CUADERNOS 10

DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CIAEM
CME
desde - since 1961

Trabajos de la XIII CIAEM

Reseña sobre Ubiratan D'Ambrosio

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AÑO 7, NÚMERO 10, DICIEMBRE 2012

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática es una publicación seriada que busca nutrir la comunidad de Educación Matemática con instrumentos teóricos que permitan potenciar los quehaceres dentro de esta comunidad.

Cuadernos es una iniciativa del Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática CIFEMAT (http://www.cimm.ucr.ac.cr/cifemat) que integra investigadores y proyectos asociados a universidades públicas y otras instituciones académicas de Costa Rica.

Cuadernos es una publicación inscrita formalmente en el Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas (http://cimm.ucr.ac.cr) y la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica y ha contado desde su creación con el respaldo permanente de esta institución.

Cada número de los *Cuadernos* se concentra en una temática específica, aunque incluye otros temas de interés. Posee una regularidad de al menos 1 número por año (o dos cada dos años).

Cuadernos posee una doble presentación: impresa en papel y digital. El número de ejemplares que se imprimen en papel depende de cada número.

Las secciones de los *Cuadernos* son:

- **Investigación y ensayos**
- **Experiencias**
- **Propuestas**
- **Tesis**
- **Software**
- **Reseñas**
- **Documentos**

Publica trabajos inéditos en español, portugués y en inglés, así como artículos o documentos ya publicados que puedan ser de interés para la comunidad de Educación Matemática.

Cuadernos ha establecido una alianza estratégica con el *Comité Interamericano de Educación Matemática* CIAEM (www.ciaem-iacme.org, organismo regional oficial de la *International Commission on Mathematical Instruction* ICMI) y la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (www.redumate.org).

Cuadernos posee un *Consejo Asesor Internacional* del más alto nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática. También posee un *Comité Editorial* que se encarga de las tareas regulares de gestión, edición y publicación. Este último también tiene un carácter internacional.

El *Director* asume la conducción general permanente de *Cuadernos*, pero para cada número hay una *Dirección ejecutiva*.

510.1
C961c

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática / Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica. – Año 7, No. 10 (Diciembre. 2012). San José, C.R.: Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica, 2012– x.

ISSN: 1659-2573

1. MATEMATICAS – PUBLICACIONES SERIADAS
2. MATEMATICAS – ENSEÑANZA – COSTA RICA

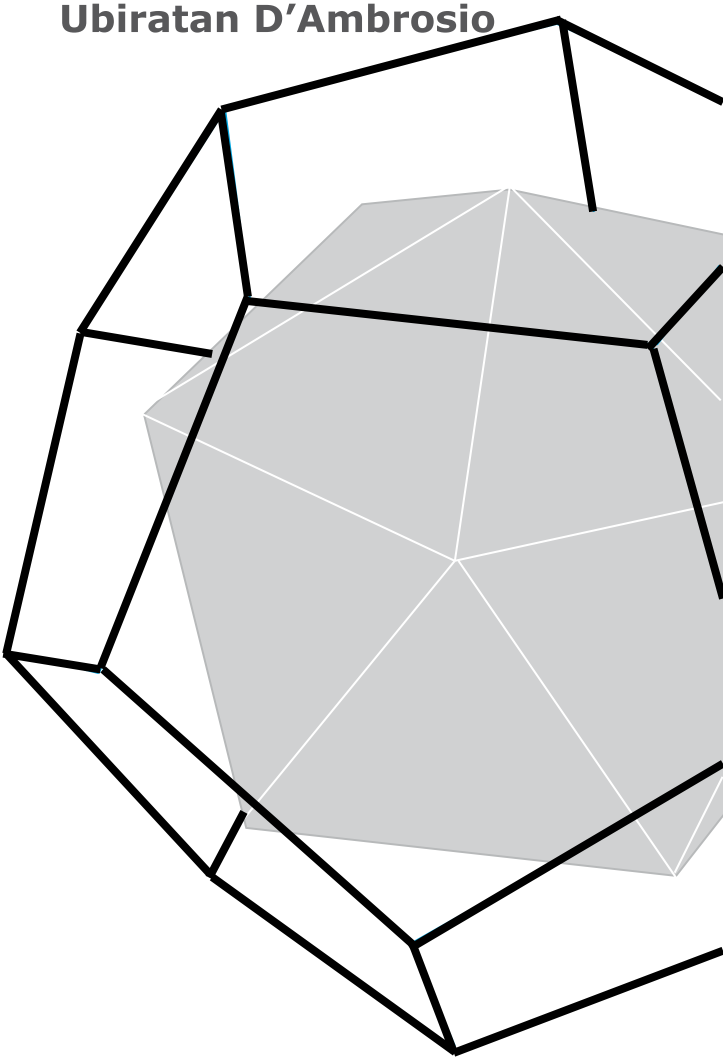
CUADERNOS 10

DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CIAEM
CMEA
desde - since 1961

Trabajos de la XIII CIAEM

Reseña sobre Ubiratan D'Ambrosio



CENTRO DE
INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AÑO 7, NÚMERO 10, DICIEMBRE 2012

Tabla de contenidos

Editorial

Los números 10, 11 y 12 de los *Cuadernos* recogerán trabajos presentados en la *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, realizada en Recife, Brasil entre el 29 de junio y 1 de julio del 2011. En ese congreso el CIAEM celebró sus 50 años. Se trata de una selección de textos de conferencias plenarias o paralelas, mesas plenarias o paralelas y minicursos.

La calidad de esos trabajos es una muestra del alto nivel académico que tuvo la XIII CIAEM.

La selección, organización y edición de trabajos son obra de José Chamoso (España), Hugo Barrantes y Angel Ruiz (Costa Rica). La traducción al inglés de muchos de los resúmenes y palabras clave que se requerían fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos). Y con la asesoría de Eduardo Mancera (México). La diagramación y confección de las artes finales fue realizada por Hugo Barrantes. El Consejo Editorial ofrece su agradecimiento a todas estas personas.

Las artes de todos los trabajos fueron revisadas cuidadosamente por sus autores.

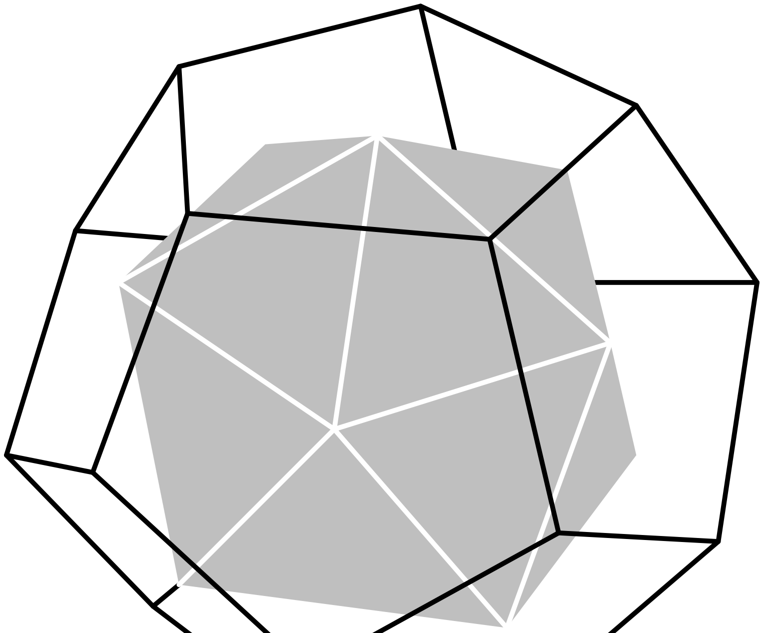
En este número 10 se incluyen en la sección de "Artículos" predominantemente temas relacionados con la formación de profesores, aunque desde diversos ángulos. También en la sección "Documentos" se han colocado textos que sirvieron de base a una mesa plenaria sobre la "Contribución intelectual de Ubiratan D'Ambrosio a la Educación Matemática", la cual constituyó un digno homenaje a este gran maestro y compañero de los educadores matemáticos de América Latina.

Para el Consejo Editorial de los *Cuadernos* es un honor incluir estos textos que contribuirán a la producción académica que se hace en la región.

Con el correr de los años, *Cuadernos* se ha ido convirtiendo en una publicación de un carácter cada vez más internacional con contribuciones de autores de varias latitudes aunque con un fuerte énfasis en América Latina. En esa dirección contribuye la estrecha relación que *Cuadernos* tiene con el Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM, organización afiliada a la International Commission on Mathematical Instruction ICMI. En los pasados cinco meses hemos recibido visitas a la versión digital de *Cuadernos* de más de 30 países (la mayoría de México, Chile, España, Argentina, Colombia, Perú, Venezuela y Costa Rica) de donde han descargado sus artículos en centenares de ocasiones. *Cuadernos* constituye una referencia importante para la Educación Matemática.

Angel Ruiz
Director
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

Artículos



La reflexión como elemento de formación docente en matemáticas: análisis e instrumentos[1]

José Mª Chamoso Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca,
España
jchamoso@usal.es

Mª José Cáceres García
Universidad de Salamanca,
España
majocac@usal.es

Pilar Azcárate Goded
Universidad de Cádiz,
España
pilar.azcarate@uca.es

Resumen[2]

Las investigaciones en formación de docentes de matemáticas aconsejan considerar la reflexión como un aspecto importante para formar profesionales capacitados para reflexionar sobre su práctica. Por ello se propone incorporar un sistema de evaluación al proceso de enseñanza-aprendizaje de formación de maestros de matemáticas que permita clasificar a los estudiantes de manera más acorde a las tendencias actuales de Educación Matemática. En concreto, se propone valorar el conocimiento profesional de los estudiantes a partir de sus reflexiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje que se produce en el aula de formación recogidas en el portafolio de cada uno de ellos. Esta valoración se pretende relacionar, posteriormente, con su conocimiento matemático y su creatividad. De esa forma se espera extraer conclusiones sobre esa forma de trabajo que proporcione información no sólo para el área Educación Matemática sino también, ante la escasez de investigaciones en ese sentido, para otras áreas de conocimiento.

Palabras clave

Educación Matemática, Formación de maestros, estudiantes para maestro, evaluación, portafolios de aprendizaje, reflexión.

Abstract

Research on math teacher preparation advises us to consider reflection as an important aspect in preparing teachers that can become reflective practitioners. Therefore, a system of evaluation of the teaching/learning process in the preparation of math teachers is proposed that is more in accord with current tendencies in Math

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Education. Concretely, it is proposed that we value the professional knowledge of students that comes from their reflections on the teaching/learning process that they produce as they maintain a portfolio as part of their student teaching. That way it is hoped that conclusions from this kind of work can provide information not only for the field of Math Education, but also, given the lack of this kind of research, for other field as well.

Key words

Mathematics education, teacher preparation, pre-service teachers, evaluation, learning portfolios, reflection.

"Oír o leer sin reflexionar es una ocupación inútil"

Confucio

1. Introducción

Existen muchas y variadas teorías sobre cómo se adquiere el conocimiento matemático, hecho que ha provocado fuertes cambios en las directrices educativas de muchos países que recomiendan centrar más la atención en el aprendizaje de los estudiantes que en la enseñanza del profesor. Sin embargo, en la mayor parte de las clases se sigue reflejando una forma de entender las matemáticas como un conjunto de hechos, procedimientos y soluciones conocidos que se encuentran, básicamente, en el manual o libro de texto. Incluso en las Pruebas de Matemáticas de Acceso a la Universidad prevalece la propuesta de resolución de ejercicios rutinarios en vez de actividades que exijan un razonamiento para el que el alumno no haya sido directamente entrenado (Cáceres, 2005; Rico, 1997). En definitiva, parece que se enseña a los alumnos a hacer, no a pensar (Kehle, 1999).

Sin embargo las matemáticas no son sólo un conjunto de hechos y destrezas sino, más bien, una forma de pensamiento. De hecho, las directrices educativas de la mayor parte de los países avanzados presentan una visión de los alumnos como personas que piensan y razonan. Ante esta realidad parece conveniente que los estudiantes sean participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma que adquieran el conocimiento por sí mismos y desarrollen distintas habilidades y competencias. Para ello, en el aula de matemáticas no sería suficiente plantear únicamente actividades rutinarias, sino también otras que desarrollen la capacidad matemática como, por ejemplo, tareas abiertas que permitan que haya varias soluciones al mismo problema. Además, se debería promover el trabajo en equipo y reconocer la importancia de la comunicación y la discusión. El objetivo de esta forma de enseñanza-aprendizaje es que los alumnos sean capaces de razonar críticamente, resolver problemas complejos y aplicar su conocimiento a situaciones reales (Harkness, D'Ambrosio y Morrone, 2007 & Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007).

La evaluación debe contribuir a que este cambio sea posible. En ese contexto el sistema de evaluación juega un papel fundamental porque sus finalidades y métodos ejercen más influencia en cómo y qué aprenden los estudiantes que cualquier otro elemento del proceso de aprendizaje. Por ello, debe dejar de ser un instrumento sancionador con el que el profesor muestra su autoridad para pasar a considerarse como proceso que sirva de autorreflexión al estudiante, de manera que éste sepa qué es capaz de hacer, qué debe mejorar y cuáles son sus errores. El profesor debe aprovechar la información proporcionada para guiar el aprendizaje del alumno y para la toma de decisiones (Boud, 2000).

En esencia, la evaluación debe tener en cuenta el discurso y las actividades del aula, las realizadas fuera de ella y el proceso global de aprendizaje. Ello implica utilizar una selección de instrumentos que permitan aportar evidencias sobre el proceso de aprendizaje. Una técnica que puede incluir todos esos aspectos es el portafolio (Silver & Kenney, 1995).

En esta nueva forma de enseñanza-aprendizaje y evaluación, el papel del profesor debe ser más esperanzador que la tradicional interacción 'paso a paso' controlada por el docente pues debe permitir que el estudiante siga diversos caminos, de la misma forma que, en el futuro, tendrá que hacer frente a diversos problemas como ciudadano que no tengan un método establecido o solución exacta, o que le harán tomar una decisión que difiera de la del experto cuando, por ejemplo, tenga que contratar un seguro de vida u organizar sus impuestos (Voigt, 1994). Para ello, a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje el docente debe crear oportunidades de revisión del trabajo y discusiones entre alumnos y entre ellos y el profesor, a la vez que debe llevar un riguroso proceso de seguimiento y análisis de lo acontecido en el aula.

En este sentido se debe preparar al futuro docente pero es evidente que durante la formación inicial de maestros no es posible proporcionar el bagaje de conocimientos necesario para afrontar las diversas situaciones que se presenten, en sus diversos aspectos, en su futura labor profesional. Recomendaciones oficiales y de investigadores aconsejan que se forme a los docentes para que sean críticos con su propia práctica y que se considere la reflexión como uno de los aspectos más importantes para su formación (Artzt, 1999; Harrington, Quinn-Leering & Hodson, 1996; NCTM, 2000).

Con estas ideas se diseñó, desarrolló, experimentó y evaluó un proceso formativo dirigido a la formación de maestros de matemáticas para intentar responder a los aspectos anteriores. En dicho proceso se incluyó la elaboración de un portafolio de aprendizaje, por parte de cada estudiante, que permitiera valorar diversas capacidades de aprendizaje y clasificarlas de una manera acorde a las tendencias actuales en Educación Matemática. Para ello, cada estudiante debía recoger una selección de actividades relacionadas que promovían la reflexión sobre la enseñanza-aprendizaje de matemáticas en Primaria y un diario con sus reflexiones sobre el propio proceso formativo desarrollado. En este contexto de formación se pretendía estudiar el nivel de reflexión de los estudiantes sobre las diferentes actividades realizadas durante el proceso formativo llevado a cabo en el aula universitaria.

A continuación se explican el marco teórico del estudio, el contexto de investigación, los instrumentos utilizados para obtener los resultados y las medidas para valorarlos. Finalmente se analizan y discuten los resultados, y se exponen las conclusiones conseguidas.

2. Marco teórico

La consideración del docente como un elemento principal en los procesos de enseñanza-aprendizaje facilita el reconocimiento de la importancia de la formación inicial de maestros pues sobre ellos recae la responsabilidad de educar las nuevas generaciones que dirijan la sociedad. Entendemos el conocimiento profesional como un conjunto de saberes y destrezas profesionales que el profesor posee y en los que se apoya para tomar decisiones docentes y realizar nuevos planteamientos. Está aceptado que aprender a enseñar es algo más que conocer técnicas o estrategias, por lo que la formación inicial de maestros de matemáticas ha de intentar algo más que una mera presentación de métodos y ha de estar dirigida a preparar al futuro docente para la resolución de situaciones y problemas vinculados a la futura práctica educativa. Reflexionar sobre cómo resolver situaciones y problemas prácticos vinculados a su futura práctica profesional es lo que permite que se pongan en práctica las ideas y las formas de comprensión que tienen de la educación matemática y, por tanto, promover su evolución (Llinares & Krainer, 2006). Para conseguir ésto, la presentación y tratamiento de los recursos o instrumentos en las aulas de formación debe favorecer el desarrollo profesional del futuro docente mediante la construcción de conocimiento profesional que facilite la adquisición de competencias profesionales adecuadas tales como análisis y síntesis, organización y planificación, colaboración y reflexión e investigación (Newell, 1996). Ésta es la razón por la que se han de proporcionar oportunidades para que los maestros en formación se pregunten y reflexionen sobre sus propias propuestas de enseñanza, la de los compañeros y la realizada en el aula de formación (Goodlad, 1990).

En la actualidad la reflexión sobre la práctica docente es uno de los principales objetivos de la tarea profesional por lo que, en este trabajo, se considera la reflexión como una capacidad que se debe desarrollar cuando los estudiantes para maestro de Matemáticas en Primaria adquieren el conocimiento profesional. Aunque la reflexión se remonta a Platón y, más recientemente a Kant, se cree que Dewey (1933) fue el primero que la consideró entendida como la capacidad de considerar un asunto seria y mentalmente para actuar respecto a él de un modo deliberado e intencional (Zeichner & Liston, 1996). Posteriormente Schön (1983, 1987) amplió ese concepto enfatizando la importancia del contexto y el tiempo en que la reflexión tiene lugar. Los investigadores han profundizado en el concepto a lo largo del tiempo y han adoptado diversas definiciones y marcos teóricos sobre el pensamiento reflexivo sin que se haya conseguido consenso sobre una definición común (Lee, 2005). Sin embargo globalmente se pueden encontrar aspectos comunes a todas ellas:

1. Reflexión es cualitativamente diferente a recolección o racionalización porque el objetivo de un pensamiento reflexivo aplicado a la enseñanza está en reconocer que la enseñanza es problemática.

2. La acción es una parte integral del proceso de reflexión.

3. La reflexión es una experiencia tanto individual como compartida.

A partir de ello pensamiento reflexivo es un pensamiento deliberado sobre la acción con la intención de mejorarla. Esto implica, primero, tener una mente abierta para reconocer la validez de otras perspectivas; segundo, responsabilidad para considerar las consecuencias éticas y morales de cada elección, y tercero, clarificar las limitaciones de lo que se asume cuando se toman decisiones docentes (Harrington, Quinn-Leering & Hodson, 1996; Hatton & Smith, 1995). En este sentido, aunque la reflexión es un acto privado, consideramos que son ejemplos de reflexión lo que los estudiantes escriben tanto referido a una tarea desarrollada en el aula de formación como al propio trabajo relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de Primaria.

La reflexión se ha considerado como un objetivo importante para los programas de formación de docentes y está aceptado que existe en diversos grados en las diferentes personas; por ello es necesario crear instrumentos de medida que permitan concretar los niveles de reflexión en los que opera una persona. Los intentos en este sentido han seguido diferentes esquemas de análisis dependiendo de la naturaleza de la investigación, generalmente basadas en los niveles técnico, práctico y crítico de Van Manen (1977) (El-Dib, 2007). Estos esquemas de análisis muestran esencialmente características similares que agrupamos en función de las siguientes dimensiones, no necesariamente exclusivas: Descriptiva que detalla el aspecto de reflexión; Comparativa que enmarca el aspecto de reflexión en relación con, por ejemplo, visiones alternativas, otras perspectivas o investigaciones y Crítica que considera las implicaciones del aspecto de reflexión y establece una nueva perspectiva (Hatton & Smith, 1995; Jay & Johnson, 2002; Lee, 2005).

Está ampliamente aceptado que la reflexión se ha convertido en aspecto de interés de muchas investigaciones en formación de docentes (Chamoso & Cáceres, 2009; Hoban & Hastings, 2006). En general, estas investigaciones muestran que se puede obtener información tanto de tipo cognoscitivo como no cognoscitivo a través de la observación, el diálogo y los escritos de los docentes para tomar decisiones sobre su aprendizaje. Sin embargo se debe continuar investigando el aprendizaje reflexivo para construir un repertorio de práctica porque, si es difícil caracterizar el concepto, aún lo es más enseñarlo y evaluarlo sin que únicamente se reduzca a una técnica. Además existe poca evidencia de investigación que muestre la calidad específica de la reflexión que emerge en diferentes condiciones (Hatton & Smith, 1995; McKenna, 1999; Jay & Johnson, 2002; Zeichner & Wray, 2001). Otros autores aconsejan examinar la relación que existe entre los resultados obtenidos en reflexión con los alcanzados en otras tareas desarrolladas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje (El-Dib, 2007). En ese sentido el trabajo de Winitzky (1992) descubrió una correlación entre la complejidad de la estructura de conocimiento y la habilidad de reflexionar sobre el pensamiento de los estudiantes para maestro sobre el desarrollo de las clases.

Para recoger evidencias sobre el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro se utilizó el portafolios de aprendizaje. El término portafolios se ha utilizado en numerosas investigaciones con diferentes significados (De Lange, 1995). En la literatura se identifican varios tipos de portafolios en función de la finalidad, lo que se incluye en el portafolios, la naturaleza y la calidad de las interacciones sociales que experimentan los estudiantes para docentes en el proceso de construcción o de lo que ocurre con el portafolios una vez completado (Zeichner & Wray, 2001). Generalmente los investigadores suelen distinguir entre portafolios de aprendizaje, de evaluación y de empleo. El portafolios de aprendizaje, utilizado frecuentemente en los programas de formación de docentes, habitualmente se define como una colección personalizada de trabajos para promover la reflexión, con el propósito de involucrar a los estudiantes para docentes en el cuestionamiento de su enseñanza y la documentación del desarrollo docente (Dinham & Scott, 2003; Xu, 2003; Zeichner & Wray, 2001).

En este estudio nos centramos en el uso del portafolio de aprendizaje. Lo entendemos como una colección de trabajos realizados por cada alumno que permite aportar evidencias sobre su conocimiento, habilidades, disposición y reflexión sobre su trabajo así como su evolución. Lo más destacable de la evaluación utilizando el portfolio es que muestra el trabajo al final de un proceso pero también permite conocer el progreso del aprendizaje del estudiante, las responsabilidades que asume, cómo participa en el proceso de diagnóstico y evaluación, sus actitudes, sus hábitos de independencia y reflexión, y sus habilidades tanto en resolución de problemas como en comunicación, razonamiento y análisis. El portafolios sirve como motivación del estudiante, como ayuda para mejorar su aprendizaje y crear un hábito de revisión, además de que posibilita que el profesor mejore su instrucción. En definitiva es una herramienta completa de evaluación que promueve el aprendizaje reflexivo y que los estudiantes adquieran experiencia en ideas matemáticas generales, vean las Matemáticas como parte de la cultura y se involucren en experiencias matemáticas (Lajoie, 1995). Sin embargo evaluar estas tareas formales o informales requiere métodos de análisis e interpretación como pueden ser plantillas de valoración en las que se reflejen los criterios de evaluación del proceso y se establezcan distintos niveles de consecución de cada uno de ellos (Ross, McDougall & Hogaboam-Gray, 2003).

En los últimos años, el uso de los portafolios se ha convertido en lugar común en la formación de docentes con diferentes finalidades (Farr Darling, 2001; Van Tartwijk, Van Rijswijk, Tuithof & Driessen, 2008; Zeichner & Wray, 2001). Por ejemplo, para estimular a los futuros docentes en la reflexión sobre temas específicos en su contexto (Mansvelder-Longayroux, Beijaard & Verloop, 2007) o para documentar el aprendizaje y la evolución en un proyecto específico (Wade & Yarbrough, 1996). De acuerdo con Dinham y Scott (2003), consideramos el portafolios de aprendizaje como esencialmente formativo, con capacidad de alteración debido al aumento de la experiencia y del desarrollo de la comprensión. Xu (2003) recomendó extender el uso de los portafolios durante el periodo de formación inicial para promover el desarrollo profesional dado el valor de la utilización de este instrumento como mecanismo para promover la reflexión y el aprendizaje profesional.

Aunque Wade y Yarbrough (1996) descubrieron que sólo había nueve estudios de investigación sobre el uso del portafolios de aprendizaje en la formación del profesorado, en los años siguientes aumentaron considerablemente (Farr Darling, 2001). Se trata de una herramienta para estimular la reflexión en el contexto de la educación de los estudiantes para ser profesor (Mansvelder-Longayroux, Beijaard & Verloop, 2007). Si bien se ha escrito mucho sobre la importancia de la práctica reflexiva, ha sido escasa la atención prestada al proceso reflexivo que los futuros docentes experimentan durante la realización de un portafolios de aprendizaje (Tillema, 1998). La plena integración del portafolios de aprendizaje en la estructura curricular requiere una mejor apreciación de cómo se puede utilizar como instrumento de reflexión y cómo éste refleja el seguimiento del aprendizaje de los profesores en formación ya que incluye variadas actividades del programa de formación.

No hemos encontrado investigaciones que analicen las reflexiones de los estudiantes para maestro sobre el aprendizaje adquirido en el aula de formación universitaria antes de realizar sus prácticas de enseñanza en centros formativos. Por tanto, para este estudio se construyó un instrumento para evaluar el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro de matemáticas a nivel de Primaria sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje llevado a cabo en el aula de formación y expresado en sus diarios incluidos en su portafolios de aprendizaje. También se incluyen herramientas para valorar otras capacidades de los estudiantes para maestro con criterios comunes a la herramienta diseñada para la valoración del pensamiento reflexivo. En ese contexto las preguntas de investigación son:

1. ¿Qué niveles de pensamiento reflexivo exhibieron los estudiantes para maestro de Matemáticas en su portafolios de aprendizaje sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje llevado a cabo en el aula de formación universitaria?

2. ¿Cuál fue la relación entre los niveles de reflexión alcanzados por los estudiantes para maestro de Matemáticas y los obtenidos en otros aspectos del proceso de aprendizaje?

3. Contexto de investigación

3.1. Participantes

La experimentación fue realizada en un aula de formación de maestros de Primaria en el contexto institucional universitario, durante el curso 2006-07. El grupo fue establecido según la organización del centro. Se consideraron 33 estudiantes para maestro (10 varones, 30 %, y 23 mujeres, 70 %), que fueron los que completaron todas las actividades del curso Matemáticas y su Didáctica II de la diplomatura de Maestro, especialidad Primaria, de 4'5 créditos, de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, de los 39 matriculados. Su media de edad era de 21.7 años. Ninguno tenía experiencia previa en la utilización de portafolios de aprendizaje. El proceso formativo que configuró la experiencia estudiada fue desarrollado por el profesor habitual de la asignatura que llevaba 20 años de ejercicio en la profesión.

3.2. Características del proceso formativo

Los estudiantes que cursaban Matemáticas y su Didáctica II ya habían estudiado otra asignatura anual de 9 créditos relacionada con matemáticas, en 1er curso, impartida por el mismo profesor. En ese momento, el curriculum para formar maestros de Primaria en la Universidad de Salamanca se desarrollaba en tres años y, durante los dos últimos cursos, se incluían unos dos meses de practicum en centros de enseñanza de Primaria. Cuando la experiencia se llevó a cabo, los estudiantes para maestro todavía no habían empezado a desarrollar el practicum.

Finalidades, objetivos y contenidos del proceso

Se consideró que, para la formación inicial de futuros docentes de matemáticas de Primaria, además de un conocimiento teórico (saber), era necesario poseer destrezas suficientes para impartir los contenidos (saber hacer), lo que se organizó en términos de competencias desde dos puntos de vista y, a su vez, cada una de ellas clasificada en dos subaspectos diferentes (Cáceres, Chamoso & Azcárate, 2010):

1. *Competencias matemáticas*:
   - De conocimiento, entendidas como aquellos conceptos, propiedades y actividades matemáticas adecuadas para el nivel de Primaria,
   - De profundización en el conocimiento, entendidas, por ejemplo, como la capacidad de experimentar un contenido matemático, realizar actividades abiertas o establecer relaciones con otros contenidos o áreas.
2. *Competencias profesionales* para enseñar matemáticas en Primaria:
   - De conocimiento, entendidas como lo que la educación matemática aporta para facilitar la enseñanza y aprendizaje como, por ejemplo, materiales y recursos, peculiaridades de los estudiantes de Primaria cuando se enfrentan al aprendizaje o aspectos metodológicos,
   - De profundización en el conocimiento, entendidas como la capacidad de aplicar el conocimiento a la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en Primaria como, por ejemplo, el diseño de la aplicación de un determinado conocimiento en el aula de Primaria; la reflexión sobre las acciones propias o las de los demás, y sobre otros elementos que caracterizan una situación educativa; o el diseño de actividades creativas para Primaria.

Con este planteamiento se diseñaron y desarrollaron las sesiones en el aula de formación. El diseño se adecuó a los objetivos y contenidos de la asignatura que eran los relacionados con contenidos relacionados con geometría plana y espacial y medida, considerados desde el punto de vista de su docencia en la enseñanza Primaria.

Desarrollo metodológico de la experiencia de formación

En las sesiones, fundamentalmente, se trató de desarrollar aplicaciones prácticas de los conocimientos matemáticos a partir de juegos, materiales y recursos para aplicar en el aula de Primaria. Se pretendió formar un soporte intuitivo a la vez que observar, manipular, dibujar, representar, clasificar, razonar, abstraer, relacionar, crear, relacionar con el medio y con la vida diaria, y desarrollar la intuición espacial. Todo ello se hizo de forma diversa según se iban recorriendo los distintos contenidos de programa pero siempre buscando la participación activa de los estudiantes, tanto en el aula como fuera de ella, y tanto de forma individual como en grupo: por ejemplo, mediante presentaciones del profesor, sesiones de laboratorio, lectura de artículos o capítulos de libro y problemas abiertos. En el trabajo individual se promovió el estudio, la reflexión y la presentación de ideas y estrategias utilizadas en las actividades que se desarrollaron.

En el trabajo en grupo se fomentó el análisis, la reflexión crítica y la discusión durante la realización de las actividades.

Las sesiones se centraron en el trabajo del estudiante para maestro donde se compaginaba el conocimiento y profundización de competencias matemáticas y profesionales con el desarrollo de propuestas de trabajo para el estudiante vinculadas a los cuatro subaspectos indicados anteriormente de dichas competencias. Una sesión habitual siempre utilizaba el tratamiento de un contenido matemático del programa y solía iniciarse con una presentación del profesor, trabajo en pequeños grupos basado en la adquisición de *Competencias matemáticas de Profundización en el conocimiento* o en *Competencias Profesionales de Conocimiento* y, finalmente, una puesta en común final cuyo principal objetivo era reflexionar sobre el trabajo efectuado y, referido al mismo, profundizar en aspectos relacionados con *Competencias Profesionales de Profundización en el conocimiento*. En resumen, el principal objetivo de las sesiones era conseguir que los estudiantes para maestro alcanzaran *Competencias Profesionales de Profundización en el conocimiento* en algún sentido; es decir, pensaran como profesores de matemáticas a nivel de Primaria para lo cual necesitaban, además de poseer el *Conocimiento Matemático*, utilizar la *Profundización en el conocimiento Matemático* y mostrar el *Conocimiento Profesional*.

En este sentido, las propuestas de trabajo para los estudiantes se vincularon a esos cuatro subaspectos y, en función del número de ellos que involucraron, se denominaron:

- Ejercicios, un único subaspecto, por ejemplo, el ejercicio 2 fue "Construye la recta de Euler utilizando solamente un trozo de papel",
- Actividades, más de un subaspecto, por ejemplo, la actividad 5 tenía el objetivo de identificar cómo cada estudiante para maestro relacionaba y aplicaba su comprensión de ejemplos de matemáticas extraídas de otros contextos culturales o de su propia experiencia. Para ello se desarrolló una sesión de aula con el fin de utilizar prácticas matemáticas para analizar la actitud intercultural de los futuros docentes y donde se utilizaron ejemplos reales de diferencias interculturales relacionadas con geometría, aritmética y resolución de problemas, ver Planas, Chamoso y Rodríguez, (2007). Posteriormente, los estudiantes tuvieron dos semanas para escribir su propia definición de actitud intercultural y buscar ejemplos de diferencias culturales relacionadas con matemáticas que cumplieran esa definición. Las actividades realizadas por los estudiantes se presentaron posteriormente para su discusión en parte de una sesión usual de aula, y
- Proyectos, los cuatro subaspectos, por ejemplo, el proyecto 1 consistía en el desarrollo de un contenido matemático a nivel de Primaria (se detalla posteriormente).

En total se realizaron seis ejercicios, ocho actividades y cuatro proyectos. Para todos ellos existía posibilidad de revisión y mejora. Algunas propuestas de trabajo se desarrollaron en pequeños grupos pero cada estudiante tenía que realizar la presentación final, individualmente, en su portafolio. Algunas se podían completar fuera del aula y otras se desarrollaron exclusivamente fuera de ella. El profesor actuó como mediador e informó a los alumnos, por ejemplo, sobre objetivos de enseñanza y aprendizaje, metodología, criterios y formas de valoración, y revisión de los trabajos. Además, orientó a los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades realizadas. Todo ello se presentó al inicio del curso y se acordó previamente entre alumnos y profesor.

Desarrollo de la disciplina

Se consideró que el futuro maestro debía conocer los contenidos de la materia que iba a impartir y posibles formas de hacerlo, estar capacitado para reflexionar sobre su futura práctica docente y para diseñar o adaptar recursos según las necesidades y características de las personas con las que trabajaría en el futuro, por lo que el objetivo del curso consideró cuatro aspectos fundamentales: matemático, metodológico, reflexión y creatividad.

Referido a conocimiento matemático, tanto en aspectos teóricos como actividades prácticas, se consideraba que los estudiantes para maestro, al llegar a la Universidad, debían poseer el dominio suficiente de los mismos aunque no la forma de llevarlos a la práctica. A pesar de que habían cursado diferentes disciplinas teóricas relacionadas con Didáctica General, Psicología aplicada a la Educación y Didácticas Específicas, se suponía que era uno de los aspectos en el que presentaban más carencias. Por ello, al inicio del curso, se desarrollaron seis sesiones de dos horas (27 % del curso), cada una con objetivos diferentes, donde se trabajó algún contenido matemático relacionado con el programa haciendo especial hincapié en aspectos metodológicos como el trabajo en grupo, la importancia de situarse en la manera de pensar del alumno cuando se enfrenta a una actividad, la búsqueda de lo importante en el aula, los objetivos de la evaluación, materiales para el aula, mapas conceptuales, el diálogo en el aula y rutas matemáticas (Chamoso 2000; 2003; 2004; Chamoso, Durán, García, Martín & Rodríguez, 2004; Chamoso & Rawson, 2001; 2004; Chamoso, Fernández & Reyes, 2009). Al finalizar cada una de estas sesiones se discutió sobre el objetivo del trabajo realizado y sobre lo aprendido.

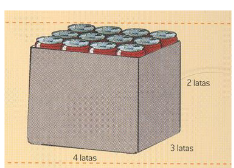
Después de esta preparación metodológica, el desarrollo de las demás sesiones se realizó en un triple sentido según los aspectos que se tuvieran en cuenta:

1. Conocimiento del contenido matemático y metodológico para la enseñanza de las matemáticas en Primaria (Conocimiento, 36 % del curso), referido tanto a contenido teórico de matemáticas como a diferentes formas de enseñarlo en el aula. Como se consideraba que los estudiantes para maestro poseían el dominio suficiente del primero, aunque no del segundo, pareció importante que cada estudiante se centrara en un contenido determinado del programa para profundizar en el mismo, tanto desde el punto de vista matemático como del de su aplicación en la enseñanza en Primaria (proyecto 1). Esto se realizó en un doble sentido:

    a) Conocimiento matemático y metodológico (18 % del curso): Los estudiantes, de acuerdo con el docente, clasificaron los contenidos del programa de la disciplina de manera que se dividiesen entre todos ellos para que cada uno profundizara en uno de ellos. La capacidad de logro en un caso permitiría suponer sus posibilidades con cualquier otro. De esa forma se podrían recorrer los contenidos del programa si se tenía en cuenta el trabajo de todos los estudiantes. Todos podían acceder al trabajo del resto y recogerlo en su cuaderno. Eso también valoraba la importancia del trabajo en grupo. Así, cada estudiante consideró un contenido determinado que permitiese, además de recordarlo, profundizar en él pensando en su tratamiento en Primaria teniendo en cuenta, por ejemplo, actividades, materiales adecuados o dificultades previstas. Para ello se disponía de documentación suficiente. Posteriormente, algunos estudiantes lo presentaron en el aula tanto para que los demás compañeros y el docente lo conociesen y aportasen su punto de vista respecto al mismo, como para experimentar, de forma directa, cómo se debería desarrollar la enseñanza de ese contenido. Referido a este aspecto, sus interlocutores serían futuros docentes en vez de estudiantes de Primaria, por lo que deberían adaptar su presentación a este hecho. Además, debían recoger su trabajo por escrito donde podrían añadir circunstancias que no se hubieran considerado por alguna razón como, por ejemplo, falta de tiempo, incorporar actividades o proponer adaptaciones al nivel de los alumnos a los que fuera dirigido. Los estudiantes habían realizado una actividad similar con el mismo docente durante el curso anterior. El profesor realizó la primera presentación que sirvió como instrumento de reflexión, crítica y discusión en sesiones posteriores.

b) Actividades (18 % del curso): La amplitud de contenidos del programa suponía una gran cantidad de actividades posibles pero, como no era posible realizar todas las existentes, se decidió trabajar las siguientes:

- El desarrollo de una selección de ellas referidas a los diversos contenidos del programa. Con la finalidad de que no se convirtiesen en actividades rutinarias, se plantearon de forma abierta y general con un nivel superior a las que se suelen proponer a los estudiantes de 6 a 12 años. Se realizaron en grupos durante una sesión de dos horas en el aula usual. El objetivo era discutir y descubrir la forma de trabajarlas.
- El desarrollo de una determinada actividad, de forma individual aunque en contacto con los demás miembros del aula, haciendo hincapié en el razonamiento de la resolución para conseguir la solución. En concreto, fue la siguiente: "*En una caja se almacenan 24 latas de 33 cl. de refresco como se ve en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja si la altura de la caja coincide con la de dos latas, el largo con el de 4 latas y el ancho con el de 3 latas? ¿Cuánto cartón se necesita para construirla? ¿Cuánto espacio libre queda entre las latas? Explícalo con detalle*".



Una vez que los estudiantes entregaron la actividad, en otra sesión posterior se les entregó una plantilla de valoración, confeccionada por el profesor, para que autoevaluasen su trabajo. Posteriormente, se les pidió que hiciesen lo mismo con las resoluciones de otros dos estudiantes de la misma actividad con el objetivo de que reflexionasen y fueran críticos con lo que habían hecho.

- El desarrollo de, al menos, tres actividades que cada estudiante debía elegir libremente de una colección de problemas propuestos que se ajustaban a los contenidos del curso y que debían resolver haciendo hincapié en el proceso de resolución. Cada uno lo debía realizar fuera del aula y presentarlo en el plazo de dos semanas.

2. *Reflexión* (18 % del curso): Los estudiantes para maestro no tenían formación ni experiencia previa en hacer reflexiones en el contexto de un programa de formación. Este aspecto se desarrolló, tanto en sesiones formativas sobre la importancia de la reflexión como informativas para conocer formas de hacerlo, en dos sentidos:

   a) Reflexión conjunta en el aula de cada una de las 3 sesiones iniciales. Posteriormente, los estudiantes escribieron y entregaron sus reflexiones individualmente. Una vez revisadas por el profesor, fueron devueltas con puntualizaciones, usualmente en forma de preguntas al margen, con el objetivo de clarificar el objetivo que se perseguía al realizarlas.

   b) Sesiones de formación en los siguientes aspectos:
   - Reflexión personal del profesor a las pocas semanas del comienzo del curso sobre el desarrollo de cada una las sesiones que se habían realizado hasta ese momento referidos a aspectos tales como los contenidos desarrollados, la participación de los estudiantes y profesor, las carencias presentadas y formas de mejorar. Su punto de vista se completó con la aportación de los estudiantes.
   - Formación sobre la importancia de la reflexión para los docentes y formas de hacerlo (Jay & Johnson, 2002).
   - Valoración final del desarrollo del curso realizada entre los estudiantes para maestro y el profesor.

3. *Creatividad* entendida como la capacidad de crear en situaciones no previstas (18 % del curso):

   a) Problemas. Durante el curso previo se habían desarrollado algunas sesiones de Resolución de Problemas por lo que, como ya se conocía esa forma de trabajo, se plantearon dos sesiones con los estudiantes, cada una con un problema diferente. Por ejemplo, uno fue el siguiente: "*Una persona debe llevar un mensaje a través del desierto. Para cruzar el mismo son necesarios 9 días. Una persona puede llevar comida solamente para 12 días. No hay alimento en el lugar donde debe dejar el mensaje. ¿Es posible que entre dos personas sean capaces de llevar el mensaje y volver sin que les falte comida? (Supón en un caso que no se puede enterrar o esconder comida y en otro que sí se puede)*". Los estudiantes lo trabajaron en el aula, aunque podían completarlo en casa y entregarlo una semana después. Después, en una sesión posterior, cada uno reflexionó sobre su trabajo.

   b) Actividad abierta. Se creó un cuento con un doble criterio, que realmente fuera una lectura adecuada y agradable para niños, similar a la que realizan normalmente, y que, de su desarrollo, fuera posible extraer actividades matemáticas. Se presentó en una sesión de dos horas de duración y los estudiantes buscaron actividades o conceptos relacionados con matemáticas que se podían extraer de su lectura. El objetivo era que pensaran en el cuento como un instrumento de enseñanza y estudiaran sus aspectos positivos y negativos para ello. Posteriormente, se presentaron actividades organizadas para su posible aplicación directa en el aula de matemáticas de Primaria. Después, se pidió a los estudiantes que inventaran un pequeño pasaje, una historia corta o adaptaran algo conocido a partir de lo cual se pudiesen realizar actividades en el aula de matemáticas de Primaria (más detalle, Chamoso, González & Hernández, 2005).

c) Proyecto. Se pidió que cada estudiante eligiera un oficio y desarrollara las matemáticas de ese oficio para poder llevarlo al aula de Primaria. Las actividades se podían estructurar a lo largo de los días de una semana. Es decir, "*Una semana en la vida del... carpintero / taxista / campesino / bombero / sastre / pescador / cartero…*". Además, debían presentar el oficio explicando, por ejemplo, en qué consistía, las herramientas que se utilizaban y el lugar donde se realizaba, con el objetivo de contextualizar aquello que se emplearía en las actividades matemáticas. Para que entendieran el objetivo se consideró un ejemplo. Tenían un mes para realizarlo. En una sesión posterior de aula, cada estudiante defendió su trabajo.

Sistema de evaluación

Se utilizó un sistema de evaluación para interpretar qué ocurría en el aula cuando se utilizaban técnicas de evaluación distintas a las usuales, cómo afectaba al aprendizaje del alumno y cómo utilizaba el profesor la información que obtenía. Para ello se emplearon instrumentos fácilmente manejables y adaptados al ritmo habitual del trabajo en el aula para valorar el conocimiento del alumno. El sistema de evaluación fue presentado al principio del curso y se acordó entre los estudiantes para maestro y el profesor.

Cada uno de estos estudiantes desarrolló, a lo largo de todo el proceso formativo, un portafolios de aprendizaje que debía recoger una selección de los contenidos y actividades trabajados en el aula, todas las desarrolladas fuera del aula y actividades voluntarias sobre aspectos del proceso formativo. El contenido del portafolios de aprendizaje debía mostrar el conocimiento adquirido por estudiante. Además, debían incluir un diario con la reflexión crítica semanal del propio trabajo, el de sus compañeros y sobre el desarrollo de las sesiones.

Para cada una de las propuestas de trabajo realizadas a los estudiantes para maestro se proporcionaron plantillas de valoración con la finalidad de que cada uno pudiera realizar una autoevaluación del trabajo desarrollado, identificar carencias o errores y modificarlo a medida que avanzaba su formación. Este sistema de evaluación desarrollado durante el proceso formativo se completó con una prueba escrita sobre los diversos contenidos desarrollados, al final del curso.

4. Metodología de investigación

Esta investigación, que se contextualiza en la propuesta formativa previa, pretende construir una herramienta para valorar el pensamiento reflexivo que los estudiantes para maestro expresan en los diarios escritos que incluyen en su portafolios de aprendizaje y construir herramientas para valorar otras capacidades utilizando criterios comunes a todas ellas. Además, evaluar las reflexiones que los estudiantes para maestro de Matemáticas hacen sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado en las aulas de formación en el sentido de la profundidad que alcanzan. En definitiva, se pretendía analizar la profundidad de las reflexiones de los estudiantes para maestro de Matemáticas sobre el proceso de aprendizaje desarrollado en el aula universitaria y comparar esas reflexiones de los estudiantes con su conocimiento matemático, creatividad y examen.

4.1. Instrumentos de recogida de datos

Los trabajos escritos que los estudiantes para maestro incluyeron en su portafolios de aprendizaje. En concreto:

Referido a la profundidad de las reflexiones de los estudiantes para maestro de Matemáticas sobre el proceso de aprendizaje desarrollado en el aula universitaria: Las reflexiones escritas de cada uno de los estudiantes para maestro sobre las diferentes sesiones en el aula.

Para determinar la relación entre los niveles de reflexión y los obtenidos en otros aspectos del proceso formativo, en cada apartado del portafolios de aprendizaje, se eligió una de las propuestas de trabajo para el estudiante ya que, en cada caso, tenían como objetivo el desarrollo de diferentes capacidades del conocimiento profesional. Concretamente:

- Para el estudio del conocimiento, se eligió el desarrollo del proyecto en que el estudiante debía elaborar el desarrollo teórico a nivel de Primaria de un contenido del programa.
- Para el estudio de la creatividad, se seleccionó el desarrollo del proyecto en el que el estudiante debía proponer actividades matemáticas dirigidas a estudiantes de Primaria a partir de un oficio.

Para determinar la relación entre los niveles de reflexión y los obtenidos en otros aspectos del proceso formativo, en cada apartado del portafolios de aprendizaje, se eligió una de las propuestas de trabajo para el estudiante ya que, en cada caso, tenían como objetivo el desarrollo de diferentes capacidades del conocimiento profesional. Concretamente:

- Además, se consideraron las respuestas a la prueba escrita final (Prueba) sobre los contenidos de la asignatura.

4.2. Diseño de los instrumentos de análisis

El aprendizaje de cada estudiante se analizó en dos sentidos: por un lado, la consecución de los 3 objetivos anteriormente señalados de forma independiente (*Reflexión, Conocimiento y Creatividad*), para lo que se establecieron medidas generales de valoración que, posteriormente, se concretaron para cada uno de ellos; por otro, estableciendo relaciones entre ellos con el fin de dar una valoración global a cada estudiante.

Ese planteamiento inicial era muy general ya que pretendía incluir todos los aspectos que se consideraban representativos de los objetivos de cada una de las actividades propuestas. Cuando se valoraron los trabajos de algunos estudiantes se observó que se perdían los objetivos particulares de cada actividad y se encontraban serias dificultades para la obtención de conclusiones valorativas de cada uno en sí mismo y en comparación con otros. Por tanto, se realizó un replanteamiento del trabajo y se decidió perfeccionar los instrumentos de valoración manteniendo los mismos objetivos que se habían planteado inicialmente: establecer el grado de implicación de cada estudiante en los diferentes aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje considerados a partir del estudio, tanto individual como en conjunto, de los tres trabajos seleccionados.

A partir de las dimensiones utilizadas en investigaciones previas con estudiantes de magisterio cuando realizaban el practicum, se consideró el nivel de profundidad alcanzada por cada estudiante para maestro en función de su participación en el proceso de aprendizaje: si el estudiante tenía un punto de vista externo al mismo, era un participante activo o si, además, el estudiante tomaba decisiones y sugería sus propias propuestas. Para evaluar el aprendizaje de los estudiantes de magisterio se decidió realizar una categorización general, común para todos los trabajos estudiados, en función de su profundización, calidad en el desarrollo del tópico considerado y su implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el siguiente sentido:

> *Nivel 1 (Descripción):* Cuando el estudiante participa en el proceso con una visión externa.
>
> *Nivel 2 (Argumentación):* Cuando el estudiante participa de forma activa en el proceso.
>
> *Nivel 3 (Aportación):* Cuando el estudiante, además de participar, se involucra en el proceso, y toma decisiones propias.

Estos criterios generales, a partir de la revisión del trabajo de los estudiantes, se adaptaron para valorar las actividades seleccionadas para las categorías *Reflexión*, *Conocimiento* y *Creatividad* (Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3).

En concreto, referido a *Reflexión*, el objetivo era analizar las reflexiones de los estudiantes sobre las diferentes sesiones realizadas en el aula a partir de su diario personal para lo cual se establecieron tres niveles:

Tabla 1
Niveles para la valoración de Reflexión

REFLEXIÓN	
Niveles	Indicadores generales
1 (Descripción)	Cuando el estudiante describe aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje sin implicarse, es decir, se limita a reseñar qué se ha hecho durante el desarrollo de una actividad.
2 (Argumentación)	Cuando el estudiante argumenta, justifica o extrae conclusiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, participa en el proceso tratando de comprender el sentido de la actividad.
3 (Aportación)	Cuando el estudiante realiza aportaciones propias con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, además de comprender, se involucra en el desarrollo y mejora de las actividades.

En el estudio del *Conocimiento*, el objetivo era analizar el desarrollo de los contenidos matemáticos desarrollados por los estudiantes para su aplicación en el aula de Primaria a partir de tres niveles:

Tabla 2
Niveles para la valoración de Conocimiento

CONOCIMIENTO	
Niveles	**Indicadores generales**
1 (Descripción)	Cuando el estudiante presenta el contenido de forma lineal, plantea ejemplos y actividades que requieran la aplicación directa del concepto explicado sin distinguir los niveles de Primaria a los que se dirige.
2 (Argumentación)	Cuando el estudiante relaciona contenidos, utiliza ejemplos o actividades motivadoras como introducción que permitan la relación entre ellos, los relaciona con otras áreas o la vida cotidiana, sigue una secuencia lógica en su explicación o distingue diferentes niveles de aplicación en Primaria.
3 (Aportación)	Cuando el estudiante explica los contenidos con argumentos propios, utiliza ejemplos y actividades motivadoras adecuadas, plantea ejemplos y actividades variadas y originales que posibilitan la creatividad del alumno o aplica esos contenidos para diferentes niveles de Primaria.

Referido a *Creatividad*, el objetivo era analizar la relación de los contenidos matemáticos con el contexto seleccionado en el trabajo de cada estudiante para lo cual se establecieron tres categorías:

Tabla 3
Niveles para la valoración de Creatividad

CREATIVIDAD	
Niveles	**Indicadores generales**
1 (Descripción)	Cuando el estudiante demuestra conocer los contenidos pero no los relaciona entre sí y tanto el desarrollo global como las actividades son las habituales de un libro de texto.
2 (Argumentación)	Cuando el estudiante relaciona conceptos y sigue una secuencia lógica que explique el desarrollo global del trabajo con gráficos y dibujos, es decir, adapta las actividades de forma que tengan relación con el contexto aunque no surjan del mismo.
3 (Aportación)	Cuando el estudiante utiliza argumentos propios y crea modelos originales para explicar los contenidos, el desarrollo global del trabajo con gráficos y dibujos, es decir, las actividades surgen del contexto sin adaptarlas.

Estos niveles se fueron delimitando a partir del análisis de los trabajos de cada estudiante con el objetivo de que dos personas que aplicaran la plantilla a un mismo trabajo obtuvieran los mismos resultados, hasta lograr una plantilla de valoración para cada uno de los aspectos considerados tanto en la descripción de indicadores para cada nivel como en los aspectos concretos y globales. Además, a partir de la revisión de los trabajos de los estudiantes se observó que, en ocasiones, referido a *Reflexión*, expresaban aspectos ajenos al proceso de enseñanza-aprendizaje o generalidades que no reflejaban ese proceso aunque se refirieran a él (Generalidad) y, referido a *Conocimiento* y *Creatividad*, tomaban definiciones, propiedades, desarrollo y gráficos directamente de otras fuentes estructurados sin criterio aparente. Como no aportaban información al objetivo que se pretendía no se consideraron en el estudio (nivel 0).

A continuación se muestran las plantillas definitivas (Tabla 4, Tabla 5 y Tabla 6). Cada una consta de 2 columnas: la primera refleja los niveles (0, 1, 2 y 3) y la segunda, recoge los indicadores utilizados para aclarar peculiaridades aparecidas en ejemplos concretos para cada uno de ellos. Además, se añadió un apartado para valoración global de la estructura del trabajo y criterios generales de aplicación de cada una de ellas.

Tabla 4
Plantilla de niveles para el estudio de Conocimiento en el proyecto desarrollado por los estudiantes

ESTUDIO DEL *CONOCIMIENTO*	
Niveles	**Indicadores**
0 (Generalidad): Toma los contenidos directamente de otras fuentes y los estructura sin criterio aparente.	▪ Los contenidos están expresados sin criterio aparente. ▪ No suele utilizar ejemplos. ▪ El desarrollo no se ajusta al título.
1 (Descripción): Presenta los contenidos de forma lineal, sin relacionarlos entre sí.	▪ Sus ejemplos y actividades son aplicación directa del contenido presentado.
2 (Argumentación): Relaciona los contenidos entre sí y los desarrolla siguiendo una secuencia lógica.	▪ Relaciona los contenidos con conceptos previos. ▪ Utiliza algún ejemplo o actividad motivadora que permitan un acercamiento al contenido antes de su explicación, aunque no sean totalmente adecuados. ▪ Utiliza ejemplos y actividades que relacionan las Matemáticas con otras áreas o con la vida cotidiana. ▪ Reflexiona sobre sus objetivos.
3 (Aportación): Explica los contenidos con argumentos propios para clarificar su significado y crea modelos originales.	▪ Utiliza los conceptos en diferentes contextos creando modelos originales. ▪ Utiliza algún ejemplo o actividad motivadora que introduzca el contenido de forma adecuada y con cierta creatividad. ▪ Utiliza ejemplos y actividades variadas y originales que posibilitan la creatividad del alumno. ▪ Reflexiona sobre sus objetivos y muestra que se han cumplido.
Valoración global de la estructura del trabajo escrito (esquema, desarrollo, objetivos, conclusión, bibliografía, reflexión personal).	0: Carece de los aspectos fundamentales y no se aprecia coherencia aparente. 1: Presenta algunos aspectos fundamentales. 2: Incluye la mayor parte de los aspectos fundamentales. 3: Incluye todos los aspectos fundamentales con coherencia.

Tabla 5
Plantilla de niveles para el estudio de Reflexión en las producciones escritas de los estudiantes

ESTUDIO DE LA *REFLEXIÓN*	
Niveles	**Indicadores**
0 (Generalidad): Refleja aspectos ajenos al proceso de aprendizaje o generalidades que no reflejan el proceso de aprendizaje, aunque se refieren a él, sin justificar.	▪ Consideraciones subjetivas sobre la actitud de otros, del tiempo empleado en realizar algo, etc. ▪ Suele reflejar sus gustos, afinidades o impresiones personales sin justificar. ▪ Expresa situaciones personales. ▪ Dice qué personas han desarrollado una actividad. ▪ Dice que se ha conseguido algo pero no aclara exactamente qué. ▪ Expresa qué utensilios se utilizan para realizar una explicación (pizarra, transparencias…), cómo se han organizado los grupos o distribuido el tiempo de clase.
1 (Descripción): Describe aspectos relacionados con el proceso de enseñanza - aprendizaje sin implicarse o se sobreentiende de forma implícita.	▪ Alude al tipo de actividad sobre la que se va a reflexionar. ▪ Describe su objetivo al realizar un trabajo. ▪ Completa una generalidad con expresiones explicativas que permiten apreciar algo sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. ▪ Alude a la relación de las Matemáticas con otras asignaturas o con la vida cotidiana. ▪ Dice lo que ha aprendido o conseguido tras realizar una actividad.
2 (Argumentación): Completa las descripciones: argumenta, relaciona, saca conclusiones o justifica con razonamientos propios aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje.	▪ Completa descripciones o saca conclusiones con argumentos propios. ▪ Explica por qué se pueden relacionar las matemáticas con otras asignaturas o con la vida cotidiana. ▪ Reflexiona qué se consigue o se puede conseguir con determinada explicación, metodología, etc. explicando cómo o por qué. ▪ Alude a la importancia de un aspecto concreto o muestra interés por profundizar en el tema pero no llega a aportar algo concreto. ▪ Reflexiona sobre aspectos que están en el aula pero no de forma explícita, como por ejemplo la posible aplicación de una actividad en enseñanza Primaria. ▪ Reflexiona sobre su situación personal ante una actividad, aclara con argumentos propios sus impresiones personales. ▪ Obtiene conclusiones sobre la consecución de los objetivos que se habían planteado. ▪ Realiza reflexiones globales sobre cuestiones que ha comentado anteriormente. ▪ Detecta una carencia pero no aporta una solución concreta.

3 (Aportación): Añade aportaciones que complementan las descripciones con asuntos nuevos y diferentes a los presentados por otros relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje con el objetivo de mejorar aunque no deje completamente claro su argumento.	▪ Sugiere posibilidades concretas que permiten relacionar las Matemáticas con otras materias o con la vida cotidiana. ▪ Expresa cómo mejorar su aprendizaje aunque no deje totalmente claro su argumento. ▪ Explica su visión personal sobre el proceso seguido con una argumentación clara. ▪ Se pregunta o argumenta con fundamento sobre cuestiones como: qué, cómo, por qué, con qué finalidad o en qué momento del proceso de aprendizaje se debe hacer algo en el aula aunque no deje totalmente claro su argumento. ▪ Explica su visión personal sobre el proceso seguido con una argumentación clara.

Tabla 6
Plantilla de niveles para el estudio de Creatividad en los proyectos realizados por los estudiantes

ESTUDIO DE LA *CREATIVIDAD*	
Niveles	**Indicadores**
0 (Generalidad): Toma los contenidos directamente de otras fuentes y los estructura sin criterio aparente.	▪ El contexto, el argumento y las actividades no son válidos. ▪ No se adapta al trabajo pedido.
1 (Descripción): Conoce lo que utiliza sin relacionarlo entre sí para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	▪ El contexto, al argumento y las actividades son válidos. ▪ Las aportaciones son las habituales.
2 (Argumentación): Argumenta lo que realiza relacionándolo entre sí, siguiendo una secuencia lógica para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	▪ El contexto, el argumento y las actividades son válidas, apropiados y motivadores. ▪ Las aportaciones son variadas.
3 (Aportación): Utiliza argumentos propios y crea modelos originales para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	▪ El contexto, el argumento y las actividades válidas, apropiadas, motivadoras y creativas. ▪ Adapta el trabajo a distintos niveles de dificultad. ▪ Las aportaciones son muy variadas en diferentes sentidos.
Valoración global de la **estructura del trabajo** escrito (esquema, desarrollo, objetivos, conclusión, bibliografía, reflexión personal).	0: Carece de los aspectos fundamentales y no se aprecia coherencia aparente. 1: Presenta algunos aspectos fundamentales. 2: Incluye la mayor parte de aspectos fundamentales. 3: Incluye todos los aspectos fundamentales con coherencia.

4.3. Aplicación de los instrumentos de análisis

Tras la elaboración de plantillas de análisis se procedió a su aplicación a los trabajos de todos los estudiantes. Se identificaron unidades completas de información cuya extensión varió desde una frase corta a varios párrafos (entre todos los estudiantes hubo, en total, 2432 unidades en *Reflexión*, 321 en *Contenido* y 270 en *Creatividad*). Posteriormente se aplicó la plantilla de valoración correspondiente. Para ello se siguieron los siguientes criterios:

Para el estudio de la *Reflexión*:

Se consideraron unidades completas de información o unidades reflexivas, entendidas como cada idea o pensamiento simple acerca de un determinado tópico o suceso, y se desecharon las afirmaciones en las que se produjeron contradicciones.

Se entendió por aspectos relacionados con el proceso de aprendizaje todo lo que se refería al quehacer del profesor, de los compañeros o propio, independientemente de que hubiera ocurrido en el aula (exposiciones, realización de actividades, etc.) o fuera de ella (preparación, elaboración, realización de trabajos, conclusiones, etc.).

Cuando las afirmaciones no fueron claras o fueron demasiado generales, así como cuando se apoyaron en su situación personal ante determinados estímulos (por ejemplo, "me gustó...", "fue bueno. . . "), se consideraron en un nivel inferior.

No podía haber Argumentación ni Aportación si no había una Descripción previa implícita o explícita.

Para el estudio del Conocimiento y de la Creatividad:

Se consideraron unidades completas de información entendidas como unidades con sentido siempre que se refirieran a diferentes aspectos (desarrollo conceptual, aplicación, forma de explicarlo. . .) aunque versaran sobre el mismo tema, y se desecharon las afirmaciones en las que se produjeron contradicciones.

Cuando el estudiante planteaba ejercicios similares se consideraron todos ellos como una única unidad de información. Un ejemplo de la aplicación de la plantilla al trabajo de un estudiante referido a *Reflexión* es el que sigue: en la primera fila aparece la identificación del estudiante mediante tres letras correspondientes a las iniciales de sus dos apellidos y primer nombre, precedido de "refl"; en la primera columna se recoge su trabajo dividido en unidades completas de información, "unidades reflexivas" para cada una de las actividades realizadas en el aula de formación a las que aludieron en su diario; en la segunda el nivel al que pertenecía según la plantilla correspondiente y, en la tercera, una breve explicación de por qué esa unidad de análisis se consideró en dicho nivel (Tabla 7).

Tabla 7
Ejemplo de aplicación de la plantilla de valoración de Reflexión

reflSCM		
Act. 8 (Ángulos)		
1. Resume los contenidos del tema.	**1**	Describe lo que se ha explicado en el aula sin implicarse.
2. Nuestras compañeras nos han acercado de una manera clara, precisa y muy elemental al tema de ángulos, lo que nos ha permitido comprender y entender este tema sin ningún problema.	**0**	Expresa impresiones personales que no aclara ni justifica.
3. Nos han explicado conceptos tales como qué es un ángulo, cómo denominar un ángulo, los tipos de ángulos que existen, cómo medir un ángulo, qué es un radián y qué entendemos por grados, y han introducido algunas nociones de historia. Conceptos que todos sabemos porque en algún momento de nuestra vida escolar los hemos estudiado o nos los han explicado. Con esta explicación nos han recordado y aclarado conceptos que teníamos un poco olvidados y lo han hecho, en mi opinión, de manera muy acertada y precisa.	**1**	Describe exactamente los conceptos que ha recordado.
4. El único punto negativo que yo pondría o que yo veo es la explicación que nos han dado del concepto de radián, no por cómo se ha explicado sino por la complejidad que supone explicar y hacer comprender dicho término. No es fácil explicar a niños de Primaria qué es un radián, cómo se obtiene o cuál es su equivalencia.	**2**	Argumenta sobre la idoneidad de la aplicación en el aula de Primaria de una explicación realizada en el aula.
5. También destacaría la ausencia de actividades propuestas para desarrollar en el aula de Primaria, sólo han mencionado una actividad para que los niños entiendan qué es un ángulo (trabajar el ángulo con una cuerda y una estaca). Para trabajar el resto de conceptos no se ha propuesto ninguna actividad, algo esencial si queremos que los conceptos queden entendidos.	**2**	Argumenta sobre la aplicación en el aula de Primaria de actividades relacionadas con los conceptos explicados.
6. Una actividad que podemos realizar con los niños a la hora de desarrollar este tema es la construcción de nuestros propios aparatos de medición de ángulos. Podemos construir un sextante simplemente con un semicírculo graduado y una sencilla plomada, también podemos construir planchetas. Estos instrumentos contarán con amplios márgenes de error; eso no será importante ya que tenemos que tener en cuenta que la finalidad es aprender, además debemos tener en cuenta lo motivador que resulta para el alumno utilizar sus propios aparatos de medición. De esta forma lo que conseguiremos será una clase amena, participativa y en la que los conceptos quedarán registrados de manera más eficaz.	**3**	Tras la argumentación anterior propone, de forma explícita, actividades alternativas que considera adecuadas y explica por qué.

Una vez valorados los trabajos de cada estudiante, los resultados para cada aspecto se recogieron en tablas donde en cada casilla 0, 1, 2 ó 3 se reflejó la cantidad de unidades completas de información de cada estudiante en cada caso. Se debe señalar que, cuando los estudiantes entregaron cada trabajo al profesor por primera vez, éste los revisó con el único objetivo de decidir si alcanzaba, al menos, el nivel 1 para, en otro caso, devolverlo para dar posibilidad de revisión. Además de los datos absolutos, también se presentaron en porcentajes. Sólo se dejaron casillas en blanco cuando el trabajo no fue entregado o no se efectuó la revisión solicitada por el profesor por no haber alcanzado el nivel mínimo exigido para su aceptación.

