, es importante integrar el conocimiento nuevo con el conocimiento aprendido para así permitir una condensación en la mente del estudiante. De lo que se trata, entonces, es de buscar las relaciones y los nexos dentro del conocimiento como un proceso.

Ahora bien, en todo esto no se debe perder la perspectiva. Cuando afirmamos la utilidad de la complejidad, de los ejercicios no rutinarios o la potenciación del razonamiento matemático y abstracto, no queremos decir que de lo que se trate sea de mostrar el rostro "difícil" de las matemáticas, casi como ejercer una "tortura sistemática". Los estudiantes deben obtener niveles de éxito con las matemáticas para encontrarles sentido y para poder proseguir en nuevos niveles más profundos de las mismas. Esto debe buscarse de una forma permanente. De igual manera, aquí se plantea la necesidad de una estrategia curricular integral diferenciada. En los primeros años formativos es necesario enfatizar los aspectos lúdicos a través de varios instrumentos didácticos. Con el paso de los años y los diferentes niveles los objetivos cambian obviamente. También, la dedicación en horas deberá ser distinta. Pero dejemos esta digresión aquí. Lograr que los estudiantes den sentido a las matemáticas, se familiaricen con ellas y encuentren interés en ellas se logra utilizando escaleras y andamios pedagógicos y didácticos apropiados, capaces de motivar, entusiasmar y provocar satisfacción con las matemáticas. Por eso no se debe escatimar su construcción. Sin embargo, si el énfasis es la repetición, memorización y sucesión mecánica de pasos mentales simples, es poco probable que se despierte el interés por parte de los estudiantes.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estas consideraciones pedagógicas pueden aplicarse con especial privilegio a partir de una estrategia basada en la *resolución de problemas*, la que se ha convertido desde hace algunas décadas en una importante contribución a la Educación Matemática en el mundo. Tal vez la obra de Pólya, que aunque escrita en los años 40 del siglo XX, fue traducida a otras lenguas hasta los años 60 y 70, fue la pionera en este tipo de propuestas. El planteó una sucesión de pasos en la resolución de problemas: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, mirar hacia atrás. Y un conjunto de "mandamientos" para profesores:

1. Interésese en su materia.

2. Conozca su materia.

3. Trate de leer las caras de sus estudiantes; trate de ver sus expectativas y dificultades; póngase usted mismo en el lugar de ellos.

4. Dése cuenta que la mejor manera de aprender algo es descubriéndolo por uno mismo.

5. Dé a sus estudiantes no sólo información, sino el conocimiento de cómo hacerlo, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.

6. Permítales aprender a conjeturar.

7. Permítales aprender a comprobar.

8. Advierta que los rasgos del problema que tiene a la mano pueden ser útiles en la solución de problemas futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente situación concreta.

9. No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.

10. Sugiérales; no haga que se lo traguen a la fuerza.

En el año 1966 el *International Committee of Mathematical Instruction*, ICMI, realizó una encuesta en varios países sobre el papel de los problemas en la actividad matemática escolar. Algunos años después, en los años 70 y 80 del pasado siglo, se desarrollaron importantes investigaciones sobre la resolución de problemas: Kilpatrick, Lester, Goulding, Glasier, Schoenfeld y muchos otros. En el año de 1980 la cuarta reunión internacional IV-ICMI, celebrada en Berkeley, EUA, tuvo un grupo de trabajo sobre resolución de problemas y de allí en adelante ha sido un tema central en la Educación Matemática internacional.

Un ejemplo relevante del papel de este tópico se puede apreciar con el documento *Agenda for action* (1980) del *Nacional Council of Teachers of Matemáticas*, NCTM, de los EUA, que colocaba la resolución de problemas como el foco de la Educación Matemática en la década de los 80 para ese país. En el año 1989 y, luego, en el 2000, esta organización poderosa ha propuesto el tema con igual intensidad (por medio de sus *Estándares*).

Se trata entonces de un asunto presente en la Educación matemática desde hace varias décadas, sin embargo, no se ha introducido en los *curricula* de los países con igual intensidad, e incluso en aquellos en los que se ha dado ha sido muy recientemente.