Además, como los resultados en *Reflexión* se pretendían analizar, tanto para estudiar el grado de reflexión alcanzado por cada estudiante como para estudiar qué actividades provocaron mayores niveles de reflexión, se diseñó una tabla en la que se especificaron las diferentes actividades y en la que se reflejó el recuento de unidades completas correspondientes a cada nivel de cada estudiante. La adición de los resultados de cada estudiante multiplicados, respectivamente, por el factor de la categoría correspondiente y, el resultado final, dividido entre la suma de todas las unidades completas de información, se consideró como valoración en cada uno de los aspectos considerados. Además, la calificación que cada estudiante alcanzó en la *Prueba* escrita final sobre los contenidos de la asignatura según los criterios usuales de su profesor se consideró como valoración para este aspecto.

4.4. Fiabilidad y validez

En todos los casos la valoración de los trabajos de los estudiantes para maestro se realizó de forma independiente por los miembros del equipo investigador hasta llegar a un acuerdo entre ellos. Posteriormente fue revisada por un juez independiente, un investigador en psicología educativa, que coincidió en la mayor parte: 93 % en la profundidad de la *Reflexión*, 87 % en *Conocimiento* y 91 % en *Creatividad*. Los desacuerdos se resolvieron a partir de la discusión y acuerdo entre los investigadores y el juez.

4.5. Medidas

Para el análisis de la profundidad de las reflexiones realizadas por los estudiantes para maestro sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje y su relación con las valoraciones obtenidas en otros aspectos de dicho proceso se establecieron las siguientes medidas:

La descripción de los resultados obtenidos por los estudiantes para maestro en la categoría Reflexión, tanto para establecer niveles de pensamiento reflexivo de los estudiantes como para detectar los niveles de pensamiento reflexivo que provocaban las diversas actividades desarrolladas durante el proceso formativo.

La descripción de los resultados obtenidos por los estudiantes para maestro en las categorías Conocimiento y Creatividad.

La relación entre los resultados obtenidos por los estudiantes para maestro en Reflexión, Conocimiento, Creatividad y Prueba, para establecer la coherencia entre el nivel alcanzado por cada alumno en los diversos aspectos.

Los trabajos que cada estudiante incluyó en su portafolios se analizaron de manera cualitativa de acuerdo a las categorías consideradas. Para el análisis cuantitativo de los datos se comprobó que se mantenía la normalidad y homogeneidad de la varianza, y se utilizó estadística descriptiva, análisis de la varianza de medidas repetidas (ANOVA) con corrección de Bonferroni.

5. Resultados

El análisis de la profundidad de las reflexiones de los estudiantes para maestro de matemáticas sobre el proceso de aprendizaje desarrollado en el aula universitaria se realizó en dos sentidos: los niveles de pensamiento reflexivo que presentaron de acuerdo con las plantillas de análisis diseñadas y la relación que existió entre dichos niveles y los obtenidos en el desarrollo de un contenido matemático a nivel de Primaria, en el desarrollo de la creatividad en el diseño de actividades matemáticas relacionadas con un oficio y en el examen final en el sentido explicado anteriormente de acuerdo con las preguntas de investigación.

5.1. Niveles del pensamiento reflexivo

Para establecer cuáles fueron los niveles de pensamiento reflexivo que los estudiantes para maestro de matemáticas exhibieron en su portafolios de aprendizaje sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje llevado a cabo en el aula de formación se consideraron los resultados obtenidos a partir de las reflexiones escritas de los estudiantes en dos sentidos: los niveles globales de reflexión alcanzados por los estudiantes y con relación a las diversas actividades realizadas durante el proceso formativo. Para ello se recogieron en tablas tanto los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las actividades como, posteriormente, los resultados globales de cada estudiante, en valores absolutos y en porcentajes para los diferentes niveles establecidos en la correspondiente plantilla de valoración, así como agrupados en intervalos de amplitud 10 según los porcentajes obtenidos en cada nivel (Tabla 8).

Para un estudio más pormenorizado de estos datos se agruparon los porcentajes de unidades de reflexión en cada uno de los niveles de profundidad en intervalos, salvo el porcentaje nulo que se consideró aparte, y se tuvo en cuenta la frecuencia de estudiantes que se encontraba en cada uno de ellos; estos datos se consideraron también en porcentajes, como se muestra en la Tabla 8, y en la que se observa, por ejemplo, que el 13 % de alumnos tuvieron entre 31 % y 40 % de unidades de reflexión en el nivel 1.

Tabla 8
Frecuencia de alumnos por intervalos, dependiendo del porcentaje de unidades de reflexión conseguidas en cada nivel 0, 1 2 y 3 (valores absolutos y porcentajes)

Intervalos en *Reflexión*								
Niveles	**Valores absolutos**				**Porcentajes**			
	0	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
0	1	0	0	13	3	0	0	41
[1,10]	3	0	8	14	9	0	25	44
[11,20]	10	0	12	4	31	0	37	12
[21,30]	11	0	6	1	35	0	19	3
[31,40]	6	4	5	0	19	13	16	0
[41,50]	0	8	1	0	0	25	3	0
[51,60]	1	11	0	0	3	34	0	0
[61,70]	0	7	0	0	0	22	0	0
[71,80]	0	2	0	0	0	6	0	0
[81,90]	0	0	0	0	0	0	0	0
[91,100]	0	0	0	0	0	0	0	0

En la Tabla 8 se observa que el 62 % de los alumnos tuvo más del 50 % de descripciones en su trabajo de *Reflexión* (nivel 1) y ninguno tuvo menos del 31 %. De esta manera, los estudiantes realizaron entre el 31 % y el 80 % de descripciones en este trabajo. Respecto al porcentaje de respuestas de cada estudiante en argumentación (nivel 2), no hubo ningún alumno sin ellas y tampoco con más del 50 % de sus producciones en este nivel. De hecho, el 97 % de los alumnos se encontraba en el intervalo entre el 1 % y el 40 % de los cuales el 63 % se situó entre el 1 % y 20 % de argumentaciones. En nivel 3, en que los estudiantes, además de describir y argumentar también realizaron aportaciones, el 41 % no realizó ninguna. En ningún caso se superó el 30 % en aportaciones y sólo hubo un alumno (3 %) cuyas argumentaciones estuvieron por encima del 20 %. Cabe mencionar que únicamente un alumno no tuvo resultados en el nivel 0, lo que puede hacer pensar que esa persona únicamente recogía aspectos que aportaban algo a su explicación.

En definitiva los alumnos, en sus reflexiones, principalmente describieron aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje pero sin implicarse, llegando a justificar y argumentar con razonamientos propios en un porcentaje inferior. En un porcentaje aún menor, realizaron aportaciones que complementaban las descripciones y argumentaciones. Esto se relacionaba con su implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que quizás puede mostrar que el alumno tuvo una visión externa de lo que sucedía, únicamente de escucha y no participación a pesar de los buenos resultados obtenidos en las actividades realizadas que, quizás, pueda ser consecuencia de una enseñanza tradicional no participativa donde el estudiante se limitó a realizar lo que le pedían sin crítica, justificación y aportaciones de lo que hiciera.

En un análisis pormenorizado se observó que las actividades donde más se argumentó y aportó fueron aquellas que exigían una visión más general de aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje, en concreto, la valoración personal en que había que realizar una reflexión personal global de la asignatura (actividad 25) y el debate realizado en el aula donde, después de un tiempo de preparación previa, un grupo de estudiantes defendía la nueva metodología de enseñanza, mientras que otro la atacaba con argumentaciones y aportaciones, y cuyo objetivo era derrotar verbalmente al grupo contrario (actividad 24).

5.2. Relación entre los niveles de reflexión y los de otros aspectos

Para establecer la relación entre los niveles de reflexión alcanzados por los estudiantes para maestro de matemáticas y los obtenidos en otros aspectos del proceso de aprendizaje, se muestran los resultados de cada estudiante, obtenidos a partir de las plantillas de valoración y de la forma que se explicó anteriormente, para los aspectos *Conocimiento* y *Creatividad* organizados en tablas. En ellas se tuvieron en cuenta tanto los valores globales absolutos de cada estudiante en cada actividad considerada como en porcentajes, para poder comparar unos con otros. Además, se agruparon en intervalos de amplitud 10 según los porcentajes obtenidos en cada categoría. Posteriormente se presentan las relaciones que se dieron entre los resultados obtenidos en estos aspectos, en *Reflexión* y la valoración obtenida por cada estudiante para maestro en la *Prueba* escrita final a partir del ANOVA de medidas repetidas con corrección de Bonferroni.

Los resultados obtenidos por los estudiantes para maestro en *Conocimiento* y agrupados en intervalos según los niveles alcanzados (Tabla 9) fueron los siguientes:

Tabla 9
Frecuencia, por intervalos, de los alumnos en los distintos niveles de Conocimiento (valores absolutos y porcentajes)

Intervalos en *Conocimiento*								
Niveles	Valores absolutos				Porcentajes			
	0	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
0	17	6	2	12	63	22	7	43
[1,10]	4	4	0	2	15	16	0	8
[11,20]	4	0	4	0	15	0	15	0
[21,30]	0	5	2	6	0	18	7	22
[31,40]	2	2	5	3	7	7	20	11
[41,50]	0	1	6	2	0	4	22	8
[51,60]	0	3	4	0	0	11	15	0
[61,70]	0	2	2	0	0	7	7	0
[71,80]	0	0	0	0	0	0	0	0
[81,90]	0	4	0	2	0	15	0	8
[91,100]	0	0	2	0	0	0	7	0

Se observa que, globalmente, la mayoría de las respuestas de los estudiantes se encontraron en los niveles 1 y 2 (con medias de 34 % y 41 % respectivamente), es decir, desarrollaron los contenidos de forma lineal o los relacionaron entre sí siguiendo una secuencia lógica. En muchos menos casos (media de 19 %), explicaron los contenidos con argumentos propios y crearon modelos originales.

Más concretamente, en el nivel 1 existe gran dispersión con una varianza alta (56.45 %). En el nivel 2, la mayor parte de las producciones estaban entre el 11 % y el 70 %, donde estaba el 85 % de los casos. Respecto al tercer nivel, el 44 % no realizó ninguna producción. Destaca el hecho de que 2 alumnos (7 %) tuvieron un 83 % de las unidades de información referidas a *Conocimiento* en este nivel y el 41 % restante se encontraban en un intervalo entre el 21 % y el 50 %. En definitiva, se observa gran variabilidad en los resultados de los alumnos. Destacan algunos casos como, por un lado, el que 2 (7 %) de ellos sólo presentaron producciones en los niveles 0 y 1 y, por otro, 4 (13 %) sólo lo hicieron en los niveles 2 y 3.

Referido a la actividad seleccionada de *Creatividad*, los resultados fueron los siguientes tanto en relación con cada estudiante como considerados en intervalos (en valores absolutos y en porcentajes):

Tabla 10
Frecuencia de alumnos por intervalos en los distintos niveles de Creatividad (valores absolutos y porcentajes).

Intervalos en *Creatividad*								
Niveles	Valores absolutos				Porcentajes			
	0	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
0	22	5	0	10	73	17	0	33
[1,10]	0	0	0	0	0	0	0	0
[11,20]	6	6	4	6	20	20	13	20
[21,30]	1	4	6	4	3	13	20	13
[31,40]	1	1	9	2	3	3	30	7
[41,50]	0	2	3	3	0	7	10	10
[51,60]	0	4	4	1	0	13	13	3
[61,70]	0	7	3	2	0	23	10	6
[71,80]	0	0	1	1	0	0	3	3
[81,90]	0	1	0	1	0	3	0	3
[91,100]	0	0	0	0	0	0	0	0

Se puede observar que hubo gran variabilidad en los niveles 1, 2 y 3. La mayoría de los alumnos presentaron sus producciones en el trabajo de *Creatividad* en los niveles 1 y 2 (35 % y 37 % de media). En concreto, hubo 5 alumnos (17 %) que tuvieron resultados únicamente en 2 y 3 (sólo 2 de ellos coincidieron con alguno de los 4 estudiantes mencionados antes referido a *Conocimiento*), uno de ellos con el 89 % de sus producciones en el nivel 3, mientras que 10 (30 %) no tuvieron ninguna en este nivel. En definitiva, existió gran variabilidad en los resultados en los tres aspectos pero parece que cada alumno tuvo tendencia a presentar la mayor parte de sus producciones en torno al mismo nivel.

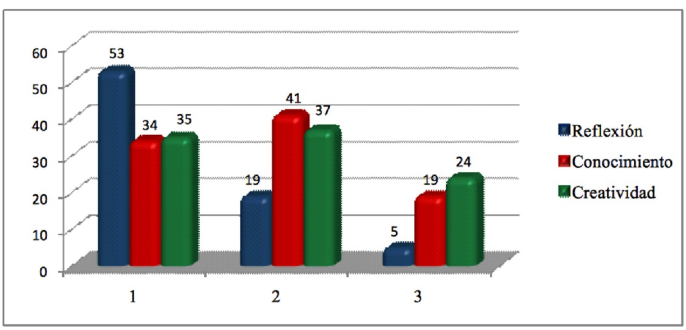


Figura 1: Medias obtenidas por los estudiantes para maestro en los niveles 1, 2 y 3 para las categorías Reflexión, Conocimiento y Creatividad.
*Como no se consideró el nivel 0, la suma de los resultados no es el 100.

Si se consideran los resultados de las actividades seleccionadas de los 3 aspectos de *Conocimiento*, *Reflexión* y *Creatividad* (ver Tabla 10) no se descubren regularidades en los resultados. Por ejemplo, los de LHS parecen homogéneos en los tres aspectos considerados; los de MRA fueron bajos en *Reflexión* y medios en *Conocimiento* y *Creatividad*; los de RPB fueron bajos en conocimientos matemáticos y en *Creatividad*, y medio en *Reflexión*; los de RSC fueron altos en *Conocimiento* y bajos en *Reflexión* y *Creatividad*; los de SCM fueron muy altos en *Creatividad*, en *Reflexión* muy altos y medios en *Conocimiento*; los de SGM fueron altos en *Reflexión* y muy bajos en *Conocimiento* los de SRD fueron muy altos en *Conocimiento* pero medios en *Reflexión*; los de VGO fueron altos en *Creatividad* y *Conocimiento* matemático y bajos en *Reflexión*. En definitiva, cada alumno obtuvo resultados diferentes en cada actividad sin que, aparentemente, en cada caso existiera relación entre los tres aspectos estudiados. Esta variabilidad en los resultados en los aspectos confirma la importancia de trabajar y evaluar según múltiples aspectos para conseguir una formación integral del alumno.

El análisis de la varianza de medidas repetidas mostró que, globalmente, existieron diferencias significativas entre los resultados obtenidos en los cuatro aspectos considerados: *Reflexión*, *Conocimiento*, *Creatividad* y *Prueba* [$F(3, 69)=11.75$, $p<0.001$]. Para descubrir esas diferencias se realizaron contrastes entre medias con ajuste Bonferroni para reducir el nivel alfa a un nivel más conservador de 0.008 (es decir, 0.05/6). Este análisis muestra que las diferencias fueron significativas entre los resultados obtenidos en *Reflexión* y cada uno de los otros tres aspectos (Tabla 11), lo que refleja que el primero valora habilidades diferentes que los otros.

Tabla 11
Resultados comparativos de las variables diferencias entre Reflexión, Conocimiento, Creatividad y Prueba

	Diferencia de medias	***t***	***p***
Reflexión* y *Conocimiento	-0.644	-5.441	0.000 **
Reflexión* y *Creatividad	-0.706	-6.297	0.000 **
Reflexión* y *Prueba	-0.587	-5.060	0.000 **
Conocimiento* y *Creatividad	-0.097	-0.647	0.523
Conocimiento* y *Prueba	0.067	0.370	0.714
Creatividad* y *Prueba	0.095	0.589	0.561

* n.s. < 0.05 ** n.s. < 0.01

Ello refuerza la necesidad de utilizar instrumentos de valoración adecuados a cada una de las diversas capacidades que se pretendan desarrollar en la formación de los estudiantes para maestro de Matemáticas.

6. Discusión

Los estudiantes para maestro de matemáticas en Primaria participaron activamente en las sesiones formativas y se mostraron motivados y extrañados de que se pudieran presentar los contenidos matemáticos de formas tan distintas a las que estaban acostumbrados ("*Hemos trabajado duro y aprendido mucho pero sin apenas darnos cuenta de ello*", "*Quién me iba a decir que en este cuatrimestre iba a dedicar más horas a las Matemáticas, haciendo cosas interesantes, que al Inglés o al Arte, ¡las cosas que más me gustan!*", "*Me gustaría tener más clases para seguir descubriendo cosas sorprendentes para la enseñanza de las Matemáticas*", "*Nunca antes había trabajado* *de esta forma y ahora me doy cuenta de que hay una y mil maneras de trabajar las Matemáticas*").

Sin embargo, en sus reflexiones, los estudiantes para maestro fundamentalmente describieron aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje sin llegar a involucrarse y, en un porcentaje mucho menor, argumentaron o realizaron aportaciones, a pesar de la formación en reflexión realizada en el aula. Al principio estos resultados parecieron frustrantes pero la literatura revisada sobre ese aspecto proporciona evidencias de que, si sólo se involucra a los estudiantes en reflexiones escritas, no se suele promover una reflexión realmente productiva (Hatton & Smith, 1995; Loughran, 2002). Con todo, estos resultados son similares a los obtenidos en investigaciones sobre las reflexiones que realizaban los estudiantes para maestro durante sus prácticas en centros de enseñanza (El-Dib, 2007; Goodell, 2006; Ward & McCotter, 2004).

La mayoría de los estudiantes para maestro no estaban acostumbrados a realizar reflexiones sobre actividades matemáticas y, sin embargo, los resultados de algunos de ellos sugieren que es posible alcanzar un alto nivel de reflexión. Este fue, por ejemplo, el caso de un estudiante cuya edad, estudios y formación previa eran similares a las de los demás. En las sesiones de aula no destacó en conocimiento, creatividad u otras actividades ni había llamado especialmente la atención del profesor por sus intervenciones; no obstante, tuvo el 69 % de sus contribuciones en los niveles 2 y 3.

No todas las actividades realizadas en el aula universitaria de formación provocaron los mismos niveles de reflexión. De hecho, los niveles más altos se alcanzaron en aquéllas en las que los estudiantes para maestro participaron activamente, lo que hace pensar que la calidad de la reflexión depende de los aspectos a los que se refieran, como sugirieron, por ejemplo, Mansvelder-Longayroux, Beijaard & Verloop (2007). También es posible que la falta de reflexión en otras actividades pueda deberse a que aquellas que usualmente los estudiantes estaban acostumbrados a realizar de una determinada manera, normalmente de modo pasivo, es difícil que sean modificadas a corto plazo, pero no porque no fueran capaces de hacerlo sino porque, simplemente, no lo hicieron. Esto nos hace suponer que los estudiantes eran capaces de reflexionar con más profundidad pero no estaban acostumbrados a hacerlo.

Esta carencia de reflexión general también puede hacer pensar que no se dedicó suficiente tiempo a la formación de los estudiantes en ese sentido, pero consideramos que no fue así. Se realizó una reflexión conjunta después de cada una de las diversas actividades realizadas en el aula durante todo el desarrollo de la disciplina y, además, tres sesiones completas en diferentes sentidos como, por ejemplo, una reflexión personal del profesor a las pocas semanas de empezar las clases. Es decir, a pesar del tiempo que se dedicó a ello, no se reflejó en las reflexiones escritas por los estudiantes sobre las actividades. Esto lleva a pensar que este aspecto es de desarrollo lento debido quizás a una enseñanza previa duradera que propició bajos niveles de reflexión.

Por otro lado, no se puede olvidar que no es fácil poseer un alto nivel de reflexión porque, de hecho, pocos adultos lo manifiestan (Zuckerman, 2004). Esto puede ser un problema porque, aunque varía de unos a otros, los ciudadanos en su vida personal o en sus ocupaciones diarias necesitan realizar continuamente juicios rápidos y tomar decisiones en entornos problemáticos o situaciones cambiantes, a veces bajo una presión extrema. A menudo tales demandas requieren algo más que poseer conocimientos y habilidades. Sin embargo, si la reflexión se debe considerar un aspecto básico de la competencia profesional del individuo, necesitamos conocer más sobre su estructura, peculiaridad y naturaleza para saber lo que puede conseguir el pensamiento reflexivo (Ixer, 1999). La educación, sobre todo las universidades, deberían esforzarse en resolver las carencias de formación en ese aspecto, en particular con los futuros maestros porque ellos tendrán que educar a los futuros ciudadanos (Barnett, 1997).

En resumen, las reflexiones de los estudiantes para maestro apenas permitieron descubrir cómo se produjo el aprendizaje ni, en general, cómo se desarrolló la enseñanza. Concretamente, no recogieron si entendían la enseñanza como pura transmisión de conocimientos o construcción propia del aprendizaje. Los investigadores, así como los formadores de docentes, tienen poco conocimiento sobre el proceso de aprender a enseñar, así como sobre los estudiantes que se encuentran en ese proceso (Oosterheert & Vermunt, 2001). Por ello entendemos que los educadores de docentes deben ayudar a los estudiantes para maestro a que reflexionen sobre cómo se desarrollan las sesiones formativas y cómo se produce el aprendizaje.

Aunque la reflexión, como recuerda Fendler (2003), como una mirada al pasado de uno mismo puede ser peligrosa ya que puede revelar únicamente lo que ya se sabe, entendemos que los resultados obtenidos pueden proporcionar información a los formadores de los estudiantes para maestro respecto al rango de experiencias a las que los estudiantes se enfrentan cuando pasan a ser docentes, y a los estudiantes de magisterio para descubrir que su punto de vista conlleva multitud de elementos implícitos y explícitos que se pueden considerar de manera más efectiva.

Consideramos que los estudiantes para maestro debían tener dificultades para desarrollar un pensamiento reflexivo cuando la enseñanza que habían experimentado antes de llegar al aula de formación universitaria había sido, habitualmente, pasiva y sin crítica, justificación o contribuciones, es decir, con información discreta y respuestas correctas, algo diferente al tipo de pensamiento requerido para un pensamiento reflexivo profesional. Los profesores de docentes algunas veces olvidamos que los estudiantes han tenido una formación basada, principalmente, en la práctica tradicional. Además, aunque cada Universidad tiene autonomía para diseñar su propio programa, muchas de ellas preparan a los estudiantes para maestro centrando la formación en el curriculum, instrucción y técnicas y estrategias de enseñanza-aprendizaje relativas a las disciplinas de Primaria, pero pueden carecer de la preparación para entender el desarrollo de pensamiento crítico en la enseñanza (El-Dib, 2007). Crear oportunidades para la disonancia cognitiva a través de, por ejemplo, la enseñanza constructivista y las experiencias puede alterar el punto de vista de los estudiantes para maestro aunque quizás se deberían desarrollar más investigaciones en este sentido.

Flores, López, Gallegos y Barojas (2000) señalaron la necesidad de moderar las expectativas de cambio en las actividades formativas y procurar transiciones progresivas que supongan avances consolidados en las concepciones de los futuros profesores en vez de dar saltos al vacío con pocas posibilidades de mantenerse en el tiempo. Las reflexiones sobre el diseño de la práctica, una de las estrategias dominantes en los programas de formación, tienen una clara influencia en las ideas de los futuros profesores como se ha comprobado en este estudio. Pero los futuros docentes necesitan experimentar sus nuevas ideas y reflexionar sobre dicha experimentación para consolidar los cambios (Watts & Jofili, 1998).

Esto no es contrastable con ideas teóricas generales sino con otras de naturaleza práctica, de carácter alternativo. Por ello la formación de profesores debe adoptar enfoques progresivos y constructivistas, tal como se propone en este estudio. Esto permitirá a los futuros profesores elaborar referentes prácticos que cada uno deberá adaptar a su formación y creencias. Parece necesario que los futuros profesores contrasten sus propias visiones con prácticas alternativas y no sólo con informaciones teóricas (Duit & Treagust, 2003).

Nos hemos dado cuenta que enseñar a reflexionar a los estudiantes para maestro implica mucho más que dedicar algunas sesiones de formación a la reflexión y la creación de un portafolios de aprendizaje. Pensamos que existe la necesidad de describir técnicas o actividades que se puedan usar en seminarios de formación de docentes con la intención de promover la reflexión y, además, realizar más investigación en este sentido (por ejemplo, Korthagen, 1992; Valli, 1992). También somos conscientes de que, en términos de una práctica reflexiva eficaz, trabajar con situaciones reales es fundamental para crear un aprendizaje a través de la experiencia para orientar a una comprensión y desarrollo del conocimiento profesional. Antes de esto, la preparación de los profesores ofrece un camino para sensibilizar a los estudiantes para maestro sobre este proceso y, al hacerlo, capacitarlos como profesionales. No se puede esperar que los estudiantes para maestro reflexionen con la misma profundidad que un experto, pero se les debería apoyar en el inicio de un camino que les llevará a una reflexión más experta y efectiva (Loughran, 2002).

Los resultados obtenidos han podido estar influenciados por el hecho de que analizamos las reflexiones escritas de los estudiantes para maestro, las cuales pueden limitar la capacidad para transmitir sus pensamientos. Algunos autores recomiendan la utilización de otros instrumentos como presentaciones orales formales, entrevistas o encuestas (Kagan, 1990). Quizás los resultados fueran diferentes si hubiéramos considerado otras formas de reflexión como la reflexión colaborativa (Wade & Yarbrough, 1996; Winitzky, 1992; Hatton & Smith, 1995; Jay & Johnson, 2002). El diálogo refuerza el aprendizaje de los estudiantes para maestro y revela cierto grado de satisfacción que no es inherente al formato de la respuesta. Dar oportunidades a este tipo de evaluaciones debe proporcionar el potencial para un modelo de aprendizaje en la formación inicial de docentes más colaborativo, aunque para ello habría que crear un ambiente que produzca el libre flujo de ideas (Roe & Stallman, 1994). Por otro lado, no podemos olvidar que sabemos mucho más de lo que podemos transmitir (Polanyi, 1967).

La investigación existente sobre el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro, antes de comenzar sus prácticas de enseñanza en centros educativos, es escasa. Las investigaciones sobre el tema aseguran que una de las posibilidades que ofrecen el desarrollo del portafolios de aprendizaje y la reflexión sobre el proceso formativo es la de dar evidencia sobre la evolución de las ideas iniciales de los estudiantes, pero no se han encontrado investigaciones en las que este aspecto se haya estudiado empíricamente, al menos referido al ámbito de formación de docentes o relacionado con la Didáctica de las Matemáticas. Esto es especialmente relevante cuando, en el sistema de enseñanza-aprendizaje diseñado, se ha dado la oportunidad a cada estudiante para maestro de reflexionar en su portafolio de aprendizaje.

Por tanto, el presente estudio debería contribuir a la investigación empírica sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes para maestro y cómo toman conciencia de la formación que han recibido ya que los sistemas de categorías diseñados para cada uno de los aspectos considerados, unido al sistema de análisis utilizado, pueden proporcionar un método para valorar el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro, otras capacidades propias de esta formación, los aspectos del proceso formativo sobre los que se expresan y cómo lo hacen, y las modificaciones que hacen en sus informes escritos, que se podrían utilizar en futuras investigaciones. Además este método puede ser útil para los formadores de docentes que trabajan tanto en formación universitaria de futuros profesores como en la formación permanente del profesorado.

7. Conclusiones

Con la intención de formar a los docentes para que fueran críticos con su propia práctica y potenciar competencias y capacidades profesionales que les permitieran abordar las diversas situaciones y evolucionar en su propia competencia profesional, se diseñó y desarrolló un proceso formativo dirigido a la formación de maestros de matemáticas donde la reflexión se consideró un aspecto fundamental. El sistema de enseñanza-aprendizaje integraba un proceso de evaluación a partir de actividades diseñadas con el objetivo de que el estudiante para maestro fuera capaz de construir su propio aprendizaje y reflexionara sobre su trabajo. Los estudiantes de magisterio se enfrentaron a actividades diferentes como, por ejemplo, realización de trabajos escritos, presentaciones orales, resolución de problemas, elaboración de proyectos y tareas abiertas, reflexiones en común, discusión sobre lo realizado y valoraciones del trabajo efectuado utilizando plantillas de valoración. Las sesiones formativas desarrolladas en el aula universitaria se realizaron utilizando variadas metodologías, diferentes a las usuales, que tenían el objetivo de favorecer la participación activa y la construcción del conocimiento por los estudiantes.

Tanto los objetivos que se querían alcanzar durante el proceso formativo como los criterios de evaluación se presentaron inicialmente y se consensuaron con los estudiantes. Además, en su desarrollo en el aula se mantuvo un diálogo continuo entre profesor y alumnos durante todo el proceso que permitió modificar la planificación cuando pareció adecuado. El profesor revisó, en todo momento, el trabajo de los alumnos. Además, realizó sus propias reflexiones y las compartió con ellos. Transmitió sus propios aciertos y errores, y explicó las causas de cada modificación de la planificación inicial con el objetivo de que el estudiante tomara conciencia del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así, para evaluar el proceso global de aprendizaje, cada estudiante para maestro, además de una prueba final escrita, elaboró un portafolios de aprendizaje donde recogió una selección de actividades sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Primaria, y un diario con sus reflexiones sobre el proceso formativo llevado a cabo. Se diseñaron guías de evaluación para los diversos trabajos que debían realizar los estudiantes que permitieron valorar diversas capacidades de aprendizaje. Concretamente, los apartados que constituían el portafolios se establecieron en tres sentidos: *Conocimiento matemático*, *Reflexión* y *Creatividad*. De cada uno de estos apartados se analizó una actividad que, en cada caso, tenían como objetivo el desarrollo de diferentes capacidades del conocimiento profesional. Sólo en el caso de las reflexiones se analizaron todas las producciones de los estudiantes.

Con este planteamiento de enseñanza se consiguió una alta participación y motivación de los alumnos. Los trabajos, en general, fueron de gran calidad. La elaboración del portafolios, la utilización de las plantillas de valoración y la puesta en común de los resultados en el aula y su discusión posterior permitió una evaluación formativa durante todo el curso que facilitó que cada estudiante evaluara su trabajo y revisara sus respuestas. Además, permitió una reflexión continua personal y conjunta sobre qué se estaba haciendo bien y qué se debía mejorar, tanto sobre el propio trabajo y el de los compañeros como sobre el del profesor.

Las producciones escritas de los estudiantes para maestro se analizaron en diferentes sentidos. Se diseñaron los instrumentos de análisis utilizados en cada caso debido a la escasez de investigaciones donde se trabajó la reflexión con estudiantes para docentes previamente al periodo de prácticas de enseñanza en centros educativos. En concreto, se diseñaron plantillas de valoración en función de la profundización y calidad en el desarrollo del tópico considerado y su implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir de los trabajos presentados por los estudiantes en sus portafolios de aprendizaje, para detectar los niveles de reflexión, conocimiento y creatividad. Además, se categorizaron los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje y las competencias a las que los estudiantes para maestro se referían en las reflexiones de acuerdo con la formación recibida y, dentro del aprendizaje, los aspectos de adquisición y aplicación de los conocimientos. Finalmente, se diseñaron plantillas de valoración para descubrir las modificaciones realizadas por los estudiantes en sus trabajos iniciales, tras la formación recibida, en 4 aspectos -contenido, actividades, metodología y reflexión- y se establecieron los niveles para el estudio de la profundidad de las modificaciones.

Los estudiantes para maestro no tenían experiencia previa en la elaboración de portafolios de aprendizaje ni en la reflexión sobre el proceso de enseñanza aprendizaje y la formación tuvo una duración de un sólo cuatrimestre. Por ello, los resultados hay que entenderlos en el marco del proceso en que se desarrollaron. A continuación se presentan las conclusiones obtenidas para cada uno de los aspectos planteados:

1. ¿Qué niveles de pensamiento reflexivo exhibieron los estudiantes para maestro de Matemáticas en su portafolio de aprendizaje sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje llevado a cabo en el aula de formación universitaria?

Los estudiantes para maestro presentaron, en general, niveles bajos de pensamiento reflexivo en sus diarios escritos, aunque algunos de ellos tuvieron la mayor parte de contribuciones en los niveles superiores. Los niveles de pensamiento reflexivo variaron en función de las actividades sobre las que se reflexionaba, de manera que las que propiciaron mayores niveles de reflexión fueron aquellas en las que se sintieron más involucrados, concretamente, las que exigían una visión más general de aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje. Esta capacidad de reflexión de los estudiantes para maestro quizás podría mejorarse con una adecuada formación en este sentido en el aula universitaria.

2. ¿Cuál fue la relación entre los niveles de reflexión alcanzados por los estudiantes para maestro de Matemáticas y los obtenidos en otros aspectos del proceso de aprendizaje?

En el desarrollo de un contenido matemático a nivel de Primaria, la mayoría de los estudiantes para maestro trataron los contenidos de forma lineal, en menor medida los relacionaron entre sí siguiendo una secuencia lógica y, en muchos menos casos, los explicaron con argumentos propios y crearon modelos originales. Algo similar ocurrió en el caso de la creatividad. En general, se observó gran variabilidad en los resultados de los estudiantes para maestro pero, en la creatividad, cada estudiante para maestro tuvo tendencia a presentar la mayor parte de sus producciones en torno al mismo nivel.

No se apreciaron relaciones entre los resultados obtenidos en reflexión y los relativos a conocimiento, creatividad y prueba, es decir, cada aspecto valoró habilidades diferentes. Esto confirma que en el aula universitaria de formación de maestros es importante trabajar y evaluar según múltiples aspectos para conseguir una formación integral del alumno.

En definitiva, la información obtenida se concreta en las siguientes conclusiones:

Parece necesario trabajar y evaluar según múltiples herramientas para conseguir una formación integral del futuro docente. En concreto, la reflexión sobre el propio trabajo desarrolla capacidades diferentes a otras actividades formativas. Su desarrollo permite una evolución de las ideas iniciales de los estudiantes, por lo que se considera necesario trabajarla durante la formación inicial de docentes para llegar a conseguir niveles de profundidad satisfactorios en el pensamiento reflexivo.

Los mayores niveles de profundidad en el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro se alcanzaron en actividades que exigían una visión general de aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje.

El estudio realizado puede proporcionar un método para analizar el pensamiento reflexivo de los estudiantes, un aspecto novedoso del que no hemos encontrado evidencias en investigaciones previas, al menos en el ámbito de formación de docentes o relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas. Este método se puede usar en futuras investigaciones. Las herramientas de valoración diseñadas permitieron la evaluación del proceso formativo por lo que también pueden ser útiles para los educadores de docentes, por ejemplo, como guía para formación en reflexión o como autoevaluación de la reflexión sobre la práctica para profesores en activo.

Con este trabajo hemos aprendido aspectos sobre cómo piensa este grupo de estudiantes para maestro y las razones por las que lo hacen así. Al mismo tiempo hemos examinado nuestras creencias y supuestos como educadores de acuerdo con distintos puntos de vista. Todo ello ha propiciado que hayamos aprendido más sobre nosotros mismos y hayamos mejorado nuestra práctica como educadores de futuros maestros de Educación Primaria.

El hecho de tener que diseñar tanto la forma de enseñanza como las herramientas de evaluación, la profunda revisión de investigaciones relacionadas con la utilización del portafolios o con la reflexión de docentes, así como el análisis desarrollado nos han enriquecido y, a pesar de las dificultades encontradas hemos disfrutado durante su realización.

El estudio realizado abre perspectivas para futuros trabajos de investigación. Para empezar, entendemos que el sistema de análisis utilizado precisaría mayor experimentación. Además, era la primera vez que los investigadores implicados trabajaban las reflexiones con estudiantes para maestro, lo que pudo limitar el desarrollo de algunos aspectos. Consideramos que una mayor experiencia del formador en este tipo de tarea podría permitir facilitar la profundidad de las reflexiones de los estudiantes para maestro y que en ellas se percibieran otros aspectos de la formación desarrollada. También se considera la posibilidad de que un trimestre no sea tiempo suficiente para que los estudiantes para maestro consigan profundidad en sus reflexiones. Un estudio similar desarrollado durante un periodo más largo de tiempo podría clarificar si se produce mejora en el proceso de la práctica reflexiva.

Por otro lado, la investigación presentada podría ser ampliada mediante un estudio de naturaleza similar en los siguientes sentidos: se podría repetir la experiencia con otro grupo de estudiantes para maestro para comparar los resultados, o repetir la experiencia con un mismo grupo de estudiantes para maestro durante varios cursos para analizar en qué sentido influye la experiencia en los estudiantes para maestro y en el profesor. Quizás un diseño más sistemático de las actividades formativas en términos de competencias podría permitir comparar la formación recibida por los estudiantes para maestro con el contenido de sus reflexiones en el mismo sentido, lo que podría abrir puertas para mejorar la enseñanza con estos estudiantes.

Sería conveniente utilizar otros instrumentos como presentaciones orales formales, entrevistas, encuestas o cualquier otra forma que les permita expresarse; o considerar otras formas de reflexión. Además, podría ser aconsejable realizar el estudio de casos de algunos estudiantes para analizar si los niveles de reflexión de los estudiantes para maestro se modifican a lo largo del periodo formativo.

Muchos autores han trabajado las reflexiones de docentes en formación de formas muy diversas. La clasificación de estas investigaciones, considerando como punto de partida la base de datos realizada a partir de la búsqueda bibliográfica para el desarrollo de este trabajo, podría constituir una amplia fuente de información que permitiría avanzar en el conocimiento de la reflexión de la comunidad investigadora.

Por otro lado, el mismo portafolios de aprendizaje se puede utilizar para finalidades de enseñanza o de evaluación sumativa. Por tanto, se podrían comparar los resultados obtenidos en este trabajo con la evaluación sumativa realizada por el profesor como resultado del aprendizaje de los estudiantes para maestro al final del proceso. También se podría estudiar cómo utiliza el profesor la información obtenida mediante esta forma de evaluación.

En otro sentido, la literatura en la que se discuta la naturaleza y consecuencias de la utilización de portafolios electrónicos en programas de formación de docentes en comparación con el tradicional portafolios elaborado con lápiz y papel con estudiantes para maestro es escasa. La futura investigación también podría dirigirse en esa línea.

Referencias

Artzt, A. (1999): A structure to enable pre-service teachers of mathematics to reflect on their teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(2), 143-166.

Barnett, R. (1997): *The limits of competence: knowledge, higher education and society*. Buckingham: Open University Press.

Boud, D. (2000): *Understanding learning at work*. London: Routledge.

Cáceres, J. (2005): *Análisis de un sistema de evaluación alternativa en la enseñanza de las matemáticas*. Memoria del Periodo de Investigación presentado para la obtención del DEA. Documento Inédito. Universidad de Salamanca.

Cáceres, M.; Chamoso, J.; Azcárate, P. (2010): Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education*, 26(5), 1115-1226.

Chamoso, J. (2004): In pursuit of patterns: a dialogued enquiry. *Mathematics Teaching*, 188, 22-26.

Chamoso, J. (2003): Considering dialogue as a social instrument in the Mathematics class. *For the Learning of Mathematics*, 23(1), 30-40.

Chamoso, J. (2000): *Análisis de una experiencia de resolución de problemas para la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Chamoso, J.; Cáceres, M. (2009): Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 198-206.

Chamoso, J.; Rawson, W. (2004): *Contando la Geometría. Colección Diálogos de Matemáticas*. Madrid: Nivola.

Chamoso, J.; Rawson, W. (2001): En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas. *Suma*, 36, 33-41.

Chamoso, J.; Durán, J.; García, J.; Martín, J.; Rodríguez, M. (2004): Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, 47, 47-58.

Chamoso, J.; Fernández, I.; Reyes, E. (2009): *Burbujas de arte y matemáticas. Colección Diálogos de Matemáticas*. Madrid: Nivola.

Chamoso, J.; González, M.; Hernández, L. (2005): Analysing Stories to Teach Mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 37(1), 79-93.

De Lange, J. (1995): Assessment: No Change without Problems. En T.A. Romberg (Ed.), *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment* (pp. 19-37). Albany: State University of New York Press.

Dewey, J. (1933): *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston: D.C. Heath y Co.

Dinham, S.; Scott, C. (2003): Benefits to Teachers of the Professional Learning Portfolio: a case study. *Teacher Development*, 7(2), 229-244.

Duit, R.; Treagust, D. (2003): Conceptual change: a powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education*, 25(6), 671-688.

El-Dib, M. (2007): Levels of reflection in action research. An overview and an assessment tool. *Teaching and Teacher Education*, 23(1), 24-35.

Farr Darling, L. (2001): Portfolio as practice: the narratives of emerging teachers. *Teaching and Teacher Education*, 17(1), 107-121.

Fendler, L. (2003): Teacher reflection in a hall of mirrors: Historical influences and political reverberations. *Educational Researcher*, 32(3), 16-25.

Flores, F.; López, A.; Gallegos, L.; Barojas, J. (2000): Transforming science and learning concepts of physics teachers. *International Journal of Science Education*, 22(2), 197-208.

Goodell, J. (2006): Using critical incident reflections: A self-study as a mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 221-248.

Goodlad, J. (1990): Studying the education of educators: From conceptions to finding. *Phi Delta Kappan*, 72(9), 698-701.

Harkness, S.; D'Ambrosio, B.; Morrone, A. (2007): Preservice Elementary Teachers' Voices Describe how their Teacher Motivated Them to do Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 235-254.

Harrington, H.; Quinn-Leering, K.; Hodson, L. (1996): Written case analyses and critical reflection. *Teaching and Teacher Education*, 12(1), 25-37.

Hatton, N.; Smith, D. (1995): Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education*, 11(1), 33-49.

Hoban, G.; Hastings, G. (2006): Developing different forms of student feedback to promote teacher education: A 10-year collaboration. *Teaching and Teacher Education*, 22(8), 1006-1019.

Ixer, G. (1999): There's no such thing as reflection. *British Journal of Social Work*, 29(13), 513-527.

Jay, J.; Johnson, K. (2002): Capturing complexity: a typology of reflective practice for teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 18(1), 73-85.

Kagan, D. (1990): Ways of Evaluating Teachers Cognition: Inferences Concerning the Goldilocks Principle. *Review of Educational Research*, 60(3), 419-469.

Kehle, P. (1999): Shifting Our Focus from Ends to Means: Mathematical Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 468-474.

Korthagen, F. (1992): Techniques for stimulating reflection in teacher education seminars. *Teaching and Teacher Education*, 8(3), 265-274.

Lajoie, S. (1995): A Framework for Authentic Assessment in Mathematics. En T.A. Romberg (Ed.), *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment* (pp. 19-37). Albany: State University of New York Press.

Lee, H. (2005): Understanding and assessing preservice teachers reflective thinking. *Teaching and Teacher Education*, 21(6), 699-715.

Llinares, S.; Krainer, K. (2006): Mathematics (students) teachers and teacher educators. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future* (pp. 429-459). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V.

Loughran, J. (2002): Effective reflective practice. In search of meaning in learning about teaching. *Journal of Teacher Education*, 53(1), 33-43.

Mansvelder-Longayroux, D.; Beijaard, D.; Verloop, N. (2007): The portfolio as a tool for stimulating reflection by student teachers. *Teaching and Teacher Education*, 23(1), 47-62.

McKenna, H. (1999): *Educating for social justice: Reflection and preservice teacher educators*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Newell, S. (1996): Practical inquiry: collaboration and reflection in teacher education reform. *Teaching and Teacher Education*, 12(6), 567-576.

Oosterheert, I.E. y Vermunt, J.D. (2001): Individual differences in learning to teach: Relating cognition, regulation and affect. *Learning and Instruction*, 11(2), 133-156.

Planas, N.; Chamoso, J.M.; Rodríguez, M. (2007): Retazos interculturales para la formación del profesorado de matemáticas. *XIII Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas (XIII JAEM)*. Granada.

Polanyi, M. (1967): *The tacit dimension*. London: Routledge & Kegan Paul.

Rico, L. (1997): Cuestiones abiertas sobre evaluación en Matemáticas. *Uno*, 11, 7-23.

Roe, M.; Stallman, A. (1994): A comparative study of dialogue and response journals. *Teaching and Teacher Education*, 10(6), 579-588.

Ross, J.; McDougall, D.; Hogaboam-Gray, A. (2003): A Survey Measuring Elementary Teachers Implementation of Standards-Based Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4), 344-363.

Schön, D. (1987): *Educating the reflective practitioner: Towards a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey-Bass.

Schön, D. (1983): *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books, Inc.

Silver, E.; Kenney, P. (1995): Sources of Assessment Information for Instructional Guidance in Mathematics. En T.A. Romberg (Ed.), *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment* (pp. 38-86). Albany: State University of New York Press.

Tillema, H. (1998): Design and validity of a portfolio instrument for professional training. *Studies in Educational Evaluation*, 24(3), 263-278.

Törner, G; Schoenfeld, A.; Reiss, K. (2007): Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 39(5), 353-563.

Valli, L. (1992): *Reflective teacher education: Cases and critiques.* Albany: State University of New York Press.

Van Manen, M. (1977): Linking ways of knowing with ways of being practical. Curriculum Inquiry, 6(3), 205-228.

Van Tartwijk, J.; Van Rijswijk, M.; Tuithof, H.; Driessen, E. (2008): Using an analogy in the introduction of a portfolio. *Teaching and Teacher Education*, 24(4), 927-938.

Voigt, J. (1994): Negotiation of mathematical meaning and learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 275-298.

Wade, R.; Yarbrough, D. (1996): Portfolios: a tool for reflective thinking in teacher education? *Teaching and Teacher Education*, 12(1), 63-79.

Ward, J.; McCotter, S. (2004): Reflection as a visible outcome for preservice teachers. *Teaching and Teacher Education*, 20(3), 243-257.

Watts, M.; Jofili, Z. (1998): Towards critical constructivist teaching. *International Journal of Science Education*, 20(2), 173-185.

Winitzky, N. (1992): Structure and process in thinking about classroom management: an exploratory study of prospective teachers. *Teaching and Teacher Education*, 8(1), 1-14.

Xu, J. (2003): Promoting School-Centered Professional Development through Teaching Portfolios: A Case Study. *Journal of Teacher Education,* 54(4), 347-361.

Zeichner, K.; Liston, D. (1996): *Reflective teaching: An introduction*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Zeichner, K.; Wray, S. (2001): The teaching portfolio in US teacher education programs: what we know, and what we need to know. *Teaching and Teacher Education*, 17 (5), 613-621.

Zuckerman , G. (2004): Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, 19 (1), 9-18.

Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes[1]

Salvador Llinares
Universidad de Alicante,
España
sllinares@ua.es

Resumen[2]

Uno de los objetivos de los programas de formación de profesores de matemáticas es potenciar el desarrollo del conocimiento y destrezas necesarias para analizar la enseñanza de las matemáticas, y en particular el desarrollo de la competencia docente denominada "mirar con sentido" los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta situación conlleva la necesidad de caracterizar esta competencia docente así como su desarrollo en contextos específicos. El desafío para los programas de formación está situado en diseñar entornos de aprendizaje que permitan a los estudiantes para profesor el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza aprendizaje de las matemáticas de manera que ayude a los estudiantes para profesor a construir conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y desarrollar al mismo tiempo formas de generarlo.

Palabras clave

Formación de profesores, competencia docente, mirar con sentido.

Abstract

One of the objectives of math teacher preparation programs is to promote the development of the knowledge and skills necessary to analyze the teaching of math, and in particular the development of a teaching competency called ?observing with meaning? the processes of math teaching and learning. This situation entails the need to characterize this teaching competency as well as its development in specific contexts. The challenge for the teacher preparation programs is situated in the design of learning environments that permit future teachers to develop the teaching competency of ?observing with meaning? the teaching learning of math that helps them to construct knowledge about the teaching of math and at the same time develop ways of generating that knowledge.

Key words

Teacher preparation, teaching competency, observing with meaning.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. “Mirar con sentido” como un aspecto de la competencia docente del profesor de matemáticas

Las reflexiones sobre la formación de profesores realizadas desde diferentes ámbitos señalan que no es factible esperar que los graduados salgan de los programas de formación como expertos lo que ha llevado a enfatizar las posibilidades de aquellas aproximaciones que preparen a los estudiantes para profesores a aprender a lo largo de la vida profesional. Esta aproximación subraya la importancia de desarrollar conocimiento y destrezas para analizar la enseñanza de las matemáticas, y en particular subrayan la importancia de la competencia docente denominada “mirar con sentido” los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Jacobs, Lamb & Phillipp, 2010; Mason, 2002; Sherin, Jacobs & Philipp, 2011; Llinares & Valls, 2010). La competencia docente “mirar con sentido” permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional integrando tres destrezas: *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, Jacobs *et al.* (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir cómo responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

Las investigaciones en este ámbito pretenden determinar en qué el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” permite a los profesores tener en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes en su interpretación de las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Prieto & Valls, 2010).

El proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor y de los profesores ha empezado a ser concebido como un proceso de enculturación (Llinares, 2004; 2002-a) considerando los saberes de referencia, la naturaleza del conocimiento profesional y las características del uso del conocimiento en el desarrollo de una determinada práctica (que en este caso es la actividad de enseñar matemáticas). El desafío para los programas de formación de profesores procede del carácter integrado del conocimiento (por ejemplo la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico específico de las matemáticas) y cómo el profesor llega a identificar e interpretar los aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas. Como consecuencia se deriva una prioridad para los programas de formación de profesores: su necesaria articulación a través de tareas que intenten la integración y transformación del conocimiento de manera coherente y sistemática.

Para gestionar esta prioridad en los programas de formación consideramos tres aspectos:

- subrayar la idea de la enseñanza de las matemáticas como una práctica que debe ser comprendida,
- el papel que pueden desempeñar los “instrumentos conceptuales y técnicos” en el desarrollo de los procesos de interpretación de la práctica, y

- la relación entre lo social y lo personal en el proceso de aprendizaje (tanto en contextos de formación inicial como de aprendizaje a lo largo de la vida) operativizado a través del desarrollo de procesos de interacción entre las personas.

Desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor puede ser entendido como cambios en cómo participar en las prácticas matemáticas que se generan en el aula y cómo ésta es comprendida por el profesor. En este sentido, la enseñanza de las matemáticas se considera una práctica caracterizada por:

- realizar unas "tareas" para lograr un fin,
- hacer uso de unos "instrumentos", y
- poder llegar a justificar su uso.

Por lo tanto, el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" pasa por llegar a identificar e interpretar los aspectos relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, los instrumentos conceptuales – ideas teóricas procedentes de la Didáctica de la matemática– y técnicos desempeñan diferentes papeles en la caracterización del proceso de identificar e interpretar la enseñanza de las matemáticas. Los instrumentos conceptuales permiten poseer unas referencias para identificar lo que puede ser relevante de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas e interpretarlos lo que condiciona lo que se ve y cómo se ve. Desde esta perspectiva del desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido", se generan condiciones para los formadores de profesores cuando tienen que diseñar oportunidades – entornos de aprendizaje- para que los estudiantes para profesor o los profesores en ejercicio lleguen a generar nuevo conocimiento y destrezas así como que se potencie la capacidad para seguir aprendiendo desde la práctica. Es decir, cuando en el diseño instruccional en los programas de formación se quiere reflejar la idea de que aprender a enseñar supone aprender a usar y generar nuevo conocimiento desde la enseñanza.

2. El desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" del profesor de matemáticas

La conceptualización de la competencia docente "mirar con sentido" como identificar, interpretar y tomar decisiones de acción en la enseñanza ha permitido realizar investigaciones que apoyan la hipótesis de que bajo ciertas condiciones esta competencia puede ser aprendida. La manera en la que las tres destrezas interrelacionadas que conforman esta competencia (identificar, interpretar y tomar decisiones de acción) se configura en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor puede aportar información sobre el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas (Penalva, Rey & Llinares, 2011; Prieto & Valls, 2010). Las investigaciones previas indican que

- las características de las tareas presentadas y la naturaleza de las interacciones entre los estudiantes para profesor determinan los focos de atención sobre la enseñanza de las matemáticas,

- los diferentes tópicos sobre los que se centra la atención condicionan la manera en la que los estudiantes para profesor interpretan los hechos (es decir, la forma en que vinculan las evidencias a las ideas teóricas), y
- el desarrollo de un discurso profesional se vincula al papel de referentes desempeñado por la información teórica relativa a Didáctica de la Matemática ("scaffolding").

Desde estos resultados, y para caracterizar el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido", una cuestión importante que se plantea es la relación entre la interacción de los estudiantes para profesor y el desarrollo de esta competencia docente. En particular, considerando la interacción mediada por la tecnología en un contexto b-learning en el que las actividades presenciales se mezclan con las actividades en línea.

Además, en un contexto b-learning otra cuestión importante hace referencia a cómo caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones asincrónicas tales como los debates virtuales entre estudiantes para profesor. En este contexto, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesores se relaciona con otras dimensiones que definen la calidad del discurso generado como son la forma de participar y el contenido del discurso.

Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) indica que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional a esta hipótesis, esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un "artefacto del conocimiento" sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar. Desde las perspectivas sociales del aprendizaje se asume que pensamiento y discurso se consideran dos aspectos inseparables de un mismo fenómeno, por lo que las aportaciones en los espacios de interacción social son consideradas indicativas de la forma de aprender (Penalva et al., 2011). Los resultados de las investigaciones previas indican que la colaboración discursiva entre los profesores en este tipo de entornos de aprendizaje parece fomentar la construcción del conocimiento de Didáctica de la Matemática que es pertinente para la resolución de las tareas de planificar la enseñanza e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes. En particular, la estructura de los entornos de aprendizaje parece influir en la manera en la que los estudiantes para profesor interaccionan entre ellos en un intento de ampliar y transformar su comprensión de la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, las interacciones parecen potenciarse cuando existe un foco de interés compartido lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación (Llinares & Valls, 2009, 2010; Prieto & Valls, 2010).

3. Diseñando entornos de aprendizaje en los programas de formación dirigidos al desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido".

El desafío planteado es el de diseñar entornos de aprendizaje que permitan a los estudiantes para profesor construir conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y desarrollar al mismo tiempo formas de generarlo. Esta forma de concebir el proceso de aprendizaje del profesor se apoya en la generación de destrezas y conocimiento vinculados a

- ver,
- interpretar,
- escuchar, y
- diseñar perspectivas de acción vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas.

Esta aproximación a la formación de profesores de matemáticas –inicial y permanente– no deja de lado el hecho de que los procesos de dotar de significado generados por los estudiantes para profesor y los profesores plantean cuestiones sobre cómo deben ser los materiales –es decir, los elementos técnicos– usados en el programa de formación. El desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" tiene aspectos individuales pero también aspectos sociales ya que los profesores y estudiantes para profesor deben llegar a participar en el discurso de la enseñanza como una manifestación del proceso de enculturización en la práctica de enseñar matemáticas. Este último aspecto es el que subraya la importancia de construir contextos que apoyen la interacción entre los profesores y estudiantes para profesor como una manera de potenciar la construcción del conocimiento y destrezas necesarias para enseñar matemáticas (Torregrosa et al, 2010; Penalva et al, 2006). Este contexto implica ciclos de desarrollo y diseño, implementación, evaluación y refinamiento de ideas para mejorar el diseño. Este ciclo suele denominarse "experimentos de enseñanza" (Callejo, Valls & Llinares, 2007) y tiene como objetivo integrar la reflexión teórica con el diseño de entornos de aprendizaje cada vez más próximos a los principios teóricos que fundamentan las decisiones.

Las nuevas tecnologías permiten diseñar entornos de aprendizaje en los que es factible integrar registros de la práctica –en formato de video-clips–, documentos en formato texto con información de apoyo al proceso de problematizar diferentes aspectos de la práctica de enseñar, y espacios de interacción –en forma de debates virtuales– que permiten potenciar el uso de los registros de la práctica de enseñar. La figura 1 esquematiza las actividades y sus relaciones sobre las que se estructura el diseño de estos entornos de aprendizaje. El visionado de video-clips con registros de la práctica de enseñar matemáticas junto con la lectura de documentos de referencia permite establecer una relación entre la "evidencia" e instrumentos a ser usados para interpretar dicha evidencia, y en resumen para empezar a pensar "sobre la enseñanza de las matemáticas". Los documentos proporcionados constituyen los recursos que permiten a los profesores y estudiantes para profesor realizar análisis más allá de las características superficiales de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Valls et al, 2006).

Por otra parte, la posibilidad de compartir las interpretaciones y la manera en la que cada uno dota de significado a los diferentes aspectos de la "realidad" de la enseñanza de las matemáticas, a los mismos instrumentos teóricos y a la propia experiencia personal que emerge al intentar clarificar las propias posiciones se maximiza mediante un determinado uso de los debates virtuales que pueden complementar las sesiones presenciales de trabajo de análisis. Finalmente, la necesidad de sintetizar las diferentes posiciones e interpretaciones generadas explicitando las diferentes alternativas cuando se escribe informes de síntesis puede permitir potenciar la generación de conocimiento y destrezas útiles para la enseñanza de las matemáticas.

Los vídeos se acompañan de las transcripciones de los mismos y de los materiales confeccionados por los aprendices de la lección grabada. Los textos permiten identificar el contexto en el que transcurre la lección y proporcionan las referencias necesarias para el proceso de análisis.

Figura 1: Actividades y relaciones en entornos de aprendizaje.

Participar en debates virtuales permite explicitar y usar las concepciones previas sobre los distintos focos del análisis y entablar interacciones con los compañeros sobre las distintas interpretaciones dadas a las situaciones de enseñanza-aprendizaje planteadas en el vídeo-clips. Los debates virtuales tienen como objetivo ayudar a transformar los planteamientos iniciales mediante la introducción, en el discurso generado, de los instrumentos conceptuales pertinentes. Las interacciones pueden articularse y guiarse mediante distintas preguntas. Finalmente escribir un informe en grupo sobre las cuestiones relacionadas con los objetivos planteados o proponer nuevas alternativas centradas en modificaciones de la tarea que fue presentada en la lección grabada en video o en posibles alternativas de actuación por parte del profesor constituye la posibilidad de sintetizar el trabajo realizado.

La figura 2 representa la estructura de un entorno de aprendizaje diseñado siguiendo estos principios y que usa una plataforma web para favorecer la interacción (debate virtual) y el acceso a los materiales (videos y documentos).

El uso de video-clips como descripciones de situaciones de enseñanza-aprendizaje puede permitir a los estudiantes para profesor desarrollar acciones como:

Observar, analizar, predecir, generar pudiendo hacer uso de instrumentos conceptuales proporcionados por los saberes de referencia.

La explicitación de lo matemático y lo didáctico en el análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje permite a los estudiantes para profesor tener oportunidades para

Empezar a caracterizar los conceptos y procesos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje (intentar verlos como nociones y procesos a ser aprendidas y no solo como elementos componentes de un determinado dominio de conocimiento matemático), identificar sus propias concepciones sobre el aprendizaje matemático, la enseñanza, su papel como profesores y sobre las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje, expresar sus propias ideas didácticas y desarrollarlas, y

Poder comprobar sus ideas con otros y mediante la discusión de lecturas relacionadas permitiendo la generación de críticas razonadas.

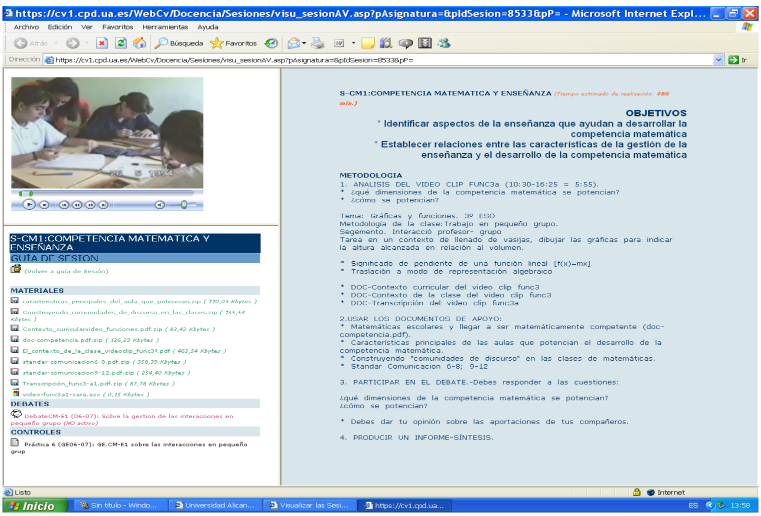


Figura 2: Estructura de un entorno de aprendizaje basado en la web integrando video-clips, información en formato texto, y espacios de interacción social.

La posibilidad de que los estudiantes para profesor puedan trabajar con video-clips procedentes de diferentes contextos desde diferentes puntos de vista puede dotarles de la destreza de seguir aprendiendo en situaciones nuevas cuando ya no esté en el programa de formación al desarrollar destrezas y conocimiento específicos vinculados a la práctica de enseñar matemáticas. De esta manera, las conexiones entre ideas y principios generales con ejemplos procedentes de la propia práctica dotan a los estudiantes para profesor de una formación para poder seguir aprendiendo en cada nueva situación. Complementar textos con video-clips y contextos para la interacción social pueden de esta manera promover el aprendizaje efectivo.

En estos momentos, el desarrollo de las tecnologías de la comunicación permite que se pueda participar en entornos de aprendizaje virtuales que pueden complementar las actividades presenciales en los programas de formación inicial como en las oportunidades pensadas para potenciar el desarrollo profesional. Sin embargo, los entornos de interacción virtuales definen nuevos roles para los estudiantes para profesor y para los formadores de profesores que no se consiguen de manera inmediata. En este sentido los estudios que analizan las características de la integración del conocimiento teórico en los procesos de razonamiento pedagógico de los estudiantes para profesor vinculados a la resolución de problemas prácticos muestran la dificultad de la relación teoría práctica, así como la generación de nuevos papeles en la interacción virtual entre los estudiantes para profesor y la constitución de verdaderas comunidades de aprendices.

Como en cualquier caso de diseño de innovación educativa, esta situación implica ciclos de desarrollo, implementación, evaluación y refinamiento de ideas (Callejo, Valls & Llinares, 2007). Una vez los primeros diseños se implementan, el análisis de lo producido permite refinar estas propuestas iniciales. Las diferentes iteraciones de estos ciclos permiten suponer mejoras paulatinas en las iniciativas de formación. Lo que nosotros admitimos que es importante en esta situación es que los diseños iniciales se basan en un modelo teórico del aprendizaje del profesor (aprendizaje inicial y a lo largo de toda la vida) combinado con la experiencia de formación de profesores e investigación sobre dichos procesos formativos reunida durante las últimas décadas

4. A modo de conclusión

Dos ideas son importantes en este planteamiento que relaciona la caracterización de la competencia docente "mirar con sentido" del profesor de matemáticas, y sobre el desarrollo de esta competencia docente y el diseño de entornos de aprendizaje en un programa de formación. La primera idea es que el "conocimiento en uso" que configura la competencia docente "mirar con sentido" se ve como el uso de instrumentos tanto físicos como conceptuales en la identificación e interpretación de aspectos relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La segunda, que el aprender – en este caso el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido"- se ve como la transformación de la persona mediante la participación creciente en "prácticas sociales" en función de la naturaleza de las tareas y actividades que resuelven. Una implicación de esta manera de entender el aprendizaje es el papel desempeñado por lo social en la construcción del conocimiento. Por otra parte, al ver el aprendizaje como un proceso por el cual las personas se apropian en un contexto social de instrumentos para "pensar" y "actuar" en una comunidad de práctica genera implicaciones sobre las características de los espacios de interacción necesarios para apoyar esta construcción social del conocimiento. El uso de entornos interactivos integrados en la web permite suponer que se pueden apoyar ciertos aspectos de lo que significa el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido".

Esta perspectiva del aprendizaje tiene implicaciones sobre el diseño de los materiales de enseñanza para el programa de formación, y los espacios de interacción que tienen como objetivo el que los estudiantes para profesor construyan conocimiento necesario para enseñar matemáticas y plantea todavía muchos interrogantes sobre las decisiones que hay que tomar al pensar en cómo diseñar las oportunidades para aprender. Sin embargo, al ser la actividad de formar profesores una actividad institucionalizada hace que no sea fácil tomar decisiones únicamente considerando lo que los análisis teóricos nos dicen. De todas maneras, en estos momentos los adelantos tecnológicos permiten ir incorporando a la formación de profesores medios materiales que son pertinentes desde puntos de vista teóricos.

Reconocimiento. La investigación mencionada en esta presentación ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Educación y Ciencia, Dirección General de Investigación, través del proyecto nº EDU2008-04583.

Referencias

Callejo, M.; Valls, J.; Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la escuela.* 61, 5–21.

Fernández, C.; Llinares, S.; Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *ACTA SCIENTIAE*.

Fernández, C.; Llinares, S.; Valls, J. (2011). Aprendiendo a "mirar con sentido" el aprendizaje matemático. Comunicación en la XIII Conferencia Interamericana de Educación matemática-CIAEM. Recife-Brasil. Junio 2011.

Jacobs, V.; Lamb, L.; Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.

Llinares, S.; Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp.155-180). Rotterdam /Taipei: Sense Publishers.

Llinares, S.; Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*(2), 247-271.

Llinares, S.; Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education. 13* (2), 177-196.

Llinares, S. Valls, J. y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20(3)*, 31-54.

Mason, J. (2002).*Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Penalva, M.; Rey, C.; Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto b-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía, LXIX.* 248, 101-118.

Penalva, M.C.; Escudero, I.; y Barba, D. (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica.* Granada-España: Proyecto Sur.

Prieto, J.; Valls, J. (2010).Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática, 22(1), 57-85.*

Rey, C., Penalva, M.C. y Llinares, S. (2006). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Quadrante , XV,* 95–120.

Sherin, M.; Jacobs, V.; Philipp, R. (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes.* Routledge-Taylor & Francis: New York.

Torregrosa, G.; Haro, M.; Penalva, M.; Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación. 352* , 379-404.

Valls, J.; Callejo, M.; Llinares, S. (2008). Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la matemática. *PUBLICACIONES.* 38, 89-103.

Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática[1]

Dario Fiorentini
Faculdade de Educação
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Brasil
dario.fiorentini55@gmail.com

Resumo[2]

Pretendemos apresentar primeiramente um breve histórico da pesquisa e da prática de ensinar e aprender matemática sobre/com resolução de problemas. Para isso, trazemos a evolução internacional desse campo de estudo e prática, sobretudo o norte americano que, por meio do NCTM, contribuiu fortemente para o surgimento dessa linha de pesquisa no Brasil. Finalizamos essa primeira parte relacionando as principais tendências históricas de resolução de problemas com a modelagem matemática e com o surgimento, após o ano de 2000, das investigações matemáticas.

Na segunda parte deste trabalho, descrevemos seis abordagens de uso/emprego da resolução de problemas e/ou das investigações matemáticas na formação do professor que ensina matemática. Discutimos alguns impactos dessas abordagens no desenvolvimento profissional dos professores.

Na terceira parte apresentamos e analisamos um episódio ocorrido em uma aula com características exploratório-investigativas, destacando a produção de um conhecimento situado sobre a prática de ensinar e aprender matemática. Utilizamos como ferramenta de análise a tríade de ensino concebida por Potari & Jaworsky (2002) e que interrelaciona desafio matemático, sensibilidade do professor em relação aos alunos e gestão da aprendizagem.

Concluímos, tentando redimensionar o lugar e o papel das práticas exploratório-investigativos e de resolução de problemas no trabalho docente e na formação do professor que ensina matemática.

Palavras chave

Ensinar matemática, aprender matemática, resolução de problemas, formação do professor.

Abstract

We start with a brief history of the research and practice of teaching and learning math with problem solving. For that, we trace the international evolution of this field of study and practice, above all in North America by NCTM with its contribution to this line of research in Brazil. We end this first part relating the principle

[1] Este trabajo corresponde a la participación del autor en una mesa redonda paralela de la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

historical tendencies in problem solving with math modeling with the appearance after 2000 of mathematical studies. In the second part of this work, we describe six approaches to use problem solving and mathematical research in the preparation of teachers of math. We discuss some of the impact of these approaches in the professional development of teachers. In the thrid part we present and analyze an episode with exploratory-investigative characteristics that occurred in a classroom, highlighting the production of knowldege situated in the practice of teaching and learning math. We use as a tool for analysis a triad of teaching conceived by Potari & Jaworsky (2002) and that interrelates mathematical challenge, sensibility of the teacher in relation to the students, and guidance of learning. We conclude with an attempt to redimension the place and role of exploratory-investigative practices and problem solving in the work of teachers and in the preparation of teachers who teach math.

Key words

Teaching math, learning math, problem solving, teacher preparation.

1. Breve histórico da pesquisa e da prática em resolução de problemas

Para Lester (1978), o ensino de resolução de problemas (RP), enquanto campo de pesquisa em educação matemática, começou a ser investigado de forma sistemática, sob a influência de Polya, nos anos de 1960, nos Estados Unidos.

Antes desse período, entretanto, conforme estudo realizado por Fiorentini (1994), existiram experiências, via projetos (Dewey), e alguns estudos que enfatizavam os produtos da (re) solução de problemas. Nas experiências mais remotas e significativas, creditadas a Dewey entre 1896 e 1904, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações sócio-econômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade). Dewey sugeriu essa orientação pedagógica, porque acreditava que a prática pedagógica centrada em projetos poderia contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Em sua maioria, os estudos sobre (re) solução de problemas realizados até o final da década de 1950 nos EUA, indicavam, segundo observa Van Engen, que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas (Gazire, 1989).

Bloom e Broder, ainda na década de 1950, questionariam as pesquisas até então desenvolvidas sobre solução de problemas pela ênfase que vinham dando aos produtos das soluções em lugar de valorizar os processos implícitos da resolução criativa de problemas. Estes pesquisadores, para melhor captar as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados pelos estudantes bem sucedidos. Para que isso fosse possível, os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo de resolução. Com base em suas pesquisas, defenderiam que o ensino de resolução de problemas deveria centrar-se no ensino de estratégias para a resolução de problemas, pois acreditavam que os hábitos para a resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática (Ibidem).

Shoenfeld, mais tarde, ao acreditar que as crianças aprendem melhor fazendo e pensando sobre o que fazem, desenvolveria uma nova série de pesquisas enfatizando, agora, o papel que a metacognição (conhecimento de seu próprio processo de conhecimento) desempenha na resolução de problemas (Kilpatrick, 1992).

Nos anos de 1980, o NCTM publicaria "Uma Agenda para Ação" que traz uma série de recomendações, sendo que a primeira dizia "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar nos anos oitenta" (Apud, 2008).

No Brasil, entretanto, os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciados, de modo mais efetivo, a partir da segunda metade da década de 1980, provavelmente influenciados pelo NCTM. Esses estudos foram, na sua maioria, dissertações e teses de Mestrado ou Doutorado.

Nos anos oitenta, surgiram no Brasil dois grupos acadêmicos que desenvolveriam investigações relacionadas à Resolução de Problemas. O grupo da Psicologia Cognitiva de Recife que, entre outros estudos, desenvolveria e orientaria uma série de pesquisas relacionadas à investigação de estratégias e habilidades cognitivas apresentadas por pessoas escolarizadas ou não na resolução de problemas matemáticos, em diferentes contextos sócio-culturais. O outro grupo é da Unesp, Rio Claro, do qual resultaram duas dissertações de mestrado e uma tese de livre docência que enfatizavam as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas, dando origem à resolução de problemas como metodologia ou estratégia de ensino. Paralelamente a esses estudos, havia outros que tangenciavam ou destacavam parcialmente a resolução de problemas. Dentre esses, destacamos os trabalhos relacionados à modelagem matemática, à problematização no/do ensino-aprendizagem da matemática (Fiorentini, 1994).

Schroeder e Lester (1989), ao fazer, no final dos anos de 80, um balanço da resolução de problemas no ensino de matemática, identificaram três tendências: (1) ensinar *sobre* resolução de problemas (tendo por base Polya); (2) ensinar Matemática *para* resolver problemas (uma forma de aplicar o que se aprende); e (3) ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas, emergindo, assim, a perspectiva da resolução de problema como metodologia de ensino, isto é, a perspectiva de ensinar matemática *via/pela* resolução de problema. Nas duas primeiras tendências o centro do ensino é o professor e os conteúdos ou procedimentos que deve ensinar. Na primeira tendência, os procedimentos e heurísticas da resolução de problemas são os conteúdos a serem apreendidos pelos alunos e professores. Na segunda, é o próprio conteúdo matemático que precisa ser primeiro aprendido e depois aplicado. Na terceira tendência, a ênfase recai sobre o aluno e os processos da aprendizagem e da resolução de problemas, apostando na capacidade e criatividade do aluno desenvolver/fazer matemática.

A partir dos anos noventa, a resolução de problemas, enquanto campo de estudo e prática pedagógica, ganhou impulso no Brasil sobretudo em decorrência dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacional) e do surgimento do grupo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) da Unesp de Rio Claro sob a coordenação de Lourdes Onuchic.

Os PCN (Brasil, 1998) estão apoiados, conforme Onuchic (2008), nos *Standars* do NCTM que recomendam que o problema seja o ponto de partida da atividade matemática; apontam também para o desenvolvimento da capacidade do aluno resolver problemas, de explorá-los e generalizá-los, podendo, inclusive, propor novos problemas. Os *Standars* de 2000 enfatizam que a "resolução de problemas não é só um objetivo da aprendizagem matemática, mas, também, um meio importante para se fazer matemática" (Onuchic & Allevato, 2004).

O GTERP surgiu em 1989 e consolidou-se a partir dos anos 90 ao congregar alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp, Rio Claro, passando a realizar investigações e estudos na linha de resolução de problemas, sendo a maioria dissertações e teses. Ou seja, a partir dos anos de 1990, o GTERP torna-se a principal referência brasileira em resolução de problemas. A partir de 2000, o grupo desenvolve sua própria metodologia de resolução de problema para a sala de aula denominada " Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de problemas". Essa metodologia fundamenta-se na concepção de que o "e nsino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento". Além disso, essa metodologia defende que a avaliação deve ser desenvolvida "durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula" (Onuchic, 2008, p. 8).

A partir do ano 2000, Educação Matemática brasileira toma conhecimento de outra abordagem denominada pelos portugueses de *investigação matemática* (Ponte, 2003). Essa abordagem tem forte proximidade com a resolução de problemas, pois trabalha com problemas abertos, visando promover em sala de aula um ambiente de exploração, investigação e problematização. A seguir, apresentamos mais detalhes sobre essa abordagem, relacionando-a com a resolução de problemas e a modelagem.

2. Investigação matemática, resolução de problemas e modelagem matemática

As *investigações matemáticas* (IM) têm surgido no final da década de 80 nos Estados Unidos e no Reino Unido como mais uma alternativa didático-pedagógica para a realização de um ensino significativo de matemática. O uso de investigações matemáticas em sala de aula pode contribuir para a emergência de um ambiente similar àquele vivido pelos matemáticos quando estão em processo de produção/criação do conhecimento matemático. É um ambiente que caracteriza-se como exploratório, de formulação de conjecturas ou hipóteses as quais são testadas e verificadas através de experiências mentais, podendo ser provadas ou não.

Segundo Braumann (2002, apud Ponte, 2003),

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado de cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo... Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da matemática (p. 98).

Skovsmose (2000) é outro autor que tem tratado de investigações no ensino da matemática. Para introduzir o tema contrapõe duas perspectivas de ensino de matemática. De um lado, situa o *paradigma do exercício* e, de outro, o dos *cenários para investigação*, fazendo menção a três tipos de referências - matemática, semi-realidade e realidade - para a produção de significados para a atividade matemática e seus conceitos. Combinando esses elementos, o autor elaborou um quadro com seus possíveis ambientes de aprendizagem:

Quadro 1

Ambientes de aprendizagem (Skovsmose, 2000).

Referência à	***Paradigma do Exercício***	***Cenário para Investigação***
matemática pura	*(1)*	*(2)*
semi-realidade	*(3)*	*(4)*
Realidade	*(5)*	*(6)*

Em quais desses ambientes podemos situar as Investigações Matemáticas? Eu diria que nos ambientes (2), (4) e (6). Para compreender um pouco os ambientes (5) e (6), consideremos uma viagem de Recife a João Pessoa.

A partir dessa situação, poderíamos formular o seguinte problema: *Qual o custo de uma viagem de ônibus de uma família de quatro pessoas de Recife a João Pessoa, sabendo-se que a passagem de ônibus custa R$ 79,00?* Com esta formulação do problema criamos um ambiente de aprendizagem próprio do *paradigma do exercício*, embora faça referência a uma realidade concreta (ambiente 5). Mas poderia propor uma atividade matemática típica do ambiente (1), propondo simplesmente a seguinte tarefa: "efetue a seguinte operação: 79 x 4".

Entretanto, se o professor pretende promover uma educação *pela* Matemática certamente re-elaboraria este problema, tornando-o potencialmente mais problematizador e relevante sócio-pedagogicamente. Uma alternativa seria torná-lo mais aberto, isto é, mais exploratório e investigativo, deixando que alunos levantem suas hipóteses ou conjecturas, formulem suas próprias perguntas de interesse, buscando, então, os dados que necessitam para respondê-las. Uma forma de apresentar uma situação-problema que se aproxima do ambiente (6), poderia ser a seguinte:

Qual o modo mais adequado para se viajar de Recife a João Pessoa? (Investigue algumas das seguintes possibilidades: a pé; de bicicleta; de automóvel; de ônibus; de táxi; de trem; de avião...). Discuta e analise as vantagens e desvantagens de cada uma dessas opções tanto do ponto de vista matemático-financeiro quanto do sócio-político e ambiental. Elabore um relatório, mostrando os cálculos e a análise da situação-problema para, depois socializar aos colegas de classe.

Veja que a situação, inclusive, não define qual o número de pessoas que irão viajar. Assim, as possibilidades de exploração e de solução matemática do problema são múltiplas e certamente levarão à realização de uma investigação, aproximando-se do que a literatura em educação matemática tem chamado de modelagem matemática ou de um projeto interdisciplinar, podendo explorar aspectos sociais, políticos e ambientais.

Ernest (1996), embora reconheça muitos pontos comuns entre resolução de problemas e investigações matemáticas como abordagens de ensino, destaca a potencialidade emancipatória da segunda abordagem:

> A resolução de problemas e as investigações como métodos de ensino requerem que se considere o contexto social da turma e as suas relações de poder. A resolução de problemas permite ao aluno aplicar a sua aprendizagem criativamente, numa nova situação, mas o professor ainda mantém muito do seu controlo sobre o conteúdo e o modo de ensinar. Se a abordagem investigativa é adoptada de modo a permitir ao aluno a formulação de problemas e questões para investigação de modo relativamente livre, torna-se emancipadora (Ernest, 1996, p. 31).

A diferenciação trazida por Ernest (1996) sobre as diferentes abordagens nos permite conceber a *modelagem matemática* como um tipo particular de *investigação matemática*, principalmente quando o objeto/questão/problema de investigação é construído a partir do mundo real ou de uma simulação do mundo real. Ou seja, dependendo da natureza da pergunta ou da situação de estudo, a investigação pode ser relacionada à matemática pura ou à matemática aplicada.

Em síntese, podemos dizer que a abordagem investigativa diferencia-se das demais por explorar e tratar situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos múltiplas alternativas de exploração e investigação. Assim concebida, a investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem,

> Ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (Ponte et al., 2003, p. 23).

Os educadores matemáticos portugueses têm experimentado e desenvolvido as *IM* como alternativa didático-pedagógica em Portugal, onde já existem muitas experiências, estudos e publicações a respeito. No Brasil, essa alternativa pedagógica tem ganhado força a partir de 2005 e guarda proximidade com a resolução de problemas. O Grupo de Sábado, com sede na Unicamp, tem sido um dos principais seguidores e divulgadores dessa abordagem no Brasil inter-relacionando-a, como mostraremos mais adiante, a um processo de formação contínua de professores mediado pela reflexão e investigação da prática. Vejam, por exemplo, as publicações editadas por Fiorentini & Cristovão (2006) e Carvalho & Conti (2009).

3. Resolução de problemas e investigações matemáticas na formação do professor

Podemos descrever pelo menos seis abordagens diferentes de trabalho com RP ou IM na formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática.

A **primeira abordagem** consiste em "ensinar *para* a RP". Esta é a abordagem mais tradicional e talvez ainda a mais frequente nos cursos de formação de professores e se insere no *paradigma do exercício* (Skovsmose, 2000). Essa abordagem tem como pressuposto que o professor para resolver ou investigar problemas precisa, primeiro, dominar tecnicamente e formalmente os conceitos e procedimentos matemáticos básicos para, então, exercitá-los ou aplicá-los com eficiência na resolução de problemas. Esses problemas são geralmente rotineiros ou fechados, de resposta única, e requerem o domínio prévio dos conceitos e procedimentos já aprendidos. Essa abordagem traz implicitamente uma concepção dicotômica entre teoria e prática, sendo que a primeira sempre deve preceder a segunda.

A **segunda abordagem** enfatiza o "ensino *sobre* RP". Essa abordagem, de modo semelhante à primeira, também adota uma perspectiva aplicacionista ou do tipo *top down*, isto é, o professor em processo de formação precisa primeiramente estudar teoricamente em manuais didáticos os processos e heurísticas que foram sistematizados em uma didática sobre RP, para então, só depois, aplicá-los em sala de aula a seus alunos. Trata-se, geralmente, de um tópico isolado em curso de Licenciatura – por exemplo, uma disciplina específica sobre RP ou uma parte da disciplina de didática da matemática. Nos cursos de formação continuada aparece, com freqüência, na forma de treinamento, onde o professor-aluno ouve primeiro algumas preleções teóricas do formador e depois aplica/treina o que aprendeu, resolvendo uma série de problemas.

A **terceira abordagem** é uma variante da anterior, pois enfatiza a necessidade de o professor desenvolver uma prática de "aprendizagem *sobre* RP", de modo que o professor ou futuro professor passe a assumir um papel central na construção de um conhecimento sobre RP ou IM, estabelecendo uma relação dialógica entre teoria e prática. Esse processo geralmente é desenvolvido em grupos de professores-alunos, onde o formador comparece auxiliando-os no oferecimento de bibliografias pertinentes sobre RP/IM e também de relatos de investigações de professores que tomam como objeto de estudo suas práticas de ensinar e aprender matemática via RP ou em ambientes exploratório-investigativos. O processo desse estudo culmina com a realização de seminários de socialização dos estudos e aprendizados realizados por cada grupo, os quais são complementados com discussões e reflexões acerca da pertinência pedagógica dessa modalidade de prática de ensinar e aprender matemática. Este tipo de abordagem Dione Lucchesi e eu temos utilizado com freqüência, na Unicamp, nos cursos de formação inicial de professores. Além disso, como forma de sistematizar e problematizar esse processo de aprendizagem, cada grupo responsável pelo seminário elabora um relatório escrito sobre o tema. Os demais participantes têm a tarefa de escrever um memorial de aprendizagem no qual tentam triangular as idéias/discussões/concepções abordadas no seminário com suas própria idéias e crenças construídas ao longo da vida e também com suas práticas pretéritas, presentes e futuras.

A **quarta abordagem** propõe que o professor-aluno *vivencie*, durante a licenciatura ou em um curso de formação continuada, práticas *com/através ou via* resolução de problemas, sem necessariamente teorizá-las ou problematizá-las. Essa abordagem, contrariamente às anteriores, nega a importância de uma teoria sobre resolução de problemas. Supõe que o professor ou futuro professor, ao vivenciar uma prática diferenciada de RP ou IM, se apropria também de uma forma de ensinar e aprender matemática via RP. Esta abordagem, do mesmo modo que as duas primeiras, não promove problematização nem metacognição, a partir da reflexão e análise sistemática dessas práticas *com/através* RP ou IM. Processo esse fundamental para a construção e desenvolvimento do conhecimento profissional do professor e para a ruptura epistemológica com práticas tradicionais ou empírico-ativistas.

A **quinta abordagem** é uma variante da anterior, pois tem a intencionalidade explícita de *problematizar e teorizar* a vivência, na formação inicial, de práticas *com/através ou via* resolução de problemas. Essas práticas dizem respeito tanto ao ensino de disciplinas voltadas à formação matemática do professor – como é o caso do estudo realizado por Freitas (2006) em sua tese de doutorado - quanto ao ensino de disciplinas de natureza didático-pedagógicas – como é o caso da tese de doutorado de Megid (2009). Essa problematização ocorre mediante reflexões e análises contínuas e sistemáticas sobre o processo de vir a ser professor. O termo sistemático refere-se à escrita de narrativas reflexivas sobre situações e casos de aprendizagem do estudante em situação de conflito ou desconstrução/reconstrução de crenças, saberes e procedimentos relativos ao ensino-aprendizagem da matemática. Para ilustrar os efeitos formativos desse tipo de abordagem trago o depoimento de um dos sujeitos investigados por Freitas (2006), evidenciando a dimensão meta-cognitiva da escrita no processo de aprender geometria, tendo em vista a formação do professor:

> Às vezes a gente faz as coisas... sem pensar nas coisas. Com a escrita , a gente leva em consideração muito mais. Na escrita a gente sistematiza... Enquanto você escreve, você reflete, e depois que você lê aquilo que você escreveu, você re-flete... E isso para mim foi muito importante e acho que aqueles que não fizeram [o curso], perderam, porque não sei se haverá outra chance de aprender geometria dessa forma (p. 333).

A **sexta abordagem**, com forte impacto no desenvolvimento profissional docente, é a investigação sobre a própria prática de ensinar/aprender matemática em um ambiente exploratório-investigativo ou de resolução de problemas. Essa abordagem tem sido utilizada por nós nos estágios supervisionados e na formação continuada de professores.

A sala de aula em um ambiente exploratório-investigativo constitui uma prática complexa, polifônica e polissêmica de produção e negociação de sentidos e significados sobre o que se aprende. Interpretar e analisar esses sentidos e significados representa um campo fértil e infindável de produção de conhecimentos sobre a aprendizagem tanto do aluno quanto do professor. Nesse sentido, é fundamental que o professor registre ou documente as situações e interações de sala de aula para, depois, com mais tempo e distanciamento, possa se debruçar sobre elas, produzindo novas compressões e novos aprendizados.

Sob essa abordagem foram produzidas várias dissertações de mestrado e, mais recentemente, algumas teses de doutorado. Dois trabalhos que estão sendo apresentados no XIII CIAEM são exemplos de estudos sobre essa abordagem: "Os saberes de alunos engajados numa prática coletiva de formulação e resolução de problemas" (Almeida & Fiorentini, 2011) e "Comunicando ideias matemáticas na Educação de Jovens e Adultos" (Gomes & Fiorentini, 2011).

Esse empreendimento, entretanto, nem sempre está ao alcance das possibilidades de um professor que não esteja vinculado a um programa de pós-graduação , sobretudo devido à falta de tempo e de apoio da escola e das políticas públicas. É nesse sentido que as práticas colaborativas ganham importância e relevância. Essa colaboração pode ser entre os próprios pares de uma escola ou pode envolver parcerias entre formadores da universidade e professores do ensino básico e futuros professores como acontece no Grupo de Sábado (GdS) da Unicamp.

O desenvolvimento de aulas exploratório-investigativas na prática escolar permite dar voz e visibilidade à variedade de idéias, raciocínios e conhecimentos dos alunos quando realizam a atividade matemática em sala de aula. A análise e reflexão dos professores sobre o pensamento matemático dos alunos em mobilização durante essas atividades de sala de aula representa um rico contexto de problematização e de produção de conhecimentos e de renovação do curricular escolar.

Embora apaixonante, investigar a própria prática não tem sido uma tarefa fácil. Exige do professor tempo, condições intelectuais, e recursos metodológicos e materiais. Mas isso não é suficiente. O professor que pretende investigar sua prática precisa desenvolver uma postura inquiridora e de escuta sensível aos múltiplos modos de pensar e significar de seus alunos.

Mas, devido à sua condição de docente que precisa priorizar o ato de ensinar em detrimento do investigar, ele precisa buscar apoio em algum parceiro ou em algum estagiário – futuro professor -, o qual teria a incumbência e preocupação de observar e registrar informações ou eventos durante as aulas. O professor pode valer-se também dos registros escritos de seus alunos. Escrita essa que não seja meramente técnica, mas sobretudo de reflexão sobre o seu próprio processo de aprender matemática, registrando com suas próprias palavras seus pensamentos e sentidos sobre a atividade matemática que realiza. Estes registros podem, após terminar a aula, ser retomados, organizados, analisados e interpretados. O relato desse modo de investigar pode ser escrito pelo professor-pesquisador em forma de narrativa, pois para historiar o processo investigativo, o professor tenta capturar e traduzir a complexidade e as múltiplas relações que atravessam sua experiência educativa.

A seguir, trazemos um episódio que foi objeto de estudo de um professor que desenvolveu uma investigação sobre sua própria prática de ensinar/aprender matemática em um ambiente exploratório-investigativo (Fernandes, 2006). O episódio ocorreu em uma classe do 7º ano, durante uma atividade envolvendo fractais. Pretendemos, a partir deste episódio, destacar a produção de conhecimento situado em uma prática de ensinar e aprender matemática num contexto exploratório-investigativo.

4. Análise de um episódio em aula exploratório-investigativa

Em Fiorentini (2006), conceituamos aula **exploratório-investigativa** como *aquela em que em são mobilizadas ou desencadeadas tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.*

Dependendo do modo como essas aulas exploratório-investigativas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase das explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjeturas, teremos, então, uma situação típica de investigação matemática. Devido a essa natureza mais flexível de tarefa, aula ou atividade, podendo as explorações tornarem-se, ou não, investigativas, o Grupo de Sábado tem preferido usar, com mais freqüência, o termo aula/tarefa/atividade exploratório-investigativa ao invés de simplesmente aula/tarefa/atividade investigativa.

Adotar em sala de aula uma abordagem exploratório-investigativa implica romper com o paradigma do exercício. Consiste em desenvolver uma prática pedagógica heurística que instigue a formulação de perguntas ou problemas por parte dos alunos. Uma prática na qual eles possam trabalhar colaborativamente em grupos, negociando e produzindo significados, tendo o professor como mediador.

Isso pode ser evidenciado no seguinte diálogo entre professor e dois estudantes (Lia e Léo) a partir da exploração da sequência fractal do triângulo de Sierpinski (Fernandes, 2006):

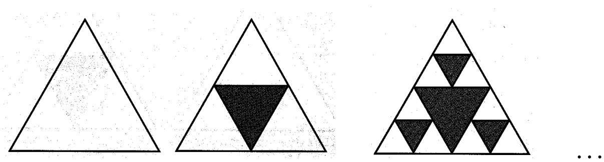


Figura 1.

Lia: Professor, esse triângulo acaba!

Léo: Não acaba!

Prof: Lia, por que acaba? Me explica?

Lia: Acaba porque vai chegar a uma hora em que eu não consigo desenhar mais o triângulo menor?!

Léo: Mas eu posso ampliar, colocar uma lente de aumento...

Lia: Não dá, vai ficar todo furadinho!!!

Léo: Dá porque eu posso fazer no computador. Dá porque se eu fizer um triângulo bem "porcaria" eu consigo fazer mais três porcariazinhas e tirar uma porcariazinha!!

Lia: Não dá! Professor, fala pra ele que não dá!

Léo: Fala para ela que dá! Que nunca acaba!

Prof: (Dirigindo-se para toda a classe) O que vocês acham, acaba ou não acaba o triângulo?

Neste episódio, cabe, inicialmente, destacar o papel mediador do professor. Primeiramente observemos a *sensibilidade do professor para com os alunos,* evidenciada ao perceber e valorizar os sentidos que os alunos atribuíam à situação matemática, pois o professor não esperava que os alunos fossem explorar noções relativas a infinitésimos ou limite da sequência.

De fato, o professor sugeriu na parte escrita da tarefa que os alunos do 7º ano: (1) construíssem o próximo triângulo da sequência; (2) encontrassem a relação entre os triângulos (existentes ou faltantes) e sua posição da sequência; (3) escrevessem, com suas palavras, o padrão que descreve a sequência. Mas também deixou uma pergunta mais aberta, visando tornar a tarefa mais exploratória e investigativa: (4) observem e descrevam o que acontece com a transformação dos triângulos...

A quarta solicitação – que na verdade foi a segunda na sequência da ficha de trabalho entregue aos alunos – denota que a sensibilidade do professor já começou na forma como elaborou a tarefa ou situação-problema. A abertura da quarta solicitação evidencia uma concepção de problema não rotineiro e não-fechado. Isso o predispunha a estar atento ao imprevisível, ao não-esperado. O modo como administrou a aprendizagem tem a ver com uma postura problematizadora e exploratória-investigativa que começou a construir nos anos finais da licenciatura, quando realizou em seu estágio na prática escolar um projeto investigativo sobre investigações matemáticas, envolvendo ensino-aprendizagem de álgebra (Ferdandes, Fiorentini & Cristovão, 2006), tendo contado com a interlocução do Grupo de Sábado e da tríade colaborativa formada pelo formador da universidade (Fiorentini), pela supervisora da escola (Cristovão) e pelo próprio estagiário (Fernandes).

Com efeito, na negociação entre Lia e Léo, o professor poderia simplesmente afunilar ou interromper o processo de negociação, dizendo que Léo estava certo e Lia estava errada. Ou poderia dizer que aquilo não era pertinente à atividade ou, ainda, que isso seria tratado mais tarde quando ingressassem no Ensino Médio. O professor, entretanto, procurou tirar proveito da situação. Utilizando como ferramenta de análise a tríade de ensino concebida por Potari & Jaworsky (2002) - e que envolve a inter-relação entre *desafio matemático, sensibilidades aos alunos e gestão da aprendizagem – podemos dizer que o professor foi sensível à significação dos alunos, percebendo a riqueza pedagógica do episódio em relação ao desafio matemático* proposto e gerencia a aprendizagem emergente de modo que toda a classe pudesse participar dessa experiência educativa.

Conforme Potari & Jaworski (2002: 353),

> O gerenciamento da aprendizagem descreve o papel do professor na constituição do ambiente de aprendizagem em sala de aula pelo professor e os alunos. Incluí agrupamentos na sala de aulas; o planejamento de tarefas e atividades; a instituição de normas e assim por diante. Sensibilidade aos alunos descreve o conhecimento do professor sobre seus alunos e a atenção às suas necessidades; os modos nos quais o professor interage com indivíduos e guia interações em grupo. Desafio matemático descreve os desafios apresentados aos alunos de forma a mobilizá-los no raciocínio e na atividade matemática. Isto inclui as tarefas propostas, colocação de questões e ênfase no processamento metacognitivo. Estes domínios estão fortemente conectados e interdependentes.

Minhas experiências como formador e pesquisador na formação de professores mostram que esses domínios (ou competências) do professor de matemática não são ensinados, mas podem ser aprendidos ou desenvolvidos mediante participação em comunidades profissionais que tem como postura a análise e investigação de suas práticas de ensinar e aprender matemática da maneira como acontece no Grupo de Sábado (GdS) do qual o professor Fernando é participante ativo desde os últimos anos do curso de Licenciatura em Matemática. E reafirmo que esse não é um empreendimento a ser realizado isoladamente por cada docente, pois a aprendizagem que acontece em um contexto de prática exploratória e investigativa é complexa e diversa. Para reforçar essa hipótese, busco apoio em Jean Lave (2001, 20) que diz que o " conhecimento sempre se constrói e se transforma ao ser usado", sendo a aprendizagem "parte integrante da atividade no/com o mundo em todos os momentos". Ou seja, em uma comunidade de prática "produzir aprendizagem não se constitui um problema". Entretanto, o que se aprende, nesse contexto, "é sempre complexamente problemático".

Penso que a sala de aula de matemática pode se constituir em uma comunidade de aprendizagem na qual os alunos sejam desafiados a não apenas resolver problemas abertos ou exploratórios, mas também a elaborarem e explorarem seus próprios problemas, a formularem suas hipóteses e conjecturas, buscando testá-las e/ou prová-las, podendo ser validadas ou refutadas no âmbito dessa comunidade.

As experiências e investigações realizadas pelos professores do Grupo de Sábado evidenciam, primeiramente, outra possibilidade de aprender a ensinar e promover a aprendizagem matemática na escola, mediante desenvolvimento de atividades matemáticas nas quais os alunos se constituem sujeitos do conhecimento e produzem sentido pleno ao fazer matemático. Mesmo para alunos marcados pelo fracasso escolar, essa prática tem surgido como uma alternativa para a inclusão escolar desses alunos, como verificou Eliane Cristovão (2007) em sua dissertação de mestrado.

É nesse âmbito que identificamos o desafio do professor e do pesquisador: tentar desvelar o fenômeno complexo da aprendizagem que resulta de sua participação em práticas de refletir e investigar no seio de uma comunidade investigativa, tendo parceiros críticos como interlocutores.

O Grupo de Sábado constituiu-se, há mais de 10 anos, como um grupo colaborativo que reúne professores da escola básica, futuros professores, pós-graduandos e formadores da Universidade interessados em estudar, compartilhar, discutir, investigar e escrever colaborativamente sobre a prática de ensinar e aprender matemáticas nas escolas sob uma abordagem exploratório-investigativa. Na verdade, o GdS constituí-se em um grupo heterogêneo com interesses e *excedentes de visão* distintos (Bakhtin, 2003).

De fato, os professores de matemática da escola básica estavam interessados em discutir e analisar suas práticas escolares e atualizar-se profissionalmente e traziam como *excedente de visão* um saber de experiência relativo ao ensino da matemática nas escolas públicas e privadas e conheciam as condições de produção do trabalho docente nessas escolas, vislumbrando o que é possível ou não realizar na prática escolar e denunciando os limites e as idealizações freqüentes dos acadêmicos, que geralmente não conhecem *por dentro* — isto é, experiencialmente - a complexidade de ensinar matemática na escola atual. De outra parte, os acadêmicos e professores universitários estavam interessados em colaborar e investigar no/o processo de formação continuada dos participantes, e, sobretudo, analisar o desenvolvimento profissional dos mesmos. O *excedente de visão* dos acadêmicos em relação aos professores da escola básica é decorrente de análises interpretações e compreensões que estes fazem acerca das práticas, experiências e saberes dos professores, tendo como referência os aportes teórico-científicos oriundos das ciências educativas e, em particular, dos estudos acadêmicos em educação matemática. Penso, porém, que o maior *excedente de visão* dos acadêmicos seja o domínio dos processos metodológicos de pesquisa e sua capacidade em *problematizar* ou *desnaturalizar* as práticas escolares vigentes.

Nessa perspectiva, o conhecimento é inseparável do sujeito que conhece. As salas são entendidas como local de investigação, bem como os coletivos escolares e as comunidades de investigação. Nesses espaços, os professores problematizam seu próprio conhecimento, bem como o conhecimento e a prática dos outros. Ou seja, o conhecimento é construído coletivamente em comunidades locais interconectadas com as mais amplas ou globais. Conforme Cochran-Smith e Lytle (1999), todos aprendem uns com os outros, onde não se sobressaem "experts".

Ao trabalharem juntos em comunidades, tanto os professores novatos quanto os mais experientes, apresentam problemas, identificam discrepâncias entre teorias e práticas, desafiam rotinas comuns, e se baseiam no conhecimento de outros para construir um enfoque gerativo, e tentam tornar visível muito do que é considerado dado no ensino-aprendizagem. A partir de uma postura de investigação, os professores buscam questões significativas à medida que se envolvem com a resolução de problemas. Contam com outros professores para obter pontos de vista alternativos sobre seu trabalho (p. 292).

5. Reflexões finais

Tentamos mostrar ao longo deste artigo que, para uma formação emancipatória do professor, não é suficiente o professor receber ensino sobre RP ou vivenciar uma prática de ensino através de RP. É preciso que ele possa se constituir também em um estudioso das práticas de ensinar e aprender matemática em ambientes exploratório-investigativos ou de resolução de problemas. Que o professor possa, ao mesmo tempo, experienciar e refletir/analisar outros modos de estabelecer relação com o conhecimento em ambientes de exploração, investigação ou de resolução de problemas seja enquanto aprendiz na formação inicial seja enquanto docente sobre sua prática com os alunos.

Quando o professor dá voz e ouvidos ao modo de pensar e significar dos alunos, eles o surpreendem com seus raciocínios e estratégias de resolução de problemas; e com suas conjecturas e argumentações. O professor-pesquisador que adota esses procedimentos e assume essa postura de escuta sensível não demorará em perceber que, através da exploração e da resolução de problemas abertos, são os próprios alunos que lhe ensinam a como desenvolver aulas mais significativas e instigantes. Isso exige do professor sensibilidade para trabalhar a partir da curiosidade dos alunos, explorar as perguntas que eles formulam sobre o fazer matemático em sala de aula. O professor precisa aprender a reconhecer que seus estudantes, quando desafiados, são capazes de pensar e fazer matemática e de produzir negatricidades.

Negatricidade, segundo Borba (1998), é uma capacidade incrível [do estudante] em desjogar, em responder de uma forma totalmente, e imprevisivelmente, diferente dos objetivos traçados em nossa ação formadora. Dar espaço ou voz a essa negatricidade significa potencializar o engajamento do estudante à atividade de ensino e aprendizagem; significa mobilizar o estudante à interação, à busca e à produção do saber no ato de aprender. Engajamento, portanto, não significa que o estudante aceite as verdades do professor, aceite tudo o que o professor diz ou propõe. Aceitar, sem questionar ou problematizar, sem atribuir seu sentido próprio ao que está sendo ensinado, não é engajamento. É assujeitar-se, é negar-se enquanto sujeito capaz de produzir idéias e sentidos próprios ao que está sendo ensinado e aprendido. A postura do professor-educador é, portanto, a de alguém que está "atento ao jogo intelectual do estudante, reconhecendo neste um sujeito autônomo que trabalha – isto é, resolve, discute, escuta, revisa, critica, aceita, concorda, discorda - com ele" (Sadovsky, 2007).

Dar conta desse empreendimento não é tarefa fácil para um professor que não dispõe de tempo e condições sociais para tal. O professor, isolado em sua sala de aula em ou em sua escola, pode até fazer muito, mas certamente esse trabalho será mais produtivo e menos penoso se puder contar com parceiros que sejam amigos críticos. Estes parceiros podem ser os próprios colegas de escola ou mesmo professores universitários que tenham interesse em investigar colaborativamente novas formas de ensinar e aprender matemáticas nas escolas públicas sobretudo nas periferias. O resultado desse processo é que todos os envolvidos ou participantes saem ganhando. O estudante da escola ganha ao adquirir condições para desenvolver seu empoderamento matemático; o currículo escolar ganha novas formas, experiências e alternativas de prover atividades significativas; e os professores ganham, pois, mediante práticas reflexivas e investigativas, desenvolvem-se profissionalmente, conquistando autonomia e autoria na melhoria/transformação da qualidade do ensino a partir da escola.

Referências Bibliográficas

Bakhtin. M. (2003) *Estética da criação verbal*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes.

Borba, S. (1998). Aspectos do conceito de multirreferencialidade nas ciências e nos espaços de formação. In: Barbosa, J. G. (org.). *Reflexões em torno da abordagem multirreferencial*. São Carlos: Editora da UFSCar, pp. 11-19.

Brasil. MEC. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3° e 4° Ciclos*, Brasília.

Cristovão, E. (2007). *Investigações matemáticas na recuperação de ciclo II e o desafio da inclusão escolar*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas). Campinas: FE/Unicamp.

Ernest, P. (1996). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In. Abrantes, P., Leal, L.C., & Ponte, J.P. *Investigar para aprender matemática*. Portugal: APM, pp. 25-48.

Fernandes, F (2006). Fractais e 'Porcariazinhas': professor, acaba ou não acaba? In: Fiorentini, D.; Cristovão, E.M. (Org.). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, pp. 207-226.

Fernandes, F.; Fiorentini, D.; Cristovão. E. (2006). Investigações Matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de 6ª série In: Fiorentini, D.; Cristovão, E. (Org.). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, pp. 227-244.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação* (Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas). Campinas: FE-UNICAMP.

Fiorentini, D. (2006). Uma história de reflexão e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: Fiorentini, D.; Cristovão, E.M. (Org.). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, pp. 13-36.

Fiorentini, D., Cristovão, E.M. (2006). *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora.

Freitas, M.T.MF. (2007). *A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática* (Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas). Campinas: FE/Unicamp.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, pp. 3-35.

Lester, F. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some Educational and psychological considerations. In: Hatfiel & Bradbard (Eds.). *Mathematical Problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, pp.53-87.

Megid, M. (2009). *Formação inicial de professoras que ensinam matemática mediada pela escrita e pela análise de narrativas sobre operações numéricas* (Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas). Campinas: FE/Unicamp.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Onuchic, L.; Allevato, N. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. (Org). *Educação Matemática - pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, pp. 213-231.

Onuchic, L. (2008). Uma história de Resolução de problemas no Brasil e no Mundo. In: *I Seminário em Resolução de problemas*, pp. 1-15. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos.html.

Ponte, J. P. (2003). Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemática na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Potari, D.; Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5* , 351-380.

Sadovsky, P. (2007). *O ensino de matemática hoje*. São Paulo: Ática.

Schroeder, T.; Lester, F. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: Trafton, P.R. & Shulte, A.P.(Eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston: NVTM, pp.31-42.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

Formación conjunta de profesores de matemática, física y química, desde la didáctica de las ciencias[1]

Luz María De Guadalupe González Álvarez
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México
luzmagpe@prodigy.net.mx

Resumen[2]

La intención que se persigue en esta participación, es mostrar los resultados que se han obtenido, en una experiencia en la que se realizó la formación conjunta de profesores de matemáticas, física y química, en el enfoque de la didáctica de las ciencias. Para ello, primero se presenta el objetivo general de dicho enfoque, seguido de un resumen de los argumentos que se presentan en relación con las diferentes posturas en debate, acerca de la conveniencia de utilizar diferentes grados de integración de las disciplinas científicas en los niveles de educación básica y universitaria. Posteriormente se describen los elementos fundamentales de la experiencia de formación de profesores que se presenta en este documento, analizada desde sus ventajas, desventajas, límites y oportunidades. Para concluir, se presenta la valoración final de la experiencia, seguida de la proyección que se espera dar a la misma, en un futuro cercano.

Palabras clave

Formación de profesores, matemáticas, física, química, proyecto conjunto, didáctica de las ciencias.

Abstract

The results that have been obtained from an experience with a focus on didactics of the sciences in teacher preparation program that combined math, physics and chemistry are shown. First, the general objective for that focus is presented, followed by a summary of the arguments given in relation to the different stances taken in the debate about the appropriateness of using different degrees of integration of the scientific disciplines in both pre-university and university education. Then the fundamental elements of this experience of teacher preparation are analyzed from their advantages, disadvantages, limits and opportunities. To conclude, a final assessment of the experience is presented with a projection on what is expected in the near future.

Key words

Teacher preparation, math, physics, chemistry, didactics of the sciences.

---

[1] Este trabajo corresponde a la participación de la autora en una mesa redonda paralela de la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. Introducción

El problema básico que se plantea la didáctica de las ciencias es enseñar ciencias significativamente, es decir, cómo promover que la cultura científica generada a través de los siglos pueda ser comprendida por la población, se sepa aplicar y se pueda continuar generando (Sanmartí, 2002). Si admitimos que las fronteras entre diferentes disciplinas no se fijan de una vez para siempre, podría decirse que es indispensable reorganizar los ámbitos del saber por medio de una cooperación entre disciplinas que permita su progresiva construcción y mejora. El nivel de cooperación que se requiere para resolver problemas cercanos a la realidad, puede ser: pluridisciplinar, en el cual varias ciencias colaboran pero cada una conserva su especificidad; transdisciplinar, situada en un nivel de abstracción elevado, utiliza teorías y conceptos comunes a todas las ciencias; e interdisciplinar, que implica confrontación, intercambio de métodos, conceptos y puntos de vista. Así pues, los contactos interdisciplinarios son enriquecedores en la medida en que cada una de las ciencias pueda beneficiar a las otras de ciertos conceptos, de dimensiones, que, utilizadas en un marco nuevo, permitan plantear nuevas cuestiones.

La primera etapa de una colaboración útil consiste, para cada ciencia, en conocer el servicio que las otras pueden proporcionarle y en saber plantear sus problemas en términos accesibles para los otros. En la práctica, la mejor forma de conseguirlo es trabajar en común lo más a menudo posible, ya que un marco interdisciplinario no se conforma con yuxtaponer puntos de vista sino que se ve obligado a integrarlos (García & Santos, 2000). Ante esto, se han generado proyectos educativos con diferente grado de integración de las diferentes disciplinas científicas, desde la no integración (ciencias separadas) hasta su total integración (ciencia integrada), pasando por categorías intermedias como la ciencia asociada, la ciencia combinada o la ciencia coordinada. La ciencia integrada y combinada se considera un enfoque adecuado para la enseñanza de las ciencias a nivel de enseñanza primaria y en los primeros cursos de secundaria (12-14 años), donde los fenómenos investigados y las estructuras conceptuales necesarias son relativamente más sencillas. A medida que se avanza en los cursos de Secundaria (14-16), hay un debate, con opiniones diversas, desde aquellos que han estado a favor de un enfoque integrado o combinado, hasta los que prefieren respetar la estructura interna de cada ciencia (Caamaño, 1991).

Actualmente existen propuestas que se dirigen a resolver el dilema de qué es más importante en estudios superiores; que los estudiantes aprendan el modo de ver el mundo propio de la ciencia que estudian, o la resolución de problemas complejos con diferente nivel de integración de las diferentes disciplinas científicas. Una de estas propuestas es la inclusión en la curricula de una disciplina integradora, la cual debe interrelacionar todos los contenidos recibidos de las diferentes disciplinas del plan de estudio y posibilitar que el estudiante se apropie del objeto de su trabajo mediante la solución de problemas de la práctica social. En ella están presentes no sólo el estudio como exponente de lo académico y el trabajo como representación de lo laboral, sino también el método de la investigación científica, por eso su nivel de asimilación parte desde lo productivo hasta lo creativo (Gheisa, 2004). Otra propuesta consiste en construir la interdisciplinariedad enriqueciendo cada disciplina por medio de nexos entre las diferentes asignaturas, de manera que se refleje una acertada concepción científica del mundo; lo cual demuestra cómo los fenómenos no existen por separado al interrelacionarlos por medio del contenido. Esta consiste en un trabajo común teniendo presente la interacción de las disciplinas científicas, de sus conceptos, directrices, de su metodología, de sus procedimientos, de sus datos (Pérez, 2010).

En el caso de la matemática, se cuenta además con la teoría de la Matemática en el contexto de las ciencias. El supuesto filosófico educativo de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas. Para ello, se contempla un proceso metodológico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de eventos contextualizados, con la cual se fomenta el desarrollo de las habilidades para la transferencia del conocimiento, éste incluye tres etapas: 1. Presentar la estrategia didáctica de la *Matemática en Contexto* en el ambiente de aprendizaje. 2. Implantar cursos extracurriculares en donde se lleven a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades metacognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver problemas, así como actividades para bloquear creencias negativas. 3. Instrumentar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelvan eventos reales de la industria (Camarena, 2008). Como se puede observar, esta teoría resuelve el problema con elementos que tomaron una u otra de las propuestas mencionadas. Se incrementa paulatinamente el grado de integración, de manera que los estudiantes transiten desde la ciencia separada, hasta la ciencia integrada, de manera que se aprovechen las ventajas de cada una de estas opciones, avanzando en complejidad, al ir enfrentando problemas cada vez más cercanos a la realidad profesional con la que se han de enfrentar en un futuro cercano.

2. La propuesta de formación docente y su evaluación

Se diseñó una propuesta de formación docente que partió de la idea de que los profesores requieren vivir la experiencia formativa en el mismo enfoque, con los mismos métodos, técnicas y recursos que se espera ellos utilicen en su práctica docente futura (Tiberghien, Jossem & Barojas, 1998). Uno de los cambios que se espera de ellos, es que logren un nivel intermedio de integración con otras disciplinas, para que se favorezca el desarrollo de competencias en los estudiantes. Un antecedente importante de este proceso, es una investigación que desembocó en el diseño de una *especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*, en donde las asignaturas de matemáticas se muestran vinculadas con otras disciplinas propias de la electrónica y sus ramas afines (Camarena, 1990). Posteriormente se diseñó un *diplomado en didáctica de las ciencias*, para formar a un grupo de profesores de química, física y matemáticas, de bachillerato y primer año de universidad; cuyo objetivo era la elaboración, aplicación y evaluación de unidades de aprendizaje. En este proceso los profesores de las diferentes asignaturas interactuaron para enriquecer mutuamente sus proyectos educativos (González, 2003). El grupo analizado está formado por profesores en servicio y estudiantes que se preparan para ser profesores (preservicio).

Para el diseño del diplomado se toma en cuenta un diagnóstico previo de los posibles candidatos a ingresar al diplomado, con lo cual se establecen las debilidades y fortalezas de los docentes que van a ser fortalecidas y retomadas para el diseño de las unidades didácticas del diplomado.

Uno de los ejes de desarrollo del diplomado era que los docentes pudieran diseñar unidades didácticas, con elementos para la integración entre disciplinas.

Otro eje de desarrollo del diplomado en cuestión fue la utilización de la metodología de investigación-acción, para hacer los ajustes curriculares necesarios durante el desarrollo del diplomado.

La evaluación del diplomado se llevó a cabo a través de los criterios de evaluación consensuados con el grupo de profesores-alumnos, los cuales se van monitoreando constantemente y afinando para contar con criterios que permiten un mejor análisis de la evolución del diplomado (González, 2004).

La evaluación de cada profesor-alumno se lleva a cabo como estudio de casos, para lo cual se utilizaron como instrumentos para recoger datos: los productos obtenidos al realizar las actividades de aprendizaje y el trabajo final, así como las grabaciones en video del trabajo que realizaron con sus estudiantes durante el diplomado, en el que fueron incorporando paulatinamente algunos elementos aprendidos en el mismo. El trabajo final que elaboraron, fue una unidad didáctica para la asignatura que imparten, en el enfoque de ciencia coordinada, integrando aportaciones de las otras dos asignaturas impartidas por los demás participantes. Un elemento fundamental de dicha actividad, fue la serie de actividades de aprendizaje que diseñaron, las cuales se aplicaban al grupo para que los demás profesores-alumnos, desarrollando el rol de estudiantes, las resolvieran individualmente y las discutieran en grupo. Con esto se validaron las actividades diseñadas por cada uno, antes de que las utilizaran con sus estudiantes; y además se logró involucrarlos con los contenidos de las demás asignaturas, para favorecer la integración paulatina de contenidos de diferentes ciencias. A continuación se presenta el análisis del proceso, desde sus ventajas, desventajas, límites y oportunidades.

3. Ventajas

La diversidad de formas de ver, una oportunidad de enriquecimiento mutuo

Una de las actividades realizadas constó de una simulación para observar la flotación de cuerpos en fluidos, aprovechando el hecho de que los sólidos granulados en movimiento se comportan de manera similar a los fluidos en reposo. Para ello se utilizó un recipiente lleno hasta la mitad con lentejas; en el cual se colocaron, sin que se percataran los profesores-alumnos, dos capsulitas de plástico: una llena de aire (color rosa), en el fondo del recipiente; y otra llena de monedas (color ocre), sobre la superficie de las lentejas. El grupo solamente pudo observar el recipiente con lentejas y la capsulita ocre sobre su superficie, se colocó una tapa en el recipiente y se agitó de manera oscilatoria. Después del movimiento, lo que se observó fue el recipiente con lentejas y la capsulita rosa sobre su superficie. Se les solicitó a los profesores-estudiantes que de manera individual elaboraran una descripción y una explicación de lo que observaron y posteriormente se realizó un debate para construir un consenso al respecto. Las explicaciones más representativas que se obtuvieron se presentan en la tabla 1. Se usa el término “reconstruido”, para los casos en los cuales no se pudo obtener la respuesta por escrito, de manera que ésta fue escrita por la instructora, después del debate:

Tabla 1
Respuestas más representativas de los profesores-alumnos al problema de capsulitas en lentejas

Perfil del profesor-alumno	Respuesta	Interpretación
Química, en servicio, (reconstruido).	La maestra colocó un objeto color ocre sobre las lentejas que estaban contenidas en un recipiente, al agitar el mismo, el objeto cambió de color, al rosa. Esto se debe probablemente a que está barnizado con alguna sal metálica muy sensible a los cambios de temperatura, la cual cambia de color al incrementarse ésta, debido al movimiento.	Se puede observar que la relación causa-efecto está centrada en la constitución de la materia, por ello se presupone que solamente está presente una capsulita.
Física, en servicio, (reconstruido).	En un recipiente con lentejas, se colocó una pelotita color ocre, al agitar el recipiente, ésta se hundió y salió a flote una pelotita color rosa. Esto se debe a que es más pesada la pelotita color ocre que la rosa, probablemente por el relleno que contienen.	En este caso, la relación causa-efecto está centrada en el proceso de flotación, por ello se intuye que están presentes dos capsulitas.
Matemática, preservicio.	El recipiente que contiene a las lentejas al estar en reposo actúan como un sólido y es por esa razón que el huevo se mantiene encima de las lentejas, pero al poner en movimiento el recipiente podemos percatarnos que el huevo se hunde, es decir, que ahora las lentejas se comportaron como si fueran un líquido.	Esta respuesta está centrada en el proceso del cambio de comportamiento del medio, pero no toma en cuenta más que a una de las capsulitas, de la otra parece no haberse percatado.

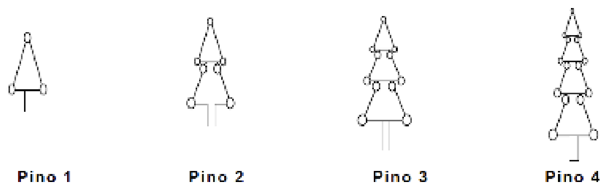
De la tabla 1 se puede observar que los profesores-alumnos participantes muestran tener una visión del mundo coherente con su profesión. Esto favoreció que en el momento del debate para construir el consenso, se diera un enriquecimiento mutuo, de acuerdo con el sentir de los participantes, quienes al inicio mostraron dificultad para comprender el punto de vista de los colegas de las otras disciplinas, lo cual se fue reduciendo mediante la realización de actividades seguidas de debate.

Uso de diferentes heurísticas

Se resolvió la actividad que se presenta en la figura 1, para identificar las heurísticas utilizadas por los profesores de cada disciplina.

Ya se acerca la Navidad, tenemos que preparar con tiempo suficiente los adornos. ¡Vamos a hacer unos árboles navideños de foamy color verde, y le pondremos unas cuentas fluorescentes para simular las luces! Hay que comprar el material, lo primero es saber cuántas cuentas requerimos, para ello tenemos varios modelos:

1. ¿Cuántas luces tiene cada pino de la siguiente figura?



2. ¿Cuántas luces tendría el pino 7?
3. ¿Cuántas luces tendría el pino 10?
4. ¿Cuántas luces tendría el pino 50?

Explica el procedimiento que seguiste en cada caso.

Figura 1: Problema de pinos con luces (Alsina, 1996)

Las respuestas más representativas se presentan en la tabla 2, de la que se puede observar el uso de las diferentes heurísticas para resolver un problema más o menos cotidiano. Es notable que también este aspecto varíe de acuerdo con la profesión de los profesores-alumnos.

Tabla 2
Respuestas más representativas de los profesores al problema de pinos con luces.

Perfil del profesor-alumno	Descripción de la respuesta	Interpretación
Química, en servicio.	Elaboró un dibujo para cada caso, y contó las pequeñas elipses que representaban las luces. Planteó una regla de tres directa para el pino 50.	Usó la heurística más concreta para los casos en que resulta viable. Para el caso en que el dibujo resultaría demasiado grande, utilizó la regla de tres, como si se tratara de una relación lineal que parte del origen de los ejes cartesianos.
Física, en servicio.	Planteó la ecuación de una recta con ordenada al origen y extrapoló.	Utilizó una heurística más abstracta, con base en la geometría analítica.
Matemáticas, en servicio.	Elaboró un procedimiento para resolver series.	Utilizó la heurística más abstracta, con base en el álgebra.

Uso de diferentes formas de representación

Para analizar el uso de la representación gráfica, se presentan los resultados de dos actividades. En la primera se proyectó una cápsula de video en la que se veía la trayectoria de un balón, desde el momento de que fue lanzado al aire, hasta que cayó. A partir de ello, los participantes debían dibujar una gráfica de posición – tiempo y otra de velocidad – tiempo, que ilustrara el proceso. La mayoría de los profesores-alumnos no pudieron elaborar la gráfica, debido a que no contaban con datos numéricos. En las figuras 2 y 3, se muestra la respuesta más interesante.

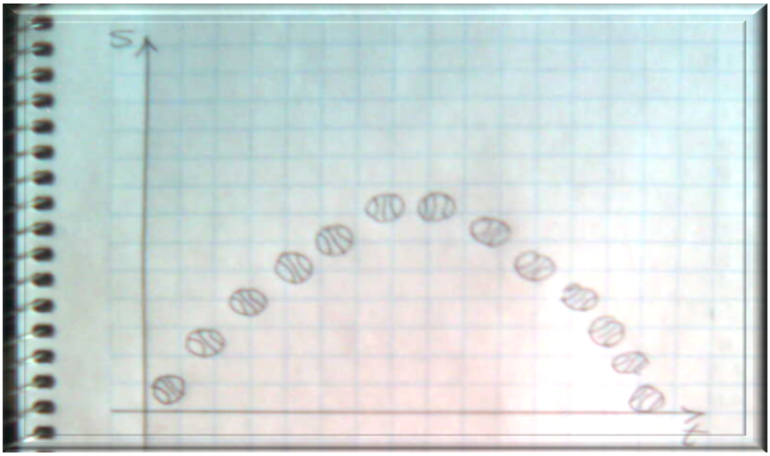


Figura 2: Gráfica posición - tiempo para ilustrar la trayectoria de un balón lanzado al aire, elaborada por un profesor de física en servicio

En la figura 2, se muestra el resultado que elaboró el profesor-alumno de física, en servicio, para representar el movimiento del balón en una gráfica de posición-tiempo. Se puede ver que la representación es muy concreta, puesto que en lugar de marcar los puntos que representarían los datos, o bien la curva solamente, puesto que no había datos, se representa el balón en diferentes posiciones.

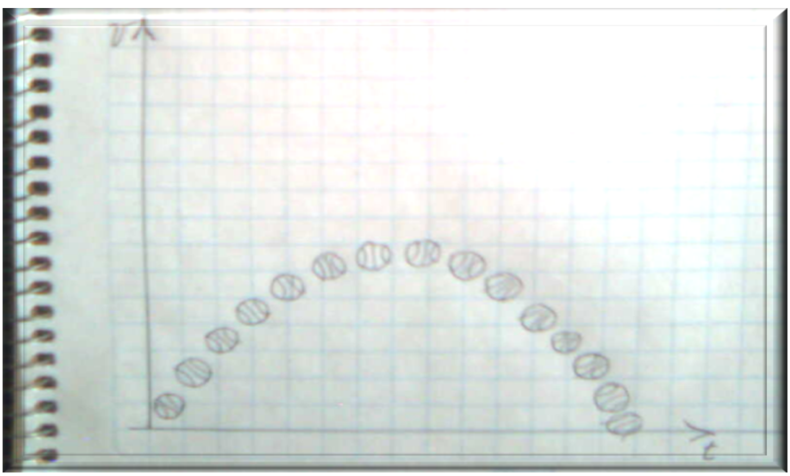


Figura 3: Gráfica velocidad - tiempo para ilustrar la trayectoria de un balón lanzado al aire, elaborada por un profesor de física en servicio

En la figura 3, se muestra el resultado del mismo profesor-alumno, para representar el movimiento del balón en una gráfica velocidad-tiempo. En este caso se pude ver que lo que está representando es la trayectoria descrita por el movimiento del balón y no la relación entre las variables, puesto que las dos gráficas son iguales, excepto por la etiqueta del eje de las ordenadas, que en el primer caso indica que se grafica la posición del balón, y en el segundo, la velocidad del mismo.

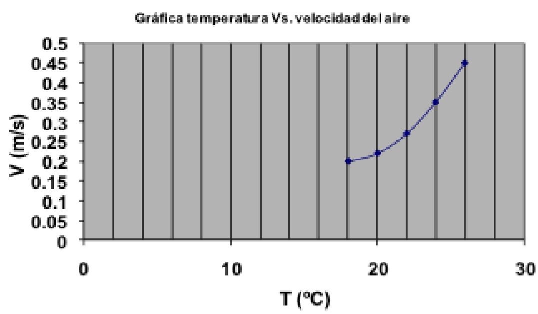
Posteriormente se les planteó un problema en contexto (figura 4), en el que se requería interpretar la representación gráfica para resolverlo, y traducir la información a un lenguaje simbólico. El tema matemático utilizado fue el concepto de variación y el contexto, la ergonomía.

Con respecto al inciso a) del problema en contexto no hubo dificultad, todos los profesores-alumnos pudieron resolverlo, pero ninguno de ellos pudo resolver correctamente el inciso b). La mayoría no identificaron el concepto de derivada, y quienes lo identificaron, en general expresaron que si se les daba la ecuación que representa la situación problemática, podrían resolverlo, pero no sabían qué hacer con la gráfica.

Las dos respuestas más representativas, debido a que si identificaron el concepto de derivada y obtuvieron un resultado, se presentan en la tabla 3.

Sedelmayer, un crítico de arte, al comentar acerca de la arquitectura actual, menciona que al diseñar los edificios se cuida que el ambiente de las oficinas resulte adecuado para el buen funcionamiento y cuidado de las computadoras u otros equipos de alto costo; sin embargo, no siempre estas condiciones son ideales para el ser humano. Por ello se han realizado investigaciones cuyo objetivo es identificar las condiciones ideales para poder realizar un trabajo sedentario de manera saludable y confortable.

En la siguiente figura, se muestra la gráfica de la velocidad media del aire permitida, en función de la temperatura del aire, de manera que no exista turbulencia, para un índice de molestia por corrientes de aire de un 15 % de insatisfechos; aplicable a actividades ligeras, esencialmente sedentarias.



De acuerdo con los datos de la gráfica:

1. ¿Cuánto cambia la velocidad del aire cuando la temperatura se eleva de 22 a 24ºC?

2. ¿Si se está ajustando el equipo, qué tan rápido ha de cambiar el valor de velocidad del aire, cuando la temperatura es de 22º C, para seguir cumpliendo con la norma marcada por la gráfica?

Explica cómo obtuviste tus respuestas.

Figura 4: Problema en contexto para identificar el uso de información a partir de una gráfica (González & Ruiz, 2009)

Tabla 3
Respuestas más representativas de los profesores-alumnos al cuestionario.

Perfil del profesor-alumno	Respuesta	Interpretación
Física, preservicio.	Intentó obtener la solución geométrica, mediante la pendiente de la tangente, pero sólo elige dos intervalos y los compara.	Reconoció el concepto de derivada y su equivalencia con la pendiente de la tangente.
Matemáticas, preservicio.	Calculó la segunda diferencia, a partir de datos numéricos que obtuvo de la gráfica. Intentó obtener el ajuste por mínimos cuadrados, para obtener la ecuación de la función y derivar, pero no recordó como se hace.	Relacionó el problema con lo aprendido en laboratorio de física.

De lo anterior se puede observar el sesgo profesional que le da cada profesor-alumno a la solución de un problema dado y que con la actividad de debate se llega a consensos integradores de las ciencias.

4. Desventajas

En los modelos educativos actuales, centrados en el aprendizaje, se presenta la necesidad de involucrar a los estudiantes en actividades en las cuales se requiera un proceso reflexivo, creativo y socializado, que favorezca el desarrollo de las diversas competencias planeadas para la unidad de aprendizaje. Para que esas experiencias resulten enriquecedoras, es conveniente la formación de grupos en los que haya diversidad en el desarrollo de los diferentes aspectos de las competencias que se van trabajando; en las formas de aprendizaje y en los motivos e intereses involucrados. Sin embargo, si la diversidad es muy grande, los debates suelen requerir que se les dedique bastante tiempo y se corre el riesgo de que la discusión se desvíe del objetivo inicial. En el caso de los profesores-alumnos de diferentes disciplinas, la diversidad cultural es amplia, debido a la diferencia de lenguajes y formas de ver el mundo propias de cada disciplina, sumado a las diferencias personales normales en un grupo. Debido a ello, se dificulta la comprensión mutua entre los integrantes de disciplinas diferentes y como consecuencia, el tiempo invertido en la resolución de las actividades, algunos profesores-alumnos lo perciben como "pérdida de tiempo"; por este motivo, no concluyeron el proceso, argumentando que les parecía aburrido. Esto se presentó en algunos de los profesores de universidad, principalmente de matemáticas, puesto que les parece que lo importante es la abstracción, lo cual ellos dominan, pero expresaron falta de aprecio por los conocimientos concretos acerca de la naturaleza.

5. Límites

Se requiere contar con asesores de contenido de las diferentes disciplinas que imparten los profesores-alumnos, puesto que la instructora conoce de una de ellas, además de la didáctica involucrada, pero no de las demás. Lo ideal es que no sea solamente una instructora la que imparta el curso, sino un pequeño grupo que trabaje de manera colaborativa. Esto ocasiona que se requiera más personal para el proceso de formación de profesores.

6. Oportunidades

Existen experiencias en el nivel superior que muestran resultados prometedores en la práctica de una docencia interdisciplinar, mediante el modelo de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, en donde se puede observar que éste es un camino ideal para la impartición de las asignaturas de matemáticas, pues ofrece aplicaciones que no son artificiales, sino al contrario, son del interés del alumno. Si el estudiante realmente tiene gusto por su carrera, encuentra en las ciencias básicas contextualizadas no solamente necesidad de ellas, sino también un profundo gusto por las mismas y gran interés por su dominio (Camarena, 2002).

El uso de este modelo genera la necesidad de que los docentes con formación de físicos, químicos o matemáticos, se preparen más en las demás disciplinas del área en donde laboran. Esto se puede resolver mediante procesos conjuntos de formación, que favorezcan la ampliación de la cultura científica de los profesores.

7. Conclusiones

Uno de los elementos importantes de la experiencia fue la evaluación de los profesores alumnos mediante estudio de casos a partir del análisis de las actividades en la formación conjunta de profesores de matemáticas, física y química, y de los productos elaborados por ellos durante el proceso de formación (González, 2003). Del análisis se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Los profesores-alumnos, al revisar propuestas de actividades de aprendizaje realizadas por otra persona, fueron capaces de identificar un mayor número y una gran variedad de oportunidades de aprendizaje que se podrían lograr con ellas, principalmente aquellas que no aparecen de manera explícita en la redacción, sino que se han de inferir.