La resolución de problemas, como señalamos arriba, obedece a una comprensión tanto de la Educación Matemática como de la naturaleza de las matemáticas. Con Pólya:

> "Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel." (Pólya, 1954 –citado por Vilanova *et al* 2001-)

En última instancia, concordamos, el corazón de la práctica matemática reside en la formulación y resolución de problemas. En ese proceso, por supuesto, intervienen factores diversos, que van desde las motivaciones psicológicas y culturales, hasta vectores de naturaleza social e histórica más amplia. El punto es, sin embargo, que si en las matemáticas y su aprendizaje la resolución de problemas posee una dimensión estratégica, la lección debe concebirse en buena parte a partir de la misma. Es decir, la resolución de problemas como metodología en la clase debe ocupar un lugar predominante. Y esto no es lo más común en la enseñanza de las matemáticas en los diversos países. Aunque varias estrategias pedagógicas diferentes a la resolución de problemas pueden propiciar resultados positivos en el aprendizaje, nos parece importante subrayar la resolución de problemas como un instrumento privilegiado (a potenciar e interpretar apropiadamente) en los planes de la Educación Matemática.

El tema es complejo empezando porque los términos se han usado de múltiples formas. Por ejemplo, como relación con el entorno (es decir: problema identificado con situación matemática en un contexto *sociofísico*); otra: como habilidades que permiten resolver ejercicios de diferentes niveles (es decir, estrategias específicas). Las diferentes utilizaciones de estos términos las agrupa Claude Gaulin de la siguiente manera:

> "Es decir, cuando decía que hay una falta de consenso y una cierta confusión sobre lo que significa enfatizar la resolución de problemas, quiero decir que existen personas que piensan e interpretan de diferentes maneras. No es muy grave...., lo importante es mejorar las cosas pero, si un gobierno o una asociación quieren proponer un mensaje, difundirlo e implementar esas ideas, se necesita un mínimo de coherencia y, en este caso, falta la coherencia. Este es el problema. Resumiendo, podemos apreciar que estoy distinguiendo entre:
>
> 1º Enseñar "PARA" la resolución de problemas
> 2º Enseñar "SOBRE" la resolución de problemas
> 3º Enseñar "A TRAVÉS" de la resolución de problemas
>
> Son tres perspectivas y, en realidad, las tres son importantes. En los dos primeros casos la resolución de problemas está considerada como un objetivo y, en el tercer caso, como vehículo para enseñar o desarrollar otras cosas. Mi opinión es que esta falta de coherencia

> es el primer motivo por el que hay dificultades de implementación de estas buenas ideas sobre la resolución de problemas." (Gaulin, 2000).

Nuestra visión asume la resolución de problemas como una importante estrategia general para estructurar la enseñanza aprendizaje, con base en una visión de las matemáticas que subraya en su naturaleza la formulación de problemas y la construcción cognoscitiva de soluciones. Puesto de otra manera: no como *contenido* sino como un *proceso*, que coincide con la visión del NCTM, por ejemplo, en sus *Principles and Standards* del 2000.

El punto teórico aquí, sin embargo, es acerca de cuáles son los problemas que deben servir para una estrategia así considerada. Aquí interviene la epistemología más general. El tipo de problemas y las situaciones que los plantean dependen de la naturaleza intima de los conceptos de las matemáticas, de los influjos sociales (el contexto), de las condiciones de los sujetos participantes, de los recursos didácticos disponibles, etc. Hay diferencias si se enfoca la construcción de esos problemas con una óptica como la Didáctica de las Matemáticas de la escuela francesa, o la fenomenología de Freudenthal, o un enfoque constructivista ortodoxo, etc.. Es este uno de los principales tema de investigación en la comunidad de educadores de las matemáticas.

Nos parece pertinente reseñar ahora algunas de las características del desarrollo de las lecciones de matemáticas en Japón, que ofrecen tradicionalmente un énfasis en la resolución de problemas. Esto nos puede permitir comprender, tomando en cuenta siempre las diferencias en contextos culturales distintos, algunas opciones para obtener mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas.

Ha sido ampliamente documentado el éxito educativo japonés en lo que se refiere a las matemáticas. Desde el Primer *Estudio Internacional de Matemáticas* en el año 1964, pasando por el *Segundo Estudio* en los años 1980 y 1982, y los recientes *Third International Mathematics and Science Study*, TIMSS ("Trends" ahora, un estudio comparativo realizado en 1995, 1989 y 2003) se ha tomado conciencia de este hecho. Y, precisamente, uno de los temas claves es el desarrollo de la lección. En muchos otros países el estilo de enseñanza de las matemáticas en la clase sigue un patrón muy común: una revisión del material previo y de la tarea dejada para resolver en la casa, exposición de un tema por parte del profesor, ilustración de un ejemplo por parte del profesor, introducción de ejercicios a resolver, supervisión del trabajo realizado por estudiantes en la clase (trabajos normalmente individuales), revisión de estos problemas planteados en la clase y, finalmente, asignación de nuevas tareas para realizar en el hogar. Todo con un énfasis en procedimientos de bajo nivel que imitan aquellos mostrados por el profesor. En Japón la estrategia de la lección es diferente: la regla es un tipo de trabajo en grupo, colaborativo, estrechamente supervisado por el profesor. Los profesores suelen comenzar la lección presentando a los estudiantes un problema matemático cuya solución exige mecanismos o principios que todavía no han aprendido. Es decir, una exploración conducida. Los estudiantes, entonces, trabajan solos o en pequeños grupos para buscar una solución al problema. Poco tiempo después los estudiantes presentan sus respuestas y el conjunto de la clase trabaja los problemas y las soluciones buscando los conceptos matemáticos involucrados y la forma de razonamiento apropiada. Esto es una lección realizada a través de la resolución de problemas. Repasemos el método con una explicación testimonio:

> "Los docentes japoneses inician sus clases planteando un problema relativamente difícil (véase Stigler & Hiebert, 1999). Ellos animan a los niños a presentar sus propias ideas para resolver el problema. Durante la lección el docente pide a los niños hacer "hanashi-ai" en pequeños grupos, o en la clase completa como un solo grupo. Debido a que el problema es difícil, los niños frecuentemente formulan conjeturas e ideas erróneas o cometen errores de procedimiento. También, debido a que el problema es frecuentemente

abierto, los niños pueden dar varias soluciones diferentes. El docente los anima a comparar entre ellos sus ideas y soluciones. En esas ocasiones pueden encontrarse contra-ejemplos y pueden presentarse contra-argumentos. El docente utiliza intencionalmente esas oportunidades para estimular el pensamiento de los niños. La disciplina o moral tradicional japonesa pone un gran énfasis en reflexionar ("hansei") sobre los errores propios y en apreciar la contribución de otros, lo cual fomenta la cooperación entre los niños (cf. Lewis, 1995). Aunque el "hanashi-ai" puede finalmente concluir estableciendo cual solución es mejor, correcta, eficiente, elegante o lo que sea, la competencia entre los niños es generalmente desalentada. Por ello, en principio, no existen ganadores ni perdedores en "hanashi-ai", contrario a lo que sucede en la argumentación según el estilo occidental." (Sekiguchi y Miyazaki, 2000).

Los énfasis refieren a los asuntos conceptuales. Por ejemplo, reseñan Sekiguchi y Miyazaki (2000):

"Las lecciones de matemáticas en las escuelas japonesas enfatizan el "wakaru" (comprensión) de ideas matemáticas (véase Stigler & Hiebert, 1999). La memorización de fórmulas y la adquisición de destrezas no se consideran centrales en el aprendizaje. En las matemáticas escolares los japoneses enfatizamos la importancia de preguntar por qué, ya que pensamos que esto promueve la búsqueda del "origen" (causas o premisas básicas) del fenómeno en cuestión y la descripción de un camino (causal o lógico) ("sujimichi") que lleva del origen al fenómeno. Las respuestas a la pregunta por qué son o bien "wake" (explicaciones) o "riyu" (razones). Las actividades para encontrar y explicar "wake" o "riyu"se consideran esenciales para el aprendizaje de la prueba matemática en Japón (cf. Kumagai, 1998). Esto incluye descripciones sobre resolución de problemas (vgr., "Escriba una ecuación para representar la situación problemática siguiente") y justificación de los procedimientos o pasos utilizados en esos procesos (vgr., "¿Por qué lo hizo así?")."

De igual manera, la demostración es parte de un trabajo colectivo y de comunicación:

"En el ciclo básico de la escuela secundaria, el explicar ("wake") o el dar razones ("riyu") es frecuentemente llamado "setsumei". Las actividades que hacen "setsumei" se realizan normalmente antes de presentar la noción de demostración matemática "shoumei". Los términos "wake", "riyu" y "setsumei" son comúnmente utilizados en la vida diaria de los estudiantes. En contraste, el término "shoumei" aparece raras veces en la vida diaria. Por ello debe ser introducido y enseñado de una manera explícita en el colegio. En los colegios japoneses la noción de "shoumei" se presenta primero a los estudiantes en las lecciones de geometría de octavo grado de matemáticas. En las lecciones, el "shoumei" de un reclamo matemático se define usualmente como un acto mediante el cual se muestra de manera lógica que la conclusión es verdadera, o como un documento escrito de dicho acto. Y, "shoumei" se concibe como una clase especial de "setsumei", característica de las matemáticas. La enseñanza de la prueba matemática ha sido concebida tradicionalmente dentro del modelo de grupo de la comunicación japonesa arriba mencionado. "Shoumei" debe deducir la conclusión declarada siguiendo las premisas aceptadas. Esto corresponde bien a la idea de "cumplir con las obligaciones sociales de la comunidad". Por ello el modelo de grupo de la comunicación japonesa en público parece cumplir bien el proceso de mostrar pruebas.Esta manera de trabajar en la lección está asociada a una forma cultural." (Sekiguchi y Miyazaki, 2000).