Los profesores-alumnos fueron incluyendo en sus planes de clase cada vez más actividades de aprendizaje diversas, en las que se utilizan conceptos de diferentes campos disciplinares, para favorecer la formación de sus estudiantes. Principalmente incluyeron oportunidades para que los estudiantes desarrollen habilidades de comunicación; procesos cognitivos; estrategias de investigación y desarrollo de actitudes.

No todos los profesores-alumnos requieren el mismo tiempo para aprender los mismos contenidos. Algunos presentan avances y retrocesos, por lo que hay casos en los que un año resultó insuficiente para estructurar un modelo nuevo coherente, estable en el tiempo, para la elaboración de unidades didácticas.

Referencias y bibliografía

Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.; Giménez, J.; Torra, M. (1996). *Enseñar Matemáticas*, Barcelona, España:Graó.

Caamaño, A. (1991). " Estructura i evolució dels projectes curriculars de Ciències experimentals ", *Butlletí del Collegi de Llicenciats de Catalunya*. Barcelona. (77), 1-8.

Camarena, P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México, pp. 55.

Camarena, P. (2008). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Memorias del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Perú, pp. 2, 5 y 6.

Camarena, P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. En: *Revista Innovación Educativa* Parte I: 2 (10), 22-27 Parte II: 2 (11), 4-11.

García, M.; Santos, M. (2000). El carácter interdisciplinar de la investigación en Dirección Estratégica de la Empresa. En: *Programa Interuniversitario de Doctorado "Nuevas Tendencias en Dirección de Empresas"* Universidad de Burgos, Universidad de Salamanca, Universidad de Valladolid (documento en línea) obtenido el 11 de enero de 2011 de: http://www3.uva.es/empresa/ uploads/dt06_00.pdf, pp. 1-2.

Gheisa, L. (2004). Hacia la integración curricular en la educación superior: reflexiones, necesidades y propuesta para la disciplina Integradora. En: Revista *Iberoamericana de Educación.* No. 34 (2004) (Documento en línea) obtenido el 11 de enero de 2011 de: http://www.rieoei.org/deloslectores/789Ferreira.PDF.

González, L. (2003). *Estabilidad en el aprendizaje del uso de los trabajos prácticos en un proceso de formación de profesores*. Universidad Autónoma de Barcelona. [Documento en línea] en: http://www.tdx.cesca.es/TDX-1021103-172711/index_an.html, pp. 341-342.

González, L. (2004). Estabilidad del aprendizaje y formación de profesores en ciencias. *Revista de Innovación Educativa*. 4 (23), 16.

González, L.; Ruiz, E. (2009). *Evaluación de competencias para la formación integral. Un análisis cualitativo*. Memorias del IV Foro de Investigación educativa D.F., México.

Pérez, D.; Rodríguez, C.; Velázquez, M.; Padrón, L.; Padrón, J. (2010). La interdisciplinariedad: un desafío para la docencia contemporánea. En: *Odiseo. Revista electrónica de pedagogía.* 8 (15). (Documento en línea) obtenido el 11 de enero de 2011 de: http://www.odiseo.com.mx/correos-lector/ interdisciplinariedad-desafio-para-docencia-contemporanea]

Pérez, D.; Rodríguez, C.; Velázquez, M.; Padrón, L.; Padrón, J. (2010) La interdisciplinariedad: un desafío para la docencia contemporánea. En: *Odiseo. Revista electrónica de pedagogía.* 8 (15). (Documento en línea) obtenido el 11 de enero de 2011 de: http://www.odiseo.com.mx/correos-lector/ interdisciplinariedad-desafio-para-docencia-contemporanea

Sanmartí, N. (2002). *La didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria*. Madrid, España: Síntesis, pp. 23-26.

Tiberghien, A; Jossem, E.; Barojas, J. (1998). *Connecting Research in Physics Education with Teacher Education.*International Commission on Physics Education 1997,1998. (documento en línea) obtenido el 17 de marzo de 2011 de: http://www.physics.ohio-sate.edu/˜jossem/ICPE/D3.html

La contribución de la Historia de las Matemáticas a la Formación de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria[1]

Bernard R. Hodgson
Département de mathématiques et de statistique
Université Laval, Québec,
Canada G1K 7P4
bernard.hodgson@mat.ulaval.ca

Resumen[2]

En esta ponencia presento el lugar que la historia de las matemáticas ocupa en los programas de formación de profesores, más concretamente la contribución que esta temática puede aportar a la preparación de profesores de secundaria. Tomando como base la exigencia, cada vez más extendida en muchos países, de integrar elementos culturales e históricos en el curriculum escolar de matemáticas, analizo cómo ese contexto impacta en los programas universitarios de formación de profesores, así como en los departamentos de matemáticas que ofertan cursos de historia de las matemáticas. También presento algunos ejemplos de tópicos matemáticos con sabor histórico, extraídos de mi propia experiencia como formador de futuros profesores de secundaria.

Palabras clave

Formación de profesores, historia de las matemáticas.

Abstract

In this paper, I discuss the place of history of mathematics in teacher education programmes, and more specifically the contribution that this topic may bring to the preparation of secondary school mathematics teachers. Taking as a basis the requirement more and more widespread in many countries of integrating elements of culture and history in the mathematics school curriculum, I examine how such a context impacts on university programmes for teacher education, as well as on the mathematics departments offering courses in the history of mathematics. I also present a few examples, taken from my own teaching to preservice secondary school teachers, of mathematical topics with a historical flavour.

Key words

Teacher preparation, history of mathematics.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. Introducción

En la educación matemática actual, cada vez hay una mayor concienciación del papel que debe jugar la cultura en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Esto se puede considerar parte de una tendencia global de incrementar los aspectos culturales en el curriculum escolar general, que incluye el de matemáticas. De particular interés en esta conexión es el papel específico que la historia de las matemáticas podría o debería ocupar en el horizonte de la educación matemática.

En esta ponencia pretendo examinar los contextos pedagógicos en los que se puede utilizar, de forma útil y provechosa, la historia de las matemáticas, para cubrir las necesidades específicas de los futuros profesores que, a su vez, permitan seguir las tendencias actuales sobre cultura e historia en el curriculum escolar de matemáticas. También deseo considerar un aspecto, posiblemente común a diferentes departamentos de matemáticas de todo el mundo, como es el hecho de que algunos matemáticos son inducidos, *de facto,* a responsabilizarse de la enseñanza de la historia de las matemáticas sin haber recibido una formación específica sobre ese contenido. Será crucial cómo estos compañeros adquieren el soporte necesario para abordar estas expectativas que recaen sobre ellos. Finalmente, ofreceré algunos ejemplos de tópicos históricos que proporcionan ricos contextos para discusiones fructíferas sobre matemáticas, especialmente desde una perspectiva epistemológica, extraídos de mi enseñanza a futuros profesores de secundaria. Los ejemplos escogidos están relacionados con la noción de demostración.

Mis comentarios están basados en mi propia experiencia como matemático que trabaja en la formación de profesores de educación secundaria, en particular en la enseñanza de una asignatura de historia de las matemáticas específica para profesores. Los puntos de vista y ejemplos que se ofrecen provienen de dos presentaciones previas, la primera en la Sixth International Conference on Mathematics Education and Cultural History of Mathematics in the Global Information Society (MECHMI-6) celebrada, en 2009, en Osaka (Japón) (Hodgson, 2009b) y, la otra, en la International Conference on the Socio-Cultural Approach to Mathematics Education que tuvo lugar en Jinhua (China), en 2010 (Hodgson, 2010a). Agradezco esta oportunidad de presentarlos a la comunidad latinoamericana en el contexto del XIII CIAEM.

2. Historia de las matemáticas y el curriculum de matemáticas

En las últimas décadas, parece haber una fuerte tendencia en la evolución de los curricula escolares hacia la introducción de componentes relacionados, específicamente, con aspectos culturales. Lo explicaré mediante ejemplos con los que estoy familiarizado, en concreto me referiré a los actuales curricula oficiales de matemáticas para educación primaria y secundaria en la provincia de Quebec (Canadá) –estos dos programas educativos se implementaron en la última década.

En el curriculum escolar de matemáticas de primaria se enumera, explícitamente, un conjunto de "Referencias Culturales"[3] que, además del llamado "Conocimiento Fundamental", forman parte integral del programa –ésta es una característica nueva en relación con versiones previas del curriculum. Estos ingredientes culturales tienen un componente histórico no despreciable que tiene que ver con tópicos como números (origen de los números, desarrollo de sistemas de representación de números, relaciones interdisciplinares con geografía, ciencia, etc.), figuras geométricas (relaciones con el arte, la decoración, la arquitectura, etc.) o medida (aspectos históricos del sistema de medidas, símbolos).

Los requisitos del curriculum de educación secundaria son mucho más ambiciosos y explícitos, tanto en el alcance como en la profundidad que se espera que consigan los profesores relacionada con esas "Referencias Culturales". Como consecuencia, su descripción en el documento oficial del curriculum de matemáticas llena unas cuantas páginas y proporciona bastantes sugerencias específicas sobre los temas que se pueden introducir, relaciones que se pueden hacer (históricas o interdisciplinares), periodos históricos que se pueden discutir o matemáticos que se pueden mencionar. Estos aspectos están relacionados con las principales partes del curriculum (aritmética y álgebra, geometría, trigonometría, combinatoria, estadística y probabilidad). Entre las justificaciones básicas que se presentan, en esos documentos, de dichas referencias culturales, se incluye el hecho de que las matemáticas forman parte de la herencia de la humanidad, que poseen una larga y rica historia y que su evolución ha estado directa o indirectamente relacionada con las necesidades de las diferentes sociedades. De esa forma se anima a que los profesores consideren la importancia de incorporar una dimensión epistemológica en las actividades de aprendizaje para ofrecer una ventana al pasado y el presente y dar oportunidades a los alumnos de apreciar mejor las matemáticas, tanto en sí mismas como disciplina, como en relación con su papel en la sociedad.

No sorprende que las guías educativas oficiales de los programas universitarios, para profesores de educación primaria y secundaria, subrayen la importancia de formarlos introduciendo la perspectiva cultural en su trabajo con los alumnos. La cultura se presenta "como un tipo de *sensibilidad* que permite definir una relación con el mundo, con nosotros mismos y con otros"[4] (Ministère de l'Éducation, 2001). El "profesor culto", cuya responsabilidad es facilitar que los alumnos sean "personas cultas", se considera poseedor de cultura, su heredero, crítico e intérprete. Su papel es facilitar la construcción del conocimiento por los alumnos, para lo cual debe ser sensible a la historia de un concepto concreto o de un aspecto del conocimiento.

La recomendación oficial del ministerio de educación fue invitar a que los formadores de profesores relacionaran su proceso de enseñanza con la cultura, sin añadir "asignaturas culturales" a los programas de formación de profesores. Éste es precisamente el enfoque elegido, en mi universidad para la preparación de profesores de primaria, principalmente debido a la imposibilidad de añadir nuevos créditos a los ya de por sí saturados programas. Referido al componente matemático, los ingredientes culturales se consideran en dos asignaturas obligatorias para futuros profesores de primaria. En

[3] "Repères culturels" en francés

[4] "la culture comme *raison sensible* qui nous fait entrer en relation avec le monde, soi-même et autrui".

aritmética se incluyen actividades sobre el desarrollo de los sistemas de numeración así como discusiones sobre la historia y especificidad de diferentes tipos de números (números naturales, negativos, racionales, irracionales). La asignatura de geometría ofrece varios contextos para trabajar los fenómenos geométricos, por ejemplo, en relación con la geometría que poseen ciertos objetos en el arte (pinturas, etc.), las simetrías que se pueden observar en el entorno (edificios, puentes, etc.) o el estudio de frisos y teselas. Discusiones sobre rigor y argumentación también forman parte del programa.

En relación con las necesidades de los profesores de secundaria, la mayoría de las universidades de Quebec incluyeron una asignatura de historia de las matemáticas en el programa de formación de profesores. Éste es el caso de mi universidad donde la ofrecimos, específicamente, a los profesores de secundaria, en el sentido de que son los únicos alumnos que la cursan. Su objetivo, como se indica explícitamente en su título, es proporcionar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre la evolución de ideas matemáticas, así como desarrollar una profunda y amplia visión de este campo observando algunas de sus "grandes corrientes". Esta asignatura se concibe como una piedra angular que se ofrece en el último semestre del programa y pretende iluminar el origen de algunas nociones matemáticas del nivel de secundaria para permitir apreciar su motivación, lugar e importancia en las matemáticas. A los estudiantes se les invita a "vivenciar" los conceptos matemáticos al situarlos en su contexto –histórico, científico, sociológico– problemas y situaciones que conducen al desarrollo de las nociones matemáticas fundamentales. Un objetivo específico del curso, como reacción a una creencia ampliamente difundida, es permitir que los alumnos se den cuenta de que las matemáticas, aunque surgen del esfuerzo humano y tienen un brillante pasado, están lejos de estar "terminadas" sino fuertemente inmersas en el mundo actual y su evolución. También se espera que el curso permita, a los futuros profesores, desarrollar herramientas y marcos de referencia para la reflexión personal sobre el papel y el lugar que la historia de las matemáticas puede tener en la educación secundaria.

3. Retos departamentales relacionados con la enseñanza de la historia

Entre las asignaturas que, eventualmente, típico miembro de un departamento universitario de matemáticas puede enseñar, probablemente la historia de las matemáticas tiene un sabor peculiar. Aunque no se puede esperar que todos los matemáticos tengan interés o sean expertos en ese tema, es importante identificar las condiciones que permiten que un departamento cumpla adecuadamente con sus obligaciones en relación con ella y proporcione soporte suficiente a sus profesores.

Una dificultad básica, como se mencionó en la Introducción, es la posible ausencia de conocimiento formal de la historia de las matemáticas por un potencial profesor de universidad. Y esto es, de alguna forma, diferente de lo que suele ocurrir en otros campos de conocimiento. Por ejemplo, cuando un algebrista enseña una asignatura de análisis, ese conocimiento ya lo ha explorado como matemático (al menos, como estudiante). Es posible que no posea el nivel de un investigador en ese tema pero no es un extraño a ese conocimiento y, dependiendo del nivel específico de la asignatura que debe enseñar, puede, fácilmente, estar en una posición razonable para satisfacer cualquier expectativa. Esto puede ser bastante diferente con la historia de las matemáticas puesto que es un conocimiento del que se suele estar más distanciado. La mayoría de los que se acercan a la historia de las matemáticas sin ser profesionales, tienen que empezar desde el principio –algunas veces, incluso, respecto de los aspectos globales de "cultura general" en los que la asignatura está inmersa.

Hay otras dificultades intrínsecamente relacionadas con el propio campo de conocimiento. Mis comentarios, sobre este aspecto, se basan principalmente en mi experiencia personal, es decir, en la evolución que sufrí cuando mi conexión con la historia pasó de un interés personal, esencialmente cultural, a otro relacionado con organizar un conocimiento que formara la espina dorsal de una asignatura. La historia de las matemáticas es un campo extremadamente vasto que me obligó a seleccionar el contenido e identificar criterios para que fuera congruente con las expectativas de la audiencia a la que iba dirigida. La enseñanza de una asignatura estándar, como el álgebra lineal, no suele obligar al mismo nivel de selección. El "tipo" de conocimiento que se enseña tampoco es el mismo que el de una asignatura de matemática tradicional. Mientras que, en mi opinión, aunque la asignatura de historia de las matemáticas debe, evidentemente, tener un fuerte contenido matemático, puede no ser, y debería no ser, "sólo" matemáticas. Es decir, un aspecto crucial, en ella, es apreciar las matemáticas en diferentes momentos de su evolución, atestiguar que los conceptos emergen en un contexto cultural, social y científico dado, y apreciar las "grandes ideas" que forman un hilo conductor a lo largo de la evolución de las matemáticas a través de los tiempos. Finalmente, evaluar una asignatura de historia de las matemáticas representa un reto sustancial usualmente más complicado que en otras asignaturas de matemáticas con las que el profesorado está acostumbrado. Dependiendo del énfasis, es preciso valorar las dimensiones culturales y globales para las que un examen tradicional puede no ser el mejor instrumento.

Otra dificultad que deseo mencionar está relacionada con lo que llamaría aceptación (o falta de aceptación) de la historia de las matemáticas como un campo en el que un determinado departamento de matemáticas debería sentirse responsable. Esto tiene un impacto obvio en el apoyo que proporcionará a los profesores involucrados, o que pretendan involucrarse, en su enseñanza. Aquí se puede establecer una llamativa analogía con el nivel de aceptación y apoyo de una Facultad de matemáticas a la formación de profesores, como se discute en (Hodgson, 2001). La cuestión básica es si ese compromiso (en la enseñanza a profesores o en la de la historia) se considera por el departamento como un trabajo *bona fide* en matemáticas al mismo nivel que cuando se interactúa con alumnos de ingeniería o especialistas en matemáticas –por no referirse a la investigación matemática per se. Aunque algunos indicadores (por ejemplo, reconocimiento de los compañeros, promoción, subvenciones, etc.) parecen sugerir que la situación está muy a menudo alejada de la ideal en este sentido, otros señalan que la mentalidad está evolucionando, aunque lentamente.

4. Posibles recursos para los que enseñan historia de las matemáticas

El surgimiento y consolidación de la didáctica de la matemática como un campo de investigación y especialización en sí mismo es un elemento crucial en el desarrollo de las reflexiones que se llevan haciendo en los últimos 50 años sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva internacional. En particular la Comisión Internacional de Educación Matemática (International Commission on Mathematical Instruction / ICMI) ha atestiguado, acompañado y, en algunos momentos, incluso fomentado esa evolución (Menghini *et al.* 2008 o Hodgson 2009a), que ha pasado de centrarse en objetivos nacionales de educación matemática, en los primeros momentos de existencia del ICMI a principios del siglo XX, a objetivos relacionados con las necesidades de los individuos –tanto alumnos como profesores. Este cambio ha conllevado el desarrollo de un estudio más sistemático del papel de la historia de las matemáticas en el contexto pedagógico y su impacto potencial en el alumno, así como la publicación de abundante literatura sobre este tema.

En el marco del ICMI, por ejemplo, el *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) se afilió al ICMI en 1976 y desde entonces, regularmente, se han propuesto y organizado diferentes actividades dedicadas al papel e impacto de la historia de las matemáticas en entornos pedagógicos. Por ejemplo, además de los "encuentros satélite" celebrados con ocasión de la celebración de las sucesivas ediciones del Congreso Internacional de Educación Matemática (International Congress on Mathematical Education / ICME), cada cuatro años, el HPM también está apoyando, en Europa, la European Summer University (ESU) sobre Historia y Epistemología de la Educación, que también se celebra cada cuatro años. Las publicaciones resultantes de tales actividades del HPM (ver entre otras Katz, 2000) contienen un rico material del cual, un recién llegado que vaya a encargarse de la enseñanza de la historia, seguramente puede beneficiarse.

Una acción más específica y sistemática del ICMI fue la organización de un Study sobre el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Su décimo ICMI Study fue "conceived in the early 1990s in order to tease out the different aspects of the relations between history and pedagogy of mathematics, in recognition of how the endeavours of (…) the HPM Study Group had encouraged and reflected a climate of greater international interest in the value of history of mathematics for mathematics educators, teachers and learners"[5] (Fauvel & van Maanen, 2000, p. xiv). El volumen resultante del estudio (Fauvel & van Maanen, 2000) contiene valiosa información sobre este tópico, especialmente en relación con el caso específico de la formación de profesores. Una revisión del Study y sus resultados, que vale la pena leer, fue realizada por Furinghetti (2005). También se pueden encontrar comentarios sobre ese Study en mi documento (Hodgson, 2009b), donde resalté muchos ejemplos concretos de diferentes países que aparecen en sus páginas y que podrían inspirar a los que se animen a incluir el componente histórico en la formación de profesores.

[5] Concebido, a principios de los noventa, para desentrañar los diferentes aspectos de las relaciones entre la historia y la pedagogía de las matemáticas, en reconocimiento de cómo los esfuerzos (…) del HPM Study Group habían animado y reflejado un clima de mayor interés internacional hacia el valor de la historia de las matemáticas para los educadores matemáticos, profesores y alumnos.

La información que esas fuentes proporcionan es acorde al fuerte consenso que se observa en la investigación actual en educación matemática sobre la importancia del "componente del profesor" entre los muchos factores que influyen en el desarrollo de la educación matemática en términos generales y, más específicamente, la implementación actual en el aula de las reformas e innovaciones propuestas. Una cita del informe sobre el trabajo del Survey Team, presentado por Sfard en su conferencia plenaria en el ICME-10, puede ser adecuada en este contexto:

> The first thing I wish to say is that I am pleased to find out that the last few years have been *the era of the teacher* as the almost uncontested focus of researchers' attention. This is quite a change with respect to the last two decades of the 20th century which were almost exclusively *the era of the learner*. And we have certainly come a long way since *the era of the curriculum*, roughly corresponding to the 1960s and 1970s when the main players in the educational game were the developer and the textbook. I consider the re-conceptualization of the relationship between the teacher and the researcher a big leap toward research that plays a genuine role in shaping and improving practice. (Sfard, 2008 p. 90)

Otra referencia reciente de la literatura, sobre el papel de la historia de las matemáticas en la preparación de los profesores, es el artículo de Furinghetti (2007), donde el álgebra se utiliza como un estudio de caso para mostrar cómo la historia interviene en la construcción de secuencias de enseñanza. El interesante punto de vista de la autora es que los futuros profesores necesitan ver los tópicos que enseñarán de una manera distinta y que la historia puede ser una ayuda para proporcionar un contexto en esa visión renovada. Se debe advertir que, en su aproximación, la historia de las matemáticas no se introduce *per se* en el programa de formación de profesores sino que es un "mediador del conocimiento para la enseñanza" (Furinghetti, 2007, p. 133).

5. Algunos apuntes sobre el papel de la demostración inspirados en la historia de las matemáticas

Elegir "buenos" tópicos para una asignatura de historia de las matemáticas no es siempre una cuestión trivial, especialmente cuando trata de considerar las necesidades de los profesores. En esta sección discutiré tres ejemplos de tópicos extraídos de la historia de las matemáticas que desarrollé durante mi enseñanza a futuros profesores de educación secundaria y que, no sólo considero adecuados, sino importantes para la formación de esos profesores. Estos tres ejemplos se basan en el empleo de fuentes originales en el aula. Ese acercamiento a los textos originales, sea con futuros profesores o con alumnos, se presentó en el ICMI Study 10 como "uno de los más valiosos, tanto en los colegios para los alumnos como en las instituciones de formación de profesores"[6] pero ciertamente es muy ambicioso y difícil. No es fácil identificar fuentes originales

[6] One of the most rewarding for students both at school and at teacher training institution (Fauvel & van Maanen, 2000 p. xvii)

que sean accesibles a los alumnos –a veces los obstáculos lingüísticos son considerables por el estilo y el contexto de la escritura–, que se puedan trabajar en un tiempo razonable y que sean herramientas útiles para ayudar a que los alumnos progresen en su aprendizaje. Pero se puede hacer de forma provechosa, como se muestra claramente en la amplia literatura que se ha desarrollado (ver por ejemplo el Capítulo 9 de Fauvel & van Maanen, 2000).

Los ejemplos que considero a continuación se han presentado en mi documento (Hodgson, 2010a) y están relacionados con la noción de demostración –probar la validez de un teorema dado, probar la corrección de un algoritmo dado (o fórmula). Creo que muestran gráficamente cómo la historia puede ayudar a reflexionar sobre el papel de la demostración y los diferentes entornos en los que puede tener lugar. También sugieren el tipo de desarrollo histórico-matemático que podría ser apropiado para profesores.

Empezaré con el importante descubrimiento, hace poco más de un siglo, relacionado con 'el Maestro de los Maestros', Arquímedes (287-212 a. de C.), y se refiere al tema de la demostración desde una perspectiva general.

5.1. Sobre *El Método* de Arquímedes

El tratado de Arquímedes, *El Método*, cuya existencia era conocida a través de otros trabajos, fue sorprendentemente descubierto en la biblioteca de un monasterio griego en Constantinopla a finales del siglo XIX. El manuscrito estaba en un palimpsesto, es decir, un pergamino reutilizado que fue descifrado en 1906 y publicado en 1912 (Heath, 1953). El palimpsesto, que recientemente ha recibido mucha atención cuando se vendió en una subasta en 1998, es actualmente objeto de un importante proyecto de investigación. (Más información sobre el palimpsesto se puede encontrar en (Netz & Noel, 2007) y en la página web *www.archimedespalimpsest.org/*.)

Un interés fundamental de *El Método* es que, en él, Arquímedes presenta un método, basado en los principios de la mecánica, que usó para descubrir muchos importantes resultados sobre áreas y volúmenes. Arquímedes explícitamente afirma que no considera que dichos resultados estén demostrados con su método. Pero hace hincapié en que, conocer el resultado que debe ser probado, es de gran ayuda cuando hay que realizar argumentos rigurosos.

En una parte del prefacio de *El Método*, dirigido a Eratóstenes, Arquímedes introduce el contenido de este tratado en los siguientes términos:

> Saludo de Arquímedes a Eratóstenes. (. . .)
> Viendo en ti (. . .) un hombre de considerable importancia en Filosofía, y un admirador [de la indagación matemática], considero adecuado escribir para ti y explicar con detalle (. . .) la peculiaridad de cierto método con el que es posible investigar algunas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica (. . .) [C]iertas cosas se clarificaron para mí primero por el método mecánico aunque después tuvieron que demostrarse geométricamente puesto que dicho método no suministra una verdadera demostración. Pero, naturalmente, una vez adquirido algún conocimiento del asunto en cuestión, es más fácil desarrollar la demostración que buscarla sin ningún conocimiento previo. (Traducido de Heath, 1953, Supplemento p. 13)

Después Arquímedes presenta el primer teorema que obtuvo por medio de su método de descubrimiento, esto es, que el área de un segmento de parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito en ella. Su discusión se basa en el siguiente sistema mecánico (Heath, 1953, Supplemento p. 16), donde K es el punto de apoyo de la palanca CH, la línea PO del segmento de parábola ABC se traslada TG, con centro de gravedad H, y luego se equilibra con MO, con centro de gravedad en N (Heath, 1953, Supplemento pp. 15-17, o Katz, 2009 pp. 104-105.)

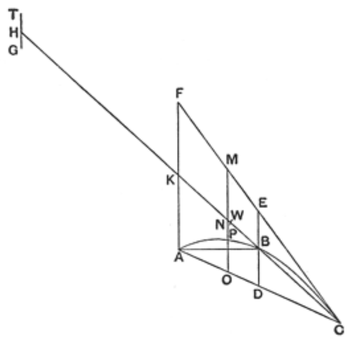


Figura 1

Arquímedes concluye la discusión con las siguientes observaciones:

> Ahora bien, lo que aquí se establece no ha sido verdaderamente demostrado por el argumento empleado; pero ese argumento parece indicar que la conclusión es cierta. Entonces, como el teorema no está demostrado pero, al mismo tiempo, sospechando que la conclusión es cierta, recurriremos a la demostración geométrica que yo mismo descubrí y ya publiqué. (Traducido de Heath, 1953, Supplemento pp. 17-18)

Es verdaderamente fascinante dar testimonio de la aguda distinción de Arquímedes entre un argumento heurístico que permite alcanzar una cierta conclusión, sugiriendo que sea cierta, y una demostración *bona fide* de tal conclusión (Es posible utilizar un divertido juego de palabras en francés para esta conexión, para distinguir entre "Archimède qui *trouve*" y "Archimède qui *prouve*").

Además del interés histórico intrínseco del descubrimiento del texto de *El Método*, este episodio proporciona una maravillosa oportunidad para una rica discusión con los estudiantes sobre la noción de demostración, su papel y estatus en el contexto matemático y las variadas formas que puede tomar. Es de gran interés ver a Arquímedes juzgándose a si mismo al decir que "el teorema no está demostrado" por su método mecánico y haciendo hincapié en la necesidad de proporcionar una demostración adecuada, esto es, un argumento que respete los criterios comúnmente aceptados sobre cómo debe ser una demostración. Por otro lado, podemos ver a Arquímedes teniendo en mente lo que es una demostración, es decir, un cierto "acto social" que tiene lugar en una cultura y en un marco científico determinados, es decir, un argumento que debe ser aceptado como válido por un grupo de personas. Por eso llegamos al convencimiento de que este aspecto puede ser provechoso para nuestros estudiantes y, en particular, para los futuros profesores.

(Debería tenerse en cuenta que la "demostración geométrica" mencionada por Arquímedes aparece como proposición final de su tratado *Cuadratura de la Parábola* (Heath, 1953). Esta demostración se basa en la aproximación del área del segmento de parábola por polígonos inscritos usando lo que se conoce como "método de exhausción" juntamente con una doble *reductio ad absurdum* –todo ello siguiendo los estándares de los griegos de su tiempo.)

5.2. El Teorema de Pitágoras

Mis siguientes ejemplos están relacionados con contextos en los que se obtienen algunos resultados matemáticos de forma visual o, al menos, con un fuerte matiz geométrico. Por supuesto es importante recalcar hasta qué punto tales demostraciones, eventualmente "demostraciones sin palabras" como también se las conoce, son aceptables, pertinentes, útiles e incluso preferibles a otro tipo de demostraciones.

La historia de las matemáticas, en particular su conexión con el análisis, muestra muchos casos de reticencia a confiar en argumentos visuales. De hecho, a veces, incluso se puede evidenciar una total devaluación del papel de las figuras. Quizás el que mejor expresó este punto de vista fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) quien orgullosamente anunció, en la introducción de su *Mécanique analytique* (1788), que no había figuras en su libro:

> No se encontrarán figuras en este libro. El método que aquí presento no requiere construcciones ni razonamiento geométrico o mecánico, sino sólo operaciones algebraicas desarrolladas de forma regular y uniforme. (Lagrange, 1965 pp. iii-iv)[7]

Para Lagrange, la desaparición de las figuras era una consecuencia de la preeminencia dada al simbolismo algebraico frente al geométrico. Ese criterio dominó enérgicamente el contexto matemático hasta tal punto que un resultado geométrico, como el Teorema de Pitágoras, se suele presentar en un marco algebraico un tanto distante de sus orígenes geométricos. Este es un sorprendente ejemplo de la distinción entre "historia" y "herencia" discutido por Grattan-Guinness (Grattan-Guinness, 2004 pp. 2-3).

Es interesante volver a parafrasear a Euclides (c. 325-265 BCE) en sus *Elementos*, cuando establece el Teorema de Pitágoras (Libro I, Proposición 47):

> En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman el triángulo rectángulo. (Traducido de Heath, 1956).

[7] On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme.

De crucial importancia es el uso de la palabra "sobre" –los objetos matemáticos que Euclides discute son geométricos, es decir "los cuadrados SOBRE los lados" de un triángulo básico, no son los (algebraicos) "cuadrados DE los lados". Es bastante natural y tentador, dentro de la "herencia" de la tradición, discutida en (Grattan-Guinness, 2004), incluir las letras a, b y c para los lados del triángulo y convertir el Teorema de Pitágoras en su versión algebraica: $a^2 + b^2 = c^2$. Esto conduce a una posible demostración del teorema donde el tratamiento algebraico vuelve a ser preeminente: el siguiente cuadrado, de lado $a + b$ y, por lo tanto, de área $a^2 + b^2 + 2ab$, está formado por cuatro triángulos rectángulos *a-b-c*, además de un cuadrado de lado c, de donde $a^2 + b^2 = c^2$.

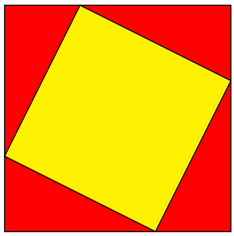


Figura 2

Una aproximación diferente al Teorema de Pitágoras, que se puede interpretar en términos de la disección del cuadrado construido sobre la hipotenusa en el cuadrado de lado $(a - b)$ y cuatro triángulos, se puede encontrar en la antigua literatura China, precisamente en el tratado clásico *El Gnomon del Zhou* (*Zhoubi suanjing*) que se remonta a la Dinastía Han (entre -206 y 220) y que fue comentado por Zhao Shuang en el siglo III –ver (Katz, 2009 p. 204). La siguiente figura famosa fue extraída de la edición de 1213 (Chemla, 2005).

Figura 3

En esta última figura también se puede ver otra disección del cuadrado sobre la hipotenusa que, posiblemente, transmite mejor el sabor geométrico original del Teorema de Pitágoras, esto es, la combinación de dos cuadrados para formar un tercero con área igual a la de los dos cuadrados dados. Esta interpretación particular es incluso más clara en la siguiente figura, del matemático árabe Thabit Ibn Qurra (836-901).

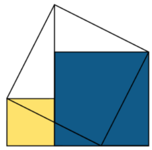


Figura 4

De la misma forma, la demostración propuesta por Euclides en su Proposición I.47, que surge del siguiente diagrama, también es más cercana al aspecto geométrico que nos interesa.

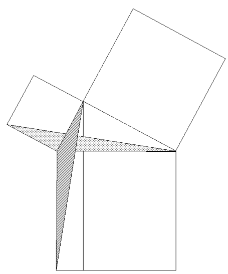


Figura 5

Esta figura se obtiene trazando la perpendicular a la hipotenusa desde el vértice del triángulo rectángulo y, después, dividiendo el cuadrado sobre la hipotenusa en dos rectángulos. La demostración de Euclides consiste en probar que cada cuadrado construido sobre los lados que forman el ángulo recto es igual (en área) a uno de esos rectángulos. Por ejemplo, los dos triángulos sombreados en la figura anterior, que son congruentes, juegan el papel de "intermediario" entre el cuadrado más pequeño y el rectángulo más pequeño dentro del cuadrado construido sobre la hipotenusa –cada triángulo es la mitad del área del cuadrilátero correspondiente.

La demostración de Euclides, o una pequeña variante de la suya, puede ser fácilmente trasformada en una "demostrada sin palabras" animada.

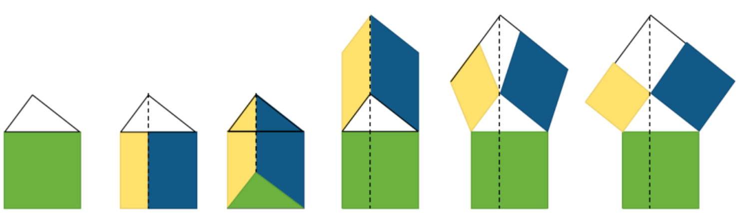


Figura 6

De especial interés, cuando uno desea ver el cuadrado construido sobre la hipotenusa a partir de la combinación de los dos cuadrados construidos sobre los lados, es la ingeniosa demostración-disección propuesta por Henry Perigal (1801-1898), un aficionado matemático británico. Dibujando primero una línea paralela a la hipotenusa a través del centro del mayor cuadrado construido sobre los catetos, y luego una perpendicular a ésta, se divide el cuadrado en cuatro trozos que, cuando se añaden adecuadamente al cuadrado más pequeño, proporcionan un embaldosado del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

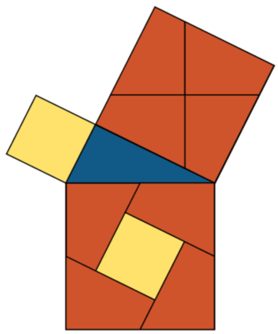


Figura 7

Otras reflexiones sobre el Teorema de Pitágoras, entendido como suma de cuadrados, se pueden encontrar en (Hodgson, 2010b).

5.3. Extrayendo raíces cuadradas

El interés en extraer raíces cuadradas en matemáticas ha sido creciente desde tiempos remotos. Una posible encapsulación de este tópico se puede hacer con el siguiente algoritmo, que se ha enseñado en los colegios de todo el mundo hasta hace pocas décadas. El cálculo que se muestra corresponde a $\sqrt{55225} = 235$.

$$\begin{array}{ccc|l}
5 & \cancel{52} & \cancel{25} & 235 \\ \cline{4-4}
4 & & & \cancel{2 \times 2} \\ \cline{1-1}
1 & 52 & & \cancel{43 \times 3} \\
1 & 29 & & 465 \times 5 \\ \cline{1-2}
 & 23 & 25 & \\
 & 23 & 25 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

No sorprende que esa manipulación se enmarque en un contexto puramente aritmético. Sería posible justificar este algoritmo utilizando la identidad algebraica $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$. Sin embargo, las mismas palabras empleadas ("raíces cuadradas") sugieren que un marco geométrico que incluya algunos cuadrados puede ser útil.

La extracción de raíces cuadradas es un tópico tratado en otro trabajo matemático chino, *Nueve Capítulos del Arte Matemático* (Shen; Crossley & Lun, 1999), también escrito en tiempos de la Dinastía Han (entre -206 y 220). El comentario hecho en el siglo III por Liu Hui sobre esta operación (Capítulo Cuatro, "Pequeña anchura", problema 12) está basado en una bella figura geométrica[8] que aclara los principios que subyacen a este algoritmo y, en particular, los extraños pasos en los que las raíces parciales se tienen que doblar (como 23 para obtener 46 –ver la última línea en la parte derecha de la tabla). Naturalmente esto es una consecuencia de la presencia del término $2uv$ en el desarrollo de $(u+v)^2$. Transferir la discusión a un marco geométrico y ver los dos rectángulos en cada paso, como se observa en el siguiente diagrama, puede ser una experiencia provechosa. (Este diagrama se aplica al cálculo de una raíz cuadrada de tres dígitos, $abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. El cálculo de $\sqrt{55225}$ es el mismo ejemplo discutido por Liu Hui.)

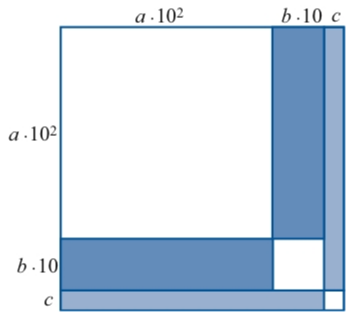


Figura 8

Diagramas similares se pueden encontrar en la literatura, por ejemplo, en los comentarios de Theon de Alejandría sobre el *Almagesto* de Ptolomeo, a finales del siglo IV (Chabert; *et al.*; 1994). Se debería advertir que los cálculos de raíces cúbicas, que están basados en diagramas análogos 3D, también se abordan en los *Nueve Capítulos* (Shen; Crossley & Lun, 1999 pp. 218 *sqq*).

Mientras que el algoritmo aritmético anteriormente presentado permite calcular fácilmente raíces cuadradas con la exactitud deseada, su eficiencia está lejos de ser óptima. De hecho, cuando se compara con el conocido método usado por Herón de Alejandría, en el siglo I, uno se pregunta por qué éste último no consiguió implantarse en los currículos escolares como ocurrió con la primera.

En el Libro I de su *Métrica*, Herón propone como método de cálculo de $\sqrt{k}$ la expresión $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$. Luego calcula $\sqrt{720}$ como resultado de aplicar a un triángulo de lados 7, 8, 9 la fórmula que lleva su nombre para obtener el área de un triángulo en función de sus lados. En el texto, al explicar su método para obtener la raíz, Herón no solo

[8] De acuerdo con (Shen; Crossley & Lun, 1999), la regla presentada en los *Nueve Capítulos* "es el primer registro en la historia de las matemática de extracción de raíces cuadradas en el sistema decimal" (p. 209). El diagrama coloreado al que Liu Hui se refiere en su comentario se ha perdido pero fue preservado de una generación a otra durante mucho tiempo. Una figura similar a la de aquí se presenta se puede encontrar en la *Gran Enciclopedia del Reinado de Yongle (Yongle Dadian),* de inicios del siglo XV, donde aparece un trabajo de Yang Hui sobre los *Nueve Capítulos* de 1261. De acuerdo con (Lam & Ang, 2004 p. 107), éste es el diagrama sobre raíces cuadradas más antiguo que existe en la literatura china.

describe los cálculos realizados paso a paso, sino que también introduce explícitamente la idea de reiterar el proceso para obtener una mejor aproximación. Ver el texto Herón en (Heath, 1981 p. 324).

No es conocido cómo Herón obtuvo el método anterior para calcular raíces cuadradas. Quizás forme simplemente parte del "folklore matemático" de su tiempo, que posiblemente data de la época de Arquímedes. Pero es interesante subrayar que, presumiblemente, un método usado por los matemáticos mesopotámicos para calcular raíces cuadradas –"un método del que hay evidencias textuales", por usar las palabras de Katz (2009 p.18)– puede estar relacionado con el algoritmo de Herón para raíces cuadradas.

Considerando un cuadrado de lado a, que forma parte de un cuadrado de área k, se puede encontrar una mejor aproximación de $\sqrt{k}$ diseccionando el gnomon del área $b = k - a^2$ (esto es, la forma L-inversa) en dos rectángulos y un cuadrado. Despreciando este "pequeño" cuadrado (de lado $c = \sqrt{k} - a$), se puede aproximar el lado c de los rectángulos restantes por medio de $\frac{b}{2a}$. De hecho, la expresión $a + \frac{b}{2a}$ se usó durante siglos como una aproximación de $\sqrt{a^2 + b}$ (con resultados análogos para $\sqrt{a^2 - b}$, donde esta vez se considera un cuadrado de lado a que contiene a un cuadrado de área k).

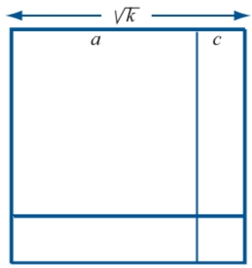


Figura 9

Aunque las manipulaciones algebraicas necesarias no eran accesibles para los matemáticos mesopotámicos o griegos, se debe resaltar que la expresión $a + \frac{b}{2a} = a + \frac{k-a^2}{2a}$ se puede reducir trivialmente a la fórmula de Herón, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$. Lo que pretendo mostrar es que, a pesar de lo anacrónica que puede ser esta visión (una "herencia" o "presentism" en el mejor de los casos), el estilo mesopotámico previo de los argumentos geométricos-algebraicos que conducen a la fórmula de Herón para raíces cuadradas arrojan una visión interesante sobre el conocido algoritmo.

La eficiencia excepcional del algoritmo de Herón se puede analizar, de forma provechosa, considerándola como un caso particular del conocido método de Newton-Raphson en el que se establece la convergencia cuadrática.

6. Conclusión

En su revisión del ICMI Study 10 (Furinghetti, 2005 p. 370) subraya la "falta de conocimiento histórico" de los que enseñan –ya sea a futuros profesores en la universidad o a estudiantes en la escuela– como "un gran obstáculo para el uso de la historia [de las matemáticas] en la enseñanza".

Mi objetivo principal, cuando enseño historia de las matemáticas a futuros profesores de educación secundaria, es permitirles desarrollar un reconocimiento y experiencia (congruente con su contexto de enseñanza) del papel que la historia puede jugar en su propia enseñanza. Ellos serán los que deberán decidir cómo usar esa visión si consideran que les puede ayudar en su recorrido matemático con sus alumnos. Pero, para que esto ocurra, necesitan no sólo ser conscientes del potencial papel de la historia, sino también alcanzar un alto nivel de autonomía y confianza –como es el caso, naturalmente, de cualquier otro aspecto de sus acciones profesionales– para ser capaces de tomar decisiones pedagógicas. Es, por ello, esencial que, durante su formación universitaria perciban las posibilidades (y limitaciones) del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto no puede suceder a menos que los departamentos de matemáticas responsables de la formación de profesores vean la historia de las matemáticas como una parte *bona fide* de su misión y responsabilidad. Es justo decir que, en general, probablemente se necesita mejorar en ese aspecto –aunque actualmente seamos testigos de que la historia de las matemáticas está siendo mejor aceptada y promocionada en los círculos matemáticos y educativos.

Agradecimientos

El autor está profundamente agradecido a Mª Teresa González Astudillo y José María Chamoso Sánchez por su amabilidad al traducir este manuscrito.

Referencias

Chabert, Jean-Luc ; et al. (1994) *Histoire d'algorithmes: Du caillou à la puce*. Paris: Belin. (Traducción al inglés: A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip. New York: Springer, 1999.)

Chemla, Karine (2005) Geometrical figures and generality in ancient China and beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra. *Science in Context* 18, 123-166.

Fauvel, John; van Maanen, Jan (Eds) (2000) *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. (New ICMI Study Series, vol. 6) Dordrecht-Boston-London: Kluwer.

Furinghetti, Fulvia (2005) A report on the ICMI Study: "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics". *L'Enseignement Mathématique* 51, 365-372.

Furinghetti, Fulvia (2007) Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 66, 131-143.

Grattan-Guinness, Ivor (2004) History of heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *American Mathematical Monthly* 111, 1-12.

Heath, Thomas L. (1953) *The Works of Archimedes.* (With a Supplement: *The Method of Archimedes.*) New York: Dover. (Nueva publicación de las ediciones de 1897 y 1912 por Cambridge University Press)

Heath, Thomas L. (1956) *The Thirteen Books of Euclid?s Elements,* vol. 1. (2nd edition) New York: Dover. (Nueva publicación por Cambridge University Press de la edición de 1926)

Heath, Thomas L. (1981) *A History of Greek Mathematics*, vol. II: *From Aristarchus to Diophantus*. New York: Dover. (Nueva publicación por Clarendon Press, Oxford de la edición de 1926)

Hodgson, Bernard R. (2001) The mathematical education of school teachers: role and responsibilities of university mathematicians. In: D. Holton, (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level – An ICMI Study*. (New ICMI Study Series, vol. 7), pp. 501-518. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.

Hodgson, Bernard R. (2009a) ICMI in the post-Freudenthal era: moments in the history of mathematics education from an international perspective. In: Kristín Bjarnadóttir, Fulvia Furinghetti and Gert Schubring, (Eds.) *Dig Where You Stand. Proceedings of the Conference on On-Going Research in the History of Mathematics Education* (Garðabær, Iceland, June 21-23, 2009), pp. 79-96. Reykjavik: School of Education, University of Iceland.

Hodgson, Bernard R. (2009b) History of mathematics and the mathematical education of secondary school teachers: some personal views on the contribution of teacher educators and its context. In: Kiyoshi Yokochi, Mingyuan Gu, Masahiko Suzuki and Akira Yanagimoto, (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematics Education and Cultural History of Mathematics in the Global Information Society (MECHMI-6)* (Osaka, Japan, November 21-23, 2009), pp. 27-32. Osaka: Osaka Kyoiku University.

Hodgson, Bernard R. (2010a) A mathematician's perspective on the role of history in the mathematical curriculum. In: Zhang Weizhong and Yang Guangwei, (Eds.), *Proceedings of the International Conference on the Socio-Cultural Approach to Mathematics Education* (Jinhua, China, June 28-30, 2010), pp. 1-15. Jinhua: Zhejiang Normal University.

Hodgson, Bernard R. (2010b) Sommes à la sauce pythagoricienne. *Accromath 5* (été-automne 2010), 22-29. [Disponible online en www.accromath.ca]

Katz, Victor J. (2000) *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. Washington: The Mathematical Association of America.

Katz, Victor J. (2009) *A History of Mathematics: An Introduction.* (3rd edition) Boston, etc.: Addison-Wesley.

Lagrange, Joseph-Louis. (1965) *Mécanique analytique*, tome premier. Paris: Librairie Albert Blanchard.

Lam, Lay Yong; Ang, Tian Se (2004) *Fleeting Footsteps: Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China.* Singapore: World Scientific.

Menghini, Marta; Furinghetti, Fulvia; Giacardi, Livia; Arzarello, Ferdinando (2008) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Ministère de l'Éducation (Québec) (2001) *La formation à l'enseignement: les orientations, les compétences professionnelles*. (Traducción al inglés: *Teacher Training: Orientations, Professional Competencies.*) Québec: Gouvernement du Québec.

Netz, Reviel; Noel, William (2007) *The Archimedes Codex*. London: Weidenfeld & Nicolson. (Traducción al español: *El código de Arquímedes.* Madrid: Temas de Hoy, 2007.)

Sfard, Anna (2008) What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. (Plenary Lecture based on the work of Survey Team 1) In: Mogens Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education* (Copenhagen, July 4–11, 2004), pp. 76–92. Roskilde: IMFUFA.

Shen, Kangshen; Crossley, John N.; Lun, Anthony W.-C. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford: Oxford University Press.

Etnomatemática e formação de professores: no meio do caminho (da sala de aula) há impasses[1]

Maria do Carmo Santos Domite
Universidade de São Paulo,
Brasil
mcdomite@gmail.com

Resumo[2]

A intenção nesta palestra é a de um olhar para trás no sentido de fazer uma retrospectiva sobre problemas e soluções do caminho do meio entre Formação de Professores e Etnomatemática, assim como de colocar alguns problemas para refletirmos sobre esta possível interação. Ao fazer tal reflexão, percebi que precisamos estar atentos a três proprostas de mudanças para o desenvolvimento de caminhos para a formação dos professores dentro de uma perspectiva etnomatemática. A primeira está no fato de que há inúmeras situações-problema e soluções do contexto não escolar - que a matemática que aprendemos no contexto escolar não nos deixa perceber. A segunda, diretamente aliada à primeira, quando percebemos tais situações-problema a construção de uma ponte entre este tal conjunto de idéias (matemáticas) e aquele sistematizado pela escola é colocada em risco devido às inter-relações entre o pensamento e a emoção. A terceira está na necessidade de refletir com os professores e professoras de matemática sobre outra noção de pré-requisito, como aquilo que o "outro" sabe, seja qual for a lógica/racionalidade e termos dessa construção.

Palavras chave

Etnomatemática, formação de professores, conhecimento primeiro, valor, contexto não escolar, diversidade cultural.

Abstract

The intention here is to look back for a retrospective consideration of the problems and solutions at the crossroads of the paths between teacher preparation and ethnomath, as well as the positioning of a few problems on their interaction. Upon making such reflections, it was perceived that we need to focus on three proposals for change in the development of ways to prepare teachers from an ethnomathematical perspective. First there is the fact that there are many problem situations and solutions in the out of school context that the math that we learn in the school context does not let us perceive. Second, directly connected to the first, when we perceive such problem situations the construction of a bridge between the set of ideas (math) and that which is systematized for the school is put at risk because of the interactions between thought and emotion. Third is the need to reflect as teachers and teachers of math on another prerequisite notion, as what the "other" knows, whatever the logic/rationality and in terms of such construction.

[1] Este trabajo corresponde a una mesa redonda realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Key words

Etnomath, teacher preparation, values, out of school context, cultural diversity.

Quando hoje pergunto a uma bailarina se os gestos das suas mãos são longínquos ecos dos ancestrais "mudras" indianos, ela limita-se a sorrir porque simplesmente os desconhece - a origem da ordem itinerante parece viver só na espantosa força anímica que resiste intemporal, tornando seu espaço síncrono qualquer que seja a rota ou destino.

Teresa Vergani, 2003

A etnomatemática, enquanto palavra no mundo contemporâneo, enfatiza a abordagem das convergências da sua postura e das mais promissoras correntes atuais de pensamento crítico e transdisciplinar, nomeadamente: a sociolingüística, a lingüística cognitiva, a fenomenologia, a biologia do conhecimento, a semiótica, a simbologia, o paradigma holístico e o da complexidade.

Teresa Vergani, 2003

1. Introdução

O reconhecimento da Etnomatemática – como elo e como suporte das correntes atuais do pensamento crítico-holístico – significa, em amplitude, para a educação matemática, tanto em termos de apreensão histórica do conhecimento como de instrumental teórico-prático-político para outros movimentos, na perspectiva educação e cultura. De algum modo, é uma condição para poder explicitar pontos críticos no âmbito da educação matemática e da educação em geral. Esta é uma conquista que tem nos seus primórdios o esforço de educadores como S. Merllin-Olsen, U. D'Ambrosio, P. Gerdes, A. Bishop, M. D' Olne Campos, E. Sebastiani-Ferreira, M. Frankstein & A. Powell, B. B. Barton, G. Knijnik, entre outros, ao mostrar que uma das maiores distorções históricas tem sido a de identificar a matemática somente com o pensamento europeu, em particular nas suas origens, com o pensamento grego. Em outras palavras, estes educadores têm se dedicado a discutir e construir bases epistemológicas para evidenciar que há outros modos de explicar e entender as relações quantitativas e espaciais - há outras matemáticas - em outros contextos.

Com efeito, a importância do reconhecimento da etnomatemática enquanto um programa de estudos está no fato de que é por meio dela, que hoje muitos de nós conseguimos espaço para exercer a luta contra a superioridade das disciplinas formais – que, assumindo o caráter de conhecimento, excluem o resto – os que não participam do âmbito (acadêmico) formal.

É verdade que, para muitos educadores, a etnomatemática é um dos caminhos da educação matemática cuja produção de conhecimento tem características pertinentes e promissoras dentro das correntes mais atuais do pensamento crítico, holístico e transdisciplinar. No entanto, do mesmo modo que tem sido natural reconhecer tal potencial no âmbito filosófico-político, tem sido consenso, entre os educadores envolvidos nestes estudos, que tomar a etnomatemática como um caminho/método para a educação escolar é uma proposta de alta complexidade.

De fato, a etnomatemática tem sido, por um lado, muito bem sucedida ao desenvolver-se em educação como um modo de explicitar/legitimar as relações quantitativas e espaciais implícitas no saber-fazer de um grupo, de modo a revelar – da técnica ao significado - as diferenças, de um grupo social/étnico para outro, no que se refere às relações matemáticas[3]. De outro lado, mesmo que para D'Ambrósio (1990), a grande preocupação do ponto de vista da educação, assim como o passo essencial para a difusão da etnomatemática está em levá-la para a sala de aula, é possível afirmar que ainda está engatinhando o movimento no sentido da etnomatemática como prática pedagógica. E por quê? O que se passa na dinâmica de operacionalização do âmbito escolar que possa dificultar a incorporação dos pressupostos da etnomatemática?

Uma primeira tentativa de resposta à pergunta acima pode estar no fato de que no âmbito da educação (matemática) escolar, alguns educadores parecem indiferentes à influência da cultura na compreensão das idéias matemáticas – tal preocupação parece mesmo uma perda de tempo e esforço, somente importante para antropólogos ou, na melhor das hipóteses para pesquisadores da educação matemática que não têm se aprofundado/informado sobre os estudos da psicologia da educação matemática (Meira, 1993). Na verdade, da nossa busca por tal valor (resultados de pesquisa apresentados a seguir), entre os educadores e/ou professores de matemática, alguns deles parecem indiferentes às distinções de classe e de cultura, enquanto outros parecem desejar a eliminação de tais distinções – e, naturalmente, entre estes últimos, existe o questionamento de que se o que vale a pena preservar pode ser re-construído/transmitido pelos ensinamentos via escola.

Todavia, embora tenha escolhido esta forma de abordagem para iniciar uma discussão sobre a etnomatemática (numa concessão à questão que parece ser o cerne das preocupações de quase todos envolvidos nesta perspectiva) não pretendo deixar o assunto neste tom mais ou menos negativo e explanatório. Afinal de contas, eu acredito, com convicção, que o professor e a professora devem tratar a educação escolar pela via de padrões culturais de comportamento e conhecimento, tanto pelo fato de ajudar na atitude mental dos educandos frente às relações (matemáticas) que o professor quer desenvolver, quanto por questões de ordem político-social como bem expressa Fasheh:

> Ensinar matemática por meio de experiências culturais e pessoais relevantes ajuda os alunos a conhecer mais sobre realidade, cultura sociedade e eles próprios. Isso irá, em troca, ajudá-los a ficar mais atentos, mais críticos, mas apreciativos, e mais confiantes. Irá ajudá-los a construir novas perspectivas e sínteses, e procurar novas alternativas, e, esperamos ajudá-los a transformar algumas estruturas e relações existentes. (Fasheh, 1982, p.8).

[3] O documento em CD-ROM, organizado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática-GEPEm/FEUSP e publicado pela Associação de Professores de Portugal-APM contém o resumo (em inglês e português) da produção científica em etnomatemática – por volta de cinqüenta (50) trabalhos acadêmicos, teses e dissertações – realizadas no Brasil, nos últimos 20 anos. A dissertação de mestrado de Andréia Lunkes Conrado sob o título " A pesquisa brasileira em etnomatemática: desenvolvimento, perspectivas, desafios", apresentada/defendida em abril de2005, apresenta uma discussão/análise da produção científica em etnomatemática – por volta de sessenta (60) trabalhos acadêmicos entre teses e dissertações – realizadas no Brasil, desde os anos 80 até a presente data.

2. E a etnomatemática, como interpretá-la?

Do meu ponto de vista, uma das bases fundantes da etnomatemática está na crença de que diferentes relações matemáticas ou práticas matemáticas podem ser geradas, organizadas e transmitidas informalmente, assim como a língua, para resolver necessidades imediatas. E como um meio operacional do fazer, no centro dos processos fazer-saber de uma comunidade, a matemática é parte do que nós chamamos cultura. Assim, desse ponto da vista, eu não somente considero a etnomatemática como a área de estudo que reflete sobre as raízes culturais do conhecimento matemático, mas também como o conjunto das relações quantitativas e espaciais, geradas no coração da comunidade cultural, que compõe, muitas vezes, o que tem sido teorizado como matemática. Para a etnomatemática o educador encontraria sentido na ação de aprender e ensinar se tomar como ponto de partida padrões culturais do grupo — tarefa nada fácil, pois é como se estivesse em busca de identificar/interpretar um amontoado de símbolos (ordenados) significativos do "outro" diferente dele. Neste sentido, a etnomatemática está relacionada ao entendimento do significado de cultura - o qual tem passado por inúmeras interpretações ao longo do último século - o contexto dentro do qual os comportamentos, acontecimentos e organizações sociais vão sendo escritos e as estruturas de significado vão sendo socialmente estabelecidos. Uma interpretação na visão de Silva (1993, p.28):

> [...] a cultura contém a trama de signos com que as pessoas significam os objetos, os acontecimentos, as situações e as outras pessoas que as rodeiam. Cada indivíduo, de posse do código, se movimenta facilmente no universo de sua cultura, age na certeza de ter seu comportamento confirmado pelo grupo.

Nesta perspectiva, as relações envolvidas/construídas num e noutro campo — da cultura e da matemática - são estruturadas, naturalmente em diferentes níveis de complexidade epistemológica — porém, com certeza, incluindo os objetos matemáticos na trama (cultural) "de signos com que as pessoas significam os objetos" (Silva, 1993).

Do considerado, frente à pergunta "E a etnomatemática, como interpretá-la?", esta pode ser reconhecida como uma linha de pesquisa da educação matemática que investiga as raízes culturais das idéias matemáticas, indispensáveis para uma melhor compreensão/significação de uma das áreas da educação — a educação matemática - e dos pressupostos geradores de sua construção como, contato entre outras áreas do conhecimento, contato cultural, valores entre outros. Os estudos etnomatemáticos procuram de algum modo, trilhar os caminhos da antropologia, buscando identificar problemas (matemáticos) a partir do conhecimento do "outro", no sentido da compreensão do conhecimento do "outro".

A partir da minha experiência — dentro de um olhar etnomatemático - em educação matemática e no contexto da formação de professores reconheço que encontramos constantemente situações nas quais diferentes inclinações e diferentes decisões/escolhas se manifestam - todas elas condicionadas por valores. Reconhecer um certo aspecto das coisas como um valor consiste em tê-lo em conta na tomada de decisão ou, em outras palavras, em estar inclinado a usá-lo como um algo a ter em consideração na escolha e na orientação que damos as soluções de problemas, a nós próprios e aos outros.

O professor indígena Maximino, da etnia Guarani-Kayowa, quando indagado pelos participantes do Grupo de Etnomatemática sobre a natureza das operações aritméticas para os Guarani-Kayowa, muito bem revela o valor colocado numa contagem, a qual por ela própria já se revela diferenciada da forma universalizada: Explica Maximino Kayowa:

> [...] uma família convida outra família para almoçar em sua casa... e quando a esposa pergunta ao marido "Quantos vem de lá?", ele assim pode responder : "são quatro e quatro quer dizer o pai, a mãe, dois filhos homens(conta um) e duas filhas mulheres (conta um). "Se é do mesmo sexo é um". Continuou Maximino: "pode ser que o marido responda três, o que quer dizer o pai, a mãe e quatro filhos, se é do mesmo sangue é um. (FEUSP, 11 de abril de 2002)

A educadora não indígena Mariana Kawall Ferreira ao trabalhar numa escola junto ao Posto Diauarum, Alto do Xingu –onde estudavam professores Juruna, Suyá e Kaiabi-? presenciou a distribuição de peixes a todos aqueles que vieram ao porto esperar pelas canoas. Da contagem e distribuição dos peixes, conta Mariana, surgem soluções aritméticas ? levando em conta valores sociais e culturais - diferentes daquelas da matemática acadêmica para o seguinte problema: "Ontem a noite peguei dez peixes. Dei 3 para o meu irmão. Quantos peixes devo ter agora?". Tarinu Juruna, conta Mariana, obteve a seguinte resposta para o problema:

> Ontem à noite peguei 10 peixes. Dei 3 para meu irmão. Com quantos peixes tenho agora? Tenho 13 peixes agora. E explicou seu raciocínio: Fiquei com 13 peixes porque, quando eu dou alguma coisa para meu irmão, ele me paga de volta em dobro. Assim, 10 menos 3 é igual a 7 e 7 mais 6 (o dobro de 3) é igual a 13. (Kawall, 2002, p.56).

Neste sentido, talvez tenhamos sempre que nos questionar sobre a relação existente entre os meus valores e os dos outros, de outras comunidades educacionais, considerada no seu sentido mais amplo. Ou, ainda, tenhamos sempre que nos questionar sobre quais relações devem ser estabelecidas ou que estabelecemos entre os valores individuais e os valores coletivos, em especial, quando o contexto de discussão é a etnomatemática.

De todo modo, podemos considerar que enquanto o olhar etnomatemático busca um distanciamento necessário para não explicar todas as relações percebidas em um vínculo com a matemática acadêmica/universalizada, o olhar científico já se constrói a partir de um recuo dos conhecimentos ditos populares. Assim, para iniciar um diálogo que possa chegar a pontos comuns mais ou menos teóricos em relação à etnomatemática, tenho colocado perguntas para professores/educadores, alunos dos cursos de graduação - sabendo de antemão da não facilidade em obter respostas imediatas – como as que seguem:

1. A "matemática" é uma produção social, gerada de motivações práticas; ou e e/ou.

   A "matemática" é uma estrutura abstrata com símbolos bem definidos - uma linguagem - de cunho axiomático-dedutivo, construída a partir de um jogo intelectual. É também uma produção social?

2. O conhecimento (matemático) primeiro é tão legítimo a ponto de poder dialogar com o conhecimento (matemático) dito científico? É ou não? Para quem?

3. É possível/valioso do ponto de vista afetivo-cognitivo fazer o trânsito/ponte entre os conhecimentos étnicos (ou conhecimento primeiro) e os conhecimentos ditos científicos? É possível construir esta ponte?

4. O conhecimento (matemático) construído no fazer-saber de um grupo social é, em geral, validado pela experiência. Tem este conhecimento valor de troca no mercado?

5. Há outros modos de compreender e explicar as relações quantitativas e espaciais que não somente pela "matemática "que conhecemos. Há outras "matemáticas"

Frente à primeira questão "O que é Matemática?", pudemos perceber que as respostas parecem ter um olhar mais voltado para uma pergunta do tipo "O que é a matemática ensinada na escola?", visto que elas não vêm de discussões da filosofia da matemática, mas da educação matemática. De todo modo, a matemática parece ser compreendida como um conjunto de disciplinas e/ou como uma atividade científica dedutiva (coleção de teoremas), mas raramente como produto sócio-cultural e, naturalmente, cada uma dessas interpretações caracteriza a seu modo a matemática ensinada na escola.

Como esperado, frente às questões seguintes, apesar da grande dificuldade para gerenciar os conflitos e estranhamentos no contexto destas respostas - uma vez que não é fácil compreender as concepções/características/valores do grupo que decide sobre tais reflexões – surge aqui a possibilidade para falarmos de diversidade cultural, etnomatemática, interculturalidade. Naturalmente não haveria conflito em um sentido geral, pelo menos do ponto de vista teórico, se todos nós, professores e alunos, compartilhássemos das "teses" elaboradas por Vieira Ferreira (2002, p.99-101):

> A primeira delas é: a existência de diferenças culturais foi e continua sendo a característica mais marcante de toda história da humanidade. O importante, entretanto, não é discutirmos simplesmente os traços dessa diversidade, mas procurarmos estudar, em cada circunstância, como as diferenças foram transformadas em desigualdade, ou seja, como as diferenças foram e são utilizadas como justificativas para a manutenção de situações de desigualdade social.
>
> A segunda tese, logo, é: se, então, a diversidade cultural é a característica fundamental de todas as sociedades, mas se ela costuma ser usada de modo a desfavorecer os grupos sem poder nas mesmas, dentro da escola isso também acontece. Dentro da escola essa diversidade é esquecida, é tornada invisível, e substituída por uma concepção monocultural que

> reveste tudo o que nela acontece: a seleção curricular, o trabalho pedagógico cotidiano, a imposição de normas e valores, o processo de avaliação etc.
>
> A terceira tese é: o esquecimento da diversidade não representa apenas a desconsideração das culturas dos grupos sem poder na sociedade. O problema central é que essa desconsideração conduz a processos de aumento da desigualdade social, sempre que uma grande parcela da população escolar que não se identifica com a cultura da escola é excluída, ainda dentro da instituição, sendo impedida, então de receber as informações e conhecimentos mínimos para disputar espaços sociais em igualdade de condições com outros mais acordes aos valores culturais pregados na mesma.
>
> A quarta tese pode ser assim esboçada: a escola só poderá reverter seu histórico comportamento impositivo quando os grupos prejudicados pela dominação conseguirem, também, ouvir sua voz. É impossível pretender o êxito acadêmico dos grupos desprivilegiados na sociedade atual sem que a sua forma de interpretar a realidade seja, ao menos, admitida dentro da escola. Cumpre aos docentes comprometidos com os setores desprivilegiados colaborarem para que esses possam manifestar sua cultura.

Na verdade, com as últimas questões queremos que os alunos/educadores/professores iniciem uma discussão no sentido de que "ouvir sua voz"– a voz dos sujeitos de um grupo – é um das buscas da etnomatemática, ou seja, deixar emergir e legitimar o conhecimento primeiro do "outro grupo", a sua identidade e o seu modo de interpretar (matematicamente) a realidade. Na verdade, a etnomatemática tem como busca respeitar e valorizar à diferença, a fim de caminhar por meio de ações/processos que se revertam em benefício das comunidades (minoritárias).

3. Foco de interesse: formação de professores

Como bem indicado no título, um dos focos de interesse do trabalho está no que diz respeito à formação de professores, numa perspectiva da etnomatemática. Tenho procurado chamar atenção dos formadores para o fato de que neste imenso volume de investigações sobre formação de professores "o aluno e a aluna não têm estado de todo fora das propostas de formação de professores, mas também não estão dentro". (Domite, 2000).

Como sabemos, vários modelos têm sido propostos para a formação de professores (de matemática) como em Shulman, L.S. (1982), Schön, D. (1997), Schön, D. & Rein,M.(1994), Zeichner, K.M. (1993, 1995), D'Ambrosio, B. (1996), Nóvoa, A. (1992, 1997), Jiménez, A. M. P (1995), Perrenoud (1988, 1993), Fiorentini, D. (1998, 2003), Ponte,J.P.(1994, 1999), Cooney, T. (1994, 1999), Darsie, M.M.P. & Carvalho, A.M.P. (1996), Linhares (1995). Thompson, A.G. (1983), Tardif (2002), Pimenta, S.G.(1996), Pimenta, S.G. & Libâneo, J.C.(2006).Grande parte deles já mais centrados no professor como sujeito constituído, destacando a importância do professor/a como profissional reflexivo que deve se preocupar tanto com as necessidades emocionais e intelectuais dos aluno/as como com as funções sociais da educação - exercitando-se como construtor político do projeto pedagógico da escola.

De algum modo, construir ou re-pensar o projeto político-pedagógico da escola pode envolver os professores numa perspectiva mais próxima dos anseios dos estudos etnomatemática. Isto é pode levá-los mais e mais a desejar compreender, em maior profundidade, a escola em que trabalham e os alunos e alunas que recebem, ou seja, gera maior disponibilidade de formular perguntas "Escola, quem é você?", assim como "Quem são nossos professores e professoras?" e "Nossos alunos e alunas, quem são?" Poder reconhecer, de antemão, quem faz parte do grupo, o que eles conhecem e como conhecem pode levar o professor a perceber mais e mais o potencial em levar em conta a cultura dos alunos no processo de fazer pedagógico.

Do ponto de vista da nossa discussão sobre formação de professores/as – numa perspectiva da etnomatemática - algumas iniciativas dentro da formação têm sido preciosas, em especial aquelas que se inspiraram nas idéias originais de Freire e Schön.

De um lado, Freire traz para educação a idéia de que na relação ensino-aprendizagem os dois lados aprendem, isto é, ao ensinar algo aos alunos o professor aprende deles algo também - porque para Freire "em toda relação entre educador e educando está sempre em jogo algo que se procura conhecer". De outro lado, Freire inaugura, pode-se dizer em termos de mundo, a proposta de situar a ação educativa na cultura do educando. Para Freire, a consideração e o respeito ao "conhecimento primeiro" do educando e "a cultura que cada um traz dentro de si são finalidades de uma professora e de um professor que vêm a educação sob a ótica libertadora" (Freire, 1967), ou seja, reconhecem-nos como meios para gerar uma mudança estrutural numa sociedade opressiva – embora, Freire afirme que a educação (escolar) não alcança tal objetivo imediatamente e, muito menos sozinha.

Schön, por sua vez, trouxe para os formadores – idéias gestadas nos anos 80 - o pressuposto de que é a partir da reflexão do professor sobre a própria prática que as transformações podem ocorrer, sugerindo ao formador levar o professor a modos de operacionalização da reflexão na ação e da reflexão sobre a ação (Schön, 1987). Segundo o autor, é a partir da reflexão sobre a própria prática que as transformações podem ocorrer.

Do considerado, ao concentrar energia no desenvolvimento da pesquisa que reflete Formação de Professores e Etnomatemática, aproximei-me mais e mais dos estudos de Paulo Freire, escolhendo-o como teórico de base para responder aos meus questionamentos, especialmente porque suas reflexões tem se dedicado à legitimação do conhecimento do "outro" (educando criança e/ou jovem e adulto) o qual, em geral, se forma e se conforma com determinadas relações de poder. A intenção maior é a de propiciar uma transformação da relação que os professores e professoras têm com o desconhecimento sobre **quem são seus educandos**, **o que conhecem e como conhecem sobre eles** de modo a propiciar um outro discurso, outra forma de ver e de ser dos formadores, assim como criar oportunidades para a nossa transformação como educadores.

Com estas preocupações e desde que um dos pressupostos básicos da etnomatemática está em focalizar/identificar/legitimar as relações quantitativas e espaciais a partir do conhecimento do "outro", na sua própria racionalidade e termos, tenho encaminhado uma proposta de pesquisa qu econsiste em: a) reconhecer o quanto os professores e as professoras de matemática estão a par do movimento/literatura sobre Formação de Professores; b) buscar um entendimento das concepções dos professores/pós-graduandos/pesquisadores sobre educação (escolar) e cultura e, c) problematizar questões/processos que emergem da realidade social de uma sala de aula, na qual o conhecimento do educando se torne (por força das circunstâncias) o centro da preocupação do professor.

A fim de encaminhar uma análise mais sistemática sobre o entendimento/preocupação dos professores em levar em conta o conhecimento (cultural) dos educandos – assim como dos outros itens mencionados – tenho recolhido informações (desde o último trimestre) a partir das duas propostas I e II, como encaminhadas a seguir.

I- Entrevista a professores de matemática, em serviço e/ou graduandos do final do curso de Licenciatura em Matemática (IME-USP) e/ou pós-graduandos, a partir das questões:

1. O que você tem ouvido falar sobre Formação de Professores?
2. Escreva/explicite sobre algumas idéias, desafios ou sugestões que você viu ou ouviu falar com relação à formação de professores.
3. Em sua opinião, quais são as principais características que, nós professores, precisamos ter/desenvolver quando decidimos colocar no centro do processo de ensino-aprendizagem os sentimentos, atitudes, opiniões, cultura e conhecimentos prévios dos nossos alunos?

II- Solicitar a manifestação dos pesquisados, a partir do confronto com uma situação que se distingue daquelas dos padrões regulares. Segue o roteiro preparado.

Como você encaminharia/continuaria as situações em sala de aula, frente aquelas que se apresentaram para o professor Mário e para a professora Janaína (dois casos verídicos). Ou seja, num primeiro momento você é o professor Mário e num segundo a professora Janaína, ambos professores que se propõem a iniciar a aula a partir da fala dos(as) alunos(as)...

O professor Mário inicia, em uma de suas 5ª série, uma conversa com seus alunos e alunas sobre o cálculo de divisão, perguntando:

Prof. Mário: Como vocês fazem o cálculo 125 dividido por 8?

José (aluno), que vendia chicletes num farol próximo ao centro, começa a falar:

José: Nós somos mais ou menos 10 "caras", quase todo dia, alguns meninos e algumas meninas. Daí, dividimos assim: mais para as meninas que são mais responsáveis que os meninos, mais para os maiores do que para os menores".

Prof. Mário: Dê um exemplo José. Por exemplo, como foi a divisão ontem ou anteontem.

José: Ah! Assim... eram 4 meninas, 1 é das pequenas; 6 meninos grandes e 2 mais ou menos pequenos. Então nós éramos 12 e os chicletes eram 60. Daí, foi dado metade e metade, um pouco mais para as meninas. A menina pequena ficou com 3 e as outras com 6 ou 7, eu não me lembro bem...Os meninos...

Agora você deve se colocar no lugar do professor Mário e continuar a aula...

Janaina (outra situação verídica). Como você procederia?

A professora Janaina pergunta ao grupo de alunos/as do 4º semestre do curso de educação de adultos: o que vocês sabem sobre porcentagem? Como vocês fazem o cálculo de uma porcentagem? Vamos pensar sobre...

Luiz (aluno): Hoje mesmo eu precisei fazer um cálculo assim... 35% de 195 e eu faço assim...19 + 19 + 19 e daí mais 9,5. Deu 30 mais 27 mais...mais ou menos 10.

Profa. Janaina: como você chegou ao 19? Fale um pouco do seu jeito de calcular.

Luiz: Ah! *eu não sei porque faço assim*...sempre que aparece porcentagem eu divido por dez porque alguém me ensinou assim e somo as vezes que é...assim...30% somo três vezes, 40% somo quatro vezes.

Profa. Janaina: e como você chegou ao 9,5? Conte-me como você pensou.

Luiz: Eu sei que tem de dividir por dois quando é 25% ou 35% ou 45%, mas eu não sei por que eu faço isso...

Agora você deve se colocar no lugar da professora Janaina e continuar a aula...

Examinamos, até este momento, somente os relatos/respostas referentes à parte II, sobre as situações de sala de aula. Examinamos os relatórios de 48 professores de matemática em serviço, entre os quais vinte e oito (28) são professores de escolas públicas com mais de 10 anos de experiência, onze (11) têm menos de 10 anos (3 deles também em escolas privadas) e os outros nove (09) são alunos de graduação que já lecionam. Trago, aqui, de modo sucinto algo em forma de análise, mostrando que chegamos a uma categorização - em três eixos temáticos - de tais manifestações: - O **primeiro eixo** representa o recorte que evidencia **o desejo do professor pesquisador em transformar a situação-problema real em um exercício matemático** ou um problema da matemática dita escolar (olhando somente para o ensina do conteúdo matemático divisão). Um dos professores assim reagiu: 'Muito interessante José, muito interessante! Mas vamos pensar sobre a partilha em partes iguais ... vamos supor que você tem 125 caixas de chicletes para dividir por 8 pessoas....mas em partes iguais, divisão em partes iguais! Como você faria esse cálculo?'

O **segundo eixo** foi construído pela nossa percepção do **professor pesquisado em estado reflexivo** –entrando em um processo fecundo de problematização ao reconhecer o conhecimento matemático universalizado em um confronto com as contradições que emergem da realidade. Um deles assim reagiu: "Se levarmos em conta o conhecimento contextualizado de estudantes como José e Luiz, estaremos contribuindo para uma aprendizagem mais significativa da matemática?". Outra professora: "Quando valorizamos e respeitamos a forma de divisão de José no farol, estamos contribuindo para o seu fortalecimento intelectual e emocional, ele pode aprender melhor a nossa divisão?"

O **terceiro eixo** traduz as **crenças do professor em termos de sociedade, política, coletividade e relações de poder**, de algum modo, relacionadas à educação escolar. Um dos professores: "Esta é uma questão política terrível... nossos alunos vendendo chicletes no semáforo ... o que aquelas crianças estão fazendo lá?

E o que já aprendemos com esta pesquisa em andamento? As respostas dos professores, provocados a levar em conta o "conhecimento primeiro" dos alunos em uma sala de aula, lançaram uma luz sobre a minha visão frente à construção de atitudes pelos mesmos. Primeiro, foi possível perceber que preparar os professores de matemática para o desenvolvimento das preocupações e "conhecimento primeiro"dos educandos não é incompatível com orientá-los a ensinar matemática - ao contrário, este pode ser um dos aspectos a ser envolvido no processo de ensinar. Segundo, se nosso objetivo com uma pesquisa do tipo está em desenvolver um currículo de formação de professores no qual se problematize questões/processos que emerge da realidade social do educando, reconhecemos que a fundamentação para uma pesquisa e/ou a preparação dos professores de matemática para agir nesta direção exige uma incursão na literatura focalizada não só na matemática, como na Antropologia, Sociologia, História, Psicologia e, em especial, na produção de pesquisa sobre Formação de Professores no campo educacional.

4. Conclusão

A intenção deste artigo foi a de um *olhar para trás* no sentido de fazer uma retrospectiva sobre problemas e soluções do caminho do meio entre Formação de Professores e Etnomatemática, assim como de colocar alguns problemas para refletirmos sobre esta possível interação. Ao tentar fazer tal reflexão, percebi que precisamos estar atento a três pontos importantes – ou três proprostas de mudanças - para o desenvolvimento de caminhos para a formação dos professores dentro de uma perspectiva etnomatemática.

A primeira está no fato de que há inúmeras situações-problema e soluções do contexto não escolar - que resultam do trânsito por diferentes áreas do conhecimento e são validados/compartilhados pela experiência - que a matemática que aprendemos no contexto escolar não nos deixa perceber, talvez pelo fato da tradição de valorizarmos sempre um tipo de matemática – a matemática construída na academia, em geral, livre de contextos.

A segunda, diretamente aliada à primeira, quando percebemos tais situações-problema como situações ricas em termos de matemática – possivelmente geradoras de uma aula de matemática - a construção de uma ponte entre este tal conjunto de idéias (matemáticas) e aquele sistematizado pela escola é colocada em risco devido às inter-relações entre o pensamento e a emoção, o pensamento e as tradições, o pensamento e a religião, o pensamento e os mitos que levam a situações inesperadas em virtude da tendência da linguagem para assumir diferentes significados. Na verdade, para que esta ponte ocorra é, muitas vezes, necessária uma tradução entre discursos por meio de uma atenção cuidadosa aos significados, às representações e, muitas vezes, a elementos lingüísticos.

A terceira está na necessidade de refletir com os professores e as professoras de matemática sobre outra noção de pré-requisito, necessário para discutir sobre as idéias em (etno)matemática, uma concepção que se opõe aquela tradicionalmente empregada na educação matemática convencional, como um embasamento de ordem lógica, indicado pelo matemático, um fato *necessário* para o conhecimento do novo item a ser estudado. A compreensão de uma nova visão, por parte dos professores/as de pré-requisito, como aquilo que o "outro" sabe, seja qual for a lógica/racionalidade e termos dessa construção – deve ser um dos aspectos a ser especialmente introduzido/explorado/incluído nas investigações em Etnomatemática e Formação de Professores.

Referencias bibliográficas

Bishop, A.J. (1988). *Mathematical Enculturation*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Cooney, T. (1999). Conceptualizing teachers ways of knowing. *Educatinal Studies in Mathematics. 38*, 163-187.

Campos, M.; O'Dolne (2001). "Estar aqui e estar lá: tensões e interseções com o trabalho de campo. *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática –CBEm 1.*

D'Ambrósio, U. (1990). *Etnomatemática.* São Paulo: Editora Ática.

Darsie, M.; Carvalho, A. (1996). O início da formação do professor reflexivo. *Revista da Faculdade de Educação (USP)*, São Paulo, 22, 90-108.

Ferreira, M. (2002). Quando $1 + 1 \neq 2$. Práticas matemáticas no Parque Indígena. In: *Idéias Matemáticas de povos culturalmente distintos.* (Org.. Ferreira, M. K. L.). São Paulo: Global Editora/FAPESP.

Ferreira, M. V. (2002). Mas, afinal, para que interessam a um cigano as equações? In: *Experiências étnico-culturais para a formação de professores.* Belo Horizonte: Autêntica. P. 95-108.

Fiorentini, D. (Org.) (1998). Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: *Cartografias do Trabalho Docente professor(a)-pesquisador(a).* (Org. Fiorentini, D.). Campinas: Editoras Mercado das Letras e Associação de Leitura do Brasil.

Freire, P. (1967). *Educação como prática de liberdade*. Rio e Janeiro: Editora Paz e Terra

Gerdes. P. (1996). *Etnomatemática e Educação Matemática*: Uma panorâmica geral, Quadrante, Lisboa, 5(2), 105-138

Jiménez A. (1995) Integrando la educación ambiental en el currículum de ciencias. *Alambique: Didática de las ciencias experimentales,* 2 (6).

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência. Educação Matemática e legitimidade cultural.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Nóvoa, A. (Org.) (1992). *Os professores e a sua formação.* Lisboa: Edições Dom Quixote.

Perrenoud, P. (1988). Sous des airs savants, une notion de sens commun: la socialisation. *Cahiers de Recherche du Groupe de Recherche sur la Socialisation*, Lyon, n. spécial, p. 149-170.

Pimenta, S.; Libaneo, J. (2006). Formação dos Profissionais da Educação: visão crítica e perspectivas de mudança. In: Selma Garrido Pimenta. (Org.). *Pedagogia e Pedagogos: caminhos e perspectivas.* 2ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 11-57.

Pimenta, S. (1996). Formação de professores – saberes da docência e identidade do professor. *Educação e Pesquisa (USP).* São Paulo, 22 (1, 2, 72-89).

Ponte, J. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: J. Tavares, A.Pereira, A. P. P., & H. A. Sá (Eds), Investigar e formar em educação: *Actas do Congresso da SPCE*. Porto: SPCE, 59-72.

Schön, D. (1987).*Educating a Reflexive Practitioner. Towarda New Design for Teaching and Learning in the Professions.* São Francisco: Jossey Bass.

Schön, D.; Rein, M. (1994) *Frame Reflection: Toward the Resolution of Intractable Policy Controversies*. New York: Basic Books

Shulman, L. (1982). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(1-2), 4-14.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis: Editora Vozes.

Thompson, A. (1983). *Teacher' conceptions of mathematics and mathematics teaching: three case studies.* Unpublished doctoral dissertation. Athens: University of Georgia..

Vergani, T. (2003). *A surpresa do mundo - Ensaios sobre cognição, cultura e educação*. Natal: Editorial Flecha do Tempo. (orgs. Silva, C.A. & Mendes, I.A.)

Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: idéias e práticas.* Lisboa: Educa.

Zeichner K. (1995). Novos caminhos para o practicum. In: Nóvoa, A. (Org.) *Os professores e a sua formação.* Lisboa: Don Quixote.

____. (1994). Conceptualizing teacher education as a field of inquiry: theoretical and practical implications. In: *XVIII International Conference Psychology of Mathematics Education. Lisboa.Proccedings of XVIII PME. (2)*, 225-232.

_____. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

_____. (Org.) (2003). *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras.

_____. (2007). *Etnomatemática: reflexões sobre matemática e diversidade cultural.* Ribeirão: Edições Húmus.

_____. *Os Professores e a sua Formação – Temas Educacionais I.* Lisboa: Editora Nova Enciclopédia. 1992.

_____. (1993). *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas.* Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote.

_____. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In: *XVIII International Conference Psychology of Mathematics Education.* Lisboa. Proccedings of XVIII PME, 195-209.

Etnomatemática e Educação de Jovens e Adultos: continuando o debate[1]

Maria Cecilia de Castello Branco Fantinato
Universidade Federal Fluminense Niterói, RJ,
Brasil
mcfantinato@gmail.com

Resumo[2]

A proposta deste texto é contribuir para o debate acerca da Etnomatemática e suas relações com a educação, no contexto da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Para tal, realizei uma pesquisa bibliográfica, utilizando como fonte de consulta os Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm3) e o banco de teses da CAPES. Farei inicialmente uma apresentação sintética dos temas abordados e dos principais pontos levantados pelas pesquisas brasileiras em Etnomatemática que estabelecem relações com a Educação de Jovens e Adultos.Em seguida, destacarei algumas questões trazidas dos resultados de nossas pesquisas mais recentes, apontando perspectivas de continuidade para as investigações na interface desses dois campos, abordando particularmente a prática docente de Matemática na EJA e a formação de professores voltada para esta modalidade de ensino.

Palavras chave

Etnomatemática; Educação de Jovens e Adultos; diversidade cultural; prática docente; formação de professores.

Abstract

To contribute to the debate on ethnomath and its relationship to education in the context of the education of young adults a literature review was carried out, using as sources the proceedings of the Third Brazilian Congress on Ethnomath and the thesis data base of the Brazilian Federal Agency for the Support and Evaluation of Graduate Education (CAPES). A synthesis of the main themes and the main points made concerning the relationship between ethnomath and the education of young adults is presented. Then some matters from the results of the most recent research showing a continuity for the research at the interface of these two fields are highlighted.

Key words

Ethnomathematics; Education of Young Adults; cultural diversity; teaching practice; teacher education.

[1] Este trabajo corresponde a una mesa redonda realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. A Etnomatemática e suas relações com a Educação de Jovens e Adultos

Desde seus primórdios, os trabalhos em Etnomatemática, tanto no Brasil como em contexto internacional, apesar de adotarem diferentes abordagens, compartilharam o fato de relacionar matemática e cultura. Os estudos etnográficos de grupos socioculturais, predominantes no início, foram cedendo espaço para pesquisas abordando diferentes dimensões da Etnomatemática (D'Ambrosio, 2001), como a conceitual, a epistemológica, a política, e particularmente a educacional, na qual vou me deter neste texto. Concordo com Monteiro, Gonçalves e Santos (2007, p. 49), quando dizem que:

As pesquisas de abordagem etnomatemática têm se apresentado de maneira bastante relevante para o campo da Educação Matemática e, especialmente na última década, grande parte dessas pesquisas tem focado questões da prática pedagógica e processos de escolarização.

Um exemplo da preocupação crescente da área com suas implicações educacionais é a distribuição proporcional de trabalhos, agrupados por categorias temáticas, enviados ao Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm3),[3] que está sintetizada no gráfico a seguir:

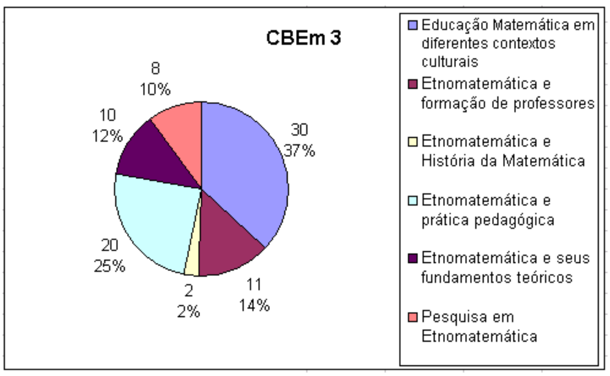


Figura 1: Trabalhos enviados ao CBEm3 por categoria temática[4]

Como pode ser observado, grande parte dos textos enviados para o evento (39%, ou 31 trabalhos em 81) apresentava como tema central algum aspecto da dimensão educacional da etnomatemática, seja em suas aplicações para a prática pedagógica (25%, ou 20 trabalhos), seja subsidiando a formação de professores (14%, ou 11 trabalhos).

Este interesse crescente nã o significa que as relações da Etnomatemática com o campo educacional sejam destituídas de contradições. Abordando especificamente este tema, Pais (2011) aponta a inexistência de consenso entre os próprios pesquisadores da área a respeito das propostas educacionais inspiradas pela Etnomatemática. Um dos pontos

[3] Este evento ocorreu em março de 2008, na Universidade Federal Fluminense, Niterói, Estado do Rio de Janeiro.

[4] Fonte de consulta: Anais do congresso.

críticos deste debate é a discussão sobre "fazer a ponte" entre o conhecimento local e o conhecimento escolar, ou seja, a transferência de conhecimento de um contexto para outro. Esta discussão não pode prescindir de uma análise do papel político e social da escola, das relações de poder aí presentes e dos valores atribuídos aos diferentes tipos de conhecimento matemático. O autor complementa:

> [...] tal discussão não pode evitar abordar as implicações educacionais da Etnomatemática no contexto das duas funções antagônicas da educação nas sociedades atuais: a necessidade de preservar os conhecimentos e práticas das diferentes culturas e, ao mesmo tempo, a preocupação com a apropriação, por todos os indivíduos, do conhecimento global difundido pela escola. É necessário prestar atenção nas contradições envolvidas neste antagonismo, de modo que ações bem intencionadas não acabem por ter resultados opostos do pretendido. (Pais, 2011, p.19 – tradução nossa).

Os estudos específico s de Etnomatemática no contexto da Educação e Jovens e Adultos também têm enfrentado os mesmos desafios colocados acima. Esta linha de pesquisas vem crescendo expressivamente nos últimos anos. Com efeito, uma consulta aos Anais do CBEm3 permite identificar 11 trabalhos (13,6%) que mencionavam EJA como palavra-chave, enquanto nos Anais do congresso anterior (CBEm2), de 2004, apenas dois em 38 trabalhos (5,2%) abordavam especificamente esta temática.

A fertilidade do encontro entre essas duas áreas pode ser explicada, entre outros fatores, pela enorme diversidade dos educandos das salas de aula da EJA – seja do ponto de vista de faixa etária, etnicidade, religião, origem geográfica, entre outros aspectos –, que desafia constantemente tanto a prática docente quanto as propostas curriculares voltadas para esta modalidade de ensino. As primeiras pesquisas neste campo já indicavam a Etnomatemática como sendo um potente recurso teórico para compreender os diferentes tipos de conhecimento matemático oriundos das práticas dos grupos sociais da EJA. Como já afirmamos em trabalho anterior:

> Enquanto área de pesquisa voltada para as diversas formas culturais de compreender/representar/utilizar relações quantitativas e espaciais, a etnomatemática tem sido pioneira nos estudos e pesquisas que buscam compreender os diferentes modos de raciocinar matematicamente de jovens e adultos, fruto de uma bagagem cultural construída predominantemente em contextos da vida doméstica e profissional, sem excluir as experiências escolares anteriores. (Fantinato & De Vargas, 2010, p. 37)

Entretanto, a tentativa de compreender essas formas de matematizar dos grupos culturais presentes nas salas de aula de EJA não é tarefa simples. Corre-se o risco, por exemplo, como nos alerta Fonseca (2010), da adoção de uma visão ingênua de etnomatemática, imbuída de um olhar condescendente sobre os saberes do *outro* , podendo levar a uma folclorização dos saberes matemáticos construídos pelos adultos, considerando-os pitorescos ou interessantes.

O interesse dos pesquisadores de Educação Matemática pela Etnomatemática também tem outras explicações. Os educadores matemáticos da EJA atentaram, antes daqueles que trabalham com as crianças e adolescentes do ensino regular, para a dimensão política da Etnomatemática (D'Ambrosio, 2001), por lidarem cotidianamente com situações que denotam as múltiplas situações de exclusão que seus alunos compartilham. Sendo assim.

> [...] não é possível discutir a relação entre Educação e Jovens e Adultos e Etnomatemática no Brasil sem levar em consideração a seriedade e a diversidade dos desafios da Inclusão Social, assim como do caráter definidor desses desafios para a constituição da pesquisa em Educação Matemática neste país, como esta se encontra hoje em dia. (Fonseca, 2010, p. 364 – tradução nossa).

Assim, o presente trabalho procura apresentar uma síntese das principais questões que vêm sendo estudadas no Brasil nesta interface entre a EJA e a Etnomatemática, de modo a contribuir para o aprofundamento das discussões e dar continuidade a nossa própria linha de investigação nesta área.

A metodologia de trabalho adotada foi a pesquisa bibliográfica, tomando como fonte de consulta privilegiada os Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática (CBEm3) e o banco de teses da CAPES, assim como alguns sítios dos Programas de Pós-Graduação que disponibilizam o acesso ao texto integral das dissertações e teses consultadas.

2. O que dizem as pesquisas sobre Etnomatemática e EJA

Para uma avaliação inicial da produção brasileira em Etnomatemática e EJA, tendo em vista a construção deste texto, selecionei um conjunto de trabalhos, a partir de duas "fontes" distintas. A primeira delas foram os 11 trabalhos enviados ao CBEm3 que abordavam esta temática. A segunda foram cinco dissertações de mestrado, destacadas a partir de uma lista oriunda de pesquisa ao banco de teses da CAPES, com as palavras-chave *educação matemática* , *educação de jovens e adultos* e *etnomatemática* . Apesar de não abranger a totalidade da produção na área, acreditamos que este conjunto é suficientemente representativo da pesquisa recente em Etnomatemática e EJA.

Uma abordagem inicial dos trabalhos que integraram nossa amostra permitiu agrupá-los em três eixos temáticos: propostas didático-pedagógicas voltadas para jovens e adultos, formação de professores para a EJA e práticas de numeramento/letramento no contexto da EJA.

3. Propostas didático-pedagógicas voltadas para jovens e adultos

As propostas didático-pedagógicas específicas para os educandos jovens e adultos, focadas nos seus saberes cotidianos, têm sido um tema recorrente nos estudos que relacionam etnomatemática e EJA.

Camargo (2008) investigou a articulação entre a matemática escolar e o cotidiano no contexto das tele-aulas do Telecurso 2000. Os resultados deste estudo sinalizam para aquilo que chamamos anteriormente de folclorização dos saberes matemáticos dos educandos adultos. O autor aponta que o desenvolvimento das tele-aulas parte sempre de situações-problema típicas das que ocorrem no cotidiano, porém, para resolvê-las, só é utilizado o conhecimento institucionalizado, ou seja, o escolar. Ou seja, apesar de a proposta curricular do curso se propor a valorizar o suposto conhecimento cotidiano de jovens e adultos, "o que ocorre é uma 'escolarização' do cotidiano, uma vez que o saber cotidiano não é chamado para resolver as dúvidas propostas nem para estimular o desenvolvimento do raciocínio matemático escolar" (Camargo, 2008).

Já Pereira, Pereira & Melo (2008) apresentam uma discussão sobre o uso do livro didático de matemática nos segmentos da EJA e da Educação Indígena. Um dos pontos interessantes deste estudo é que ele aproxima duas modalidades de ensino que trabalham com grupos sociais que historicamente vêm sofrendo diversos tipos de exclusão, e que buscam pelo acesso e permanência na escola uma possibilidade de inclusão social. As autoras sinalizam para a necessidade de os livros didáticos de Matemática empregados na educação de jovens e adultos não serem meramente adaptados do ensino regular, sem nenhum comprometimento com seu público-alvo. "O que normalmente se constata", afirmam elas, "é que os livros didáticos aproveitados na EJA sofrem um enxugamento aleatório dos conteúdos para atender, sem nenhum critério específico, o que deve e o que não deve ser estudado pelos alunos, agravando ainda mais o quadro discriminatório e adverso que os alunos muitas vezes encontram na escola" (Pereira, Pereira & Melo, 2008, p.6). O trabalho propõe que os livros didáticos passem a considerar o modo como os jovens e adultos relacionam-se com os conhecimentos matemáticos e priorizem conhecimentos relevantes para a transformação dos mesmos em cidadãos ativos e participantes na sociedade.

Cherini & Monteiro (2008) tiveram por objetivo compreender as relações entre saberes escolares e não escolares no contexto da EJA, e para tal, optaram pelo estudo da prática social da culinária, considerada significativa para o grupo de alunos de uma escola municipal de uma cidade do interior de São Paulo. As autoras, partindo do princípio de que "sob a perspectiva da Etnomatemática, a discussão curricular pode aprofundar e transformar as práticas escolares" (Cherini & Monteiro, 2008), pretendem contribuir para a construção de uma proposta curricular de matemática num curso de Educação e Jovens e Adultos, ao aprofundar os saberes relacionados a uma prática social que envolve o uso de medidas.

Em síntese, os trabalhos deste grupo sugerem que, na EJA, a perspectiva etnomatemática pode orientar as propostas didático-pedagógicas e a seleção/utilização de materiais didáticos, tais como jogos, livros ou recursos audiovisuais, no sentido de estimular nos docentes atitudes de respeito à diversidade cultural dos jovens e adultos, de emersão dos modos de raciocinar dos educandos e de legitimação dos saberes construídos nas práticas sociais do trabalho e da vida cotidiana.

4. Formação de professores para a EJA

Uma segunda vertente das pesquisas aborda a formação, inicial ou continuada, de professores de Matemática para a prática docente na EJA, apoiada no ponto de vista da Etnomatemática.

Trabalhando numa perspectiva de educação libertadora, com base nos pressupostos freirianos,Vianna (2008) propõe-se a discutir o papel da Etnomatemática enquanto referencial teórico para a formação de professores de EJA, que não se limite à discussão de aspectos didático-metodológicos. O autor destaca a dimensão política da abordagem etnomatemática, que pode proporcionar uma formação que tenha por princípio a valorização dos saberes dos educandos e o fortalecimento de suas raízes culturais, assim como a formação de cidadãos críticos e reflexivos, visando à construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Abordando a mesma temática, Santana, Vergetti & Jardim (2008) apresentaram um relato de uma experiência de formação continuada de professores em serviço, cujo objetivo era relacionar a prática cotidiana dos professores de Matemática da SME/RJ, do Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA) com os pilares que alicerçam a "pedagogia" etnomatemática.Para as autoras, a perspectiva etnomatemática, que valoriza os conhecimentos do estudante trabalhador, suas crenças e seus modos de vida, estimula a permanência na escola desse indivíduo que já sofreu várias marcas de exclusão. O adulto que trabalha o dia inteiro numa rotina exaustiva, precisa de uma escola que o respeite enquanto ser humano atuante e crítico no mundo.

Cascardo, Meireles & Schneider (2008), também discutem experiências de formação continuada no PEJA, que acabaram por suscitar a incorporação da perspectiva etnomatemática como um aporte teórico e metodológico no movimento de elaboração e avaliação de propostas curriculares e de material didático para a EJA, na rede pública do Rio de Janeiro.

Esses autores desenvolveram um projeto cujo objetivo central era buscar modos de reconhecer e apresentar, através de situações didáticas motivadoras, a matemática presente no cotidiano dos alunos, esperando assim poder melhorar seu desempenho.

Em síntese, os estudos acima apresentados indicam que a formação, pela via da Etnomatemática, faz-nos refletir sobre o potencial do trabalho pedagógico que leva em conta os saberes dos educandos, construindo assim aprendizagens mais significativas e que atribuem mais poder e domínio tanto ao educando, sobre seu próprio processo de aprendizagem, quanto ao docente, sobre seu exercício profissional, autônomo, criativo e dialógico.

5. Práticas de numeramento/letramento no contexto da EJA

Um terceiro eixo emergiu das análises dos trabalhos analisados, o das práticas de numeramento / letramento entre adultos pouco escolarizados. O conceito de numeramento toma como referência os estudos sobre letramento (Baker, Street & Tomlin, 2003; Street, 2003) e pode ser entendido como:

> [...] um agregado de habilidades, conhecimentos, crenças, disposições, hábitos mentais, capacidades comunicativas e habilidades de resolução de problemas, que os indivíduos necessitam de maneira a se engajarem autonomamente e administrarem situações de numeramento, que envolvem números, informação quantitativa ou quantificável, ou informação visual ou textual baseada em idéias matemáticas ou que tenha elementos matemáticos embutidos.(Gal, 2000, p.12- tradução nossa)

Morais & Mendes (2008) analisaram a participação de adultos pouco ou não escolarizados em diferentes práticas sociais de leitura e escrita que têm lugar fora do contexto escolar, e que se dá por processos que envolvem a observação, a repetição, a vivência e as experiências nas diversas atividades cotidianas. As autoras basearam-se em relatos desses adultos sobre as suas trajetórias de vida, que lhes permitiram compreender como esses sujeitos se posicionam e participam de situações que envolvem a leitura e a escrita em práticas de numeramento e letramento em seu dia a dia.

Souza & Fonseca (2008) abordam as relações de gênero e a Matemática, com base em entrevistas com catadoras e catadores de lixo, organizados em uma associação. Os cenários da pesquisa, segundo as autoras, são atravessados pelos enunciados de maior valorização das atividades masculinas do que das femininas, pois "esse discurso da superioridade matemática produz a racionalidade como própria do masculino e a irracionalidade como própria do feminino, e isso se multiplica na sociedade moderna, conformando desse modo às práticas de numeramento das mulheres." (Souza & Fonseca,2008)

Em outra produção na área, Cabral & Fonseca (2008) desenvolveram uma pesquisa para identificar as relações estabelecidas por alunos e alunas de EJA entre conhecimentos escolares e não escolares, relações essas que se configuram na constituição de práticas de aprendizagem de numeramento em sala de aula.o de homens, mulheresaas mulheres. moderna, conformando desse modo as pr homens ole das contas da e usam de seus saberes em sup Para as autoras, as dificuldades dos alunos da EJA com a Matemática são consequência de um estranhamento do modo escolar de perceber e divulgar o conhecimento matemático, e também resultado de discursos sobre a Matemática, proferidos em diferentes instâncias da sociedade. É comum, segundo as autoras, que alunos e alunas da EJA falem sobre a matemática, colocando-se como responsáveis pelas dificuldades com essa disciplina e explicitando uma concepção do conhecimento matemático como algo dado, pronto e acabado, vindo, assim, a afastar-se dele. Esse afastamento provoca uma situação de exclusão dos alunos da EJA dentro da própria escola.

Faria, Gomes e Fonseca (2008), tomando como referência a dissertação de mestrado de Faria (2007), problematizam a dicotomização entre saberes escolares e saberes cotidianos, bastante comum entre outros trabalhos na EJA (Porfírio, 2009; Cherini, 2007), e que simplifica e artificializa a compreensão das interações que acontecem nos eventos de numeramento ocorridos no contexto escolar. Com efeito, práticas de numeramento, escolares ou não, cotidianas ou não, não podem ser vistas de modo homogêneo, pois "os valores, os critérios, as opiniões e as atitudes tomadas diante da necessidade de argumentar sobre a resolução de problemas escolares e sobre as situações extra-escolares discutidas em sala de aula, estabelecendo avaliações sobre elas, são diversos entre alunos e entre professores".

Concordo com as autoras, quando concluem em seu texto que a discussão sobre a complexidade das práticas de numeramento presentes na sala de aula de EJA, de acordo com a abordagem etnomatemática (Knijnik, 1996), precisa considerar as relações de poder que envolvem o uso e a abordagem dos diversos saberes, na sala de aula e fora dela.

Os trabalhos analisados apresentam diversas práticas de letramento/ numeramento de jovens e adultos em diferentes contextos, sinalizando a importância da problematização das relações de poder que constituem e mobilizam essas práticas nos espaços das salas de aula de EJA.

6. Etnomatemática e EJA: continuando o debate

As relações entre Etnomatemática e EJA têm sido o foco de minhas investigações há mais de dez anos. No momento atual, desenvolvo uma pesquisa de pós-doutorado, que tem por objetivo analisar pesquisas brasileiras e portuguesas recentes que abordaram a temática da educação de jovens e adultos, e, em especial, as práticas pedagógicas de professores da EJA. Minha intenção é compreender como os processos e saberes dos alunos adultos são articulados nas aprendizagens matemáticas que têm lugar nas salas de aula, qual é o papel exercido pelos professores de Matemática nesta mediação, e quais as relações da formação inicial e continuada desses professores com o exercício docente voltado para as especificidades desses alunos. Pretendo analisar, assim, as formas de interação entre os saberes discentes e docentes e as marcas dos processos formativos na construção da identidade profissional desses professores, identificando também as diferentes concepções de educação de adultos presentes nas pesquisas e nas práticas pedagógicas.

O tema da pesquisa atual representa, pois, uma continuidade da minha linha de pesquisas, iniciada com um estudo etnográfico que investigou representações quantitativas e espaciais entre jovens e adultos moradores de uma comunidade de baixa renda da cidade do Rio de Janeiro (Fantinato, 2003). Minha inserção posterior, de 2003 a 2008, em diferentes atividades de formação continuada organizadas pelo Programa de Educação de Jovens e Adultos do Rio de Janeiro (PEJA), possibilitou-me o contato direto com professores de Matemática de EJA, o que permitiu-me levantar questões sobre a prática docente voltada para os alunos dessa modalidade de ensino.

Durante este período, foram desenvolvidas duas pesquisas, ambas com a colaboração de bolsistas de Iniciação Científica UFF/CNPq. A primeira (Fantinato & Santos, 2007) realizou um estudo de caso de um professor de Matemática da EJA, procurando analisar sua prática docente e aspectos de sua formação que estariam contribuindo para o estabelecimento de canais de diálogo com saberes matemáticos diversos nas salas de aula da educação de jovens e adultos. A segunda (Fantinato & Garcia, 2010) aprofundou os resultados da anterior, entrevistando sete professores do PEJA, buscando analisar o papel da Etnomatemática na formação continuada de professores de jovens e adultos e seus reflexos no exercício da prática docente.

Os resultados das duas pesquisas indicaram que as concepções de Etnomatemática dos professores, embora diversas, apontavam para alguns aspectos comuns. Para eles, trabalhar nessa perspectiva significa ouvir os alunos e aprender com eles, criar espaços de diálogo na sala de aula, legitimar seus saberes matemáticos construídos em diferentes contextos sociais. A principal motivação para o exercício da dialogicidade (Freire, 1974) na EJA é a inclusão desse aluno no contexto escolar. Os professores de Matemática da EJA mostraram-se, portanto, comprometidos com os seus alunos adultos, até mesmo se identificando com eles. Ao dispor-se a aprender com seus alunos sobre suas formas de matematizar, ao valorizar seus saberes e suas vivências, o professor legitima também seus próprios saberes docentes e fortalece sua autonomia profissional, o que denominamos de *processo de legitimação em via de mão dupla* (Fantinato & Santos, 2007).

Entretanto, os resultados também sinalizaram para o fato de que a capacidade dos professores em criar espaços de diálogo entre os diferentes tipos de saberes matemáticos resulta de muitos fatores, sendo a influência da abordagem etnomatemática na formação apenas um deles. Esta abordagem parece representar uma tendência em educação matemática com a qual aqueles professores da EJA mais abertos para a diversidade cultural de seu alunado se identificam. Havia, portanto, necessidade de outras investigações, que aprofundassem o estudo sobre as condições do exercício da prática docente na EJA, especificamente no que diz respeito ao reconhecimento dos saberes oriundos das práticas sociais dos alunos jovens e adultos trabalhadores, e as marcas das formações inicial e continuada na construção da identidade profissional do professor de matemática de adultos. Estas reflexões motivaram a realização de minha atual pesquisa de pós-doutorado, que visa responder às seguintes questões:

- Como as pesquisas brasileiras e portuguesas na área de educação matemática de jovens e adultos vêm estudando a prática docente e suas relações com os saberes dos educandos?
- Que diferentes concepções de adulto e de educação matemática de adultos esses trabalhos apresentam?
- Que perspectivas teóricas essas pesquisas têm adotado para responder a essas indagações?
- Que questões os estudos e as práticas pedagógicas voltadas para os jovens e adultos levantam, no Brasil e em Portugal, sobre as formas pelas quais os professores interagem com os diversos saberes matemáticos de seus alunos e os processos de construção dos mesmos?

- Que contribuições esses trabalhos vêm trazendo para compreender a especificidade da prática docente na EJA e a formação de professores dessa modalidade de ensino?

Este estudo pretende contribuir , exatamente, para a compreensão da especificidade do ensino-aprendizagem para jovens e adultos no exercício profissional do professor de Matemática, em suas interações com os saberes discentes. Sem dúvida nenhuma, a Etnomatemática é uma abordagem que pode fornecer algumas pistas para as respostas a essas indagações.

Referências bibliográficas

Baker, D.; Street, B.; Tomlin, A. (2003) Mathematics as social: understanding relationships between home and school numeracy practices. *For the learning of mathematics*, 23(3), 11-15.

Cabral, V.; Fonseca, M. (2008) "A matemática não entra na minha cabeça:" Educação de jovens e adultos, matemática escolar e posições do sujeito. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,* Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Cherini, C. (2007) *A prática social da culinária: algumas reflexões na construção curricular da matemática na Educação de Jovens e Adultos*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade São Francisco, Itatiba, SP.

Cherini, C.; Monteiro, A. (2008) A prática social da culinária: Algumas reflexões na construção curricular da matemática na educação de jovens e adultos. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,*Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Camargo, M. (2008) Telecurso 2000: Uma análise da articulação da matemática escolar e do cotidiano nas tele-aulas (educação de jovens e adultos). *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,* Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Cascardo, G.; Meirelles, E.; Schneider, S. (2008) Apresentando o projeto: a significância numérica no quotidiano. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática*, Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

D' Ambrosio, U. (2001) *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Fantinato, M. (2003) *Identidade e sobrevivência no morro de São Carlos: representações quantitativas e espaciais entre jovens e adultos.* Tese (Doutorado em Educação) Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

Fantinato, M.; Garcia, M. (2010)*Ethnomathematics and adult students*: challenges to teachers' continuing education. Trabalho apresentado na Fourth International Conference on Ethnomathematics – ICEm4. Towson, USA.

Fantinato, M.; Santos, R. (2007) Etnomatemática e prática docente na educação de jovens e adultos. *Anais do IX ENEM*. Belo Horizonte: SBEM.

Fantinato, M.; De Vargas, S. (2010) Saberes matemáticos do campo e da escola: processos de aprendizagem e educação de jovens e adultos. *Quadrante* Vol. XIX, Nº 1, Lisboa, APM. 29-47.

Faria, J. (2007) *Relações entre práticas de numeramento mobilizadas e em constituição nas interações entre os sujeitos da Educação de Jovens e Adultos*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

Faria, J.; Gomes, M.; Fonseca, M. (2008) A artificialidade da dicotomia entre saberes cotidianos e saberes escolares na mobilização e constituição de práticas de numeramento na sala de aula da Educação de Jovens e Adultos. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática*, Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Fonseca, M. (2010) Adult Education and Ethnomathematics: appropriating results, methods, and principles. *ZDM* (Berlin. Print), v. 42, 361-369.

Freire, P. (1974) *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Gal, I. (2000) The Numeracy Challenge In I. Gal (ed.) *Adult Numeracy Development: Theory, Research, Practice*. Cresskill, NJ: Hampton Press, Inc., 9-31.

Knijnik, G. (1996) *Exclusão e resistência: Educação matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Monteiro, A.; Gonçalves, E.; Santos, J. (2007) Etnomatemática e prática social: considerações curriculares. In: J. R. Mendes & R. C. Grando (orgs.) *Múltiplos olhares: matemática e produção de conhecimento*. São Paulo: Musa Editora.

Morais, J.; Mendes, J. (2008) Adultos pouco (não) escolarizados inseridos em uma sociedade numerada e letrada: concepções e significados produzidos nas práticas. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática*, Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Pais, A. (2011) Criticisms and contradictions of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 76, pp. 209-230.

Pereira, A.; Pereira, D.; Melo, E. (2008) Os livros didáticos de matemática em diferentes contextos educacionais. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática*, Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF

Porfírio, A. (2009) *O reconhecimento do contexto sociocultural do aluno em meio ao ensino e à aprendizagem da Matemática na Educação de Adolescentes Jovens e Adultos – Goiânia / GO*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal de Goiás Goiânia: GO.

Santana, L.; Vergetti, N.; Jardim, S. (2008) A formação de professores em um programa de EJA. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,* Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Souza, M.; Fonseca, M. (2008) Discurso e "verdade": A produção das relações entre mulheres, homens e matemática. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,* Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

Street, B. (2003) *What´s new in the literacy studies? Critical approaches to literacy in theory and practice*. Kings College: London.

Vianna, M. (2008) A etnomatemática na formação do professor de matemática para a educação de jovens e adultos: Perspectivas do processo e dos programas de EJA no Brasil. *Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática,*Niterói, RJ: Faculdade de Educação da UFF.

How We Think[1]

Alan H. Schoenfeld
University of California
Berkeley, CA
USA
alans@berkeley.edu

Abstract[2]

My main goal for this paper is to introduce a theory of decision-making – a theory that provides a way of explaining how and why people make the decisions they do, in the middle of complex activities such as teaching. My current research has evolved from my earlier problem solving work on problem solving (Schoenfeld, 1985), so to set the stage for this discussion I will briefly describe that work – what it showed, and the questions it did not answer. That will allow me to describe what a complete theory should be able to accomplish. I then turn to the main body of this paper, three studies of teaching. In those examples I show how, under certain circumstances, it is possible to *model* the act of teaching, to the point where one can provide a grounded explanation of every decision that a teacher makes during an extended episode of teaching. Following that, I give some other examples to show that the theory is general, and I make a few concluding comments.

Key words

Problem solving, decision-making, teaching.

Resumen

Mi objetivo principal en este trabajo es presentar una teoría de la toma de decisiones - una teoría que proporciona una manera de explicar cómo y por qué las personas toman las decisiones que hacen, en medio de actividades complejas como la docencia. Mi investigación actual ha evolucionado a partir de mi anterior trabajo en la solución del problema en resolución de problemas (Schoenfeld, 1985), así, para preparar el escenario de esta discusión me referiré brevemente a dicho trabajo –lo que mostró, y las preguntas que no respondió. Eso me permitirá describir lo que una teoría completa debe ser capaz de lograr. Luego regreso a la parte principal de este trabajo, tres estudios en la enseñanza. En esos ejemplos se muestra cómo, en ciertas circunstancias, es posible *modelar* el acto de enseñar, hasta el punto en que se puede proporcionar una explicación bien fundada de cada decisión que un maestro hace durante un episodio prolongado de enseñanza. Después de eso, doy otros ejemplos para demostrar que la teoría es general y hago algunas observaciones finales.

Palabras clave

Resolución de problemas, toma de decisiones, enseñanza.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia plenaria dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

1. Introduction

I am honored to have been invited to give presentations at the *XIII Interamerican Conference on Mathematics Education* (IACME XIII) and the *International Seminar of Mathematics Education* (SIEMAT III), and grateful to the organizers for inviting me. It is a great pleasure to visit my friends and colleagues in Brazil and the Americas.

These invitations provided me with a wonderful opportunity to set a personal goal. When Angel Ruiz and I first talked two years ago about my coming to Brazil, I was working on my book *How We Think*. I promised him – and myself – that I would be able to bring a published copy of the book to this conference, and that I would talk about the book.

I keep my promises! I am happy to say that the book *How We Think* now exists (Schoenfeld, 2010). Here is what I am going to discuss.

2. The Challenge

Suppose that you are in the middle of some "well-practiced" activity, something you have done often so that it is familiar to you. Depending on who you are, it might be

- cooking a meal
- fixing a car
- teaching a class
- doing medical diagnosis or brain surgery.

The challenge is this: If I know "enough" about you, can I explain (i.e., build a cognitive model that explains) every single action you take and every decision you make?

My goal for this paper, and for my talk, is to describe an analytic structure that does just that – an analytic structure that explains how and why people act the way they do, on a moment-by-moment basis, in the midst of complex, often social activities.

My major claim is this:

People's in-the-moment decision making is a function of their knowledge and resources, goals, and beliefs and orientations. Their decisions and actions can be "captured" (explained and modeled) in detail using only these constructs.

The main substance of this paper (as in the book) consists of three analyses of teaching, to convey the flavor of the work. Of course, it is no accident that I chose mathematics teaching as the focal area for my analyses. I am, after all, a mathematics educator! But more to the point, teaching is a knowledge-intensive, highly interactive, dynamic activity. If it is possible to validate a theory that explains teachers' decision-making in a wide range of circumstances, then that theory should serve to explain all well practiced behavior.

3. Background: Problem Solving

As I noted above, my current work is an outgrowth of my earlier research on mathematical problem solving. Here I want to summarize the "bottom lines" of that work, to show how it lays the groundwork for my current research.

My major argument about mathematical problem solving (see Schoenfeld, 1985, for detail) was that it is possible to explain someone's success or failure in trying to solve problems on the basis of these 4 things:

1. *Knowledge (or more broadly, resources).* This is not exactly shocking – but, knowing what knowledge and resources a problem solver has *potentially* at his or her disposal is important.

2. *Problem solving strategies, also known as "heuristics."* We know from Pólya's work that mathematicians use such strategies, "rules of thumb for making progress when you do not know a direct way to a solution." Faculty use them; they pick them up by themselves, by experience. Typically, students don't use them. But, my research showed that students can learn to use them.

3. *"Metacognition," or "Monitoring and self-regulation."* Effective problem solvers plan and keep track of how well things are going as the implement their plans. If they seem to be making progress, they continue; if there are difficulties, they re-evaluate and consider alternatives. Ineffective problem solvers (including most students) do not do this. As a result, they can fail to solve problems that they *could* solve. Students can learn to be more effective at these kinds of behaviors.

4. *Beliefs.* Students' beliefs about themselves and the nature of the mathematical enterprise, derived from their experiences with mathematics, shape the very knowledge they draw upon during problem solving and the ways they do or do not use that knowledge. For example, students who believe that "all problems can be solved in 5 minutes or less" will stop working on problems even though, had they persevered, they might have solved them. Students who believe that "proof has nothing to do with discovery or invention" will, in the context of "discovery" problems, make conjectures that contradict results they have just proven. (See Schoenfeld, 1985).

In sum: By 1985 we know what "counted" in mathematical problem solving, in the sense that we could explain, *post hoc*, what accounted for success or failure. As the ensuing 25 years have shown, this applied to all "goal-oriented" or problem solving domains, including mathematics, physics, electronic trouble-shooting, and writing.

BUT... There was a lot that this framework I have just described didn't do. In the research I conducted for *Mathematical Problem Solving*, people worked in isolation on problems that I gave them to solve. Thus,

- The goals were established (i.e., "solve this problem").
- The tasks didn't change while people worked on them.
- Social interactions and considerations were negligible.

In addition, MPS offered a *framework*, not a theory. Above and beyond pointing out what is important – that is what a framework does – a theory should provide rigorous explanations of how and why things fit together. That is what my current work is about. What I have been working on for the past 25 years is a theoretical approach that explains:

- how and why people make the choices they do,
- while working on issues they care about and have some experience with,
- amidst dynamically changing social environments.

I can think of no better domain to study than teaching. Teaching is knowledge-intensive. It calls for instant decision-making in a dynamically changing environment. It's highly social. And if you can model teaching, you can model just about anything! I will argue that if you can model teaching, you can model: shopping; preparing a meal; an ordinary day at work; automobile mechanics; brain surgery (or any other medical practice), and other comparably complex, "well practiced" behaviors. All of these activities involve goal-oriented behavior – drawing on available resources (not the least of which is knowledge) and making decisions in order to achieve outcomes you value.

The goal of my work, and this paper, is to describe a theoretical architecture that explains people's decision-making during suh activities.

4. How Things Work

My main theoretical claim is that goal-oriented "acting in the moment" – including problem solving, tutoring, teaching, cooking, and brain surgery – can be explained and modeled by a theoretical architecture in which the following are represented: Resources (especially knowledge); Goals; Orientations (an abstraction of beliefs, including values, preferences, etc.); and Decision-Making (which can be modeled as a form of subjective cost-benefit analysis). For substantiation, in excruciating detail, please see my book, *How we Think.* To briefly provide substantiation I will provide three examples in what follows. But first, a top-level view of how things work is given in Figure 1. The basic structure is recursive: Individuals orient to situations and decide (on the basis of beliefs and available resources) how to pursue their goals. If the situation is familiar, they implement familiar routines; if things are unfamiliar or problematic, they reconsider. It may seem surprising, but if you know enough about an individual's resources, goals, and beliefs, this approach allows you to model their behavior (after a huge amount of work!) on a line-by-line basis.

How Things Work

- An individual enters into a particular context with a specific body of resources, goals, and orientations.
- The individual takes in and orients to the situation. Certain pieces of information and knowledge become salient and are activated.
- Goals are established (or reinforced if they pre-existed).
- Decisions consistent with these goals are made, consciously or unconsciously, regarding what directions to pursue and what resources to use:
  - If the situation is familiar, then the process may be relatively automatic, where the action(s) taken are in essence the access and implementation of scripts, frames, routines, or schemata.
  - If the situation is not familiar or there is something non-routine about it, then decision-making is made by a mechanism that can be modeled by (i.e., is consistent with the results of) using the subjective expected values of available options, given the orientations of the individual.
- Implementation begins.
- Monitoring (whether effective or not) takes place on an ongoing basis.
- This process is iterative, down to the level of individual utterances or actions:
  - Routines aimed at particular goals have sub-routines, which have their own subgoals;
  - If a subgoal is satisfied, the individual proceeds to another goal or subgoal;
  - If a goal is achieved, new goals kick in via decision-making;
  - If the process is interrupted or things don't seem to be going well, decision-making kicks into action once again. This may or may not result in a change of goals and/or the pathways used to try to achieve them.

Figure 1. How things work, in outline. From Schoenfeld (2010), p. 18, with permission

5. First Teaching Example, Mark Nelson

Mark Nelson is a beginning teacher. In an elementary algebra class, Nelson has worked through problems like, $x^5/x^3 =\ ?$ Now he has assigned

(a) m^6/m^2, (b) x^3y^7/x^2y^6, and (c) x^5/x^5

for the class to work. Nelson expects the students to have little trouble with m^6/m^2 and x^3y^7/x^2y^6, but to be "confused" about x^5/x^5; he plans to "work through" their confusion. Here is what happens.

Nelson calls on students to give answers to the first two examples. He has a straightforward method for doing so:

- He asks the students what they got for the answer, and confirms that it is correct;
- he asks how they got the answer;
- and then he elaborates on their responses.

Thus, for example, when a student says the answer to problem (b) is xy, Nelson asks "why did you get xy?" When the student says that he subtracted, Nelson asks, "What did you subtract? When the student says "3 minus 2," Nelson elaborates:

"OK. You looked at the x's [pointing to x-terms in numerator and denominator] and [pointing to exponents] you subtracted 3 minus 2. That gave you x to the first [writes x on the board]. And then [points to y terms] you looked at the y's and said [points to the exponents] 7 minus 6, gives you y to the first [writes y on board]."

He then asks what to do with x^5/x^5. They expand and "cancel." The board shows $\frac{x^5}{x^5} = \frac{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}$. Pointing to that expression, he says, "what do I have?" The responses are:

"zero," "zip,", "nada," "nothing" … not what he wants them to see! He tries various ways to get the students to see that "canceling" results in a "1", for example,

Nelson: "What's 5/5?"

Students: "1."

Nelson: "But I cancelled. If there's a 1 there [in 5/5], isn't there a 1 there [pointing to the cancelled expression]?"

Students: "No."

Defeated, he slumps at the board while students argue there's "nothing there." He looks as if there is nothing he can say or do that will make sense to the students.

He tries again. He points to the expression $\frac{x^5}{x^5} = \frac{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}$ and asks what the answer is. A student says "x to the zero over 1." Interestingly, Nelson *mis-hears* this as "x to the zero equals 1," which is the correct answer. Relieved, he tells the class,

"That's right. Get this in your notes: $x^5/x^5 = x^0 = 1$."

"Any number to the zero power equals 1."

To put things simply, this is *very* strange. Nelson certainly knew enough mathematics to be able to explain that if $x \neq 0$,

$$\left(\frac{x^5}{x^5}\right) = \left(\frac{x}{x}\right)^5 = 1^5 = 1,$$

but he didn't do so. WHY?

There is a simple answer, although it took us a long time to understand it. The issue has to do with Nelson's beliefs and orientations about teaching. One of Nelson's central beliefs about teaching – the belief that *the ideasyou discuss must be generated by the students* – shaped what knowledge he did and did not use.

In the first example above (reducing the fraction x^3y^7/x^2y^6, a student said he had subtracted. The fact that a student mentioned subtraction gave Nelson "permission" to explain, which he did: "OK. You looked at the x's and you subtracted 3 minus 2. That gave you x to the first. And then you looked at the y's and said 7 minus 6, gives you y to the first."

But in the case of example (c), x^5/x^5, he was stymied – when he pointed to the expression $\frac{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}{\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}\cancel{x}}$ and asked "what do I have?" the only answers from the students were "zero", "zip", "nada" and "nothing." Nobody said "1." And because of his belief that he had to "build on" what students say, Nelson felt he could not proceed with the explanation. Only later, when he *mis-heard* what a student said, was he able to finish up his explanation.

[Note: This brief explanation may or may not seem convincing. I note that full detail is given in the book, and that Nelson was pat of the team that analyzed his videotape. So there is strong evidence that the claims I make here are justified.]

6. Second Teaching Example, Jim Minstrell

Here too I provide just a very brief description.

Jim Minstrell is an award-winning teacher who is very thoughtful about his teaching. It is the beginning of the school year, and he is teaching an introductory lesson that involves the use of mean, median, and mode. But, the main point of the lesson is that Minstrell wants the students to see that such formulas need to be used *sensibly.*

The previous day eight students measured the width of a table. The values:

106.8; 107.0; 107.0; 107.5; 107.0; 107.0; 106.5; 106.0 cm.

Nelson wants the students to discuss the "best number" to represent the width of the table. His plan is for the lesson to have three parts:

1. Which numbers (all or some?) should they use?
2. How should they combine them?
3. With what precision should they report the answer?

Minstrell gave us a tape of the lesson, which we analyzed. The analysis proceeded in stages. We decomposed the lesson into smaller and smaller "episodes," noting for each episode which goals were present, and observing how transitions corresponded to changes in goals. In this way, we decomposed the entire lesson – starting with the lesson as a whole, and ultimately characterizing what happened on a line-by-line basis. See Figures 2 and 3 (next pages) for an example of analytic detail. Figure 2 shows the whole lesson, and the breaks it into major episodes (lesson segments), each of which has its own internal structure. Most of the lesson was very simple to analyze in this way.

Minstrell has a flexible "script" for each part of the lesson:

- He will raise the issue.
- He will ask the class for a suggestion.
- He will clarify and pursue the student suggestion by asking questions, inserting some content if necessary.

- Once this suggestion has been worked through, he will ask for more suggestions.
- When students run out of ideas, he will either inject more ideas or move to the next part of the lesson.

In this way, the lesson unfolds naturally, and it is easy to "capture" it – see Figure 2 for a "top level" summary of how the lesson unfolded. The episodes in the second and third columns, which correspond to an analysis of the lesson as taught, show that Minstrell did cover the big topics as planned.

In fact, a line-by-line analysis (See Schoenfeld, 1998; 2010) shows that when Minstrell was engaged in dealing with expected subject matter, he followed the "script" described above very closely. So, it is easy to model Minstrell's behavior when he is on familiar ground.

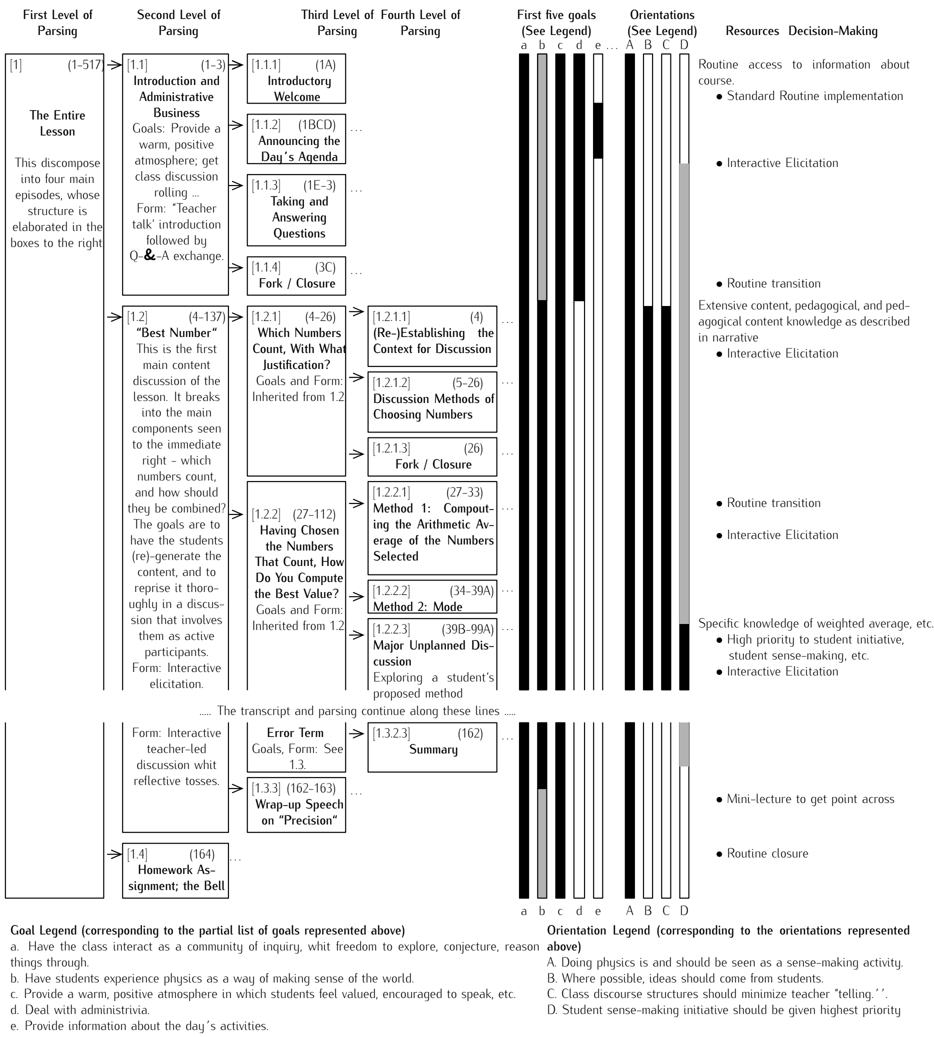


Figure 2. A "top level" view of Minstrell's lesson, "unfolding" in levels of detail. (With permission, from Schoenfeld, 2010, pp. 96-97)

But what about unusual events? Remember the data: The eight values the students had obtained for the width of the table were

106.8; 107.0; 107.0; 107.5; 107.0; 107.0; 106.5; 106.0 cm.