Una las características fundamentales en el sistema japonés para el desarrollo de la lección es la preparación por parte de los profesores. Se trata no sólo de un tiempo amplio para la preparación por parte del profesor de manera individual sino a través de una planificación en forma colaborativa de la lección. Existen incluso grupos de estudio sobre las lecciones que se reúnen entre 2 y 5 horas a la semana de manera regular; casi el 100% de los maestros participa en este tipo de grupos y más del 50% de los profesores de la educación secundaria. Es decir, hay una organización profesional que busca de manera colectiva mejorar, modernizar, potenciar los alcances de la lección. No es una estrategia individual sino colectiva. Esta estrategia para la clase permite el desarrollo de investigación en la misma; por eso, dentro de la actividad propiamente profesional no sólo se afirman mejores resultados en el aprendizaje, sino, también, una línea creciente por medio de una investigación permanente que sigue nutriendo un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se afirma que el origen de este sistema que enfatiza el desarrollo de la lección, el trabajo colaborativo, la observación y la planificación cuidadosa se introdujo en la década de 1870 al principio de la época Meiji. Aunque, es probable que esté anclada en las tradiciones propias de confucionismo.

En una estrategia de resolución de problemas se trataría, entonces, de realizar una adecuada selección de problemas, que resulten significativos desde un punto de vista matemático y para el estudiante. Es aquí donde se requiere investigación y la adopción de principios didácticos y epistemológicos. La naturaleza del concepto matemático en juego es determinante para definir una estrategia metodológica y pedagógica. La escogencia, presentación y desarrollo de de los mismos se puede hacer a partir de recursos metodológicos como la historia, la tecnología, los modelos matemáticos, los entornos culturales y otros medios que logren motivar el interés del estudiante. La presentación introductoria de los problemas debe significar un reto, que a la vez pueda apelar a la complejidad y ofrezca vías de solución. El tratamiento de los problemas debe acudir a una actividad en grupo, colectiva, y con la orientación y lucidez del profesor. La estrategia para el desarrollo de la lección busca potenciar los métodos, conceptos y formas de razonamiento matemáticos, que siempre en todas sus dimensiones y niveles buscan la formulación y la resolución de problemas. Las tareas para la casa aquí no podrían ser meras repeticiones o aplicaciones de lo visto en clase, sino proyectos más complejos que ameritan incluso nuevos trabajos en grupo. Se trata de una estrategia *integradora* en relación con otros importantes vectores de la Educación Matemática actual.

CONCLUSIONES

Una lección desarrollada con la mente en un aprendizaje efectivo en los métodos y razonamientos matemáticos y abstractos, con la perspectiva que hemos trazado en las páginas anteriores, exige un excelente dominio de las matemáticas por parte del profesor. Pero, también, de la pedagogía y didáctica correspondientes. Si no hay dominio de los contenidos de la matemática con calidad y profundidad no es posible involucrarse en los procesos que revelen el sentido profundo de los mismos. Y si la pedagogía y didáctica de las matemáticas no están presentes en la formación del maestro y profesor no es posible crear los puentes, las escaleras y andamios para llevar a los estudiantes hacia nuevos niveles de conocimiento matemático y lograr una satisfacción con esta disciplina.

Debe subrayarse aquí la necesidad de una convergencia e interacción profundas entre matemáticas y pedagogía (un verdadero compromiso multi, inter y transdisciplinario), porque muchas veces lo que las universidades han ofrecido en sus planes de formación de especialistas es una yuxtaposición de ambos componentes sin el desarrollo de una auténtica pedagogía o *didáctica específica de las matemáticas*. La formación matemática del profesor de matemáticas se ha realizado casi siempre con el perfil del matemático (aunque con menos contenidos) y la de una pedagogía de una manera muy general con contenidos y métodos aplicables a cualquier profesión. No se ha desarrollado con éxito una formación universitaria con base en un perfil propio del profesional en Educación

Matemática. Este es uno de los principales esfuerzos internacionales dentro de la construcción de esta nueva disciplina científica.