As the lesson unfolded, Minstrell asked the students about "a way of getting the best value." (See box 1.2.2 in the third column of Figure 2.) As the class proceeded, one student mentioned the idea of using the "average" and, when asked by Minstrell, provided a definition. (Box 1.2.2.1 in the fourth column of Figure 2.) Another student mentioned mode (Box 1.2.2.2). Then, a student said:

"This is a little complicated but I mean it might work. If you see that 107 shows up 4 times, you give it a coefficient of 4, and then 107.5 only shows up one time, you give it a coefficient of one, you add all those up and then you divide by the number of coefficients you have."

This is an unexpected comment, which does not fit directly with Minstrell's flexible script. The question is, can we say what Minstrell would do when something unexpected, like this, arises in the middle of his lesson?

Before proceeding, I want to point out that there is a wide range of responses, which teachers might produce. I have seen responses like all of the following:

– "That's a very interesting question. I'll talk to you about it after class."
– "Excellent question. I need to get through today's plans so you can do tonight's assigned homework, but I'll discuss it tomorrow."
– "That's neat. What you've just described is known as the 'weighted average.' Let me briefly explain how you can work with that…"
– "Let me write that up as a formula and see what folks think of it."
– "Let's make sure we all understand what you've suggested, and then explore it."

So, teachers might do very different things. Is it possible to know what Minstrell will do? According to our model of Minstrell,

- His fundamental *orientation* toward teaching is that physics is a sense-making activity and that students should experience it as such.
- One of his major *goals* is to support inquiry and to honor student attempts at figuring things out.
- His *resource base* includes favored techniques such as "reflective tosses" – asking questions that get students to explain/elaborate on what they said.

Thus, the model predicts that he will pursue the last option – making sure that the students understand the issue that the student has raised (including the ambiguity about how you add the coefficients; do you divide by 5 or 8?) and pursuing it. He will do so by asking the students questions and working with the ideas they produce.

This is, in fact, what Minstrell did. Figure 3 shows how that segment of the lesson evolved. It is an elaboration of Box 1.2.2.3 in Figure 2.

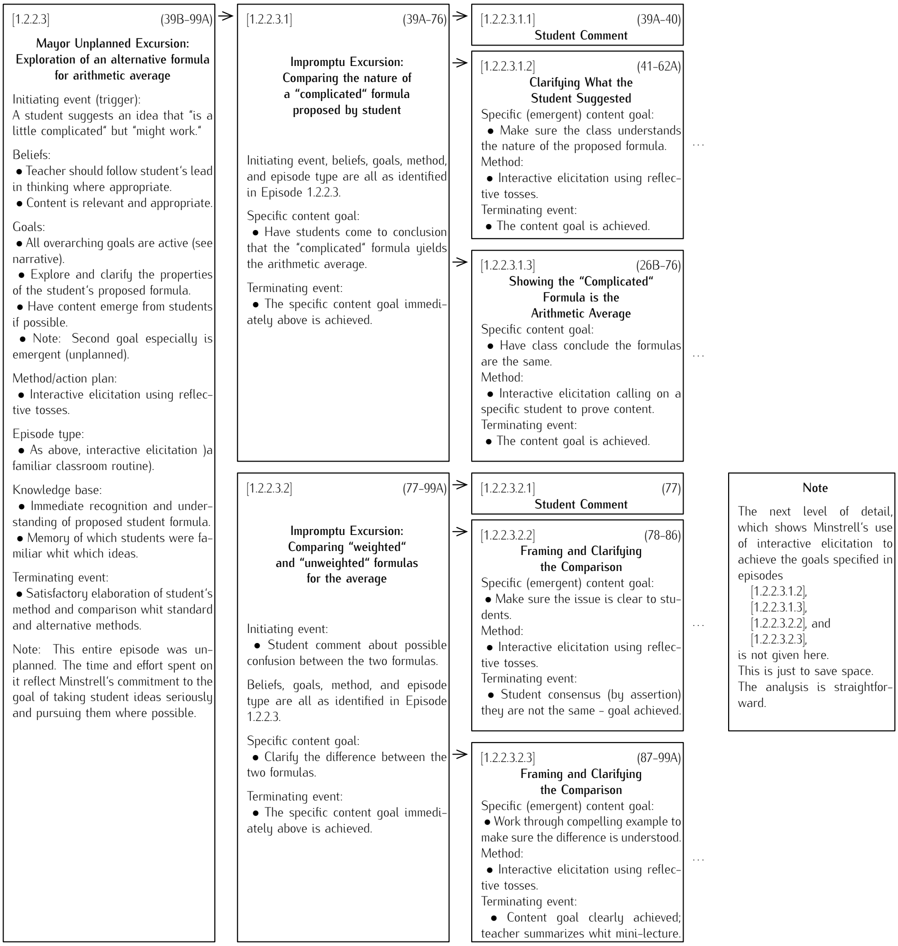


Figure 3. A more fine-grained parsing of Episode [1.2.2.3]. (From Schoenfeld, 2010, pp. 116–117, with permission.)

As noted above, it is possible to model Minstrell's decision, and showing that of the options listed above, he is by far most likely to pursue the one I have indicated. The computations take about 7 pages of text, so I will spare you the detail!

More generally, we have found that:

We were able to capture Minstrell's routine decision-making, on a line-by-line basis, by characterizing his knowledge/resources and modeling them as described in Figure 1, "How Things Work;" and,

We were able to model Minstrell's non-routine decision-making using a form of subjective expected value computation, where we considered the various alternatives and looked at how consistent they were with Minstrell's beliefs and values (his orientations).

In summary, we were able to model every decision Minstrell made during the hour-long class.

7. Third Teaching Example, Deborah Ball

Some years ago, at a meeting, Deborah Ball showed a video of a third grade classroom lesson she had taught. The lesson was amazing – and it was controversial. In it,

- Third graders argued on solid mathematical grounds.
- The discussion agenda evolved as a function of classroom conversations.
- The teacher seemed at times to play a negligible role, and she made at least one decision that people said didn't make sense.

In addition, I had little or no intuition about what happened. Thus, this was a perfect tape to study! There were major differences from cases 1 and 2:

- the students were third graders instead of high school students
- psychological (developmental) issues differed because of the children's age
- the "control structure" for the classroom was much more "organic"
- the teacher played a less obvious "directing" role.

The question was, could I model what happened in this lesson? If so, then the theory covered an extremely wide range of examples, so there would be compelling evidence of its general validity. If not, then I would understand the limits of the theory. (Perhaps, for example, it would only apply to teacher-directed lessons at the high school level.)

Here is what happened during the lesson. Ball's third grade class had been studying combinations of integers, and they had been thinking about the fact that, for example, the sum of two even numbers always seemed to be even. The previous day Ball's students had met with some 4th graders, to discuss the properties of even numbers, odd numbers, and zero. Ball had wanted her students to see that these were complex issues and that even the "big" fourth graders were struggling with them. The day after the meeting (the day of this lesson), Ball started the class by asking what the students thought about the meeting:

- How do they think about that experience?
- How do they think about their own thinking and learning?

Ball had students come up to the board to discuss "what they learned from the meeting." The discussion (a transcript of which is given in full in Schoenfeld, 2008, and Schoenfeld, 2010) covered a lot of territory, with Ball seemingly playing a small role as students argued about the properties of zero (is it even? odd? "special"?). For the most part, Ball kept her students on the "meta-level" question: what did they learn about their own thinking from the meeting with the fourth graders the previous day?

But then, after a student made a comment, Ball interrupted him to ask a *mathematical* question about the student's understanding. This question, which took almost 3 minutes to resolve, completely disrupted the flow of the lesson. Many people, when watching the tape of the lesson, call that decision a "mistake." How could Ball, who is a very careful, thoughtful, and experienced teacher, do such a thing? If the decision was arbitrary or capricious in some way, that is a problem for the theory. If highly experienced teachers make arbitrary decisions, it would be impossible to model teachers' decision making in general.

To sum up, this part of the lesson seems to unfold without Ball playing a directive role in its development – and she made an unusual decision to interrupt the flow of conversation. Can this be modeled?

The answer is yes. A fine-grained analysis reveals that Ball has a "debriefing routine" that consists of asking questions and fleshing out answers. That routine is given in Figure 4.

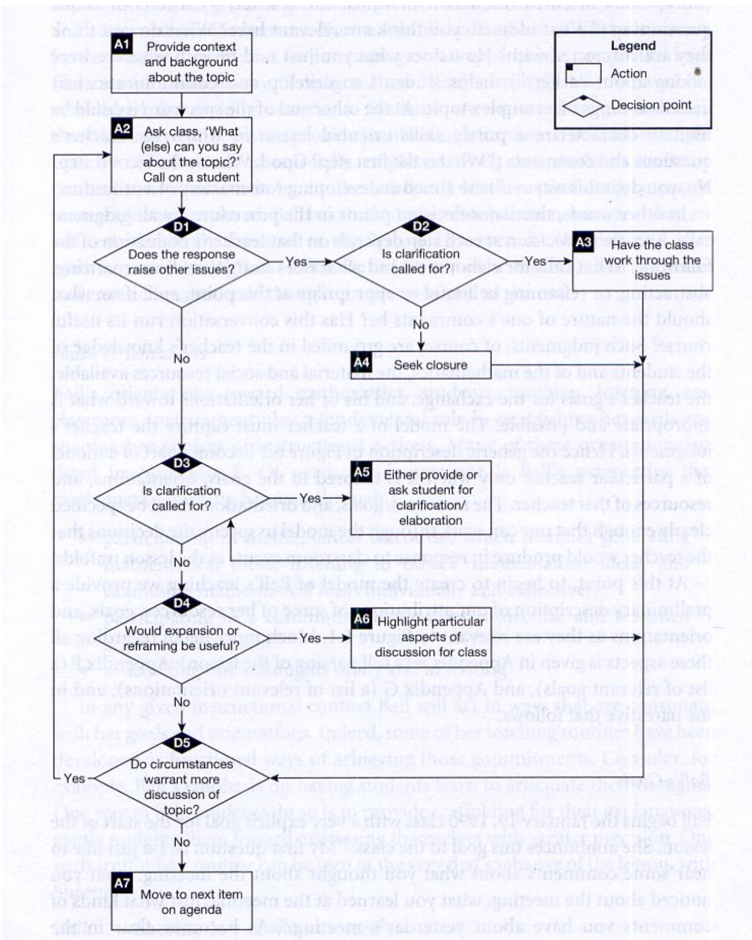


Figure 4. A flexible, interruptible routine for discussing a topic (from Schoenfeld, 2010, p. 129, with permission).

In fact, Ball uses that routine five times in the first six minutes of class (Figure 5).

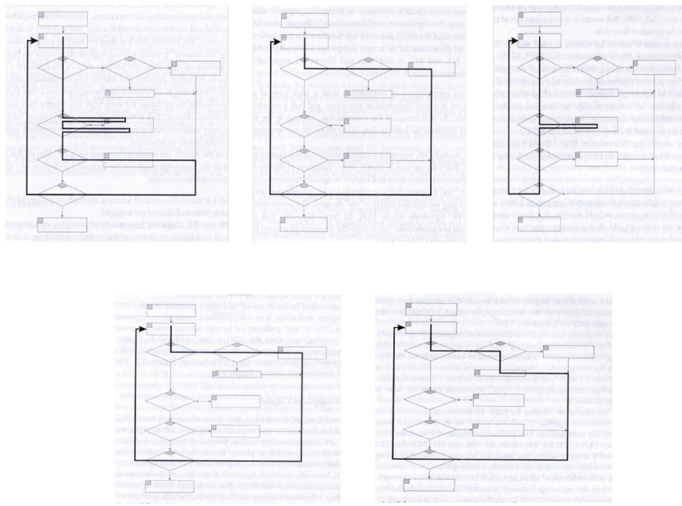


Figure 5. Ball's use of the routine in the lesson segment (from Schoenfeld, 2010, pp. 136–152, with permission).

Moreover, once you understand Ball's plans for the lesson, her unexpected decision (her "mistake" can be seen as entirely reasonable and consistent with her agenda. This has been modeled in great detail. For the full analysis, see Schoenfeld, 2010; for an analytic diagram showing the full analysis, download Appendix E from my web page:

http://www-gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/AHSchoenfeld.html.

To sum things up: As in the two previous cases,

We were able to model Ball's routine decision-making, on a line-by-line basis, by characterizing her knowledge/resources and modeling them as described in the slide "How Things Work."

We were able to model Ball's non-routine decision-making as a form of subjective expected value computation.

In short, we were able to model every move Ball made during the lesson segment.

8. Yet More Examples

Making Breakfast (or any other meal)

If you look at Figure 1, you can see that it would be easy to model decision-making during cooking. Usually we have fixed routines for cooking familiar meals. And if something changes (for example, when my daughter asks me to make a fancy breakfast), that calls for a "non-routine" decision, which can also be modeled.

Routine medical diagnosis and practice

To see if my ideas worked outside of the classroom, I asked my doctor if I could tape and analyze one of my office visits with her. She said yes, and an analysis of our conversation is given in the book. The conversation was easy to model, because she follows a straightforward (and flexible) script. Modeling a two-person interaction is a lot easier than modeling a classroom; it is more like modeling a tutoring interaction. When the teacher only has to pay attention to one other person (instead of 30), decision-making is comparatively simple (and simple to model).

I should note that there is a very large artificial intelligence literature on modeling doctors' decision making – there are computer programs that make diagnoses, etc. (The field is well established: see, e.g., Clancey & Shortliffe, 1984.) So, the idea that it is possible to capture doctors' routine decision making is not new. More recent, and also consistent with my emphasis on beliefs as shaping behavior, there are studies (e.g., Groopman, 2007) of how doctors' stereotypes (orientations) regarding patient behavior lead them to miss what should be straightforward diagnoses.

In Sum:

The approach I have outlined in this paper "covers":

- Routine and non-routine problem solving
- Routine and non-routine teaching
- Cooking
- Brain surgery

and every other example of "well-practiced," knowledge-based behavior that I can think of. All told, I believe it works pretty well as a theory of "how we think."

Readers have the right to ask, why would someone spend 25 years trying to build and test a theory like this? Here is my response.

First, theory building and testing should be a central part of the research enterprise. That is how we make progress.

Second, the more we understand something the better we can make it work. When we understand how something skillful is done we can help others do it.

Third, this approach has the potential to provide tools for describing developmental trajectories of teachers. In that way, we can think about how best to help teachers get better at helping their students learn. (See Chapter 8 of Schoenfeld, 2010.)

Finally, its fun! The challenge of understanding human behavior has occupied me for the past 35 years, and I am happy to continue working on it.

9. References

Clancey, W. J., & Shortliffe, E. H. (Eds). (1984). *Readings in medical AI: The first decade*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1998b). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4(1), 1–94.

Schoenfeld, A. H. (Ed.) (2008). *A study of teaching: Multiple lenses, multiple views. (Journal for research in Mathematics Education* monograph series # 14). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. New York: Routledge.

Groopman, J. (2007). *How doctors think*. Boston: Houghton Mifflin.

El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza[1]

Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Cinvestav-IPN
México
msantos@cinvestav.mx

Resumen[2]

¿Qué conocimiento matemático para la enseñanza se deben promover en los programas de formación y desarrollo profesional de profesores? En la discusión de esta pregunta se esbozan temas y líneas de reflexión que promueven actividades de resolución de problemas como aspectos cruciales en la educación de los profesores de matemáticas. Se destaca la importancia de que los profesores en su formación se apropien y valoren un método inquisitivo para interactuar con los conceptos, ideas y en la resolución de problemas matemáticos. En particular, el empleo de diversas herramientas computacionales se identifica como esencial en los programas de formación.

Palabras clave

Resolución de problemas, programas de formación de profesores, uso de herramientas computacionales.

Abstract

What mathematical knowledge for teaching should be promoted in teacher preparation and professional development programs? In discussing this question themes and lines of reflection that promote problem solving activities as crucial aspects of the education of math teachers are outlined. The importance that pre-service teachers own and value an inquisitive method for interacting with the concepts, ideas and problem solving is highlighted. In particular, the use of various computational tools is identified as essential in preparation programs.

Key words

Problem solving, teacher preparation programs, use of computational tools.

1. Antecedentes

La educación o formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas son aspectos fundamentales que inciden directamente en las formas en que los profesores

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

conceptualizan, estructuran y promueven el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo existe una diversidad, en el ámbito internacional; sobre qué contenidos y formas de implementar los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores. A pesar de esa variedad de enfoques y trayectorias de los programas, existe un pleno reconocimiento sobre la importancia y papel del profesor en la implementación de las reformas del currículum y en la creación de escenarios de enseñanza que promuevan la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Tatto, Lerman & Novotna (2011) mencionan que se sabe poco acerca de las oportunidades para aprender matemáticas y pedagogía que se les ofrecen a los futuros profesores y a los profesores en ejercicio en el mundo y acerca de la efectividad de esas oportunidades. Afirman que "…la comparación de los efectos en la preparación de los profesores en el ámbito internacional es importante en este momento caracterizado por el clima de las reformas en la educación" (p. 314). ¿Cómo se construye un programa de formación de profesores de matemáticas? ¿Quién debe participar y cuál es la ruta para formarlos? ¿Qué contenidos matemáticas y didácticos se deben incluir en esos programas? ¿Qué nivel de profundidad del conocimiento matemático deben desarrollar en su formación? ¿Cómo y quién debe establecer e implementar programas de desarrollo profesional para los profesores en servicio? ¿Qué objetivos deben perseguir en esos programas? ¿Cómo evaluar el desempeño de los profesores? Estas son algunas preguntas que resultan de interés en el diseño de programas de formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. En la discusión conviene enfocar la atención hacia el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza que les permita tomar decisiones sustentadas alrededor de sus prácticas profesionales. Este conocimiento incluye un conocimiento sólido de los contenidos y procesos del pensamiento matemático. Además, un conocimiento didáctico que le permita identificar los conceptos fundamentales del currículum, establecer metas de aprendizaje, desarrollar diversas maneras de evaluarlas, seleccionar actividades pertinentes de enseñanza, y analizar el proceso que muestren los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje.

2. Conocimiento para la enseñanza

El desarrollo notable de diversas disciplinas y los avances de la tecnología demandan examinar y discutir las formas o modelos de preparación de los profesores con la intención de proponer programas de formación que respondan a las necesidades de la sociedad en su conjunto. Tatto, (2010) identifica un conjunto de eventos asociados con el ciclo profesional de los profesores. Comienzan con el interés de ser profesor y buscan y se incorporan a los programas de formación. Los programas dependen de las características del sistema educacional del país. Ya en las aulas, se espera que el conocimiento que adquirió durante su formación sea transferido en un conocimiento para la enseñanza. Este ciclo no necesariamente produce una formación en los profesores que promueva y logre una construcción robusta del conocimiento matemático de los estudiantes. ¿Qué tipos de reformas se deben contemplar en la formación y desarrollo profesional de los profesores? Se reconoce, que los profesores de matemáticas, que son los que propician condiciones y proponen actividades de aprendizaje para los estudiantes, deben no solamente poseer una formación sólida en matemáticas; sino también deben poder interpretar y orientar el proceso de construcción y aprendizaje de los estudiantes. Además, los profesores mismos deben mostrar diversas maneras de razonamiento y capacidades de resolución de problemas matemáticos. Papick (2011) afirma que "los profesores de matemáticas deben comprender profundamente las ideas matemáticas (conceptos, procedimientos, habilidades de razonamiento) que son centrales en los cursos o grados que estarán enseñando y ser capaz de comunicar estas ideas en una manera apropiada al desarrollo [cognitivo] del alumno" (p. 389). ¿Qué significa que los profesores tengan un conocimiento sólido o robusto de las matemáticas? ¿Qué conocimiento o contenido matemático y a qué profundidad deben dominar los profesores de matemáticas del nivel básico o preuniversitario? ¿Cómo los profesores pueden construir un pensamiento sólido o profundo de la disciplina?

Es evidente que los profesores de matemáticas deben comprender y utilizar los conceptos fundamentales que pretenden enseñar; sin embargo, es necesario también identificar las rutas que puedan seguir para desarrollar un conocimiento robusto de la disciplina. En la resolución de problemas no rutinarios es necesario que los profesores discutan y valoren la importancia de examinar y explorar el enunciado del problema desde diversos ángulos con la intención de discutir su sentido y racionalidad. Esta discusión resulta crucial en la selección de recursos y conceptos o conjunto de resultados necesarios para resolverlos de manera eficiente (Polya, 1945). En este proceso es importante que el profesor realice una búsqueda de conexiones entre los métodos de solución y su aplicación en otros problemas, establezca posibles extensiones y contraste varias formas de resolución.

3. Un Ejemplo de actividad o problema

Para comenzar a esbozar aspectos relacionados con el pensamiento matemático, el razonamiento, el hábito de la disertación y la exploración de diversas alternativas de solución, todo ello importante en la formación del profesor, consideremos el siguiente problema:

Supongamos que hay 1024 jugadores de tenis en un torneo que se jugará con el sistema de eliminación simple (jugador que pierda se elimina del torneo). ¿Cuántos partidos se deben jugar para determinar el campeón del torneo?

Se sustenta que el profesor debe conceptualizar un problema o el entendimiento de un concepto matemático como una oportunidad involucrarse en un proceso inquisitivo que le permita pensar diversas maneras de cómo representar, explorar, resolver y extender el problema inicial. En este ejemplo, la reflexión puede iniciarse con la discusión sobre la importancia del número de jugadores y la regla de eliminación. En una lectura superficial pudiera parecer que no hay dificultad para comprender la regla de eliminación. Pero una pregunta que nos hará reflexionar sobre ella es ¿cuántos partidos jugará el triunfador?

Podemos imaginar diversas maneras de llevar a cabo el torneo, por ejemplo alguien puede pensar que una manera es hacer una primera ronda de 512 juegos, después una de 256, etcétera, hasta llegar a la ronda final que consistirá de un partido, de donde saldrá el triunfador. Una segunda forma de organizar el torneo consiste en numerar a los jugadores del 1 al 1024. La eliminación se llevará a cabo enfrentando a los dos primeros jugadores, el ganador de ambos se enfrenta al tercero, ahora el ganador se enfrenta al cuarto y así sucesivamente. Una tercera forma consiste en formar grupos de jugadores para obtener un ganador de cada grupo, por ejemplo podemos formar 32 grupos cada grupo con 32 jugadores. De cada uno de estos grupos se elige un ganador mediante cualquier proceso de eliminación simple. Con esto obtendremos 32 ganadores y a ellos se aplica un proceso de eliminación simple. El proceso de eliminación simple que se aplique al nuevo grupo de 32 jugadores puede ser el empleado para cada uno de los 32 grupos originales, pero también puede ser diferente, por ejemplo puede consistir en la formación de grupos más pequeños, para obtener finalmente un único grupo de dos jugadores que disputarán el partido final de donde surgirá el campeón.

Si aplicamos la primera forma de eliminación simple, podemos concluir que el número de partidos para determinar el ganador es:

$$512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1023$$

Para obtener el resultado de esta sumatoria, podemos acudir a una calculadora o bien aplicar, la fórmula para una suma geométrica:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Esta fórmula puede dar lugar a una discusión sobre su origen, validez y a una justificación de que vale para todo natural n y todo real $r \neq 1$. En este caso $r = 2$ y $n = 9$, así que tenemos

$$512 + 256 + \cdots + 2 + 1 = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1 = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Obsérvese que esta forma de organizar los partidos del torneo fue posible debido a que el número de participantes es una potencia de 2: $1024 = 2^{10}$.

Si aplicamos la segunda forma de organización de los partidos del torneo, se obtiene un ganador al enfrentar el jugador 1 con el 2. Este ganador en un segundo partido se disputa su permanencia con el jugador 3, en un tercer partido entra a jugar el 4, etc. De aquí podemos concluir que mediante este proceso de eliminación simple se juegan 1023 partidos, resultado que coincide con el antes obtenido. Una pregunta que nos podemos hacer ¿todos los procesos de eliminación simple conducen al mismo resultado? Una observación importante es que para esta segunda organización de los partidos no fue necesario que el número de participantes fuese una potencia de 2, la estrategia de conteo es aplicable a cualquier número de jugadores, ni siquiera se requiere que sea un número par. Así que estamos en posibilidades de generalizar el problema a partir de la estrategia de solución.

Otra estrategia para contar el número de partidos es razonando de la siguiente manera: de los 1024 jugadores inscritos en el torneo, solamente habrá al final un ganador, el campeón y por lo tanto quedarán en el camino 1023 perdedores. Cada perdedor se elimina después de perder exactamente un partido, algunos jugadores habrán ganado algunos partidos, pero estos ya están contabilizados al considerar a los perdedores correspondientes, por lo tanto deben jugar 1023 juegos para determinar al campeón. Como en el caso anterior, en este razonamiento es irrelevante el número de jugadores, podemos aplicarlo a cualquier número de jugadores. Esta estrategia de conteo es muy elegante y casi no requiere operaciones aritméticas, lo valioso de este proceso de solución es el razonamiento mismo, más que la herramienta matemática empleada. La forma de razonamiento que se ilustran en este acercamiento al problema son elementos fundamentales que se deben promover en la formación de los profesores. En particular, concebir un problema como una oportunidad de pensar la situación o enunciado desde diversas perspectivas que demanden la utilización de diversos recursos, conceptos y hábitos del pensamiento matemático.

4. La importancia del conocimiento didáctico

Desafortunadamente muchos estudiantes exhiben serias dificultades al intentar resolver problemas que requieren recursos ya estudiados previamente. Por ejemplo, Mason, Burton y Stacey (1982) reportan que estudiantes que habían terminado estudios de bachillerato no sabían qué oferta resulta más conveniente en una determinada compra: "si quitar el 20 % de descuento de un producto y después agregarle el 15 % del impuesto; o pagar primero el impuesto y después quitar el descuento". En los programas de formación de los profesores el conocimiento de las dificultades de los estudiantes y las formas de superarlas son aspectos de la agenda académica que los profesores deben abordar en sus actividades de formación.

Todo matemático sabe que el empleo de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas demanda de un proceso de reflexión que va más allá de un cierto dominio teórico. Implica reconocer la estructura profunda de los conceptos y resulta muchas veces un proceso difícil para los estudiantes. Por ejemplo, estudiantes universitarios que habían cursado exitosamente un curso de cálculo, mostraron serias dificultades al resolver problemas no rutinarios (un ejemplo de esos problemas fue: ¿tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ alguna raíz entre -1 y 0? ¿Por qué?) donde aparentemente sólo se empleaban los conceptos que ya habían estudiado previamente (Selden, Selden & Mason, 1994). La mayoría de los estudiantes no reconoció que los recursos estudiados en el curso de cálculo le ayudaban a responder esta pregunta. Es evidente que no es suficiente conocer la herramienta matemática que uno necesita para resolver un problema, sino que hay cuándo y cómo aplicarla, resolver problemas prototipo, además de desarrollar la capacidad de análisis y razonamiento.

En términos del conocimiento didáctico que los profesores deben dominar se incluye establecer dinámicas de interacción entre los estudiantes que fomenten su participación activa en los procesos de resolución de problemas. Aquí resulta importante que los estudiantes comuniquen o expresen sus ideas y exhiban sus formas de pensar en los procesos de solución. El profesor debe valorar y guiar a los estudiantes hacia la presentación de argumentos basados en el razonamiento matemático. Adler y Davis (2006) argumentan que los profesores deben orientar a los estudiantes en el desarrollo de recursos e ideas consistentes con la práctica matemática. Esto incluye señalar cuando los comentarios o respuestas a los problemas que exhiban los estudiantes incluyan errores o limitaciones matemáticas. Adler y Davis ilustra algunas respuestas que los estudiantes escriben al resolver la ecuación $x^2 - 2x = -1$:

1. estudiante 1: $x = 1$ porque si $x^2 - 2x = -1$, entonces $x^2 = 2x - 1$ y $x = \sqrt{2x-1}$

   x no puede ser 0 porque se tendría $0 = \sqrt{-1}$

   x no puede ser negativa porque se tendría la raíz cuadrada de un negativo

   $x = 1$ funciona porque tenemos $1 = 1$ y ningún otro número mayor que uno cumple.

2. estudiante 2: $x = 1$ porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x(x-2) = -1$ y así $x = -1$ o $x - 2 = -1$, lo que nos lleva a que $x = 1$ (porque $x = -1$ no es cierto)

3. $x = 1$ porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x^2 - 2x - 1 = 0$ y esto se factoriza como $(x-1)(x-1) = 0$; y así $x = 1$, etc.

Así, el conocimiento didáctico de los profesores debe incluir recursos que les permita explicar a sus estudiantes caminos y formas apropiadas de utilizar conceptos y representaciones matemáticas. Este conocimiento es un vehículo que les puede ayudar a identificar limitaciones y reconocer las ventajas de examinar sus propias respuestas desde diversas perspectivas. De manera similar, Papick (2011) afirma que el conocimiento matemático para la enseñanza debe preparar a los profesores para que respondan de manera sustentada una serie de preguntas que los estudiantes enfrentan en sus experiencias de aprendizaje. Algunas de esas preguntas incluyen:

1. Mi profesor del curso del año pasado me dijo que lo que yo haga de un lado de una ecuación también lo debo hacer del otro lado para mantener la igualdad. No entiendo que hago mal al sumar 1 al numerador de ambas fracciones en la igualdad $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y así obtener $\frac{2}{2} = \frac{3}{4}$.

2. ¿Por qué el libro dice que un polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ si y sólo si cada $a_i = 0$, y después dice que $2x^2 + 5x + 3 = 0$?

3. En la tarea se nos pide encontrar el siguiente término en la lista de números $3, 5, 7, \ldots$? John dice que la respuesta es 9 (pensó en los números impares), yo digo que la respuesta es 11 (pensé en los primos), y María dice que la respuesta es 3 (pensó en el patrón periódico). ¿Quién tiene la razón? etc.

Papick (2011) además establece que los profesores deben estar preparados para: evaluar el aprendizaje de los estudiantes a través de una variedad de métodos y tomar decisiones curriculares apropiadas (seleccionar e implementar un currículum), comprender el contenido matemático y comunicar las metas del aprendizaje de la disciplina a los padres, autoridades, etc. Es decir, se intenta que el profesor construya y estructure un marco que sustente sus prácticas de enseñanza que le permita explicar y responder diversas situaciones auténticas que emerjan durante el desarrollo de la enseñanza.

5. Sobre el papel de la resolución de problemas en la formación de los profesores

Los profesores de matemáticas necesitan desarrollar cierta sofisticación y dominio del contenido matemático que les permita seleccionar, organizar, estructurar e implementar actividades de enseñanza. Deben ser capaces de analizar, interpretar y evaluar las diversas maneras en que el estudiante construye el conocimiento matemático. ¿Cómo se adquiere esa sofisticación matemática? ¿Qué significa que un profesor o investigador en educación matemática domine ciertos contenidos matemáticos?

El conocimiento matemático que se necesita para la enseñanza (e investigación) no es una versión ligera de las matemáticas formales, la educación matemática es un área seria que demanda un arduo trabajo matemático (Davis y Smith, 2006).

Así, el conocimiento matemático para la enseñanza y la investigación en educación matemática debe entonces incluir:

1. Un claro dominio no solamente del contenido que se enseña; sino también el conocimiento de un contexto más amplio para establecer conexiones entre el material a enseñar y otros contenidos matemáticos

2. Una comprensión de la forma en que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla y la variación en los acercamientos sobre el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático

3. Un dominio de las estrategias de enseñanza que ayuden al desarrollo del aprendizaje matemático de los estudiantes.

¿Por qué es importante caracterizar los rasgos del pensamiento matemático? ¿Cómo se relaciona el pensamiento matemático con las metas y objetivos de la educación matemática? La discusión de este tipo de preguntas genera y explica una visión de las matemáticas y lo que significa aprenderlas o ser competente en su estudio. Por ejemplo, durante el siglo XX se identifican varias reformas en la educación matemática en respuesta a los cambios en la sociedad y en la escuela. Así, durante la primera mitad del siglo XX el éxito en el estudio de las matemáticas hasta el nivel secundaria se asociaba con el empleo de procedimientos de cálculos aritméticos y el manejo fluido de las operaciones básicas. Después durante el período 1950-1960 la reforma de la matemática moderna caracterizaba el aprendizaje de las matemáticas en términos de la comprensión de las estructuras matemáticas e ideas unificadoras de la disciplina como son los conjuntos. Posteriormente hubo otros movimientos en la década de los 70s que enfatizaba otra vez el regreso al estudio de las operaciones básicas y el uso de algoritmos. Esta propuesta fue ampliamente cuestionada ya que los estudiantes memorizaban procedimientos sin comprender el significado de los resultados ni por qué utilizaban eso procedimientos. A partir de los 80s se genera un movimiento universal que asocia el estudio de las matemáticas con la resolución de problemas (Santos, 2007). En esta propuesta se relaciona el aprendizaje de la disciplina con la importancia de que los estudiantes desarrollen formas de pensar consistentes con el quehacer o la práctica del conocimiento matemático. Esta forma de pensar incluye no solamente el desarrollo de hábitos propios de la disciplina, sino también recursos y habilidades para comprender conceptos y resolver problemas matemáticos. De manera general, ser competente en el estudio de las matemáticas implica que el estudiante desarrolle:

1. Una comprensión conceptual del conocimiento matemático que se expresa en términos de conexiones entre las ideas, conceptos y operaciones entre relaciones (NCTM, 2000). Por ejemplo, un acercamiento conceptual en el estudio de la derivada implica que el estudiante establezca conexiones entre los diferentes significados asociados a este concepto, es decir, entre el significado geométrico, la definición formal, razón de cambio, velocidad instantánea y por supuesto el cálculo de derivadas.

2. Una fluidez operativa o procedimental donde el estudiante desarrolle estrategias y habilidades para desarrollar, calcular operaciones y, aplicar reglas de una manera flexible, apropiada y eficiente.

3. Un hábito inquisitivo que le permita formular, representar y hacer disertaciones al resolver problemas matemáticos. Es decir, el estudiante constantemente se debe plantear preguntas que lo lleven a la búsqueda de relaciones o conjeturas y formas de representarlas que permitan explorarlas de manera sistemática.

4. Capacidad de razonamiento donde el estudiante valore la importancia de sustentar o rechazar relaciones o conjeturas matemáticas a partir del empleo de diversos tipos de argumentos, incluyendo los formales y el uso de contraejemplos.

5. Una inclinación hacia el estudio de las matemáticas que le permita valorarla como una disciplina sensible, útil y necesaria en la toma de decisiones en esta sociedad.

6. Una serie de hábitos que deben ser parte de la cultura en el salón de clase (Cuoco, 1996). Entre otros, la búsqueda de patrones y relaciones, consideraciones de casos especiales, formulación de conjeturas, identificación de estructuras, evaluación de los procesos de solución, También debe establecer conexiones, justificar o validar soluciones, refinar argumentos, generalizar soluciones y comunicar resultados.

Los seis puntos mencionados no son entidades separadas sino constituyen un marco integrado que puede guiar la formación y el desarrollo profesional del profesor.

6. Sobre el uso de las herramientas digitales para el aprendizaje

Otra componente esencial en el desarrollo del pensamiento matemático se relaciona con el uso de diversas herramientas digitales en las actividades de aprendizaje y resolución de problemas. Hay diversas investigaciones sobre diferentes tipos de software relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Los diferentes tipos de software van desde programas de matemáticas para uso profesional y educativo como son Mathematica, Maple, Derive, software de geometría dinámica hasta sitios en línea (internet) de libre acceso como es www.wolframalpha.com.

Veamos un ejemplo con el uso de un software dinámico. Se traza la recta AB y un círculo con centro en A y radio r menor que la longitud el segmento $\overline{AB}$. Sobre el círculo se selecciona un punto P y se traza la recta PA. Sobre esta misma recta se selecciona un punto C y se traza la recta CB. Al mover el punto P alrededor de la circunferencia se obtiene una familia de triángulos. Es decir con la herramienta se construye una representación dinámica del triángulo (Figura 1).

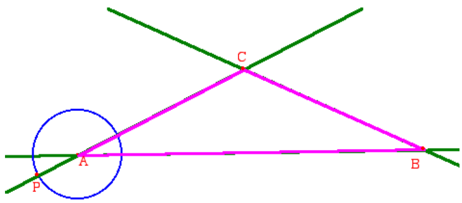


Figura 1: Representación dinámica de un triángulo

En este modelo dinámico ahora se traza la mediatriz del lado BC y se observa que esta corta a la recta AC en un punto Q. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve alrededor del círculo? Con la ayuda de la herramienta se obtiene lo siguiente:

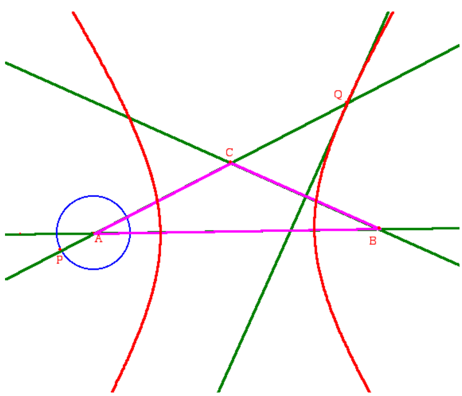


Figura 1 b. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve alrededor del círculo?

El lugar geométrico que se genera parece ser una hipérbola; sin embargo es importante sustentar esta conjetura que surge de la figura generada por el software. En el intento por demostrar que efectivamente se trata de una hipérbola, hemos de elegir dos puntos que serán los focos de la hipérbola. Los puntos naturales para ser candidatos a los focos son A y B. Ahora, con la misma herramienta situemos un punto R sobre el lugar geométrico. Tratemos de verificar si Q y R satisfacen la definición de hipérbola, considerando los puntos A y B como focos. Usando el mismo software se observa que para posiciones distintas de Q y R se cumple la relación algebraica que define una hipérbola (Figura 2).

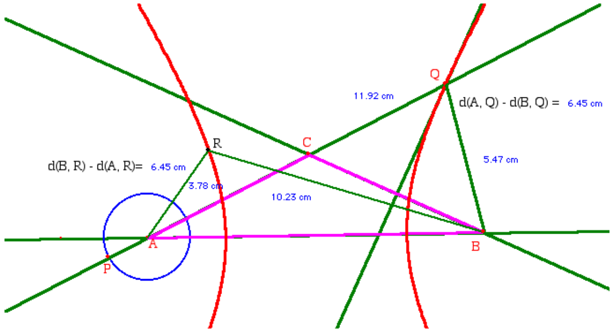


Figura 2: Se observa que al mover el punto P sobre el lugar geométrico, el punto cumple con la definición de hipérbola (asumiendo que los puntos A y B son los focos).

Pero esto que observamos no podemos considerarlo una prueba de que efectivamente se trata de una hipérbola. Debemos de reconocer que el software trabaja con aproximaciones (truncamientos o redondeos) por lo que no podemos hacer la afirmación con certeza. La prueba requiere de consideraciones y razonamientos geométricos. Necesitamos un argumento contundente.

¿Qué ocurre ahora si el punto A se acera o se aleja del punto B? La Figura 3 muestra un caso en el que el lugar geométrico se asemeja a una elipse. Nuevamente hemos de sustentar la conjetura de que se trata de una cónica, en este caso una elipse.

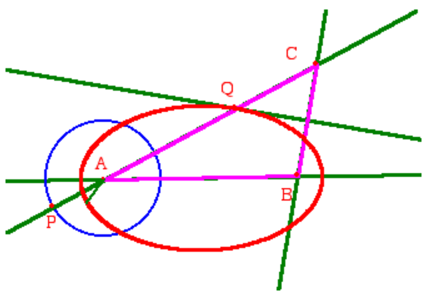


Figura 3: Al mover el punto A se observa que el lugar geométrico se convierte en una elipse.

El uso de las herramientas computacionales ofrece una oportunidad para representar y explorar objetos o configuraciones geométricas como un camino para establecer conexiones y generar o construir relaciones matemáticas. Pero estas relaciones habrán de sustentarse con razonamientos o argumentos matemáticos o geométricos. Así, los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores deben incluir el uso sistemático de diversas herramientas digitales y caracterizar las formas de razonamiento que emergen en las experiencias de resolución de problemas.

7. Sobre la agenda académica de la formación y desarrollo profesional de los profesores desde la resolución de problemas.

Se esbozan temas y preguntas relevantes que un programa de formación y desarrollo profesional de profesores deben considerar en las actividades de resolución de problemas.

1. Sobre los aspectos relacionados con la resolución de problemas y la construcción del pensamiento matemático del estudiante. Aquí algunas preguntas importantes incluyen:
   a) ¿Qué actividades de resolución de problemas ayudan a los profesores a desarrollar y construir el conocimiento matemático para la enseñanza?
   b) ¿Qué distingue o cómo se caracteriza el pensamiento matemático que deben exhibir los profesores en sus experiencias de resolución de problemas y diseño de actividades para la enseñanza?
   c) ¿Qué tipo de problemas favorecen la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes?
   d) ¿Cómo se explica la construcción o desarrollo de un conocimiento nuevo en los estudiantes?
2. Sobre el currículum matemático y la enseñanza
   a) ¿Cómo se diseña y estructura una propuesta de currículum?
   b) ¿Qué contenidos y procesos del pensamiento matemático se deben incluir en la propuesta?
   c) ¿Qué escenarios de enseñanza promueven el desarrollo o construcción del conocimiento de los estudiantes?
   d) ¿Cómo se evalúa el aprendizaje de los estudiantes?
3. Sobre el uso de las herramientas computacionales
   a) ¿Cómo se caracteriza el proceso de apropiación de una herramienta para convertirla en un instrumento para comprender conceptos y resolver problemas?
   b) ¿Cuál es el papel del empleo de distintas herramientas en la comprensión de ideas y la resolución de problemas?
   c) ¿Qué formas de razonamiento se manifiestan en la resolución de problemas cuando utilizan sistemáticamente diversas herramientas en los procesos de solución?
   d) ¿Cómo se evalúa la pertinencia de un instrumento?

Un resultado importante que emerge de la investigación en educación matemática es el reconocimiento de que el conocimiento matemático y para la enseñanza se construye bajo la participación activa de los profesores en diversas actividades de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985). Además, de que la construcción se basa en los conocimientos y recursos que los sujetos han aprendido en sus experiencias previas de aprendizaje. En consecuencia, muchos de los métodos utilizados en la resolución de problemas para promover la reflexión y fomentar el aprendizaje incluyen el trabajo en grupos pequeños, que participen en discusiones con toda la clase y en la resolución de problemas a través de entrevistas estructuradas. Estas formas de estructurar las actividades de aprendizaje han aportado información valiosa relacionada con la evaluación del aprovechamiento o competencias matemáticas de los estudiantes. Además, los mismos problemas que se han utilizado en los programas de investigación se han convertido en recursos importantes para los profesores de matemáticas en la promoción o construcción del pensamiento matemático de sus estudiantes.

8. Conclusiones

Resulta necesario que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores que realmente reflejen la esencia de lo que significa aprender la disciplina. En particular, lo que interesa es que los profesores desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados. En este sentido, es importante estructurar actividades en términos de secuencias de problemas donde se reflejen los aspectos inherentes que transforman las asignaturas tradicionales en líneas de pensamiento numérico, algebraico, geométrico y estadístico. Así, el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final; sino dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver series de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje. , un aspecto crucial en las agendas de resolución de problemas es la interacción y discusión abierta entre los grupos de investigación sobre los aspectos comunes y principios o fundamentos que distinguen cada uno de los programas. En la resolución de problemas se reconoce también que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático; sin embargo, todos esos caminos coinciden en reconocer la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que en este caso los profesores deben necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos. En este proceso, los profesores desarrollan el hábito inquisitivo que les permita reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas. Es decir, construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales. En este contexto, los acercamientos iniciales en la resolución de problemas pueden ser incoherentes o limitados, pero éstos se refinan o mejoran cuando los mismos profesores presentan y discuten de manera abierta sus ideas dentro de una comunidad profesional de aprendizaje que valora y promueve el cuestionamiento matemático o método inquisitivo. Además, resulta relevante establecer una agenda académica para la actualización de los profesores en servicio así como la educación y formación de los nuevos profesores que atienda su formación sólida en matemáticas y que resalte las actividades de aprendizaje que se deben promover en el salón de clase (Santos, 2007). El uso de distintas herramientas plantea la necesidad de actualizar o ajustar las diversas maneras de evaluar las competencias matemáticas. Aquí interesa caracterizar las formas de razonamiento que se construyen o desarrollan cuando utilizan de manera sistemática varias herramientas computacionales.

Referencias y bibliografía

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 270-296.

Cuoco, A.; Goldenberg, E.; Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior,* 15(4), 375-402.

Davis, B.; Simmt E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need) to know. *Educational Studies in Mathematics,* 61(3): 293-319.

Mason, J.; Burton, L.; Stacy, K. (1982). *Thinking mathematically.* London: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Papick, I. (2011). Stengthening the mathematical content knowledge of middle and secondary mathematics teachers. *Notices of the AMS,* 58 (3), 389-392.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Santos, M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Selden, J.; Selden, A., Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp. 19-26), MAA Notes 33, Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tatto, M., Lerman, S.; Novotna, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: a report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 313-324.

Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica[1]

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen[2]

Se destacará la importancia de desarrollar, desde los primeros grados de educación, el pensamiento optimizador de los futuros ciudadanos; máxime considerando que tendrán que desenvolverse en entornos sociales competitivos. Ante la realidad, que por una parte muestra que los problemas de optimización están muy presentes en la vida cotidiana de cada niño, joven o adulto y por otra la ausencia – en los currícula, en las clases y en los textos – de problemas matemáticos cuyo objetivo es la obtención de un máximo o un mínimo, se mostrará la factibilidad de complementar y enriquecer experiencias de soluciones intuitivas, proponiendo secuencias didácticas con problemas de optimización que requieren pocos conocimientos matemáticos para resolverlos, en contextos lúdicos y con muchas potencialidades didácticas y matemáticas, aplicables en clases de educación básica y en cursos de formación de profesores. Como marco teórico para las propuestas, se usará el enfoque ontosemiótico de la educación matemática.

Palabras clave

Optimización, intuición, educación básica, resolución de problemas, enfoque ontosemiótico.

Abstract

The importance of the development, from the first school years, of optimizer thinking of future citizens, especially considering that they will have to grow up in competitive social environments, is highlighted. It is observed on the one hand that optimization problems are very present in the everyday lives of all children, teenagers and adults, and on the other hand the absence in the curriculum, in classes and in textbooks of math problems whose objective is to obtain a maximum or a minimum. In this context the possibility of complementing and enriching experiences with intuitive solutions, by proposing didactic sequences with optimization problems that require little math knowledge to solve them is shown. The problems are in the context of games and have high didactical and mathematical potential. They are applicable in elementary classes and teacher training courses. The ontosemiotic approach of math education will be used as the theoretical framework for the proposals.

Key words

---

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Optimization, intuition, elementary education, problem solving, ontosemiotic approach.

1. Importancia de la optimización

Es pertinente aclarar desde el inicio, que llamaremos *problema de optimización* a todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable. Ciertamente, éste es un nivel intuitivo y muy general de referencia a los problemas de optimización. Para mayores precisiones formales y rigurosas, se pueden revisar libros específicos de optimización matemática, o tener una visión panorámica leyendo Malaspina (2008), que tiene un enfoque matemático y didáctico, considerando diversos tipos de funciones y restricciones. Asimismo, consideraremos que en las personas está presente un *pensamiento optimizador*, si está en búsqueda de lo mejor, de lo óptimo, usando la inteligencia y la intuición.

Para dar una idea de problemas sencillos de optimización que pueden usarse en secuencias didácticas que estimulen el pensamiento optimizador desde la educación primaria, adelantamos el siguiente, comentado ampliamente en Malaspina (2007).

En las casillas de la figura 1, escribe dígitos diferentes entre sí, de modo que al efectuar la multiplicación indicada, el producto sea el mayor posible:

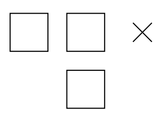


Figura 1

Presencia de la optimización

Podemos constatar que la optimización está muy presente en la vida cotidiana, en la naturaleza, en la tecnología, en las ciencias naturales, en las ciencias sociales y obviamente en la matemática misma.

En la vida cotidiana con frecuencia estamos afrontando muchos problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, (no necesariamente el más corto); tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra; buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro; tratamos de enseñar lo mejor posible; escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección; buscamos un equilibrio entre el menor riesgo y la mayor rentabilidad si hacemos una inversión monetaria; etc. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada y rigurosa para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución realmente óptima.

En la *naturaleza* encontramos soluciones óptimas de los animales. El caso más conocido es el de las abejas. En el libro sobre Darwin, escrito por Michael Ruse (2008), encontramos el siguiente párrafo:

> ...[Darwin] mostró que las abejas mieleras construyen panales que optimizan el resultado obtenido a partir del esfuerzo realizado. Las abejas necesitan miel para producir cera. A su vez, obtener miel les exige esfuerzo. Por consiguiente, las que mejor utilizan la cera están mejor adaptadas que otras. En ese sentido la abeja mielera se lleva las palmas. "No era posible que la selección natural superara este estado de perfección pues el panal de la abeja, hasta donde nosotros podemos juzgar, es totalmente perfecto para economizar cera" (p. 235). Esta frase preanuncia una forma de pensamiento que más tarde recibiría el nombre de "modelo de optimización". (p. 53)

En el resumen del artículo "A Bee Colony Optimization Algorithm to Job Shop Scheduling" de Chin Soon Chong y otros (2007), encontramos:

> This paper describes a novel approach that uses the honey bees foraging model to solve the job shop scheduling problem. Experimental results comparing the proposed honey bee colony approach with existing approaches such as ant colony and tabu search are presented.

El siguiente es un párrafo del libro de Boyer (1986), que nos refiere un hecho histórico de la antigüedad y nos recuerda uno de los principios filosóficos de Aristóteles, que atribuye a la naturaleza un comportamiento optimizador:

> Herón parece haber sido el primero que demostró por medio de un sencillo razonamiento geométrico, en una obra sobre *Catóptrica* o estudio de la reflexión, que la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión es una simple consecuencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla o "económica". Es decir, si un haz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM' y se dirige después hacia el ojo E de un observador, entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' sean iguales. (p. 229)

En la *ciencia y la tecnología* está claramente presente la optimización y consideramos que el pensamiento optimizador de los seres humanos acompañado de su creatividad, presentes al afrontar problemas y necesidades, son los motores que impulsan el avance tecnológico; así, seguramente que el pensamiento optimizador al cazar animales; es decir, la búsqueda de la mejor manera de cazar animales llevó a inventar armas para cazar; el pensamiento optimizador al cruzar los ríos llevó a inventar balsas, canoas, puentes; el pensamiento optimizador para desplazar cosas y para desplazarse llevó al invento de la rueda, la carreta, los vehículos motorizados; el pensamiento optimizador para comunicarse llevó al invento del telégrafo, el teléfono, los satélites, la Internet; el pensamiento optimizador ante la necesidad de protegerse de las enfermedades llevó al uso de las plantas, a la creación de los medicamentos y la medicina; el pensamiento optimizador ante la necesidad de guardar información, de examinarla, de procesarla, llevó a la estadística y la informática. Ciertamente, los avances tecnológicos y científicos continúan y seguramente que el pensamiento optimizador genera en cada campo de la tecnología una dinámica propia para su avance; así en la búsqueda del mejor computador, del mejor teléfono celular, del mejor video juego, del mejor televisor, etc., se generan competencias – también buscando las mayores ganancias – que actualmente hacen que los aparatos que compramos se hagan obsoletos cada vez en menos tiempo.

En cuanto a optimización y *matemática*, observamos que los problemas de optimización son parte fundamental de esta disciplina y ya estaban presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad. Una muestra de ello es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio – considerado uno de los griegos más importantes de la antigüedad, que vivió entre los años 262 y 190 a.C. – en el cual se dedica a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Según Boyer (1986) Apolonio sostiene en su introducción, que "el tema es de los que parecen ser dignos de ser estudiados por su propio interés" (p. 203). Kline (1990), nos dice: Apolonio "demuestra que si O es cualquier punto en el interior de una cónica y si OP es el segmento de recta de longitud máxima o mínima desde el punto O a la cónica, entonces la recta perpendicular a OP en P es tangente a la cónica en P (…) Ahora se enuncia esta propiedad como la perpendicularidad entre la tangente y la normal." (p. 97). Este problema podemos verlo actualmente en un marco más general, como parte del estudio de las condiciones de transversalidad en problemas de cálculo de variaciones, que es una teoría creada por Euler en el siglo XVIII, en la cual se optimiza una funcional y el objeto optimizante es una función.

Otro hecho histórico interesante que nos hace ver cómo estaban presentes las ideas de máximo en una perspectiva correcta, aunque no necesariamente rigurosa y formal, es la obra de Pappus de Alejandría, que escribió un libro hacia el año 320 con el título de *Colección matemática*. Transcribimos un párrafo alusivo de Boyer:

"Pappus parece haber seguido de cerca una obra *Sobre figuras isométricas* escrita casi medio milenio antes por Zenodoro (ca. 180 a.C), de la que nos han llegado algunos fragmentos a través de los comentaristas posteriores. Entre las proposiciones que aparecían en el tratado de Zenodoro, había una que afirmaba que de todas las figuras sólidas con la misma superficie, la esfera es la que tiene un volumen máximo, pero evidentemente sólo se daba una justificación incompleta" (Boyer)

Los problemas isoperimétricos tienen un lugar importante en la historia de las matemáticas y en particular de los problemas de optimización. Cabe hacer mención a la leyenda según la cual la princesa Dido – personaje mítico de Fenicia, considerada fundadora de Cartago – cuando llegó en el siglo IX antes de Cristo a lo que actualmente es Túnez, y quiso comprar tierras para establecerse con su pueblo, sólo se le permitió hacerlo en una extensión tal que pudiera ser encerrada por una inmensa cuerda. Es claro que la princesa y los fenicios que la acompañaban, tuvieron que resolver un problema isoperimétrico: determinar la región de mayor área posible, encerrada por la cuerda (el perímetro dado). La solución intuitiva es una región circular, cuya circunferencia es de longitud igual a la de la cuerda; sin embargo la solución formal no es simple y fue escrita después de varios siglos. El destacado matemático germano-suizo Jacob Steiner (1796-1863) resolvió el problema asumiendo la existencia de la solución y considerando tres etapas en su demostración. Puede verse Honsberger, R (1977)

Ciertamente, un hito histórico está marcado por el desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII y el uso de derivadas para resolver problemas de máximos y mínimos, con lo cual se amplió aún más las aplicaciones de las matemáticas en diversos campos de la ciencia y la tecnología y gracias, sobre todo, a Euler se creó el cálculo de variaciones, considerando la obtención de funciones que optimizan funcionales, lo que proporcionó valiosas herramientas matemáticas para afrontar problemas más avanzados.

Para dar una idea de la presencia de la optimización en el avance de la matemática, mencionamos a continuación algunos avances importantes en el siglo XX:

La programación lineal, iniciada por Leonid Kantorovich (1939) y ampliada con los grandes aportes de George B. Dantzig (1947) con su método del simplex; de John von Neumann (1947) con la teoría de la dualidad; y de Narendra Karmarkar(1984) con su método del punto interior para resolver problemas de programación lineal. Cabe mencionar que Kantorovich y Koopmans recibieron el premio Nobel de economía en 1975, como reconocimiento a sus aportes a la teoría de la asignación óptima de recursos, con la teoría matemática de la programación lineal.

La teoría de control óptimo, cuyos orígenes podemos relacionarlos a problemas de finales del s. XVII e inicios del s. XVIII, que condujeron al Cálculo de Variaciones, como el problema de la braquistócrona, vinculado fuertemente Johann Bernoulli y Leonard Euler. De manera similar a los problemas de cálculo de variaciones, se trata encontrar una función que optimiza una funcional, pero considerando restricciones dadas por ecuaciones diferenciales. Son notables los aportes de Richard Bellman (1957) con su programación dinámica y los de Pontryangin (1962) con su "principio del máximo".

La teoría de juegos, de múltiples aplicaciones en sociología, psicología y economía. Algunos de los valiosos aportes son los trabajos de Ernst Zermelo (1913) en su artículo *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*; los de John Von Neumann que en 1928 probó el teorema minimax en su trabajo Zur Theorie der Gesellschaftsspiele; los de John von Neumann y Oskar Morgenstern en el famoso libro *Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944; las diversas publicaciones de John Nash entre 1950 y 1953; los de Auman, en 1974, en su artículo *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies* en el que introduce el concepto de equilibrio correlacionado al estudiar el comportamiento optimizador de los jugadores. Cabe recordar que John Nash obtuvo el premio Nobel en Economía en 1994 por sus aportes a la teoría económica con el análisis del equilibrio en juegos no cooperativos, que marcó un hito en la Teoría de Juegos.

2. La optimización en la educación básica

Acabamos de dar unas pinceladas sobre la significativa y gran presencia de la optimización en la vida diaria, en la naturaleza y en diversos campos del conocimiento; sin embargo, la realidad nos dice que son muy pocos los problemas de optimización presentes en los textos de educación básica, son muy pocas las alusiones a temas o problemas de optimización en los diseños curriculares y son muy pocas las ocasiones en las que los profesores trabajan con sus alumnos problemas de optimización. En este sentido, por ejemplo en el Perú, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica vigente no tiene diferencias respecto a los anteriores. En primaria, las únicas ocasiones para trabajar con los conceptos de máximo y mínimo que proponen son – como ocurre desde hace muchos años – al considerar máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números naturales. En secundaria, el único tema explícito para problemas de optimización es introducción a la programación lineal, que se incluyó por primera vez en el 2003, en quinto año de secundaria (Ministerio de Educación del Perú, 2003). Lamentablemente no hay pautas para desarrollar el tema poniendo énfasis en lo intuitivo, ni en la toma de conciencia, tanto de la obtención de un valor óptimo (máximo o mínimo) como de la importancia de éste, en el contexto dado, cuando se resuelve un problema de programación lineal. Una mirada a los textos de primaria y secundaria, confirma que se le da muy poca importancia a estos problemas en la educación básica. Veamos, por ejemplo, la tabla 1, en la que se presenta un cuadro comparativo de la cantidad de problemas de optimización (PO) que hay en dos colecciones de libros (llamadas A y B[3]) usados en secundaria en el Perú. Es claro que la cantidad de problemas de optimización encontrados – y con criterio bastante amplio – es muy pequeña, a pesar de que los diversos temas que se desarrollan en la secundaria – y también en la primaria – brindan ocasiones para proponer problemas interesantes de optimización.

Tabla 1
Cuadro resumen de información cuantitativa comparativa

	1er Grado		2º Grado		3er Grado		4º Grado		5º Grado	
	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO
A	792	17 (2,1 %)	820	9 (1,1 %)	562	4 (0,7 %)	1682	5 (0,3 %)	496	26 (5,2 %)
B	3922	22 (0,6 %)	3439	17 (0,5 %)	3730	27 (0,7 %)	4119	10 (0,2 %)	4145	79 (1,9 %)

Fuente: Malaspina 2008.

Cabe destacar que, de manera general, en el aspecto de resolución de problemas, lo más frecuente es encontrar un enfoque que brinda al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, que estimulen su intuición y creatividad. En Malaspina (2008) se hace un estudio de aspectos cualitativos y se examina algunos problemas que ilustran las deficiencias encontradas en los textos al trabajar problemas de optimización.

Considerando la significativa presencia de la optimización en la vida diaria y en los diversos campos del conocimiento, las deficiencias encontradas y comentadas muestran una gran inconsistencia entre la realidad y los significados institucionales considerados para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación básica; más aún considerando que los problemas de optimización tienen valiosas potencialidades didácticas, como veremos al comentar algunos problemas propuestos y experimentados con niños, inclusive del segundo grado de primaria.

[3] Colección A: Textos del 2005. repartidos por el MINEDU a colegios estatales de secundaria
Colección B: Textos de la Editorial Santillana, del 2005.

Otro aspecto a considerar es la formación de los profesores de educación básica, ya que ellos – si son profesores de educación secundaria –, lo más probable es que, en lo que se refiere a problemas de optimización, hayan tenido experiencias solo como parte de un curso de cálculo diferencial, usando criterios que no ponen énfasis en lo intuitivo y quizás – en el mejor de los casos – al estudiar funciones de segundo grado. Si son profesores de educación primaria, podríamos afirmar que sólo excepcionalmente habrán tenido alguna experiencia con problemas de optimización.

¿Es posible incluir problemas de optimización en la educación básica?

Nuestra respuesta es afirmativa, basada en los análisis hechos en investigaciones sobre la intuición optimizadora (Malaspina & Font, 2009) y en las experiencias realizadas con niños y jóvenes con diversos problemas, inclusive de carácter lúdico (Malaspina 2002, 2008; Malaspina y Font 2010). A continuación hacemos propuestas de problemas de optimización para primaria y secundaria, destacamos la importancia de crear problemas, damos características de un "buen" problema, teniendo en cuenta la experiencia docente y los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y hacemos algunas recomendaciones a tener en cuenta al trabajar con problemas de optimización.

Algunos problemas de optimización

Enunciaremos algunos problemas, que evidencian la factibilidad de estimular el pensamiento optimizador desde los primeros grados de primaria y haremos algunos comentarios. En general no se presentan a los alumnos tal como están enunciados, sino como una secuencia de actividades individuales y grupales, de dificultad graduada, de modo que una de ellas sea el problema propuesto, con las adecuaciones del caso. Algo fundamental en la propuesta es lograr que a partir de la experiencia tenida al resolver la secuencia de actividades, los alumnos examinen casos particulares, consideren generalizaciones e inventen problemas similares. Por las limitaciones de espacio no mostramos las adecuaciones correspondientes al nivel en el que se desea aplicar cada problema. Posteriormente, nos detendremos en una experiencia didáctica con el problema 3.

Problema 1. En las casillas de la figura 2, escribe cuatro dígitos, diferentes entre sí, de modo que al efectuar la suma indicada, el resultado sea el mayor posible.

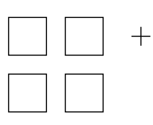


Figura 2

Comentario: Este problema lo creamos pensando en clases de los primeros grados de primaria. Una actividad previa puede ser escogiendo los dígitos de un conjunto de cuatro o más dígitos previamente dado. Favorece que los alumnos inventen problemas similares con diversos conjuntos de dígitos, considerando tres sumandos, sumandos con más de dos cifras, etc. Un nivel de dificultad mayor es proponer problemas similares con otras operaciones. Un ejemplo con la multiplicación es el que dimos al inicio de este artículo y está ampliamente tratado, usando el EOS, en Malaspina (2007).

Problema 2. En un zoológico, las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura 3:

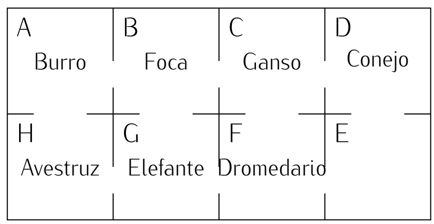


Figura 3

Halla el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal, teniendo en cuenta que un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente y que nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula. (Este problema lo conocimos por intermedio del profesor André Antibí, del IREM de Toulouse).

Comentario: Evidentemente, no se requiere conocimientos matemáticos para resolverlo, pero es atractivo y estimulante del pensamiento optimizador. Al resolverlo encontramos que una de sus virtudes es ilustrar un método de solución de problemas de optimización: encontrar lógicamente una cota inferior k del conjunto de posibles valores de la función objetivo y luego mostrar un caso particular que corresponde precisamente al valor k. La solución detallada puede encontrarse en Malaspina (2008)

Problema 3. Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho, como se ilustra en la figura 4. Moviendo libremente las láminas en el plano y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.

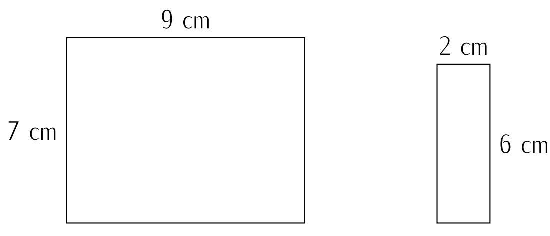


Figura 4

Comentario: Con las adecuaciones del caso, hemos desarrollado experiencias didácticas con alumnos de primaria y de secundaria, con alumnos universitarios y con profesores, y en todos los casos hemos encontrado que brinda ocasiones importantes de aprendizaje, de estímulo de la intuición, y de formación matemática. Por sus potencialidades didácticas y por haberlo aplicado en diversos niveles educativos, nos referiremos a él más ampliamente.

Problema 4. Expresa el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.

Comentario: Así formulado, es un problema de programación lineal entera con 5 variables. Lo creamos con el propósito de mostrar que el usual método gráfico para resolver problemas de programación lineal no es aplicable y que es importante ir más allá de los algoritmos, sin reducirse a rutinas, y buscando el desarrollo de la intuición optimizadora. Convenientemente adaptado y en un contexto lúdico, fue resuelto por niños de segundo grado de primaria de Perú y de España. La experiencia didáctica fue expuesta en la *34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 34) y está publicada en las actas (Lacasta, Malaspina y Wilhelmi, 2010)

Problema 5. Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Comentario: Problema de optimización discreta, de carácter lúdico, que también ilustra un método de resolución de problemas de optimización, que es el pensar en el camino inverso a aquel que se busca para resolverlo. Puede fácilmente plantearse en términos de funciones. Es uno de los problemas que creamos para una experiencia didáctica en el marco del estudio del papel de la intuición en la solución de problemas de optimización, una de cuyas conclusiones es la consistencia de la conjetura de la existencia de la intuición optimizadora. El artículo fue publicado en Educational Studies in Mathematics (Malaspina & Font, 2010).

Problema 6. Se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, usando una lámina cuadrada cuyos lados miden 18 cm de longitud. Para hacerlo se recortará en cada esquina de la lámina un cuadrado y luego se harán los dobleces necesarios, como se ilustra en la figura 5. ¿Cuál debe ser la longitud de los lados de los cuadrados que se recorten, para que el volumen de la caja que se construye sea el máximo posible?

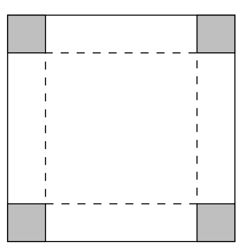


Figura 5

Comentario: Es un problema conocido e infaltable en los textos y cursos universitarios de cálculo diferencial. Lo consideramos acá porque usualmente es reducido a una solución empleando cálculo diferencial, pero tiene muchas potencialidades didácticas. Puede proponerse actividades experimentales en secundaria y aun en primaria para hacer mediciones e ir encontrando los valores del volumen y ejercitar la percepción de la existencia de un valor máximo por la forma en que va variando el volumen conforme va variando la longitud del cuadrado que se recorta. Más aún, usando software de geometría dinámica, puede mostrarse muy claramente cómo al variar la longitud de los cuadrados que se recortan en las esquinas, van variando la base y la altura del paralelepípedo y simultáneamente el recorrido de un punto en la función volumen, de modo que se ve el punto de máximo y el paralelepípedo correspondiente (González, 2006). Otro aspecto interesante a considerar en este problema es que puede resolverse rigurosamente sin usar cálculo diferencial, sino la desigualdad entre media aritmética y media geométrica, que siendo tan importante, usualmente no es tratada en la educación básica. Para la creación de problemas, se puede considerar el caso general con base cuadrada y casos de cajas cuya base sea un polígono regular convexo.

Una experiencia didáctica con el problema 3.

Con el propósito de indagar reacciones de alumnos de secundaria ante problemas de optimización, sin que hayan tenido experiencias previas ante estos problemas, aplicamos el problema 3 a 57 alumnas de primero y segundo grado de secundaria de un colegio parroquial de un distrito de clase media en Lima, preparando un instrumento ad hoc. A continuación resumimos en las tablas 2 y 3 parte de la importante información recogida:

Tabla 2
Percepciones y reacciones ante el problema

		%
Percepciones iniciales	El problema me parece interesante	98.2
	El problema me parece útil	93.0
	El problema me parece fácil de entender	50.9
	El problema me parece fácil de resolver	42.1
	Me gusta (n = 56)	76.8
Reacciones ante el problema	Intenta el problema	82.5
	Halla lo pedido	10.5
	Presenta dibujo correcto	22.8

Comentarios

1. Es claro que hay una percepción positiva del problema.
2. El bajo porcentaje que halla lo pedido debemos entenderlo teniendo en cuenta que solo un 3,5 % identifica claramente los conceptos previos necesarios para resolver este problema y sólo el 36,6 % revela con claridad esos conocimientos previos. Demás, debemos considerar lo atípico del problema, la falta de experiencia de las alumnas en problemas de optimización y el estar respondiendo en una evaluación y no como parte de una secuencia de actividades.

3. Coherentemente con la buena percepción, hay un alto porcentaje que intenta resolverlo y un 22.8 % que presenta un dibujo correcto, lo cual está revelando una solución gráfica o intuitiva del problema y una dificultad para hallar el perímetro, por la no convexidad de la figura y por no tener explícitas las medidas de algunos lados (como lo manifestaron verbalmente algunas alumnas)

Tabla 3
Conceptos, procedimientos y argumentos

			%
Conocimientos previos	Identifica	No	38.6
		Vagamente	57.9
		Con claridad	3.5
	Revela	No	33.3
		Parcialmente	29.8
		Con claridad	36.8
Procedimiento	No presenta		15.8
	Hace cálculos o dibujos iniciales		45.6
	Tantea (examina por los menos dos opciones)		5.3
	Muestra sólo su resultado		33.3
Explica que su resultado es óptimo (n = 49)	No		53.1
	Correctamente		8.2
	Incorrectamente		38.8

Comentarios:

1. En cuanto a procedimientos, predomina el hacer un dibujo mostrando una de las posibilidades y hacer algunos cálculos. Un porcentaje considerable (33,3 %) sólo muestra su resultado y son muy pocas las que muestran el análisis de varios casos o de casos representativos de las diversas posibilidades.

2. En cuanto a argumentos, que el 53,1 % no dé explicación alguna de que su resultado es óptimo (independientemente de que realmente lo sea), a pesar de que se les pide claramente esta explicación, consideramos que revela por una parte no tener experiencias con el concepto de máximo y por otra un contrato didáctico en el aula que no enfatiza la justificación de los resultados.

3. Consideramos que esta experiencia enriquece las que hemos tenido en grupos pequeños con alumnos de varios niveles educativos y con profesores de primaria y secundaria, en las cuales hemos presentado este problema en un contexto de aprendizaje y en el marco de una secuencia de actividades, y ha mostrado sus bondades didácticas.

Situación y actividades

A continuación presentamos actividades individuales y grupales propuestas a partir de una situación descrita, en el contexto del problema presentado al inicio de este artículo, a alumnos de primaria y secundaria y en talleres de resolución de problemas con profesores de educación básica. Ciertamente, los enunciados y las actividades que se proponen, varían según el nivel educativo de los participantes.

Situación

María escribió en la pizarra los dígitos 2, 7 y 5. La profesora le pide a Pedro que escriba estos dígitos en las casillas ubicadas como en la figura 6, en cualquier orden, pero sin repeticiones, y que haga la multiplicación indicada.

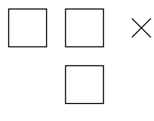


Figura 6

Actividades individuales

¿Es posible que Pedro escriba los dígitos de modo que el producto que obtenga sea mayor que 140? En caso afirmativo mostrar y en caso negativo explicar.

¿Cuántos números pares podría obtener Pedro como resultado de las multiplicaciones, según las diversas maneras de ubicar los dígitos en las casillas?

Actividades grupales

Comparar y examinar los resultados obtenidos en las actividades individuales.

Hallar el mayor número que se puede obtener como resultado de una de las multiplicaciones posibles.

Explicar por qué están seguros que el número encontrado en la actividad anterior es efectivamente el mayor producto que se puede conseguir.

Que uno de los integrantes del grupo dé tres dígitos diferentes cualesquiera, todos mayores que cero. Escribir tales dígitos en las casillas, de modo que se obtenga como producto el mayor número posible.

Encontrar y explicar una regla que permita hacer la actividad anterior sin necesidad de hacer multiplicaciones de tanteo.

Inventar un problema inspirado en la situación dada.

Creación de problemas

Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor sabe la realidad específica en su aula y en consecuencia los estímulos y desafíos que debe brindar a sus alumnos mediante problemas adecuados, que no siempre se encuentran en los textos. Surge entonces el desafío para el propio profesor de crear los problemas matemáticos y las secuencias de actividades con las que debe presentarlos a sus alumnos. Consideramos que la actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada.

Además, la tarea de crear problemas no debe ser actividad exclusiva de los profesores, sino también estimulada por estos a sus alumnos, como parte de las actividades en la solución de problemas, buscando variaciones al problema dado, casos particulares, generalizaciones, conexiones y contextualizaciones. Se genera así una dinámica interesante en las clases, pues generalmente se llega a nuevas dificultades creadas por los mismos estudiantes, que requieren la introducción de nuevos conceptos o técnicas para superarlas, o a ser conscientes de las limitaciones de los recursos matemáticos disponibles y de la importancia de conocer nuevos campos de la matemática.

Si bien es cierto que puede ser muy subjetivo considerar un problema como bueno – porque esto depende no sólo de quien resuelve o crea el problema, sino de los objetivos y del contexto en el que se propone – los criterios de idoneidad establecidos en el EOS pueden ayudar a valorar la “bondad” o “idoneidad de un problema”. Dichos criterios son la idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Teniendo en cuenta estos criterios de idoneidad y, sobre todo, por las experiencias desarrolladas en diversos niveles educativos, consideramos que un “buen” problema desde el punto de vista didáctico, debería cumplir con lo siguiente:

a. La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (idoneidad cognitiva)

b. Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (idoneidad interaccional, emocional y cognitiva)

c. Favorece hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas. (idoneidad interaccional y mediacional)

d. Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (idoneidad emocional y ecológica)

e. Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (idoneidad epistémica y ecológica)

f. Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (idoneidad interaccional y cognitiva)

g. Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos (idoneidad epistémica)

h. Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (idoneidad epistémica)

Comentarios:

1. La idoneidad epistémica tiene que ver con "hacer matemáticas". Es en este sentido su vinculación con *e, g* y *h*, pues establecer conexiones matemáticas, usar relaciones lógicas y crear nuevos problemas es esencial en la actividad matemática.

2. La idoneidad interaccional tiene que ver con el "camino" que permite superar las dificultades para hallar la solución. Es en este sentido su vinculación con *b, c* y *f*: la *f* permite ver el inicio del camino, la *b* el camino, y la *c* "hacer el camino".

3. La característica *b*, además de su vinculación con la idoneidad interaccional la vinculamos con la emocional, pues consideramos que si se intuye un camino para resolver el problema, no habrá frustración, ya que algo se intentará. También – en cierta medida – cognitiva, porque abre las posibilidades para resolver el problema.

4. La idoneidad ecológica tiene que ver con el proyecto educativo y con el entorno y por eso su vinculación con las características *d* y *e*.

Algunas recomendaciones para el trabajo con problemas de optimización

Daremos una lista con algunos procedimientos que suelen utilizarse en la solución de problemas de optimización; sin embargo, damos antes algunas recomendaciones de carácter más general, para el trabajo en estos problemas con los alumnos:

1. Partir de situaciones muy sencillas y con problemas de dificultad baja.

2. Hacer modificaciones al problema introduciendo dificultades mayores gradualmente.

3. Dar tiempo para que los estudiantes tengan aproximaciones intuitivas a una solución del problema.

4. Proponer inicialmente actividades individuales y luego actividades grupales.

5. Estimular a que los alumnos den razones para afirmar que el resultado que encuentran es el máximo o el mínimo que se pide encontrar en el problema.

6. Tratar de educar en el rigor, pero sin sacrificar la intuición. Las exigencias de rigor y de formalización deben ser de acuerdo al nivel de los estudiantes.

7. Estimular a que los alumnos propongan problemas similares al que resuelven, considerando otros casos, haciendo algunas modificaciones, buscando generalizaciones, etc.

A partir de las experiencias tenidas con los problemas trabajados en diversas ocasiones, mencionamos algunos procedimientos que pueden servir de orientación al resolver problemas de optimización, complementarios a los métodos y recomendaciones para la resolución de problemas en general. Entre paréntesis, a manera de ejemplos, nos referimos a algunos problemas de optimización expuestos anteriormente, o a algunos ampliamente conocidos

- Identificar casos y usar cuadros (Problemas 1 y 4. El problema de las torres de Hanoi)
- Hacer representaciones gráficas y visualizaciones geométricas (Problemas 2, 5 y 6)
- Usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica (Problema 6 y problemas isoperimétricos y sus "duales" de área dada y perímetro mínimo)
- Si se busca un camino para llegar a determinado objetivo, "pensar en el camino inverso" (Problema 5)
- Usar diagramas de árbol (Problema 5 y problema de las torres de Hanoi)
- Identificar situaciones equivalentes en el conjunto en el que se busca el máximo o el mínimo (Problema 3)
- Definir una función objetivo, graficarla y hacer operaciones algebraicas (Problemas 3 y 6)
- Mostrar una cota inferior k del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el mínimo es k. (Problema 2)
- Argumento similar, con las adecuaciones del caso, se puede aplicar a algunos problemas de búsqueda de máximo.

3. Comentarios finales

Las experiencias didácticas desarrolladas, nos muestran que los problemas de optimización adecuadamente presentados ofrecen valiosas oportunidades para desarrollar el pensamiento optimizador de nuestros alumnos y que tienen muchas potencialidades didácticas, entre las que podemos mencionar

- Estimular el hábito de fundamentar y de demostrar
- Practicar la estimación y el tanteo inteligente
- Ejercitar el pensamiento algorítmico
- Elaborar criterios de comparación de medidas considerando los valores extremos
- Ejercitar el pensamiento relacionado con la existencia de un objeto matemático. En este caso con la existencia de un valor máximo o un valor mínimo, deducida a partir del comportamiento creciente y luego decreciente de una función y del comportamiento decreciente y luego creciente de una función, respectivamente.

Consideramos muy importante lo siguiente:

- Incluir los problemas de optimización en la formación y capacitación de docentes, estimulando su uso y su creación en diversas situaciones didácticas.

- Incluir problemas de optimización, en diversos contextos y estableciendo conexiones intramatemáticas, en los diseños curriculares, en los textos y en las clases de matemáticas desde la educación primaria.
- Modificar contenidos y formas de tratar temas relacionados con la optimización, actualmente existentes en los planes curriculares de la educación básica, como son las funciones, mínimo común múltiplo e introducción a la programación lineal, enfatizando lo constructivo y lo intuitivo y haciendo tomar conciencia de la importancia de los conceptos de máximo y de mínimo.

Consideramos posible, formativo y entretenido, incluir en la educación básica nuevos contenidos vinculados con la optimización, como elementos de teoría de juegos y temas seleccionados de matemáticas discretas; entre estos últimos podría considerarse elementos de teoría de grafos y elementos de teoría de números, incluyendo ecuaciones diofánticas lineales[4].

Referencias y bibliografía

Bellman, Richard (1957). *Dynamic Programming.* Princeton University Press.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

González, M. (2006). *Solución de problemas de optimización usando geometría dinámica*. Conferencia en el III Congreso Iberoamericano de Cabri. Bogotá, Colombia.

Honsberger, R (1977). *El ingenio en las matemáticas.* Madrid, España: La tortuga de Aquiles.

Kline, M. (1990). *Mathematical though from ancient to modern times.* Tomo I, New York: Oxford University Press, Inc.

Lacasta, E.; Malaspina, U.; Wilhelmi, M. (2010). Optimization through measurement situations in Grade 2. En Pinto, M. M. F. & Kawasaki, T.F. (Eds.). Proceedings of the 34th Conference of the International *Group for the Psychology of Mathematics Educaction*. Belo Horizonte, Brazil: PME. 3, 201- 208.

Malaspina, U. (2002). *Elements for teaching game theory,* Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. University of Crete.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 11, 197-204.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización*. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica del Perú. www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Malaspina, U.; Font, V. (2009). Optimizing intuition. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33 rd Conference of the International Group for the *Psychology of Mathematics Education.* Thessaloniki, Greece: PME. 4, 81?88.

Malaspina, U.; Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies of Mathematics*, 75:107?130 DOI 10.1007/s10649-010-9243-8, Springer.

[4] Problemas creados con ese fin, analizados didáctica y matemáticamente se pueden encontrar en la sección "El Rincón de los problemas" de la revista UNIÓN, desde el año 2005 (Malaspina).

Malaspina U.; Font, V. (2010). *Intuition and optimization problems in the teaching-learning processes in basic education*. Abstracts of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, pp 649-650.

Nash, J (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36 (1): 48?49

Pontryagin, L. et al. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience, vol. 4.

Ruse, M. (2008). *Charles Darwin*. Buenos Aires: Katz Editores.

Soon Chong, C. et al (2007). *A Bee Colony Optimization Algorithm to Job Shop Scheduling*. En Simulation Conferenc. WSC 06. Proceedings of the Winter, pp 1954-1961

Zermelo, E. (1913). *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels.* 501-504 in Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Volume II (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge: Cambridge University Press.

La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación[1]

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional
México
pcamarena@ipn.mx

Resumen[2]

En la presentación se aborda la modelación matemática en el marco de la teoría educativa de la Matemática en el Contexto de las Ciencias para estudios universitarios. Se describe dicha teoría, la cual considera al proceso del aprendizaje y la enseñanza de la matemática como un sistema en donde las cinco fases de la teoría interactúan entre sí: la fase curricular, didáctica, cognitiva, epistemológica y docente. Se presentan los resultados de varias investigaciones sobre la fase didáctica que han llevado a determinar los conceptos de modelo matemático y del proceso de modelación matemática, así como, definir los elementos cognitivos y las habilidades del pensamiento que son necesarias para poder llevar la modelación matemática al ambiente de aprendizaje. También, se presentan los resultados de investigaciones que ofrecen una estrategia didáctica, denominada Matemática en Contexto, para desarrollar las competencias de modelación matemática.

Palabras clave

Modelación matemática, matemática en contexto, Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, fase didáctica, modelo matemático.

Abstract

This presentation is about math modeling in the framework of the educational theory of math in the context of science for the university level. Said theory is described and considered to be a theory of the process of teaching and learning math as a system where five phases of the theory interact: the curricular, didactic, cognitive, epistemological, and teaching phases. The results of various studies on the didactic phase that have been carried out to determine the concepts of math models and the process of math modeling, such as, define the cognitive elements and thinking abilities that are necessary to be able to carry out math modeling in the learning environment are presented. Also, presented are research results that offer a didactic strategy, known as Math in Context, for the development of math modeling competencies.

Key words

Math modeling, math in context, math in the context of science, didactic phase, math model.

[1] Este trabajo corresponde a un minicurso dictado en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. Introducción

En diversos currículos de estudios universitarios, en particular sobre ingenierías, se menciona, como uno de los objetivos, que el futuro profesionista deberá modelar matemáticamente problemas de su actividad laboral, por lo que es un tema de importancia y pertinencia para su estudio.

Por otro lado, la matematización de los fenómenos y eventos que se presentan en el campo laboral y profesional del futuro ingeniero es un punto de conflicto cognitivo para los estudiantes (Camarena, 1990; 1995), ya que ellos recibieron sus cursos de matemáticas por un lado y los de la ingeniería por otro lado, de forma tal que en el momento de hacer uso de las dos áreas del conocimiento sus estructuras cognitivas están desvinculadas y ellos deben articularlas para poder matematizar el evento que tienen que resolver (Camarena, 1987, 1990, 1995, 1999).

La modelación matemática es uno de los temas que aparecen en el currículo oculto de los estudios universitarios, ya que se supone que el egresado debe saber modelar y, en muchos planes y programas de estudio para nada se hace alusión al término "modelación matemática"; en otros currículos, dentro de los objetivos de los programas de estudio, se dice que el alumno deberá saber modelar problemas de otras áreas del conocimiento, y en muy pocos currículos viene este término incluido en el temario de las asignaturas. Pero, en ningún caso se dice como incorporar la modelación matemática a los cursos, ni como lograr que los estudiantes modelen situaciones de otras áreas o problemas de la vida cotidiana. De hecho, en la mayoría de las ingenierías, que es donde existe más riqueza en contenidos matemáticos, no existe ninguna asignatura que se aboque a elaborar modelos matemáticos, además, resulta que los profesores de matemáticas sienten que este punto compete a los profesores de los cursos propios de la ingeniería, mientras que estos últimos presuponen que los maestros de matemáticas son quienes deben enseñar al estudiantes a modelar fenómenos de la ingeniería. Este punto crítico, el como desarrollar la modelación matemática en los estudiantes, es abordado por la Red Internacional de Investigación en Matemática en el Contexto de las Ciencias (Red MaCoCiencias), y desde la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se considera que debe ser atendido de forma interdisciplinaria. Así, el problema es abordado por el profesor de matemáticas quien incorpora a su cátedra la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias.* La fase didáctica de la teoría incluye la propuesta didáctica de la *Matemática en Contexto*, a través de la cual los eventos de las asignaturas de ingeniería que cursa el alumno son el medio para que se propicie el aprendizaje de la matemática, se desarrollen las habilidades de modelación y se logre la transferencia del conocimiento.

Luego, lo que se pretende es tener los indicadores necesarios que interviene en la modelación matemática, para incorporar ésta de forma consciente y eficiente en los cursos de matemáticas y así los alumnos estén capacitados para establecer la modelación matemática de los eventos contextualizados con los que se enfrentará en su vida laboral y profesional. Es decir, se quiere saber qué conocimientos previos son necesarios para que el alumno aprenda a modelar, independientemente de las áreas del conocimiento que se articulan en el proceso de contextualización, es decir, es claro que debe conocer la matemática que interviene así como la disciplina del contexto, pero qué más debe conocer y dominar.

El problema de investigación

Se quieren conocer los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento que intervienen en la construcción de un modelo matemático.

Para abordar el problema de investigación se tienen las siguientes preguntas: ¿Qué es un modelo matemático?, ¿Qué es modelación matemática?, ¿Qué elementos de orden cognitivo debe construir el estudiante para elaborar el modelo matemático de un evento escolar de ingeniería?, ¿Qué habilidades del pensamiento debe desarrollar el estudiante para construir el modelo matemático de un evento escolar de ingeniería?.

2. Marco teórico

Para poder abordar las preguntas de investigación, el trabajo se basa en la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* (Camarena, 1984, 1987, 1990, 1995, 1999, 2000_a, 2009) la cual reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, entre la matemática y las futuras actividades laborales y profesionales, así como entre la matemática y las situaciones de la vida cotidiana. La teoría se fundamenta en los siguientes tres paradigmas:

- La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel superior.
- Los conocimientos nacen integrados.

El supuesto filosófico educativo de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas, se quiere una matemática para la vida.

Cabe hacer mención que la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se ha desarrollado a lo largo de casi 30 años en el Instituto Politécnico Nacional de México. Se inició con investigaciones sobre el currículo tratando de abordar la problemática del porqué de los cursos de matemáticas en las áreas de ingeniería y tratando de buscar respuestas a la problemática que todo docente de matemáticas vive con los estudiantes, quienes parece que odian a la matemática, en donde se repite la situación de que en apariencia nunca han visto los conocimientos de sus cursos anteriores que les exige el profesor.

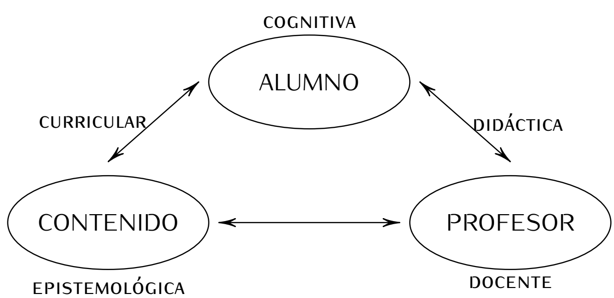


Figura 1: Una terna dorada en educación.

La teoría contempla cinco fases:

- La Curricular, desarrollada desde 1982.
- La Didáctica, iniciada desde 1987.
- La Epistemológica, abordada en 1988.
- La Docente, definida en 1990.
- La Cognitiva, estudiada desde 1992.

Es claro que en el salón de clases están presentes, como un sistema, los contenidos de cada una de las cinco fases y éstas interactúan entre sí en un ambiente social, económico y político; es decir, los cinco elementos no están aislados unos de los otros y tampoco son ajenos a las condiciones sociológicas ni psicológicas de los actores del proceso educativo.

Como teoría, en cada una de sus fases se incluye una metodología con fundamento teórico, acorde a los paradigmas en los que se sustenta, donde se guían los pasos para el diseño curricular, se describe la didáctica a seguir, se explica el funcionamiento cognitivo de los alumnos y se proporcionan elementos epistemológicos acerca de los saberes matemáticos vinculados a las actividades de los profesionistas, entre otros. Para una exposición con formalidad de la teoría se hace necesario fragmentarla en las cinco fases, véase la figura 1.

Para el caso que ocupa esta presentación, las preguntas de investigación formuladas inciden en la fase didáctica. Esta fase contribuye a la formación integral del estudiante e involucra tres bloques de acción didáctica (Camarena, 1999):

- Bloque 1. Presentar la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto en el ambiente de aprendizaje.
- Bloque 2. Implementar cursos extracurriculares en donde se llevan a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento (creatividad, análisis, síntesis, razonamiento: lógico, crítico, analítico), habilidades metacognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver eventos, así como actividades para bloquear creencias negativas.
- Bloque 3. Implementar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelven eventos reales de la industria.

Con la estrategia didáctica de la *Matemática en Contexto* (Camarena, 1987) se apoya la construcción del conocimiento matemático y en particular de conceptos matemáticos en el nivel superior, para lo cual se requiere que un concepto se presente a los estudiantes en diversos contextos del área de conocimiento de sus estudios profesionales, en diferentes situaciones de la vida cotidiana y en variadas actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas o proyectos.

La *Matemática en Contexto* contempla dos ejes rectores: contextualizar y descontextualizar; con éstos se establecen nueve etapas que se desarrollan en el ambiente de aprendizaje en equipos de tres estudiantes: Líder académico, líder emocional, líder de trabajo.

1. Determinación de los eventos contextualizados a través del análisis de textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante.
2. Planteamiento del evento de las disciplinas del contexto.
3. Determinación de las variables y de las constantes del evento.
4. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y su solución.
5. Determinación del modelo matemático.
6. Solución matemática del evento.
7. Determinación de la solución requerida por el evento en el ámbito de las disciplinas del contexto.
8. Interpretación de la solución en términos del evento y área de las disciplinas del contexto.
9. Descontextualización en el ambiente de aprendizaje de los temas y conceptos matemáticos involucrados.

En general el hablar de la *Matemática en Contexto* es desarrollar los cursos de matemáticas a las necesidades y ritmos que dictan los cursos de ingeniería. Con la *Matemática en Contexto* se desarrollan las competencias de modelación matemática. A través de investigaciones se ha verificado que la *Matemática en Contexto* fortalece la reorganización cognitiva de conceptos y procesos matemáticos.

A través de la *Matemática en Contexto* se cambia el paradigma educativo de enseñanza tradicional, ahora se trata de una enseñanza con conocimientos integrados y centrada en el estudiante, dando los temas de matemáticas vinculados con las demás asignaturas que cursa el alumno y presentándolas al ritmo y tiempos que son requeridos por los estudiantes (Camarena, 1987). Con la *Matemática en Contexto*, a través de investigaciones, se ha establecido que se construyen conocimientos integrados no fraccionados, aprendizajes significativos, así como conocimientos duraderos no volátiles.

3. Metodología de trabajo

La metodología contempla dos etapas:

- La primera se aboca a definir los conceptos de modelo matemático y modelación matemática, lo cual se lleva a cabo a través del análisis de eventos que requieren matemáticas para su solución.
- La segunda incide el la determinación de los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento para la construcción del modelo matemático, lo cual se logra a través de instrumentar, los eventos detectados en la primera etapa, a un grupo de estudiantes para observar el proceso de construcción del modelo matemático del evento e identificar las regularidades subyacentes.

Dado el problema a abordar sobre modelos matemáticos, el material de trabajo son eventos de la ingeniería, en particular este trabajo se aboca a la ingeniería electrónica y sus ramas afines, la metodología que se emplea es la del análisis de textos de ingeniería (Camarena, 1984), así como el análisis de algunos proyectos investigación de la ingeniería en donde se han elaborado modelos matemáticos, los cuales corresponden a la ingeniería aplicada.

Como es sabido, el análisis de textos constituye una metodología para la detección de ciertos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias (Camarena, 1984), depende de lo que se persigue para mirar de la forma indicada a esos textos.

Así, en la primera etapa lo que principalmente se busca son:

- Eventos que se plantean para ser abordados por el autor.
- La manera como representan matemáticamente los eventos que se han planteado.
- Los conceptos de temas de la ingeniería que se describen matemáticamente.

Para el análisis de textos se tomó en cuenta la clasificación que establece "Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior de México" acerca de las asignaturas de carreras de ingeniería.

Esta clasificación define cinco bloques de materias: las ciencias básicas, las ciencias básicas de la ingeniería, las ciencias de especialidad de la ingeniería, las ciencias sociales y humanísticas y, las ciencias económicas y administrativas.

Es claro que para la presente investigación los tres primeros bloques son los que interesan. Dentro de las ciencias básicas se encuentran la física y la química como fundamento de las ciencias básicas de la ingeniería, mientras que la matemática es una herramienta de apoyo a éstas, sin olvidar el carácter formativo que esta última ofrece al futuro ingeniero (Camarena, 1984, 1995, 2009). Las materias de circuitos eléctricos, electromagnetismo, computación, electrónica básica y comunicaciones básicas forman las ciencias básicas de la ingeniería (Bibliografía, 2008). Comunicaciones, electrónica, control, acústica, robótica, telefonía y computación son las áreas de aplicación de la ingeniería (Bibliografía, 2008).

Para la segunda etapa se tiene un investigación cualitativa de tipo experimental. Para ello se considera una muestra aleatoria de universidades del país y se seleccionan estudiantes de ingeniería quienes resuelven una selección de los eventos analizados en la primera etapa, con el propósito de identificar los elementos cognitivos y de habilidades del pensamiento que entran en acción en el proceso de construir el modelo matemático del evento.

Para ello se seleccionaron a veintiún universidades, asociadas con un semestre diferente de entre los últimos seis de cada carrera profesional en el área de electrónica y ramas afines. De cada semestre asociado a una universidad se eligieron al azar a dos estudiantes, contando con seis alumnos de cada semestre del tercero al noveno u octavo, según la universidad seleccionada; en total fueron 42 estudiantes analizados.

Desarrollo y análisis de resultados

Los resultados de aplicar la metodología arrojan las respuestas a las interrogantes planteadas en un principio, elementos que son aplicables en los ambientes de aprendizaje donde la modelación matemática hace presencia, por razones de espacio se muestran sólo los resultados buscados.

El concepto de modelo matemático

Del análisis de textos se tiene que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en la ingeniería se puede representar a través de simbología matemática (Camarena, 1990). Es más, el que se represente a través de la terminología matemática y se haga uso de la matemática en la ingeniería, le ayuda a la ingeniería a tener carácter de ciencia por un lado y por el otro, le facilita su comunicación con la comunidad científica de ingenieros (Camarena, 2000_a).

Cabe mencionar que la matemática en la ingeniería tiene características particulares (Camarena 1984): predice comportamientos; ayuda a hacer cálculo teóricos en vez de prácticos, con lo cual se ahorra tiempo y recursos tanto físicos como económicos; la matemática es un lenguaje de la ingeniería; con la matemática se optimizan diseños y recursos, se minimizan errores; se crea un espíritu científico y crítico, una mente analítica y creativa.

De los textos e investigaciones analizadas se determinó que dentro del conocimiento de la ingeniería, se cuenta con diversos tipos. Eventos (problemas o proyectos) de la ingeniería, asimismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente y también se presentan situaciones que se pueden describir a través de la simbología matemática. Estos casos permiten caracterizar a los modelos matemáticos. A continuación se muestran cada uno de estos tipos.

- Eventos.

  Se quiere conocer el comportamiento del régimen permanente de la intensidad de corriente $i = i(t)$ que circula en un circuito eléctrico que tiene conectados en serie un condensador, de carga $q = q(t)$ y cuya capacitancia es C, con un resistor de resistencia R y una bobina de inductancia L, a las terminales de una batería que suministra un voltaje de tipo sinusoidal, $v(t) = V^m \operatorname{sen} wt$, este planteamiento se puede representar a través de la ecuación integrodiferencial siguiente (Camarena, 1987):

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + q(0) = v(t)$$

- Objetos.

  Considérese una señal eléctrica impulsiva, la señal es el objeto de la ingeniería el cual se representa a través de la función delta de Dirac (Camarena, 2000_b):

$$f(t) = A\delta(t + c)$$

- Situaciones.

  El condensador está totalmente descargado al inicio del problema. Esta situación se puede representar matemáticamente, tomando en cuenta que al inicio del problema $t = 0$ y que la carga es una función del tiempo $q = q(t)$, como (Camarena, 1987):

$$q(0) = 0.$$

De los tres casos mencionados los que caracterizan a los modelos matemáticos son los objetos y los eventos, así la definición es:

> *Un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o eventos del área del contexto.*

Las relaciones matemáticas pueden ser desde una ecuación, un sistema de ecuaciones hasta una distribución de probabilidad.

El concepto de modelación matemática

De las etapas de la *Matemática en Contexto* y lo detectado en el análisis de los eventos estudiados para la investigación se construye la definición del término "modelación matemática".

> *La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto.*

Este proceso cognitivo consta de tres momentos, los que constituyen los indicadores de la modelación matemática:

- Identificar variables y constantes del evento, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante.
- Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el evento, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.
- Validar la "relación matemática" que modela al evento, lo cual se hace a través de regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del evento. Dependiendo del evento, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predicen los elementos involucrados.

Un punto importante de mencionar es que el modelo matemático no es único, hay varias representaciones matemáticas que describen el mismo evento, razón por la cual se hace necesaria la validación del mismo (tercer momento).

La forma de abordar (o resolver) matemáticamente el modelo matemático tampoco es única, elemento que permite verificar la versatilidad de la matemática, así como su consistencia.

Elementos cognitivos que intervienen en la construcción del modelo matemático

El análisis de la instrumentación, a los alumnos, de problemas específicos de cada área cognitiva de la ingeniería en electrónica permitió detectar las regularidades que se reportan en este trabajo, las cuales son independientes de los niveles escolares e independientes de las áreas del conocimiento.

Para llevar a cabo la modelación matemática se hace necesario poseer los siguientes elementos cognitivos:

- Los enfoques de los temas y conceptos matemáticos del área del contexto (Camarena, 1990). Cada tema y concepto matemático posee varios enfoques, por ejemplo, la derivada es un cociente de diferenciales, es un límite muy particular, es la operación inversa a integrar, es una razón de cambio, es la pendiente de la recta tangente a la curva, etc. Conocer estos enfoques es necesario para modelar.
- La transposición contextualizada (Camarena, 2000b). Es conocido el hecho de que el saber científico sufre una transformación para convertirse en un saber a enseñar, denominado transposición didáctica. El conocimiento que se lleva al aula sufre otra transformación para convertirse en un saber de aplicación, a lo que se denomina transposición contextualizada.
- El manejo conceptual de la matemática descontextualizada (Camarena, 1999). Es importante que sea del conocimiento del alumno que la matemática es universal en el sentido de que es aplicable a varios contextos. Dentro de la Matemática en el Contexto de las Ciencias se concibe como matemática conceptual a aquella matemática que si se tiene el concepto es porque se puede transferir ese conocimiento, porque se conocen los diferentes enfoques de concepto, porque se conocen los puntos de control de error del concepto, porque se conocen los patrones de comportamiento del concepto cuando se mueven los parámetros que lo componen, porque se puede transitar entre los diferentes registros de representación del concepto, etc. Los elementos descritos son en sí elementos cognitivos, sólo que se les da más peso en el desarrollo de las habilidades.

Habilidades del pensamiento que intervienen en la construcción del modelo matemático

Al igual que en los elementos cognitivos, a través del análisis de la instrumentación de problemas de cada área cognitiva de la ingeniería en electrónica se detectan las habilidades del pensamiento que entran en acción en la construcción del modelo matemático. Así, para llevar a cabo la modelación matemática es necesario desarrollar en el estudiante las siguientes habilidades del pensamiento:

- Habilidad para identificar los puntos de control de error. Esta habilidad es de tipo metacognitivo y forma parte de tener una matemática conceptual, como se ha mencionado.
- Habilidad para transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Para este punto se puede ver la referencia de Olazábal (2004), quien hace una categorización de problemas de matemáticas contextualizados respecto a la demanda de traducción del lenguaje natural al matemático.

- Habilidades para aplicar heurísticas. Las heurísticas como estrategias para abordar un problema, con la clasificación que otorga Nickerson (1994) a las dadas por Polya (1976).
- Habilidad para identificar regularidades. Entre las habilidades básicas del pensamiento, esta habilidad se hace notoria.
- Habilidad para transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático. Se consideran las representaciones que describe Duval (1998): aritmética, algebraica, analítica y visual, incluyéndose la representación contextual que maneja la Matemática en el Contexto de las Ciencias.
- Habilidad para hacer "consideraciones" o "idealizar" el problema (cuando proceda). Hay problemas tan complejos que deben ser idealizados para poderse matematizar, en otras ocasiones es necesario hacer consideraciones, como controlar variables para poder lograr la matematización.

4. Conclusiones

Los modelos matemáticos son parte fundamental de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, los elementos cognitivos y habilidades del pensamiento que se han detectado proporcionan una fuente de conocimientos para fortalecer la didáctica de la *Matemática en Contexto*, al mismo tiempo que definen los indicadores para la competencia de modelación matemática. Aportes como los que se muestran en este trabajo apoyan la práctica docente para incidir en la formación integral de cuadros profesionales de calidad, quienes contarán con los elementos mínimos para modelar matemáticamente eventos de su vida profesional, lo cual les permitirá ser competitivos a nivel mundial en su área de conocimiento.

Cabe hacer mención sobre el perfil del docente de matemáticas que trabaja con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*: si su formación es de matemático debe incursionar en las áreas del conocimiento de la ingeniería, mientras que si su formación es de ingeniero debe preparase más en los conocimientos de la matemática.

Referencias

Camarena, P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. *Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN,* México.

Camarena, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica.* Edit. ESIME-IPN.

Camarena, P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. *XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana,* México.

Camarena, P. (1999). Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas e ingeniería. *Memorias del 2º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas,* México.

Camarena, P. (2000a). *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería.* Reporte de investigación No. CGPI-IPN: 990413. Editorial ESIME-IPN. México.

Camarena, P. (2000b). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica.* Colección: Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigaciones, ANUIES, México.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics.* IMFUFA, Matematik og Fysik. Nr. 461 ? 2009, pp. 117-132. Denmark.

Duval R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education, in *Proceedings of the* 24nd *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. I.

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual.* Editorial Paidós M. E. C.

Olazábal, A.; Camarena, P. (2004). Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto. *Tercer Congreso Internacional ?Retos y Expectativas de la Universidad?,* México.

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas.

Bibliografía de los programas de estudio de las asignaturas de carreras de ingeniería electrónica y ramas afines. (2008). México

Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira[1]

Maria Salett Biembengut
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS
Brasil
salett@furb.br

Resumo[2]

Nesta pesquisa objetivou fazer o mapeamento das produções brasileiras de Modelagem Matemática (MM) na Educação e identificar a concepção e a tendência de MM no Ensino Médio dos autores. A pesquisa se dividiu em três etapas: fundamentos sobre concepção e tendência; busca e análise das produções de modelagem nos anais de eventos de Educação Matemática e Modelagem. Utilizou-se amostra de 64 produções de MM sobre Ensino Médio, organizando-as em práticas de sala de aula e ensaios teóricos. As expressões dos autores a partir dos quatro princípios (motivação, atividade (s), conteúdos e referências e considerações) indicam três concepções de MM: método de ensino e pesquisa, alternativa pedagógica de matemática e ambiente de aprendizagem. São concepções que, uma vez captadas por outro professor interessado em MM, o conduzirão a um entendimento e, caso ele venha a adotá-las em suas atividades educacionais, firmarão a tendência.

Palavras chave

Modelagem Matemática, Ensino Médio, Concepção e Tendência.

Abstract

The objective of this research is to give an overview of Brazilian products on educational Mathematical Modeling (MM) and identify design and trends in MM in secondary education. The research is divided into three stages: basis of design and trends; search and analyze of the papers on modeling in the proceedings of events on math education and modeling. A total of 64 products on MM in secondary education were used, organized into classroom practices and theoretical essays. From four principles (motivation, activities, content and references, and considerations) three conceptions of MM are indicated: methods of teaching and research, alternative pedagogy for math, and the learning environment. They are conceptions that, once recognized by teachers of MM, lead to an understanding and, in the case where they are adopted into their educational activities, reinforce the trend.

Key words

Math modeling, secondary teaching, design and trends.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. Introdução

O movimento pela Modelagem Matemática (MM) na Educação Básica e Superior passa a ocorrer a partir da década de 1970, praticamente ao mesmo tempo em diversos países, inclusive no Brasil. As primeiras propostas são procedentes de professores de Matemática de Cursos de Educação Superior, em particular de Cursos de Engenharia, que buscaram atender as constantes questões dos estudantes sobre 'para que serve a matemática', e, ainda, das críticas recebidas de empresários sobre a formação matemática dos estudantes. Por exemplo, em relatório publicado em 1983, R.R. McLone afirmava que um recente graduado em Matemática era bom para resolver problemas e tinha razoável conhecimento de literatura e técnicas matemáticas, mas não era bom para formular, planejar e fazer uma avaliação crítica do problema em questão.

Como muitos professores de Matemática da Educação Superior tinham conhecimento de Matemática Aplicada, na qual a MM faz parte do programa curricular, eles passaram a propor aos estudantes atividades que lhes permitissem identificar a aplicação de conceitos e definições matemáticas e saber avaliar os resultados das situações-problema propostas nas atividades. Dentre esses professores precursores destacam-se: Aristides Camargo Barreto, do Brasil, que fez uso dos processos da modelagem em suas aulas de Cálculo Diferencial Integral e Análise Matemática em Cursos de Engenharia e de Matemática nos anos de 1970 e 1980; e David Burghes, do Reino Unido, que, além da graduação, passou a desenvolver projetos com professores do Ensino Médio para produzir materiais de modelagem.

As diversas atividades de pesquisa, extensão e práticas em sala de aula na Educação Superior e de formação continuada realizadas e divulgadas pelos precursores da MM na Educação, em diversos países, impulsionaram o desenvolvimento nessa área. As preleções em eventos de Educação, em particular, são fontes de recursos para a melhoria da Educação; muitos professores se interessam em fazer uso da MM em suas aulas, devido a um contato primeiro com trabalhos que incentivam a utilização. E, num processo cíclico e crescente, aqueles que se motivam e efetuam algum tipo de atividade, seja como uma prática em sala de aula ou como pesquisa, ao avançar para uma melhor compreensão dos processos e resultados, esperam compartilhar em algum evento.

Na última década, por exemplo, tem sido crescente o número de pesquisas e relatos de experiências em sala de aula sobre MM apresentados em eventos de Educação Matemática e de Modelagem na Educação Matemática (nacional e em dois estados). Apesar desse crescente interesse pela modelagem na Educação brasileira, há poucas evidências sobre mudanças no ensino frente ao número de adeptos e interessados. Não se dispõe de um mapeamento completo das atividades de MM na Educação, em particular quais são as concepções de MM dos professores que a adotam e, ainda, quais as tendências emergidas nesses 40 anos de MM na Educação brasileira. É nesta expectativa que se insere esta pesquisa, iniciada em 2006: o mapeamento de produções brasileiras de Modelagem Matemática na Educação.

O mapeamento consiste em: identificar e se inteirar dos trabalhos publicados em anais desses congressos; classificar e organizar de acordo com os focos: *práticas pedagógicas* e *ensaios teóricos*; e efetuar análise, por foco, das concepções e tendências de MM.

Nesta fase da pesquisa foi possível identificar 812 trabalhos publicados (entre resumos e artigos completos) em anais de congressos no período de 1979 a 2008. Devido ao número de artigos, a análise das concepções e tendências de MM tem sido feita em etapas: na formação de professores (2008) e no Ensino Fundamental (2009); nesta etapa, no Ensino Médio (2010).

2. Material e Métodos

Os aspectos relacionados às questões pesquisadas partem do estudo *teórico* sobre concepção e tendência e da *apreensão* de informações relevantes dos artigos: temas abordados, procedimentos metodológicos, referências e considerações de MM dos autores dos artigos. Tratou-se de uma pesquisa documental, pois as fontes são artigos que tratam de MM no Ensino Médio, apresentados por meio de comunicação de pesquisa científica ou relato de experiência e publicados em anais de congressos de Educação Matemática (EM) e de Modelagem na Educação Matemática (MEM) no período 2003-2008. A pesquisa teve três etapas.

Na primeira etapa (*teórica*) base para análise, fez-se estudo sobre concepção e tendência. O termo *concepção* significa o "ato ou efeito de conceber, gerar, criar"; também significa "fantasia, imaginação"; e *tendência* significa "impulso","disposição natural e instintiva", "vocação que gera um movimento de objeto, propósito, crença, ideia, conhecimento". As concepções que cada pessoa tem sobre os mais diversos entes advêm de crenças, conhecimentos adquiridos através das experiências e das interações da pessoa com o meio que a envolve, segundo Thompson (1992). Nomeadamente, são os significados, os conceitos, as proposições, as regras, as imagens mentais e as preferências, dentre outros. É um processo simultaneamente *individual* como resultado de suas atividades e vivências, e *social* como resultado do confronto, da interação com outras pessoas e outros entes do meio.

Esse conjunto de entes e relações individual e social, intimamente associados, forma uma unidade funcional mais ou menos inter-relacionada e interdependente. E, comumente, tende a difundir, ainda na mesma geração, dos 'centros' para as suas 'margens', o significado da existência e da forma de estar destas relações, conforme Linton (1971). Assim, nas diversas atividades da sociedade, a partir das concepções de diversos grupos, surgem tendências que se manifestam de diferentes formas, que se renovam pela coesão de seus elementos, e pela educação e reeducação das pessoas.

Na segunda etapa (*apreensão de informações*) fez-se a identificação nos anais dos artigos que tratam de MM no Ensino Médio e, a partir de leitura, a classificação destes em *ensaios teóricos* e *empíricos* cujos dados advêm de práticas em sala de aula. Foram identificados 64 artigos completos publicados em anais de congressos de Educação Matemática e de Modelagem na Educação Matemática ocorridos entre 2003 e 2008 e, de acurada leitura, elaborou-se um resumo de cada um, grifando-se termos-chave para efeito de análise. A razão de tomar esses artigos e não os anteriores (1979-2002) é a especificidade dos congressos em período recente e o fato de que membros de grupos de pesquisas de MM têm-se feito representar em alguns desses congressos.

Na terceira etapa (*análise*) teceram-se considerações sobre esses 64 artigos, utilizando-se como referencial as proposições de *concepção* e *tendência*. As declarações de MM apresentadas nos textos analisados indicam o conhecimento que seus autores têm de MM, os quais, ao partilhá-lo, tendem a manifestar seus valores e experiências diversas. Conforme Salles (2007),quando uma pessoa explicita um conhecimento, o faz a partir das interações com o objeto do conhecimento e das relações que são mediatas, dispondo de um estilo de pensamento. Assim, o conhecimento traz o estilo de pensamento de quem o propõe, a partir da sua específica vivência, educação, modo de entender as diferentes questões envolvidas, de conectar com diferentes regras e com diferentes propósitos. Esse estilo de pensamento trata da concepção da pessoa sobre algo. Identificar as concepções ou estilos de pensamentos manifestados nessas produções pode contribuir para entender como as propostas pedagógicas se alteram ao longo dos tempos e tendem para diferentes veios. Implicam salientar os eixos principais das declarações dos autores de MM, tanto pelo caráter elusivo do objeto de estudo como pelo fato de os autores estarem envolvidos no processo educativo.

3. Resultados e Discussões

O movimento pela Modelagem, iniciada há quatro décadas por pequeno grupo de professores, como proposta para instigar o interesse dos estudantes pela matemática, ampliou-se, significativamente, conduzindo à formação de grupos de pesquisa e estudos. Por efeito, as ações provenientes de estudo e pesquisas, ao serem divulgadas, fazem aumentar o número de interessados e adeptos. Neste veio emergem entendimentos diferentes e novas concepções influenciadas pelas experiências que, reconhecidas pelas comunidades educacionais dominantes, geram novas tendências.

Dos 64 artigos analisados que focam o Ensino Médio, a maioria apresenta dados empíricos obtidos de práticas em sala de aula: estudantes de 1ª, 2ª ou 3ª séries do Ensino Médio em cursos regulares (42), professores de Ensino Médio (4) e grupo particular de seis estudantes (1); e 14 são ensaios teóricos e três apresentam um modelo matemático sobre algum tema para exemplificar a modelagem para o ensino de algum tópico matemático do Ensino Médio.

Para identificar concepções e tendências de MM a partir do que os autores expressam, buscou-se apreender nos artigos alguns princípios que valessem como referência para emitir apreciação e análise: (a) motivação dos autores, (b) atividade e tema(s), (c) conteúdos matemáticos indicados e (d) referências e considerações de MM. Entre parênteses consta o número de artigos que tem o referido item.

(a) Motivação dos autores:

Em todos os artigos, citam a MM como principal propósito: instigar o interesse dos estudantes em aprender matemática. Desse propósito, derivam-se dois outros: a *aplicabilidade* da matemática e a *interação* do estudante no processo de ensino e aprendizagem – objetivos que se entremeiam nos artigos. Em relação à *aplicabilidade*, tem-se: tornar a matemática significativa (6), re-significar os conceitos (10), mostrar a matemática aplicada à realidade (16) e interdisciplinar (7). E em relação à *interação* do estudante: saber tomar decisão (5), ser criativo (2) e ter senso crítico em relação às questões da realidade (17). A defesa dos autores expressa nos objetivos indica a concepção de que a MM propicia aos estudantes a capacidade para utilizar matemática na solução de problemas e tomada de decisão em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos, fora dos limites escolares.

(b) Atividade ou tema abordado:

A maioria dos artigos que apresentam dados empíricos oriundos de práticas em sala de aula traz que o tema/assunto foi único em cada experiência realizada. Nem todos informam se os estudantes escolheram o tema entre outros propostos ou se o professor sugeriu e eles acataram. Nas atividades descritas sugerem aplicações matemáticas. Embora os estudantes levantem dados a respeito do tema e discutam sobre esses dados, as questões propostas levam à aplicação, e não à modelagem.

A palavra *modelagem* (model + agem) significa "ação de fazer modelo". Na literatura de Matemática Aplicada, MM tem como orientação as etapas de pesquisa. Um modelo é requerido quando em uma situação-problema os dados disponíveis são insuficientes para se utilizar de uma estrutura matemática e resolvê-la. Neste caso, alguns procedimentos são requeridos para se formular um modelo na tentativa de solucionar a questão – modelo que, se validado, é uma aproximação dessa situação. A saber: (1ª) Inteiração: reconhecimento da situação-problema → delimitação do problema, e familiarização com o assunto →referencial teórico; (2ª) Formulação: formulação do problema →hipótese, formulação de um modelo → desenvolvimento e resolução do problema a partir do modelo → aplicação; e (3ª) Modelação: interpretação da solução e validação do modelo → avaliação.

Nesses termos, a MM deveria partir de situações-problema de interesse do grupo de estudantes e, deste ponto, seguir os procedimentos da pesquisa científica. Mesmo que o conteúdo programático seja o foco primeiro, os procedimentos levariam os estudantes a peregrinar como um curioso, levantando questões, buscando meios de obter respostas. Assim, por este critério – atividade ou tema abordado –, analisada de forma isolada, não está explícita a concepção e a tendência de MM.

(c) Conteúdos matemáticos abordados:

Nos exemplos apresentados nos artigos, em 14 não são indicados os conteúdos matemáticos desenvolvidos e em 43 os conteúdos restringem-se a alguns conceitos de razão e proporção e sistemas de medida (12), funções de 1º e 2º graus e exponencial (21), geometria plana e espacial (7), análise combinatória e probabilidade (2), geometria analítica (1), sistemas lineares (1) e trigonometria (2). Não há em nenhum artigo uma explicitação sobre o porquê de abordarem somente esses conteúdos, embora o programa curricular matemático do Ensino Médio seja tão extenso; tampouco se foram apresentados definições, propriedades e teoremas, dentre outras.

Assim, não se pode estabelecer, por meio dos conteúdos abordados, se o propósito da atividade visava, fundamentalmente, mostrar a aplicabilidade da matemática e levar o estudante a participar deste processo, ou se para alguns desses autores dos artigos analisados os temas escolhidos frente ao tempo disponível em sala de aula não lhes permitiram ir além de conceitos matemáticos, ou ainda, se a experiência deles com MM se limita a esses temas/conteúdos.

A concepção de MM do professor depende do que ele conhece de MM: proveniente de quem e sob quais circunstâncias, estudos, experiências realizadas e tempo vivenciado – concepção formada a partir da compreensão dos elementos percebidos nas vivências e experiências e, então, da formação de significados. Por meio das atividades e temas apresentados nesses artigos, não se pode identificar com precisão o conhecimento de MM dos autores, bem como de suas concepções advindas de experiências, entendimentos e crenças da MM na Educação.

(d) Referências e considerações de MM:

Nesse critério (referências e considerações), identificam-se três enfoques: (a) método de ensino e pesquisa, (b) alternativa pedagógica de matemática e (c) ambiente de aprendizagem. No Quadro 1, a seguir, estão as principais declarações dos autores que constam nas análises e conclusões dos artigos. Devido às considerações similares, para não repeti-las, fez-se a adaptação, deixando-se os verbos na forma infinitiva. Como a maioria se refere ao estudante, pela mesma razão, omitiu-se o termo "estudante". Assim, a cada declaração está subentendido o termo "ao/para o estudante".

Quadro 1
Principais declarações dos autores

Método de Ensino e Pesquisa	▪ Desenvolver a capacidade para resolver problemas, tomar decisões, raciocinar logicamente, bem como pesquisar; ▪ Levar a busca de dados e interpretação dos dados; ▪ Instigar senso de investigação, compreensão, interpretação da realidade e conscientização; ▪ Possibilitar atividades que contribuam para entender a matemática e perceber sua importância para a compreensão e a validação dos fenômenos; ▪ Favorecer o ensino de teorias e conceitos matemáticos a partir da realidade do estudante, facilitando sua aprendizagem; ▪ Conscientizar em relação ao meio ambiente; ▪ Possibilitar a análise e a discussão de tendências das novas gerações e o porquê das tendências; ▪ Mostrar a importância da matemática para o conhecimento e a compreensão da realidade; ▪ Possibilitar a apreensão de conceitos matemáticos, o estabelecimento de conexões entre a matemática e as diferentes áreas curriculares, instigar a perseverança na busca de soluções dos problemas propostos juntamente com os pares.

Alternativa Pedagógica de Matemática	▪ Possibilitar a relação entre conteúdos matemáticos escolares e realidade; ▪ Aprender como a matemática se faz presente no cotidiano; ▪ Dar sentido às ideias trabalhadas; ▪ Proporcionar aprendizagem significativa, refletindo sobre a importância da matemática escolar; ▪ Permitir aula motivadora, dinâmica e enriquecedora que leve à aprendizagem significativa da matemática; ▪ Motivar para o aprendizado; ▪ Enriquecer o ensino e a aprendizagem da matemática; ▪ Re-significar os conceitos por meio da leitura e interpretação de textos interdisciplinares, contextualizando os saberes escolares; ▪ Auxiliar a aprendizagem dos que apresentam dificuldades de compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos; ▪ Reduzir as dificuldades em relação à interpretação dos enunciados e à resolução dos problemas.
Ambiente de Aprendizagem	▪ Levar a conscientização na vertente sócio-crítica, que pressupõe a associação de reflexões; ▪ Enfatizar a matemática como meio de questionamento social, contribuindo para a competência crítica; ▪ Formar consciência crítica sobre a situação-problema estudada, levando a um posicionamento crítico; ▪ Tratar assuntos de relevância social e que proporcionem aprendizagem significativa; ▪ Envolver em questões da realidade que levem da consciência ingênua à consciência crítica; ▪ Possibilitar caminhos para aquisição de conhecimento e preservação da humanidade, paz, solidariedade, amizade, respeito e ética.

Fonte: Do autor

Pelo primeiro enfoque, como método ou estratégia, que defendiam alguns precursores da MM na Educação, os procedimentos envolvidos na Modelagem devem permitir ao estudante aprender matemática a partir de assuntos de outras áreas e, ao mesmo tempo, aprender a fazer pesquisa, isto é, levantar questões e dados sobre o tema ou assunto, formular hipóteses e, daí, formular um modelo matemático, e, na etapa final, solucionar as questões levantadas a partir do modelo e avaliar o modelo. Neste enfoque, dizem Borges, Drews e Silva (2005) sobre a MM: "fundamental para a formação de um profissional que use o conhecimento científico como ferramenta de trabalho para identificar e entender um problema, propor modelos, discutir métodos matemáticos de solução e a sua validação, e a modelagem matemática proporciona todos esses procedimentos".

O segundo enfoque (alternativa pedagógica) tem como objetivo principal a aprendizagem do estudante. Para isso, a MM é um caminho para instigar a motivação, o interesse do estudante em aprender matemática a partir de assuntos ou temas do contexto dele. Como disse Bisognin *et al.* (2008, p.324), a MM "é uma estratégia que pode e deve ser utilizada em alguns momentos na sala de aula e em diferentes níveis de ensino".

No terceiro enfoque, a MM tem um foco na questão social. Os procedimentos da MM na Educação primam por mostrar a matemática como instrumento de julgamento das questões do meio. Como expressa Araújo (2004, p. 10), "modelagem matemática, quando fundamentada pela educação matemática crítica, pode proporcionar ricos momentos de discussões sobre o papel da matemática na sociedade". É oportunizado aos estudantes vivenciar uma matemática em ação, o que demanda discussões de outras áreas como economia, sociologia, geografia, ecologia entre outras, dependendo do tema escolhido para ser estudado.

Nos textos analisados, a maioria trata de tema único e faz aplicações matemáticas, e não modelagem no sentido da primeira concepção. Os procedimentos da MM não são realizados – a segunda fase da MM, que é a formulação do modelo, por exemplo. As questões levantadas dispõem de dados suficientes para que se faça uso de uma estrutura matemática para solucioná-las, isto é, as questões não requerem hipóteses devido à ausência de alguns dados. O fato de não se utilizar da segunda fase da MM (que é a mais árdua) pode ser devido à estrutura escolar (currículo, tempo, carga horária, etc.) e, assim, aos objetivos do ensino de matemática; ou em razão do entendimento que esses autores tiveram de MM quando se inteiraram. São esquemas teóricos, segundo Guimarães (1992), que o levam a interpretar o que lhe é apresentado e que sobremaneira o predispõe e influencia suas práticas docentes.

Conforme Thompson (1992), as concepções de um professor advêm de conceitos, significados, regras e preferências relacionadas com a disciplina, imbuídas das crenças conscientes ou subconscientes que adquiriu em sua formação escolar e experiência profissional. Schoenfeld (1985) indica que as concepções não operam individualmente, mas fazem parte de um sistema de concepções: da matemática, da perspectiva com a qual ele, pessoa, aborda a matemática, e das tarefas matemáticas. E esse sistema pode determinar de que modo ele decide abordar um problema, que técnicas ele usará ou evitará, e quanto tempo e esforço dedicará ao problema.

As expressões dos autores dos artigos analisados a partir dos quatro princípios (*motivação*, *atividade e tema(s)*, *conteúdos* e *referências* e *considerações*) indicam três concepções de MM, nomeadas conforme o enfoque posto nas *referências* e *considerações*: (1) *método de ensino e pesquisa*, (2) *alternativa pedagógica* de matemática e (3) *ambiente de aprendizagem* – concepções que, uma vez captadas por outro professor interessado em MM, o conduzirão a um entendimento e, caso ele venha a adotá-las em suas atividades educacionais, firmarão a tendência.

Essas três concepções de MM indicadas pelos textos sem dúvida representam a soma de contribuições de muitos professores e estudantes interessados em melhorar a aprendizagem escolar, aprimorando o conhecimento para melhor viver e agir na sociedade. São ações que cada um imprime em seu próprio meio, suas próprias atividades combinadas com as combinações de outras, e, por recorrência, à formação de cada pessoa, da comunidade, do setor profissional ou produtivo da sociedade. Para Ponte (2006), a concepção encontra-se no núcleo do conhecimento tanto declarativo como processual do professor e, por estar associada a valores e experiências diversas, pode manifestar-se de modos distintos numa dada situação de prática.

4. Considerações Finais

Esta pesquisa teve como propósito a identificação das concepções de MM no Ensino Médio dos artigos apresentados em 13 congressos entre os anos de 2003 e 2008. Embora a concepção de MM adotada pelos autores nas experiências de ensino é a de aplicação matemática a partir de um tema de interesse dos estudantes, todas têm um preceito comum: tornar os estudantes mais interessados nas aulas de matemática a partir do que eles entendem, vivenciam e podem compartilhar, seja baseados em seus conhecimentos prévios, seja em suas crenças.

A essência da MM no ensino é primar sempre por envolver os estudantes com a associação de elementos existentes no que diz respeito ao próprio tema. Essa associação pode incluir um modelo ou aplicação existente, uma lei fundamental ou uma mudança de variável. A expectativa é que, se os estudantes aprenderem a traduzir as questões reais ou as que imaginam em linguagem matemática e se interessarem a apresentar soluções e meios de verter a produção em termos compreensíveis, pode-se esperar por uma melhor formação deles quando vierem a atuar profissionalmente.

Nesse sentido, se a concepção de MM na Educação do professor, seja como *método*, *alternativa pedagógica* ou *ambiente de aprendizagem*, convergir para essa formação, o valor de suas realizações com os estudantes tende a frutificar. A arte da MM está em guiar os estudantes para uma adequada compreensão do meio em que vivem e o potencial da MM adquirida, pô-las em prática. Conforme Linton (1971, p. 77), "o ser vivo aprende seu ambiente e age para adaptar-se a ele". E, ao viver em comunidade, a pessoa defronta a natureza e a natureza do outro, não de forma isolada, mas na qualidade de membro de um grupo cooperativo e organizado.

Assim, não há como subestimar o mérito e a validade das expressões dos autores de MM sobre seus conhecimentos, experiências e entendimento sobre Modelagem Matemática na Educação. Quaisquer que sejam os pontos teóricos em questão, as concepções influenciadas pelas experiências ou pelas representações sociais dominantes que geraram, importa reconhecer que contribuições positivas como essas levarão a novas tendências, novas concepções, novos conhecimentos.

Referências Bibliográficas

Araújo, J. (2004). Modelagem Matemática segundo a Educação Matemática Crítica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife. *Anais*. Recife: UFPE, CD-ROM.

Bisognin, V.; *et al.* (2008). Contribuições da modelagem matemática para o ensino médio: ângulo de visão das cores do arco-iris. In: Encontro Paranaense de Modelagem e Educação Matemática, Guarapuava. *Anais*. Guarapuava: Unicentro, CD-ROM.

Borges, P.; Drews, S.; Silva, K. (2005). Modelagem Matemática e o Ensino de Álgebra. In: Conferência Nacional Sobre Modelagem e Educação Matemática. Feira de Santana. *Anais*. Feira de Santana: UEFS Editora, CD-ROM.

Guimarães, H. (1992). Concepções Práticas e Formação de Professores. *Educação Matemática*: Temas de Investigação, Lisboa, p.249-255.

Linton, R. (1971). *O Homem: Uma Introdução à Antropologia*. São Paulo: Martin Fontes.

Mclone, R. (1973). *The training of mathematicians: a research report*. Londres: Social Science Research Council.

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *Educação Matemática*: Temas de Investigação, Lisboa. Instituto de Inovação Educacional, p.185-239.

Salles, A. (2007). *Nem gênios, nem heróis: a história da ciência* em Ludwik Fleck. Belo Horizonte: UFMG, 2007. 127 p. Dissertação (Mestrado) ? Programa de Pós-Graduação em História, Universidade Federal de Minas Gerais.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, Berlim. (1),.4-8.

Thompson, A. (1992). *Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research*. In: Grouuws, D. (1992). Handbook for research on Mathematics Teaching and Learning. Nova Iorque: Macmillan. Cap. 7, p. 127-146.

Ethnomodeling: The Pedagogical Action of Ethnomathematics as a Program[1]

Milton Rosa
CEAD – UFOP/Encina Preparatory High School
Brasil/USA
milton@cead.ufop.br

Daniel Clark Orey
CEAD – UFOP/California State University, Sacramento
Brasil/USA
oreydc@cead.ufop.br

Abstract[2]

The application of ethnomathematical techniques and tools of modeling allow us to examine systems taken from reality and give us insight into forms of mathematics done in a holistic way. The pedagogical approach that connects a diversity of cultural forms of mathematics is best represented through ethnomodeling, which is a process of translation and elaboration of problems and the questions taken from real world contexts. Seen in this way, we would like to broaden the discussion of possibilities for the inclusion of ethnomathematics and associated ethnomodeling perspectives that respect the social diversity of distinct cultural groups with guarantees for the development of understanding different ways of doing mathematics through dialogue and respect.

Key words

Ethnomathematics, ethnomodeling, mathematical modeling, pedagogical action, mathematics.

Resumen

La aplicación de técnicas y herramientas de etnomatemática en modelos permite examinar los sistemas tomados de la realidad y da una idea de formas de las matemáticas realizadas de manera holística. El enfoque pedagógico que conecta la diversidad de formas culturales de la matemática está mejor representado por la etnomodelación, que es un proceso de traducción y elaboración de los problemas y cuestiones extraídas de contextos del mundo real. Visto de esta manera, nos gustaría ampliar la discusión de posibilidades para incluir la Etnomatemática y las correspondientes perspectivas de etnomodelación, que respetan la diversidad social de los distintos grupos culturales, con garantías para el desarrollo de la comprensión de las diferentes maneras de hacer matemáticas a través del diálogo y el respeto.

[1] Este trabajo corresponde a una mesa redonda realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

Palabras clave

Etnomatemáticas, etnomodelación, modelación matemática, acción pedagógica, matemáticas

1. Introduction

Throughout history, people have explored other cultures and shared knowledge often hidden behind ideas, traditions, practices, and customs. This cultural dynamism has enriched these cultures, including Western culture. The literature, problem solving methods, procedures, and teaching materials on mathematics are based on the scientific and mathematical concepts rooted on this dominant Western tradition that many of us are accustomed to thinking of when we *do* mathematics. Most of the examples used in teaching academic mathematics derive themselves from problems and contexts from a Western cultural paradigm. These procedures and methods mainly rely on the traditional Western-European view of science and mathematics.