De igual manera se debe entender que una metodología para el desarrollo de una lección como la que hemos reseñado, requiere no solo más recursos sino una mayor preparación y planificación por parte de los profesores. Esto invoca un componente social que permitiría una potenciación de la clase: la colaboración colectiva en la planificación y desarrollo de ésta. La construcción de grupos de estudio de la lección (como se hace en el Japón y se está generalizando en varias partes del mundo) que involucre la observación, introducción de materiales didácticos, capacitación, coordinación, representaría un salto cualitativo en la perspectiva profesional del profesor de matemáticas. Es decir, aparte de las metodologías o didácticas a desarrollar en la lección por parte de un profesor, las dimensiones colectivas y sociales pueden representar mecanismos para potenciar, hacer progresar y modernizar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Hay aquí un espacio especial y necesario para la investigación educativa.

Si se adoptara una estrategia de resolución de problemas como central dentro de una política educativa, se plantearía una modificación profunda de varias dimensiones en la Educación Matemática del país. No solo la formación en Educación Matemática dada por las universidades debería reformarse, a lo que ya nos hemos referido, sino el significado y lugar de los medios (como textos, audiovisuales, pizarra), las tecnologías jugarían un papel especial (las de comunicación en particular), los programas y en general los *curricula* no podrían quedar iguales si se busca un énfasis en lo conceptual y sus vínculos con el entorno (objetivos, metodologías cambian), y el sistema de evaluación debería cambiar drásticamente. Las acciones de capacitación y organización académicas deberían ser muy fuertes. Y la orientación educativa gubernamental debería ser radicalmente otra.

REFERENCIAS

Ausubel D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive Vie*w, Holt, Rinehart and Winston: New York.

Ayer, A. J. (1936). *Language, Truth and Logic*. London: Gollancz. Dover (New York) lo reimprimió en 1946.

Beth. E. W. / Piaget, Jean. *Epistemología, Matemáticas y Psicología* (1980). Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica,.

Davis, Philip / Hersh, Reuben (1981). *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhäuser.

Ernest, Paul (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire, G.B.: The Falmer Press.

Gaulin, Claude (2000). “Tendencias actuales de la resolución de problemas”. Conferencia pronunciada el día 15/12/2000 en el Palacio Euskalduna (Bilbao, España).

Janvier, C. (Editores.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Kitcher, Philip (1983). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

Kumagai K. (1998). “The justification process in a fifth grade mathematics classroom: From a social interactionist perspective”. *Journal of Japan Society of Mathematical Education: Reports of Mathematical Education*, 70, 3-38.

Lewis C. C. (1995). *Educating hearts and minds: Reflections on Japanese preschool and elementary education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Monereo, C.; Castelló, M.; Clariana, M.; Palma, M.; Pérez, M. L. (1998) *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula,* Grao, Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agend*a *for action: Directions for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Pólya, George (1954). *How to solve it,* Princeton: Princeton University Press.

Resnik, M. D. (1975). "Mathematical Knowledge and Pattern Recognition." *Canadian Journal of Philosophy* 5: 25-39,.

Resnik, M. D. (1982). "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". *Nous* 16:95-105.

Ruiz, A. (1990). *Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas*. San José: EUCR.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las matemáticas* (ensayo ganador de la rama de ensayo en el Concurso *UNA Palabra* de la Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica, 1998). Heredia, Costa Rica: EUNA.

Ruiz, A. (2001). *El destino de Costa Rica y la educación superior,* San José, Costa Rica: EUCR-CONARE.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*, San José, Costa Rica: UNED.

Sekiguchi, Yasuhiro y Miyazaki, Mikio (2000) "Argumentación y demostración en Japón". *Preuve*. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Febrero 2002.

Stigler J. W., Hiebert J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Thompson, A. (1985). "Teacher´s conceptions of mathematics and the teaching of problem solving". En E.A. Silver, Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives, pp 281-294. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vilanova, Silvia; Rocerau, María; Valdez, Guillermo; Oliver, María; Vecino, Susana; Medina, Perla; Astiz, Mercedes; Álvarez, Estella (2001). "La Educación Matemática El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje". *Revista Iberoamericana de Educación*, OEI. Versión en línea: http://www.campus-oei.org/revista/did_mat10.htm.