If it can be shown that culture and society considerably affect the way individuals understand mathematical concepts, then it is possible to use and apply significant amounts of knowledge in diverse cultural forms, and enables the expansion of and familiarity with the diversity of the scientific and mathematical knowledge developed and acquired by members of distinct cultural groups. In this regard, ethnomathematics has demonstrated how mathematics is composed and that it is made of many diverse and distinct cultural traditions, not just those emerging from the Mediterranean, but that the teaching-learning of mathematics should include and place equal importance upon those originating from indigenous and non-Western contexts. Each cultural group has developed often unique ways of incorporating mathematical knowledge; and has often come to represent given cultural systems, especially in ways that members of cultural groups quantify and use numbers, incorporate geometric forms and relationships, and measure and classify objects. For all these reasons, each cultural group has developed unique and often distinct ways to *mathematize* their own realities. In this regard, mathematization is a process in which individuals from different cultural groups come up with different mathematical tools that can help them to organize, analyze, comprehend, understand, and solve specific problems located in the context of their real-life situation. These tools allow them to identify and describe a specific mathematical idea or practice in a general context by schematizing, formulating, and visualizing a problem in different ways, discovering relations, discovering regularities, and transferring a real world problem to a mathematical idea through mathematization.

Western-academic scientific arrogance often presents an overt disrespect of and an outright refusal to acknowledge a cultural identity (D'Ambrosio, 1990 & Zaslavsky, 1996). These *cultural particularities* should not be ignored nor should they be disrespected when individuals attend school. Inclusion of a diversity of ideas brought by non-traditional students or those from other cultures and countries can give confidence and dignity to these students, while allowing them to see a variety of perspectives and provide them a base in which they are able to learn academic-Western mathematics (Bassanezi, 2002). Equally important is the search for alternative methodological approaches. As Western mathematical practices are accepted worldwide, it is necessary to record historical forms of mathematical ideas that occur in different cultural contexts before many of these ancient or traditional practices are lost to time.

One alternative methodological approach is *ethnomodeling*, which may be considered the practical application of ethnomathematics and adds the cultural perspective to modeling concepts. When justifying the need for a culturally bound view on mathematical modeling, our sources are rooted on the theory of ethnomathematics (D'Ambrosio, 1990). We also argue that recognizing cultural differences in mathematics would reveal new perspectives on the scientific questioning methods. Research of culturally bound modeling ideas addresses the problem of mathematics education in non-Western cultures by bringing the cultural background of students into the mathematics curriculum and connects the local-cultural aspects of the school community into the teaching and learning of mathematics (Rosa & Orey, 2010a). On the other hand, the same local views may be used also in global collaborations, possibly widening other views of mathematics.

This pedagogical approach is needed in mathematics education because it is a major factor in broadening the modeling process as well as an ethnically fairer view that can help to bridge the mathematical achievement gap of the students. This alternative approach helps in promoting intellectually innovative ideas in the area of modeling by deepening and widening the Western understanding of mathematics. We refer to this pedagogical approach as ethnomodeling.

2. Ethnomathematics and Mathematics Education

Ethnomathematics as a research paradigm is much wider than traditional concepts of mathematics and ethnicity or any current sense of multiculturalism. D'Ambrosio (1990) referred to *ethno* as that related to distinct cultural groups identified by cultural traditions, codes, symbols, myths, and specific ways of reasoning and inferring. In so doing, ethnomathematics may be considered as the way that various cultural groups mathematize because it examines how both mathematical ideas and mathematical practices are processed and used in daily activities. It can be also described as the arts or techniques developed by diverse students to explain, to understand, and to cope with their own environment (DAmbrosio, 1992).

In accordance to Barton (1996), ethnomathematics embraces the mathematical ideas, thoughts and practices as developed by all cultures. From his perspective, a body of anthropological research has come to focus on both the intuitive mathematical thinking and the cognitive process that are largely developed in minority cultural groups. Ethnomathematics may also be considered as a program that seeks to study how students have come to understand, comprehend, articulate, process, and ultimately use mathematical ideas, concepts, and practices that may solve problems related to their daily activity.

In this context, Barton (1996) stated that ethnomathematics is not only the study of mathematical ideas because it is also the study of anthropology and history. The study of the history of mathematics assists in identifying the cultural and mathematical contributions of different cultures across the world. Seen in this context, the focus of ethnomathematics essentially consists of a serious and critical analysis of the generation and production of the mathematical knowledge and intellectual processes, the social mechanisms in the institutionalization of knowledge; and the diffusion of this knowledge (Rosa & Orey, 2006). In this much more holistic[2] context of mathematics that uses an anthropological perspective to include diverse perspectives, patterns of thought, and histories, the study of the systems[3] taken from reality help students to come to reflect, understand, and comprehend extant relations among all of the components of the system. Rosa (2000) defined ethnomathematics as the intersection of cultural anthropology, mathematics, and mathematical modeling, which is used to help students to translate diverse mathematical ideas and practices found in their communities.

All individuals and students as well possess and develop both anthropological and mathematical concepts. These concepts are rooted in the universal human endowments of curiosity, ability, transcendence, life, and death. They all characterize our essential humanness. An awareness and appreciation of cultural diversity that can be seen in clothing, methods of discourse, religious views, morals, and our own unique worldviews allows us to understand each aspect of the daily life of humans (Rosa & Orey, 2006).

The unique cultural background of each student represents a set of values and the unique way of seeing the world as it is transmitted from one generation to another. Principals of anthropology that are relevant to the work of ethnomathematics include the essential elements of culture such as language, economy, politics, religion, art, and the daily mathematical practices of diverse groups of students. Since, cultural anthropology gives us tools that increase our understanding of the internal logic of a given society; detailed anthropological studies of the mathematics of distinct cultural groups most certainly allows us to further our understanding of the internal logic and beliefs of diverse group of students.

3. Ethnomathematics and Mathematical Modeling

Ethnomathematics as a research paradigm is much wider than traditional concepts of mathematics and ethnicity or any current sense of multiculturalism. D'Ambrosio (1990) referred to *ethno* as that related to distinct cultural groups identified by cultural traditions, codes, symbols, myths, and specific ways of reasoning and inferring. In so doing, ethnomathematics may be considered as the way that various cultural groups mathematize because it examines how both mathematical ideas and mathematical practices are processed and used in daily activities. It can be also described as the arts or techniques developed by diverse students to explain, to understand, and to cope with their own environment (DAmbrosio, 1992).

In accordance to Barton (1996), ethnomathematics embraces the mathematical ideas, thoughts and practices as developed by all cultures. From his perspective, a body of anthropological research has come to focus on both the intuitive mathematical thinking and the cognitive process that are largely developed in minority cultural groups. Ethnomathematics may also be considered as a program that seeks to study how students have come to understand, comprehend, articulate, process, and ultimately use mathematical ideas, concepts, and practices that may solve problems related to their daily activity.

In this context, Barton (1996) stated that ethnomathematics is not only the study of mathematical ideas because it is also the study of anthropology and history. The study of the history of mathematics assists in identifying the cultural and mathematical contributions of different cultures across the world. Seen in this context, the focus of ethnomathematics consists essentially of a serious and critical analysis of the generation and production of the mathematical knowledge and intellectual processes, the social mechanisms in the institutionalization of knowledge; and the diffusion of this knowledge (Rosa & Orey, 2006). In this much more holistic[2] context of mathematics that uses an anthropological perspective to include diverse perspectives, patterns of thought, and histories, the study of the systems[3] taken from reality help students to come to reflect, understand, and comprehend extant relations among all of the components of the system. Rosa (2000) defined ethnomathematics as the intersection of cultural anthropology, mathematics, and mathematical modeling, which is used to help students to translate diverse mathematical ideas and practices found in their communities.

All individuals and students as well possess and develop both anthropological and mathematical concepts. These concepts are rooted in the universal human endowments of curiosity, ability, transcendence, life, and death. They all characterize our very humanness. Awareness and appreciation of cultural diversity that can be seen in our clothing, methods of discourse, our religious views, our morals, and our own unique worldview allow us to understand each aspect of the daily life of humans (Rosa & Orey, 2006).

The unique cultural background of each student represents a set of values and the unique way of seeing the world as it is transmitted from one generation to another. Principals of anthropology that are relevant to the work of ethnomathematics include the essential elements of culture such as language, economy, politics, religion, art, and the daily mathematical practices of diverse groups of students. Since, cultural anthropology gives us tools that increase our understanding of the internal logic of a given society; detailed anthropological studies of the mathematics of distinct cultural groups most certainly allows us to further our understanding of the internal logic and beliefs of diverse group of students.

4. Ethnomathematics and Ethnomodeling

Ethnomodeling is a process of elaboration of the problems and questions that grow from real situations that form an image or sense of an idealized version of the *mathema*. The focus of this perspective essentially forms a critical analysis of the generation and production of knowledge (creativity), and forms an intellectual process for its production, the social mechanisms of institutionalization of knowledge (academics), and its transmission (education). According to D'Ambrosio (2000), "this process is modeling" (p. 142). In this perspective, by analyzing their role in reality as a whole, this holistic context allows those engaged in the modeling process to study systems of reality in which there is an equal effort made by them to create an understanding of all components of the system as well as the interrelationships among them (D'Ambrosio, 1993 & Bassanezi, 2002).

The use of modeling as pedagogical action for an ethnomathematics program values previous knowledge and traditions by developing student capacity to assess and translate the process by elaborating a mathematical model in its different applications and contexts. By having started with the social context, reality and interests of the students and not by enforcing a set of external values and curriculum without context or meaning for the learner. Bassanezi (2002) characterizes this process as "ethno-modeling" (p. 208), and defines ethnomathematics as "the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups, and involves the mathematical practices that are present in diverse situations in the daily lives of members of these diverse groups" (p. 208).

In considering ethnomodeling as tool to uncover and study ethnomathematics, teaching is much more than the transference of knowledge because teaching becomes an activity that introduces the creation of knowledge (Freire, 1998). This approach in mathematics education is the antithesis of turning students into containers to be filled with information (Freire, 1970). In our opinion, it is necessary for school curriculum, to translate the interpretations and contributions of ethnomathematical knowledge into systemized mathematics because students will be able to analyze the connection between both traditional and non-traditional learning settings.

5. Examples of Ethnomodeling

According to Bassanezzi (2002), mathematical modeling uses mathematics as a language for understanding, simplification and resolution of real world problems and activities. Data gleaned from these studies are used to make forecasts and modifications pertaining to the objects initially studied. In this regard, one of the traditional definitions of a mathematical model is a body of symbols and mathematical relationships that represent the studied object, which is composed by a system of equations or inequalities, algebraic expressions, differentials, and integrals that are obtained through the establishment of a relationship between considered essential variables of analyzed phenomena (Bassanezzi, 2002). In other words, it is the systematic study of algorithmic processes, theory, analysis, design, efficiency, implementation, and application, which describes and transforms information. This definition of the Western mathematical modeling includes all data structures, which is a part of both *theory* and *design*; algorithms that deals with analysis and efficiency; mechanical and linguistic realizations, which deals with implementation; and applications that naturally applies the mathematical ideas and concepts to solve problems.

Thus, Western mathematical activities can be regarded as modeling by this definition and due to its cultural roots in the non-Western society it can be defined as ethnomodeling in the non-Western settings. For example, the importance of a non-traditional view on mathematics is emphasized with the emergence of the new types of problems related to artificial intelligence. A characteristic of these new problems is that they cannot be solved using syllogistic, that is, classical Aristotelian logic, but need multivalued logic, often called *fuzzy logic*, which is the logic that underlies inexact or approximate reasoning (Zadef, 1984). According to Ascher and Ascher (1986), multivalued logic is used in attempts to formalize human-like processes that are culturally bound. In this perspective, Zadef (1984) affirmed that the Hindu, Chinese and Japanese cultures have contributed to the development of fuzzy logic more than Western science because, in these cultures, there is a greater acceptance of a truth-value that is neither perfect truth nor perfect falsehood.

D'Ambrosio (2002) commented about an ethnomathematical example that naturally comes across as having a mathematical modeling methodology. In the 1989-1990 school year, a group of Brazilian teachers studied the cultivation of vines that were brought to Southern Brazil by Italian immigrants in the early twentieth century. This was investigated because the cultivation of wines is linked with the culture of the members of the cultural group in that region in Brazil. Both Bassanezi (2002) and D'Ambrosio (2002) believed that this wine case study is an excellent example of the connection between ethnomathematics and mathematical modeling through ethnomodeling (Rosa & Orey, 2007a).

Definition of Ethnomodels

In general, a model is a representation of an idea, a concept, an object, or a phenomenon (Gilbert, Boulter & Elmer, 2000). We define ethnomodels as cultural models that are pedagogical tools used to facilitate the understanding and comprehension of systems that are taken from reality of cultural groups. In this regard, ethnomodels can be considered as external representations that are precise and consistent with the scientific and mathematical knowledge that is socially constructed and shared by members of specific cultural groups. From this perspective, the primary objective for the elaboration of ethnomodels is to *translate* the mathematical ideas, concepts, and practices developed by the members of distinct and diverse cultural groups.

Measuring Land

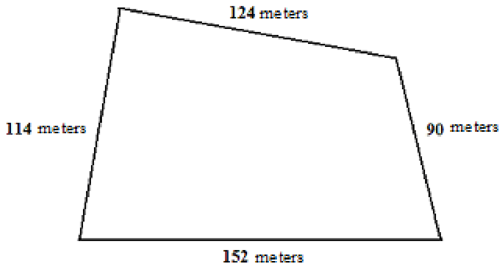
Knijnik (1996) proposed activities about the demarcation of land from research work with the participants of the Landless Peoples' Movement (Movimento dos Sem Terra - MST) in Southern Brazil. The demarcation of land activity was about the method of *cubação* of the land, which is a traditional mathematical practice applied by the participants of this movement. Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005) defined the term *cubação* of the land as the solution of "problems of the measurement of land using diverse shapes" (p. 41).

Thus, the use of the practice of *cubação* of the land as a pedagogical proposal to elaborate activities for the teaching and learning of mathematics shows the importance of the contextualization of problems in the learning environment of ethnomodeling through the elaboration of ethnomodels.

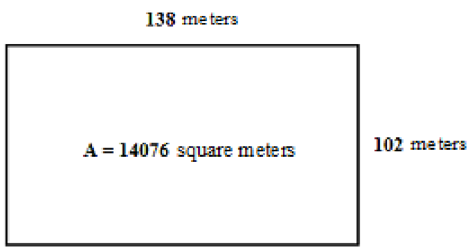
An Ethnomodel to Calculate the Area of the Land

Flemming, Flemming Luz e Collaço de Mello (2005) presented the following problem to calculate the area of figures with quadrilateral shapes:

Calculate the a area de land with a quadrilateral shape that measures 114 meters x 152 meters x 90 meters x 124 meters" (p. 42).



Thus, the mathematical knowledge of the Landless People can be represented by a model that transforms "the shape of the given land in a [rectangle] of 138 meters x 102 meter with an area of 14076 square meters.



The model of this mathematical practice can be explained by the following ethnomodel:

- Transform the shape of the irregular quadrilateral in a rectangle whose area can be easily determined through the application of the formula $A = b \cdot h$.
- Determine the dimensions of the rectangle by calculating the mean of the two opposite sides of the irregular quadrilateral.

$$Base = \frac{152 + 124}{2} = 138\ meters$$
$$Height = \frac{114 + 90}{2} = 102\ meters$$

- In order to determine the area of this irregular quadrilateral, it is necessary to determine the area of the rectangle.

$$A = b \cdot h$$
$$A = 138 \cdot 102$$
$$A = 14\,076\, m^2$$

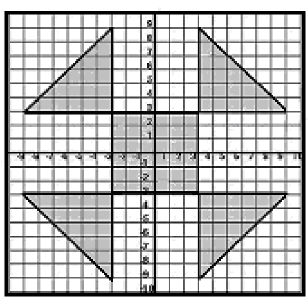
Regarding to this problem, there is another ethnomodel proceeding from the mathematical knowledge of the Landless People that can be explained through another ethnomodel. According to Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005), the irregular shaped quadrilateral parcel presented in this example can also be transformed in to "a square with sides of 120 meters, therefore with an area of 14400 square meters (p. 42). In this regard, it is possible to observe that the value of 120 was calculated by adding the dimensions of the quadrilateral and then dividing it by four, which is the number of sides of the irregular quadrilateral.

In this context, Bassanezi (2002) stated that a model is efficient when we realize that we are only working with approximations of reality. Thus, Flemming, Flemming Luz and Collaço de Mello (2005) affirmed that from the view point of mathematics, both methods present an approximated calculation of the area the irregular quadrilateral that fully satisfy the necessities and the life history of the participants of this specific cultural group.

The Symmetrical Freedom Quilts

Rosa an Orey (2009) affirmed that a quilt theme is a great way to begin one's work by integrating mathematics, art, history, and reading in an interdisciplinary approach. As a result of this, the authors proposed lesson plans that combined an ethnomathematical-historical perspective that elaborates a history project related to the *Underground Railroad,* which allows teachers to develop classroom activities and projects that help students to better understand history and geometry, especially concepts of symmetry and transformations through ethnomodeling . In this context, *Symmetrical Freedom Quilts* may be considered as links between mathematics, history, ethnomathematics, and the very tactile art of quilting. A quilt theme is a great way to integrate mathematics, art, and history in an interdisciplinary approach. One of the objectives of this project is to stimulate student's creativity and interest, because quilts may be considered as cultural and mathematical expressions of student's daily life.

Making quilt blocks are an excellent way to explore concepts of symmetry. As quilts are made from square blocks, usually 9, 16, or 25 pieces to a block, with each smaller piece usually consisting of fabric triangles, the craft lends itself readily to the application of symmetry. The Freedom Shoo Fly quilt shows how its blocks are symmetrical.



Modeling the Shoo Fly Symmetrical Quilt Block

Shoo Fly is one the simplest traditional Symmetrical Freedom Quilts. Although *Shoo Fly* is a basic pattern, its versatility provides quilters with some wonderful opportunities for creative use of colors, fabrics and stitching. *Shoo Fly* may be adapted to a variety of sizes. Blocks often measure 9 x 9, but variations such as 10 x 10 and 12 x 12 may also be used.

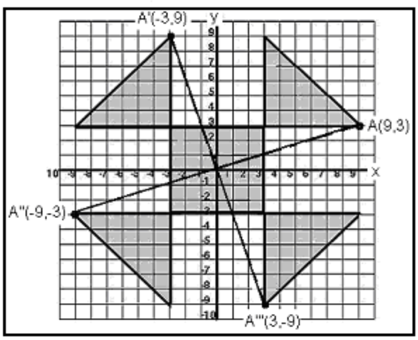
An Ethnomodel about Rotation

A rotation turns the figure through an angle about a fixed point called center. The center of rotation is assumed to be the origin of the $x-y$ coordinate system. A positive angle of rotation turns the figure counterclockwise, and a negative angle of rotation turns the figure in a clockwise direction.

Rotation is a transformation that is present in the *Shoo Fly* quilt block because it moves every point 90° counterclockwise around the origin of the $x-y$ coordinate system. The mapping of this rotation is $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$. In so doing, the coordinates of point Ain its rotation around the $x-y$ coordinate system are:

$$\begin{aligned} R_{90^\circ}A(9,3) &= A'(-3,9)\\ R_{90^\circ}A'(-3,9) &= A''(-9,-3)\\ R_{90^\circ}A''(-9,-3) &= A'''(3,-9)\\ R_{90^\circ}A'''(3,-9) &= (9,3) \end{aligned}$$

The figure below shows the rotation of point A around the $x-y$ coordinate system.



The other mappings for rotation are:

- Rotation of 180°, that is, $R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$. This is the same as the reflection in the origin of the $x--y$ coordinate system.
- Rotation of, 270°, that is, $R_{270^\circ}(x, y) = (y, -x)$.

A rotation creates a figure that is congruent to the original figure and preserves distance (isometry) and orientation (direct isometry).

Modeling the Tipi

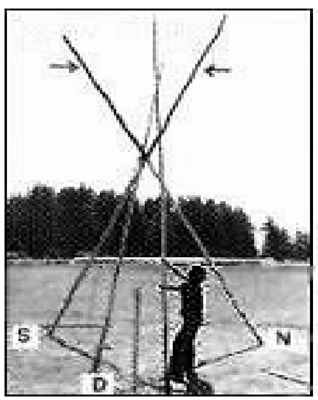
Spatial geometry is inherent by the shape of the tipi and it was used to remind, indeed symbolize the universe in which the Plains Peoples lived. The word *tipi* from the Sioux language refers to a conical skin tent or dwelling common among the prairie peoples.

According to Orey (2000), the majority of Sioux tribes use the tripod foundation or three-pole foundation because it is stronger and offers a more firm foundation than a quadripodal or four-pole tip foundation.

Tripodal versus Quadripodal Foundations of the Tipi

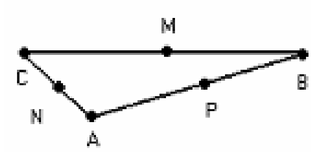
An ethnomodel explains why a tripod is more flexible than a quadripodal or four-legged structure. In this regard, imagine three points, A, B, and C that are not collinear. There are an infinite number of planes that pass through points A & B that contain the straight line AB. Only one of these planes also passes through point C therefore we can say that three points are not collinear if they determine one plane. This means that these non-collinear points exist on one plane and that three collinear points do not determine the only plane. This means that given any three non-collinear points, there is only one plane to which exist these same three points. This can be explained using the postulate for the determination of a plane. In other words, given any three non collinear points, there is only one plane to which exists these same three points. For example, in the 4-legged table, it has the possibility of the extremity of one of the legs that do not belong to the same plane. A table that has 3 legs, therefore, is always balanced. Similar to a three-legged table, the structure of the tipi appears to be perfectly adapted for the harsh environment in which it was used. It had the advantage of providing a stabile structure, was lightweight and portable.

At the same time it withstood the prevailing winds and extremely variable weather of this region. Let us look at this information mathematically.

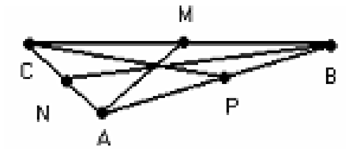


The base formed by the tripod is ΔABC.

The midpoints of each of the sides of ΔABC are points M, N, and P.



It is possible to match each vertex of ΔABC to the midpoint of each opposite sides that gives us the straight lines AM, BN, and CP.



These straight lines form three medians, which are the straight lines connecting the midpoint of each opposite side of the triangle and its vertex. The medians intersect at only one point called centroid. Archimedes demonstrated that medians of a triangle meet at its balance point or center of gravity, which is the centroid of the triangle. Native Americans place their fire and altar at this point in the tipi. Cartographers call this point the geographic center (Orey, 2000). The tipi cover is folded in half and the poles are laid together before tying them to form the tri or quadripodal frame, which forms the foundational base for the structure.

Some Considerations about Ethnomodeling

Ethnomodeling seems to be important especially in new fields of research such as artificial intelligence and fuzzy logic. However, ethnomodeling has been given a chance only in the new research or it has lead to new fields of research. Current normal science does not give ethnomodeling of non-Western cultures much chance to introduce new views into old themes. Our opinion is that different cultures can contribute to the development of mathematical concepts and ideas and enrich them in the field of Mathematics Education.

In addition to the development of mathematical modeling and education, ethnomodeling holds another equally important objective. As D'Ambrosio (1997) recognizes that ethnomathematics has the common goal of equity and dignity. In this regard, the study of ethnomodeling may encourage the ethics of respect, solidarity, and co-operation across cultures.

6. Final Considerations

Any study of ethnomathematics and mathematical modeling represents a powerful means for validating a student's real life experience, and gives them the tools to become critical participants in society. In so doing, educators should be empowered to analyze the role of what Borba (1990) refers to a s a student's ethnoknowledge in the mathematics classroom. In this regard, ethnoknowledge is acquired by students in the pedagogical action process of learning mathematics in a culturally relevant educational system. In this process, the discussion between teachers and students about the efficiency and relevance of mathematics in different contexts should permeate instructional activities. The ethnoknowledge that students develop must be compared to their academic mathematical knowledge. In this process, the role of teachers is to help students to develop a critical view of the world by using mathematics.

There exists a need to create a new role to mathematics instruction that empowers students to understand power and oppression more critically by considering the effect of culture on mathematical knowledge by working with their students to uncover the distorted and hidden history of mathematical knowledge.

This perspective forms the basis for significant contributions of a Freirean-based ethnomathematical perspective in re-conceiving the discipline of mathematics and in a pedagogical practice. The use of Freire's (1970) dialogical methodology is seen as essential in developing the curricular praxis of ethnomodeling by investigating the ethnomathematics of a culture in constructing a curriculum with people from other cultures to create curricula that enable the enrichment for all people's knowledge of mathematics.

Seen in this context, we would like to broaden the discussion of possibilities for the inclusion of ethnomathematics and mathematical modeling perspectives that respect the social and cultural diversity of all people with guarantees for the development of understanding our differences through dialogue and respect. This is how ethnomodeling can empower students in this century against all kinds of domination and oppression.

References

Barbosa, J. (1997). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? [What do teachers think on mathematical modeling?]. *Zetetiké*, 7(11), 67-85.

Barton, B. (1996). Making Sense of Ethnomathematics: Ethnomathematics is Making Sense. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 201-33.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modeling]. São Paulo, SP: Editora Contexto.

Biembengut, M. (1999). *Modelagem matemática e implicações no Ensino-aprendizagem de matemática* [Mathematical modeling and its implications in teaching and learning mathematics]. Blumenau, SC: Editora da FURB.

Biembengut, M. (2000). *Modelagem & etnomatemática: Pontos (in)comuns* [Modeling & ethnomathematics: (Un)common points]. In. Domite, M. C. (Ed.). Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm-1. São Paulo, SP: FE-USP, 132 -141.

Borba, M. (1990). Ethnomathematics and education. *For the Learning of Mathematics,* 10(1), 39-43.

Cross, M.; Moscardini, A. (1985). *Learning the art of mathematical modeling.* West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática [Ethnomathematics].* São Paulo, Brazil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1992). Ethnomathematics: A research Programme on the History and Philosophy of Mathematics with Pedagogical implications. *Notices of the American Mathematics Society*, 39. 1183-85.

D'Ambrosio, U (1993). Etnomatemática: Um Programa [Ethomathematics: A program]. *A Educação Matemática em Revista,* 1(1), 5-11

D'Ambrosio, U. (2000). *Etnomatemática e modelagem* [Ethnomathematics and modeling]. In. Domite, M. C. (Ed.). Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm-1. São Paulo: FE-USP, 142.

Ferreira, E. (2004). *Os índios Waimiri-Atroari e a etnomatemática [The indigenous people Waimiri-Atroari and ethnomathematics].* In Knijnik, G.; Wanderer, F., Oliveira. C. J. (Eds.). Etnomatemática: Currículo e Formação de Professores [Ethnomathematics: Curriculum and Teacher's Education]. Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do Oprimido [Pedagogy of the Oppressed].* Rio de Janeiro, Brasil: Paz e Terra.

Freire, P. (1998). *Pedagogy of freedom: Ethics, democracy, and civic courage.* New York: Rowman and Litttlefield.

Hodgson, T.; Harpster, D. (1997). Looking back in mathematical modeling: Classroom observations and instructional strategies. *School Science & Mathematics,* 97(5), 260-267.

Monteiro, A. (2004). *Etnomatemática: papel, valor e significado [Ethnomathematics: role, value, and meaning].* In Ribeiro, J. P., Domite, M. C. S., & Ferreira, R. (Eds.). Etnomatemática: papel, valor e significado. São Paulo: Zouk.

Orey, D. (2000). *The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone.* In Selin, H. (Ed.). Mathematics Across Culture: the History of Non-Western Mathematics. Dordrecht, Netherlands: Kulwer Academic Publishers, 239-252.

Orey, D.; Rosa, M. (2003). Vinho e queijo: Etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modeling!] *Bolema,* 16(20), 1-16.

Rios, D. (2000). *Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática.* In. Domite, M. C. (Ed.). Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática - CBEm-1. São Paulo, SP: FE-USP, 367 - 375.

Rosa, M. (2000). *From reality to mathematical modeling: A Proposal for using ethnomathematical knowledge*. Unpublished master thesis. California State University, Sacramento.

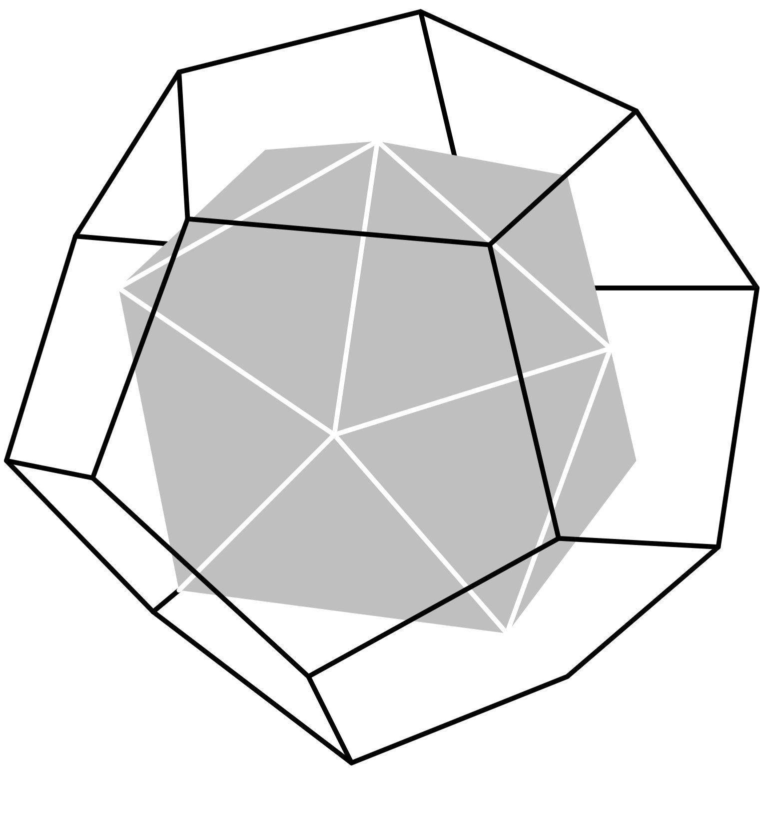
Rosa, M.; Orey, D. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica [Current approaches in ethnomathematics as a program: Delineating a path toward pedagogical action]. *Bolema,* 19(26), 19-48.

Rosa, M.; Orey, D. (2007a). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 10-16.

Rosa, M.; Orey D. (2007b). Etnomatemática: um enfoque histórico-antropológico [Ethnomathematics: A historical-anthropological approach]. *Revista de Educação Matemática*, 10(11, 12), 29-34.

Zaslavsky, C. (1996). *The multicultural math classroom: Bringing in the world.* Portsmouth, ME: Heinemann.

Reseñas



Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education[1]

Carmen Batanero Bernabeu
Facultad de Educación
Universidad de Granada
España
batanero@ugr.es

Abstract[2]

The Joint ICMI/IASE Study was organised by the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI; www.mathunion.org/ICMI/) and the International Association for Statistical Education (IASE; www.stat. auckland.ac.nz/˜iase/) to address the lack of attention to teaching statistics in schools. Results from this Study were reflected first in the Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study Conference held in Monterrey in 2008 (www.ugr.es/˜icmi/iase_study/) and secondly in the Joint ICMI/IASE book that is to be published in the ICMI Study series by Springer. In this Session the main conclusions of this Study and the Study book will be presented.

Key words

ICMI Studies; Teaching Statistics, Training Teachers.

Resumen

El estudio conjunto ICMI / IASE fue organizado por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI; www.mathunion.org/ICMI/) y la Asociación Internacional para la Enseñanza de la Estadística (IASE; www.stat.auckland.ac.nz/ iase /) para hacer frente a la falta de atención a la enseñanza de la estadística en las escuelas. Los resultados de este estudio se reflejan por primera vez en las Actas de la Conferencia de Estudio Conjunto ICMI / IASE, celebrada en Monterrey en 2008 (www.ugr.es/ ICMI / iase_study /) y en segundo lugar en el libro conjunto ICMI / IASE que se publicará en la serie de estudios ICMI por Springer. En esta sesión se presentan las principales conclusiones de este estudio, así como el libro Estudio.

Palabras clave

Estudios del ICMI, enseñanza de la estadística, formación de profesores.

[1] Este trabajo corresponde a una mesa redonda realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

1. Introducction

Since the mid-1980s, the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI, www.mathunion.org/ICMI/) has involved itself directly in the identification and investigation of issues or topics of particular significance to the theory or practice of contemporary mathematics education, and invested many efforts in organising specific ICMI studies on these themes.

At the same time, in the past three decades a statistics education research community has developed, linking people from various backgrounds (statisticians involved in teaching statistics in service courses at the university, mathematics educators, and psychologists), leading to the creation of the International Association for Statistical Education (IASE, www.stat.auckland.ac.nz/˜iase/) in 1991.

Conversations between ICMI and the IASE made clear there was a common interest in organising a Joint Study related to current problems in the teaching of statistics within school mathematics. This interest arose from the fact that, in spite of recommendations to increase the presence of statistics teaching at the school level, students in these levels do not acquire a statistical literacy adequate to function in an information-based society and to progress in the study of statistics at higher levels such as university or professional training.

The invitation from ICMI to collaborate on a Joint Study was accepted by the IASE. Subsequently, IASE suggested that this Joint Study merge with the next IASE Round Table Conference (June 30-July 4, 2008, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores, Monterrey, Mexico), just before the Eleventh International Congress on Mathematics Education (ICME-11; Monterrey, Mexico, July 6-13, 2008). Consequently, this specific Study brought the mathematics and statistics education communities together to work in collaboration and might serve to continue this collaboration in future work.

In this presentation, we describe the main conclusions from the papers presented and discussed in the conference (Batanero; Burrill; Reading & Rossman, 2008) that have later being developed in the Study book (Batanero; Burrill & Reading, 2011).

2. Teaching statistics at school level

The usefulness of statistics for daily life, the important role of statistics in developing critical reasoning; and the instrumental role of statistics in other disciplines were critical reasons to introduce statistics in secondary schools since 1980. However, a recent tendency is that statistics is now taught at very early ages in many countries; in some, six year-old children start studying basic statistical concepts and continue to develop these concepts in all the curricular levels until secondary school, where students in countries like Spain may study elements of statistical inference.

The Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) and the Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) project (Franklin et al., 2005) were influential in further developing statistics education in the school curriculum in the United States of America and many other countries that followed the American example. In addition, quick innovation and globalization led to a new perceived complexity of education that affected the mathematics curriculum, with a shift from content knowledge to competences (Gattuso & Ottaviani, 2011) that has also been reflected in statistics.

Several papers included in the Joint Study Conference Topic 1 and in the Study book describe different perspectives and approaches to teaching statistics in the school curricula that vary in each country depending on national policies, availability of resources within a country, and the relevance given to different topics and grade level. A common tendency is that changes in what is expected in the teaching of statistics do not just concern the amount but also the teaching approaches. Until recently, statistics in many school curricula was reduced to a formula-based approach that resulted in students who were ill-prepared for tertiary level statistics and adults who were statistically illiterate. The current recommendations, even for primary school levels, suggest a data-orientated approach to the teaching of statistics where students are expected to design and carry on their own investigations and experiments with the aim of developing statistical thinking and reasoning. The importance of developing statistical thinking and not just statistical knowledge in the students is also being emphasized in many curricula that focus on developing statistical reasoning, which is essential to modern society and complement reasoning in other areas of mathematics (Scheaffer, 2006).

The following issues related to teaching statistics were also debated:

- *Mathematical and statistical thinking.* An ongoing discussion in the statistics education community is how to make teachers aware of statistical thinking as something different from mathematical thinking, both of them being essential to modern society and complementing each other.
- *Fundamental ideas in the school statistics curriculum.* An important area of work was the identification of those statistical ideas that seem to be fundamental for understanding and being able to use statistics in the workplace, in personal lives and as citizens.
- *The role of probability in teaching and learning statistics.* Although the focus of the study is statistics, since statistics and probability are linked in school mathematics in many countries and within mathematics theory and practice, a reference to probability in the book was needed, as didactic problems still need to be solved in the teaching of probability.
- *Technology* has changed many aspects of modern life, and this change has been reflected in statistics education. In addition to exploring data, technology now is used to explore complex statistical ideas or processes via simulation. Computer software offers the opportunity for students to learn about modelling, enabling students to build their own models to describe data and to generate simulations that can be explored.
- *Teaching through project work.* Projects and investigations are ideal vehicles for student engagement, for learning to solve problems in context, and for synthesizing components of learning. Working with real data also helps students investigate issues that do not often appear in textbook problems: for example, recognising

different types of data, managing missing or incomplete data, defining variables and categories of classification.

- *Assessment* of student learning is an important part in every educational process as it provides information about student achievement in relation to the intended learning outcomes.

3. Teachers' attitudes, conceptions and beliefs

Although statistics as a content domain is widely accepted, typically statistics in the school curriculum is taught as part of mathematics. Consequently there is a need for a better preparation of primary and secondary school mathematics teachers, who are responsible for teaching statistics at these levels. The interest in the education and professional development of mathematics teachers has increased in the past 20 years, and there is now a body of research results on this issue; however, current literature seems to indicate that we have not come as far, in the specific case of statistics. This is evident in conferences (e.g., the ICMI Study 15), journals (e.g., Journal of Mathematics Teacher Education), surveys, and books that hardly take into account the particular case of statistics. The Joint ICMI/IASE Study was intended to address this omission by promoting research specifically focussed on the education and professional development of teachers to teach statistics.

Teacher education is usually focused on improving teachers' knowledge with relatively little attention paid to teachers' feelings, beliefs or attitudes. This is an important point, since, while teachers are willing to learn about and spend more time teaching statistics and acknowledge the practical importance of statistics, they feel their students experience greater difficulties in statistics than in other mathematical topics, and they consider themselves not well prepared to help their students face these difficulties.

Teachers' mathematics knowledge plays a significant role in the quality of their teaching since many activities of teachers, such as "figuring out what students know; choosing and managing representations of mathematical ideas; selecting and modifying textbooks; deciding among alternative courses of action" involve mathematical reasoning and thinking (Ball; et al. , 2001). Teacher's level of expertise in statistics depend on varied and different backgrounds and some may not have learned the content they now need to teach or how to teach in a way to meet the requirements of the curriculum. This is cause for concern as the research summarised in the Study book shows that many teachers unconsciously share a variety of difficulties and misconceptions with their students with respect to fundamental statistical ideas. For example, pre-service primary school teachers in Espinel's (2007) research lacked the experience to interpret graphs, made errors involving symmetry, outliers and cumulative frequencies. They struggled with mean and median and thought mainly in terms of qualitative variables, thereby confusing histograms with bar graphs. They incorrectly identified the relevant variable and failed to interpret the data distribution as a whole, focusing instead on specific aspects, such as the average or an outlier.

There is a scarce research related to teachers' statistical pedagogical content knowledge and moreover, this research suggests that this knowledge is often weak. Most teachers have little or no prior experience with using statistical investigation to conduct probability experiments or simulations. Thus, they may have difficulty implementing an experimental approach to teaching probability or teaching through statistical investigation. For example, in an experiment organised by Stohl (2005), although the participant teachers engaged students in statistical investigations through probability experiments, they often missed opportunities for deepening students' reasoning. The teachers' approaches to teach the frequentist approach to probability was unsuccessful, because they almost exclusively asked their students to work with only small samples sizes.

In González and Pinto's (2008) qualitative research pre-service secondary school mathematics teachers had a scant knowledge of graphical representation, no training in matters related to the curriculum and the processes of learning and teaching; specifically they knew nothing about stem and leaf graphs. They did not perceive the different cognitive levels associated with graphs or the various components and processes linked to their interpretation. When asked to classify textbooks' graphs they focused only on the procedural aspect of graphs and the teaching, according to their conception, should focus on the construction of graphs, the analysis of concepts and the application of algorithms and formulae.

Different models to describe the professional knowledge needed to teach statistics were discussed in the conference and in the book. Some of them derive from frameworks taken from mathematics education and others include specific components to take into account statistical thinking. For example, Burgess (2008) offered their own specific model of pedagogical content knowledge for statistics education that takes into account statistical reasoning (Wild & Pfannkuch, 1999). Lee and Hollebrands (2008) developed a framework to describe the professional knowledge needed by teachers when they teach statistics and probability with technology tools.

Another issue raised was the need to prepare instruments to obtain a measure of teacher expertise in relation to pedagogical content knowledge for teaching statistics. Watson, Donne and Callingham (2008) prepared a questionnaire, where items asked teachers to predict a range of responses their students might produce if presented with a question, and then to explain how they might use the question in their classrooms, including how they might intervene to address inappropriate responses. Rasch analysis was used to obtain a measure of teacher ability in relation to professional knowledge to teach statistics and three different levels of teacher ability were identified.

4. Current practices in the training of teachers

Few current teacher training programmes do adequately educate teachers for their task to prepare statistically literate citizens. Even when many prospective secondary teachers have a major in mathematics, few of them have received specific preparation in applied statistics and they also need education in the pedagogical content knowledge related to teaching statistics.

The situation is even more challenging for primary teachers, since teaching statistics to young children needs different approaches, than teaching statistics in secondary or high school students, and few primary school teachers have had suitable training in either theoretical or applied statistics. Research in statistics education shows that textbooks and curriculum documents prepared for primary and secondary teachers might not offer enough support. Sometimes they present too narrow a view of concepts (for example, only the classical approach to probability or inference is shown); applications are at other times restricted to games of chance or are not based on analysis of real data; finally in some of them the definitions of concepts are incorrect or incomplete (Cardeñoso, Azcárate & Serradó, 2005). There were also presented some examples of successful courses specifically directed to train teachers to teach statistics in different countries some of them based on theoretical models of how this training should be (Garfield & Everson, 2009).

Presentations from Botswana, Central- America, China, Iran, the Philippines, South Africa and Uganda, among other countries, showed that the problems concerning the way in which teachers are specifically educated to teach statistics in developing countries were similar to those described for developed countries.

5. Empowering teachers to teach statistics

In many countries, statistical offices and agencies are providing resources that can be used to support the introduction of statistical literacy in schools. However, without wide-reaching education and professional development of teachers, such resources are unlikely to have an impact on students. Moreover, in order for teachers to develop a deep and meaningful understanding of statistics that later they can use to help students develop the ability to think and reason statistically, it is important to promote teachers' statistical literacy (Ridgway; Nicholson; & McCusker, 2011) and statistical reasoning (Pfannkunch & Ben-Zvi, 2011). Different suggestions and experiences in the education of teachers were presented at the Joint Study Conference.

A conclusion of the Conference discussion was that teachers should experience the full cycle of research with statistical projects, if the goal is to change how statistics is experienced in the classroom Moreover, when time available for working with teachers is scarce, some papers (Godino; et al., 2008) suggested that a formative cycle where teachers are first given a statistical project and then carry out a didactical analysis of the project can help to simultaneously increase the teachers' statistical and pedagogical knowledge.

Although technologies are becoming more common in statistics classrooms, teachers' abilities to use these tools effectively depend on many factors, including their statistical and pedagogical knowledge. Technology can be used to engage teachers in tasks that simultaneously develop their understanding of statistical ideas and allow them to experience how technology tools can be useful in teaching statistics (Lee & Hollebrands, 2008).

Connecting teacher education to their own practice and promoting collaborative work among teachers is essential to improving professional practice. It is through the exchange of ideas and materials among teachers who have common problems and needs that new ideas emerge for the introduction of new activities, new practices or new competencies (Arnold, 2008). For example, analysing collective case studies and discussing teaching experiences and students' responses to given tasks can reveal the teachers' lack of specific knowledge of some statistical concepts and promote their statistical and pedagogical content knowledge. Through reading and discussing cases, teachers can acquire knowledge of general principles of statistics while also developing reasoning skills necessary for teaching (Groth & Shihong, in press). The affordances offered by modern Internet technologies provide new distance-learning opportunities for the pre-service and in-service training of teachers, making it possible to overcome the restrictions of shrinking resources and geographical locations and to offer high quality learning experiences to geographically dispersed teachers (Meletiou & Serrado, in press).

6. Collaboration in teacher education

Because of the inter-disciplinary nature of statistics, cooperation is both natural and beneficial for those involved in statistics education. The preparation of mathematics teachers has historically been the responsibility of mathematicians and mathematics educators, although recently statisticians have started to play a major role in teacher preparation in a few countries For example, the GAISE framework (www.amstat.org/education/gaise/) was written, in collaboration between mathematics educators and statisticians, to provide guidance to those involved with teacher preparation. In addition, in many countries statistical offices and associations are increasingly involved in producing materials and organising initiatives to help increase statistical literacy of both students and teachers. Examples analysed in the Study book deal with experiences of collaborations by statistical offices in Canada, New Zealand, South Africa, and Portugal, as well as international experiences such as the CensusatSchool or the International Statistical Literacy Project.

7. Final thoughts

The success of the Joint ICMI/IASE Study indicated that the time was ripe for collaboration between mathematicians and statisticians to address challenges related to the advancement of both teaching and research in statistics education. However, continuous changes and the rapid development of statistics education imply that this collaboration should continue in the coming years. Thus, the hope is that the analyses, research and case studies presented in the conference and analysed in the Study book will provide a rich starting point for new research and, consequently for improving the preparation of teachers and statistics education at school level.

Acknowledgement

Project EDU2010-14947 (MICIN).

References

Arnold, P. (2008). *Developing new statistical content knowledge with secondary school mathematics teachers*. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C.; Rossman, A. (2008).

Ball, D.; Lubienski, S.; Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers? mathematical knowledge. In: Richardson, V. (Ed.). *Handbook of research on teaching.* 4th ed. Washington, DC: American Educational Research Association, pp. 433–456.

Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study.* Springer, in press.

Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C.; Rossman, A. (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/ iase/publications.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C.; Rossman, A. (2008).

Cardeñoso, J.; Azcárate, P.; Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto (Obstacles in the learning of probabilistic knowledge: Influence from the textbooks). *Statistics Education Research Journal* 4(2), 59–81. On line; //www.stat.auckland.ac.nz/ iase/serj.

Garfield, J.; Everson, M. (2009). Preparing teachers of statistics: A graduate course for future teachers. *Journal of Statistics Education*. 17(2). On line: http://www.amstat.org/publications/jse/.

Gattuso, L.; Ottaviani, M. (2011). *Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics*. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (in press).

Godino, J.; Batanero, C.; Roa, R.; Wilhelmi, M. (2008). *Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work.* In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C.; Rossman, A. (2008).

Espinel, M. (2007). Construcción y razonamiento sobre gráficos estadisticos en la formación de profesores (Building and reasoning on statistical graphs in the training of teachers). In M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Laguna (Spain): Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 99–119.

Franklin, C.; Kader, G.; Mewborn, D.; Moreno, J.; Peck, R.; Perry, M.; Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report*. American Statistical Association. Online: www.amstat.org/education/gaise/.

González, M.; Pinto, J. (2008). *Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation*. In: C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (2008)

Groth, R., & Shihong, X. (2011). Preparing teachers through case analyses. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (in press).

International Programme Commitee (2006). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Discussion Document. Online: www.ugr.es/ icmi/iase_study/Discussion_Document.pdf

Lee, H.; Hollebrands, K. (2008b). Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*. 8(4). On line: www.citejournal.org/.

Meletiou, M.; Serradó, A. (2011). Distance education of statistics teachers. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (in press).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. Online: http://standards.nctm.org/.

Pfannkuch, M.; Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers? statistical thinking. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (in press).

Ridgway, J.; Nicholson, J.; McCusker, S. (2011). Developing statistical literacy in students and teachers. In: Batanero, C.; Burrill, G.; Reading, C. (in press).

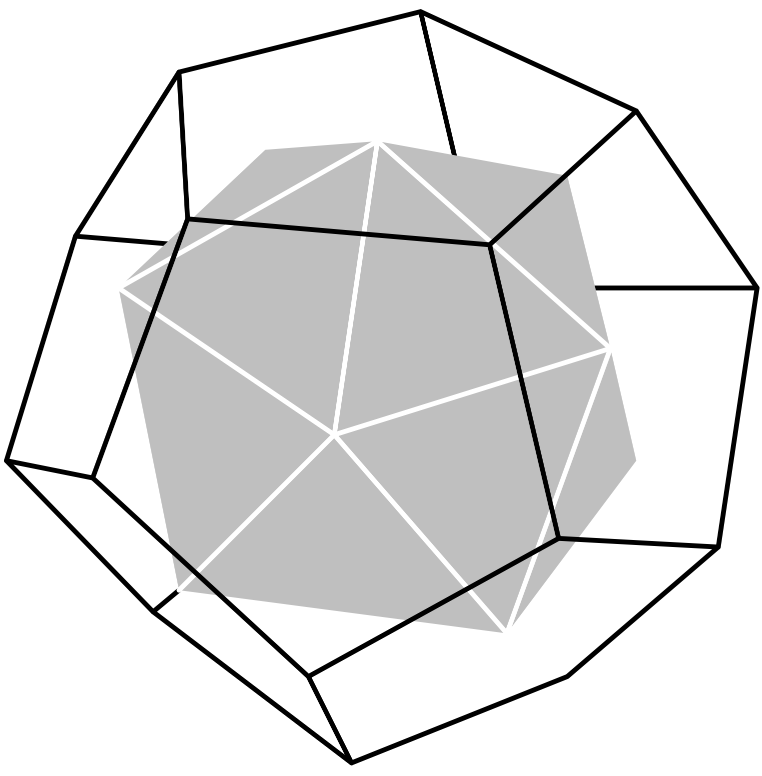
Scheaffer. R. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. In: Burril, G.l (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance*. Reston, VA: NCTM, pp. 309-321.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In: Jones, G. (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* New York: Springer, pp. 345-366.

Watson, J.; Donne, J.; Callingham, R. (2008). Establishing PCK for Teaching Statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (2008)

Wild, C.; Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review.* 67(3), 221-248.

Documentos



El Comité Editorial de *Cuadernos* decidió incluir en esta sección documentos que sirvieron de base a presentaciones en la mesa redonda: *Contribución intelectual de Ubiratan DAmbrosio a la Educación Matemática*, que se realizó en la XIII CIAEM. Estos documentos constituyen una valiosa contribución a la historia de uno de los principales intelectuales latinoamericanos de la Educación Matemática.

Semblanza de Ubiratan D'Ambrosio como historiador de las matemáticas y las ciencias[1]

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle, Cali
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen[2]

Como contribución a la mesa plenaria del XIII CIAEM en homenaje al profesor Ubiratan D'Ambrosio, se estudian los aspectos más destacados de su actividad como historiador de las ciencias y las matemáticas, la originalidad de sus propuestas programáticas, y su contribución a la institucionalización y la visibilización internacional de los estudios latinoamericanos en este campo.

Palabras clave

Historia de la matemática, historia de la ciencia, educación matemática, etnomatemática, ciencia latinoamericana.

Abstract

As a contribution to the plenary round table in homage to Professor Ubiratan D'Ambrosio, the most distinguished aspects of his activity as a historian of science and mathematics, the originality of his programmatic proposals, and his contribution to the institutionalization and international visibility of Latinamerican studies in this field will be discussed.

Key words

History of math, history of science, math education, ethnomathematics, Latinoamerican science.

1. Mi primer encuentro personal con Ubi

Si la memoria no me falla, mi primer encuentro con Ubi fue en Colombia y no en México como debería haber sido. A ambos nos nombraron miembros del Consejo Latinoamericano de la Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología-SLHCT en la reunión constitutiva de agosto de 1982 en Puebla, lo cual nos llevaría luego a interactuar con frecuencia en Brasil y otros países. Sin embargo, por alguna razón, Ubi no pudo asistir a esta reunión. Habría que esperar al año siguiente (noviembre de 1983) para conocernos en el "Seminario Internacional para el Estudio de la Metodología de la Historia Social de las Ciencias en América Latina", organizado en

[1] Este trabajo corresponde a una mesa plenaria realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Bogotá por Colciencias con el apoyo de la OEA y la Sociedad Colombiana de Epistemología, y que contó con la activa participación de varios directivos de la naciente SLHCT.

Como debe recordarlo Carlos Eduardo Vasco, hoy presente en esta mesa y quien entonces tuvo a su cargo la coordinación del seminario junto con Diana Obregón y a quienes se sumarían un poco más tarde a esta labor como Luis Enrique Orozco, este evento fue decisivo para iniciar la ejecución del proyecto de Historia Social de la Ciencia en Colombia cuyos resultados se publicaron en 1993 en una colección de diez volúmenes. (Quevedo, 1993). (Por cierto, conviene tener en cuenta que por aquellos años empezaron a publicarse en la región las primeras colecciones de historia de las ciencias y la tecnología, México, Brasil, Colombia… que hoy son obras de referencia y consulta obligada en distintas medios académicos y profesionales). Así pues, mi primer encuentro personal con Ubi está asociado a un giro fundamental en la institucionalización y profesionalización del campo de estudios de la historia de las ciencias en la región.

Meses después esta presencia se haría más cercana y casi obligada. En febrero de 1984 Ubi volvió a Bogotá para participar en la "Conferencia internacional sobre la naturaleza de la indagación epistemológica", y en noviembre del mismo año viajó a Cali para asistir al "Seminario latinoamericano sobre alternativas para la enseñanza de la historia de las ciencias y la tecnología" organizado por mi por encargo de la SLHCT. Esta última visita es de grata recordación porque me permitió empezar a reconocer en la personalidad intelectual de Ubi, otras modalidades de actividad científica y matemática distintas a aquellas que me eran más familiares por mi reciente formación en Polonia y Francia en historia de las ciencias y las matemáticas.

Ubi vino a Cali a proponernos un marco teórico para indagar sobre el pasado y el presente de la actividad científica en nuestras culturas, utilizando una epistemología abierta, flexible y menos restringida que la epistemología de la ciencia académica e institucionalizada. Se trataba de un programa alternativo de Etnociencia, concebido para implementar tareas en Historia y la Enseñanza de las ciencias de tal manera que se pudiera "entender al mismo tiempo, tanto la ciencia occidental como otras formas de conocimiento de naturaleza científica, estructuradas según un ordenamiento y una lógica diferentes sustancialmente a los de aquellas y que, por ende, permiten considerarlas como "otras ciencias"." (D'Ambrosio, 1986).

En lo inmediato la reflexión sobre este enfoque contribuyó a alimentar nuestras elaboraciones metodológicas sobre las dinámicas culturales del conocimiento tanto en el Seminario en Historia de las Ciencias que impartíamos con varios colegas en la Universidad del Valle, como en el grupo interdisciplinario e interinstitucional del proyecto de Colciencias y OEA sobre Historia Social de las Ciencias en Colombia. En los meses siguientes leímos con mucha atención varias de sus publicaciones sobre las relaciones de la etnomatemática con la historia y la pedagogía de las matemáticas. (D'Ambrosio, 1985, 1992). Los intercambios de profesores y alumnos del Instituto de Educación y Pedagogía de Cali con Ubi sobre estos temas se hicieron cada vez más frecuentes. Poco a poco el enfoque de la etnomatemáticas se incorporó en las líneas de investigación de nuestros grupos, tanto en historia social de las matemáticas como en educación matemática.

En 1997 invitamos a Ubi de nuevo a Cali para hacer la conferencia inaugural del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, en el cual se han defendido ya varias tesis en etnomatemáticas con su asesoría. Igualmente su apoyo ha sido invaluable en cuanto al desarrollo de la etnomatemáticas en otras universidades, principalmente del sur occidente del país. Por ejemplo, Ubi estimuló la creación de la Red latinoamericana de etnomatemáticas y la revista virtual en etnomatemáticas en la Universidad de Nariño. Actualmente varios doctores colombianos con formación en etnomatemáticas trabajan en universidades del país. Otros hacen sus estudios de doctorado en este campo en Brasil y otros países. Todos ellos reconocen que, directa o indirectamente, la obra de Ubi o sus enseñanzas influyeron notablemente en su motivación inicial y en la orientación de sus trabajos.

2. El medallista Kenneth O. May

Para comprender mejor el aporte de Ubi a la historia de las matemáticas y las ciencias, es indispensable referirse al Premio Kenneth O. May que se le otorgó en 2001 y que consagró la excelencia de su trabajo en nuestro campo de estudios a nivel internacional.

En 1977 la Comisión Internacional de Historia de las Matemáticas instauró el Premio en honor de Kenneth O. May por los servicios distinguidos que este matemático e historiador de la matemática prestó a la comunidad internacional con la publicación del primer *Directorio Mundial de Historiadores de las Matemáticas* y la creación de *Historia Mathematica*, una de las revistas científicas más importantes en esta campo de estudios. Dirk J. Struik y Adolf P. Yushkevich fueron los primeros historiadores de la matemática que recibieron el premio en el 18º Congreso internacional de Historia de las Ciencias de Hamburgo en 1989. A partir de 1993 junto al premio se comenzó a impartir una medalla en bronce.

Los siguientes beneficiarios del premio y la medalla fueron, Christoph J. Scriba y Hans Wussing en el 19º Congreso Internacional de Historia de las Ciencias de Zaragoza, René Taton en el 20º Congreso Internacional de Historia de la Ciencia de Lieja en 1997, Ubiratan D'Ambrosio y Lam Lay Yong en el 21º Congreso Internacional de Historia de la Ciencia y la Tecnología de México. En 2005 el premio y la medalla Kenneth O. May fueron otorgados a Henk Bos en ceremonia especial. Los últimos medallistas Kenneth O. May han sido, hasta el momento, Ivor Grattan-Guinness y Rhada Charan Gupta quienes la recibieron en el 23º Congreso de Historia de la Ciencia y la Tecnología de Budapest en 2009.

Al preparar esta semblanza sobre Ubi me pregunté varias veces qué podría decir en cuanto a los ejes temáticos principales de su actividad como investigador y orientador de tesis de maestría y doctorado en historia de las matemáticas. No encontré una respuesta satisfactoria en su extenso *curriculum vitae* ni en la consulta de varias noticias académicas y científicas sobre sus trabajos. No obstante, me arriesgo a hacer una selección personal de tres problemáticas remitiendo a las publicaciones que mejor conozco.

- En primer lugar, lo más evidente para la comunidad internacional: su contribución a la renovación y ampliación del campo de historia de las matemáticas al introducir la perspectiva epistemológica de la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2002).
- Luego, el programa de su creación y en el que ha venido trabajando a lo largo de más de 25 años, sobre la apropiación pedagógica de la historia de las matemáticas teniendo como fundamento el enfoque de la etnomatemática (D'Ambrosio, 1985, 1992).
- En fin, sus investigaciones sobre la historia de las culturas científicas no occidentales y, en particular, sobre la historia de la ciencia latinoamericana, basado en su crítica radical al eurocentrismo. (D'Ambrosio, 2000, 2001).

Dentro de pocos días se cumplirán diez años desde cuando se le otorgó a Ubi la Medalla May en sesión solemne durante el 21º Congreso Internacional de Historia de la Ciencia y la Tecnología en México en el mes de julio de 2001. Para destacar la conexión entre estos dos eventos y la obra de Ubi propongo tener en cuenta dos circunstancias: que este congreso se realizó por primera vez en América Latina y que su divisa fue "Ciencia y Diversidad Cultural". Ambas cuestiones resultan ser más significativas si se tiene en cuenta una preocupación constante en los trabajos de Ubi en etnomatemáticas, historia de las matemáticas o educación matemática: la crítica radical al eurocentrismo y la búsqueda de dispositivos de pensamiento y marcos conceptuales de síntesis entre tradición y modernidad.

3. La visibilización internacional de la historia de la ciencia latinoamericana

Con la escogencia de México como sede del 21º Congreso Internacional, la División de Historia de la Ciencia de la Unión Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia (UIHFC) dio un paso trascendental que transformó la costumbre de convocar a investigadores de las más variadas procedencias y culturas a reunirse en congresos organizados exclusivamente en países del hemisferio norte. Una decisión como esta conllevaba desde luego el reconocimiento de la madurez que ya habían alcanzado los estudios latinoamericanos sobre la ciencia, y a su innegable impacto en el plano internacional. Esto se logró en buena medida gracias a la articulación sistemática de actividades regionales a través de la SLHCT, a su divulgación internacional por medio de *Quipu, Revista Latinoamericana de HCT* (ver Quipu), y a la presencia de personalidades latinoamericanas en cargos de liderazgo internacional. El caso más notable es Juan José Saldaña quien en el momento del congreso era Secretario del Comité Ejecutivo de la UIHFC. Más adelante me referiré a las destacadísimas posiciones desempeñadas por Ubi.

El lema de "Ciencia y Diversidad Cultural" del congreso de México era el más apropiado para resaltar la característica representativa del premio Kenneth O. May que se le confirió al mismo tiempo a Ubi y a Lam Lay Yong. Venía a sancionar el reconocimiento de la comunidad internacional a la legitimidad de nuevos objetos de estudios históricos en relación con los temas convencionales de la ciencia académica europea y anglosajona.

Al referirse en su noticia sobre el premio a la contribución de Ubi a la ampliación de nuevos campos en la historia de las matemáticas, Kirsti Andersen, presidente de la Comisión Internacional de Historia de Matemáticas, afirma lo siguiente: "de ahora en adelante ningún historiador serio de las matemáticas podría escribir un libro general en historia de las matemáticas sin incluir la etnomatemática y las matemáticas chinas". (ver Andersen).

Hay una manera de valorar la afirmación de Andersen desde una perspectiva histórica más amplia. Para los historiadores latinoamericanos que suscribimos la "Declaración de Budapest" en el marco del XVI Congreso Internacional de Historia de la Ciencia de 1981, ello se traduce en la constatación de que veinte años después empezó felizmente a realizarse el motivo principal que inspiró la constitución de la SLHCT: articular a nivel regional nuestras actividades en historia de la ciencia latinoamericana e incorporarla como un objeto legítimo de estudio al campo universal de la historia de las ciencias. (ver Declaración de Bucarest). Es verdad que desde sus inicios nuestro propósito recibió numerosos estímulos de personalidades influyentes de la comunidad internacional de historia de las ciencias. Quiero mencionar entre ellos de manera especial a René Taton, director del Centro Alexandre Koyré de París e igualmente medallista Kenneth O. May.

En su discurso de apertura del seminario de Cali de 1981 al que ya me he referido, Saldaña trajo a cuento una anécdota que precisamente Taton acostumbrada divulgar en distintos círculos: "que cuando preparaba alrededor de los años 1960 los cuatro volúmenes de su magistral *Histoire Générale des Sciences* (Taton, 1957-1964) no logró conseguir quien pudiera escribir el capítulo de la ciencia en Latinoamérica, en una visión de conjunto, pues los historiadores y científicos latinoamericanos a quienes consultó se mostraron ignorantes del proceso científico regional". (Saldaña, 1986). El testimonio de Taton y de otras personalidades en el mismo sentido se convirtió en desafío, y la dirección de la SLHCT asumió dos grandes emprendimientos: integrar actividades regionales y publicar obras colectivas sobre historia de las ciencias en nuestros países.

Dirk J. Struik es otro medallista Kenneth O. May a quien, por fuerza, debemos recordar cuando se habla de la visibilización de la historia latinoamericana de la ciencia en conexión con las actividades de Ubiratan D'Ambrosio. Para los historiadores de mi generación los trabajos de Struik fueron centro de referencia de un enfoque de historia social de las matemáticas en el cual las ideas matemáticas se relacionan íntimamente con sus respectivos contextos socioculturales de producción. Me refiero en particular a *A Concise History of Mathematics* (Struik, 1948b), y en general a su *Yankee Science in the Making*. (Struik, 1948a). Con el paso de los años comprenderíamos (sobre todo indirectamente a través de sus relaciones personales con Paulus y Ubi) que el enfoque de historia social de Struik tenía una relación profunda con un programa anticolonialista de la ciencia como el que Ubi y el equipo directivo de la SLHCT veníamos impulsando en la región. Struik hacía parte de un grupo cada vez más representativo de historiadores del hemisferio norte que buscaban explicar las actividades científicas en países como los nuestros, en su propia dinámica cultural y no de manera restringida como simple producto del eurocentrismo y las culturas exógenas dominantes.

Esta orientación de ideas ya empezaba a advertirse en el artículo que Struik publicó en el primer número de *Quipu* de 1984 sobre la ciencia al inicio de la colonia en Norte América y México. (Struik, 1984a, 1984b). Por su contenido y por la notoriedad de su autor, este trabajo sin duda contribuyó a la buena recepción de la recién creada revista en los medios internacionales. Años más tarde, en 1988, a raíz de una invitación que le hizo Ubi para que dictara conferencias en Unicamp y en la USP, Struik se interesó a tal punto por el desarrollo científico de Brasil durante la época de la ocupación holandesa del Nordeste (1624-1664), que escribió un trabajo sobre este tema para la *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*. (Citado en D'Ambrosio, 2004).

4. La gestión latinoamericana de espacios institucionales en historia de las matemáticas y las ciencias

El caso de Struik ilustra el importante papel de Ubi en interesar a personalidades académicas por la historia de la ciencia latinoamericana. De hecho uno de los aspectos a destacar de su labor en historia de las matemáticas, educación matemática y otros campos, ha sido su compromiso en promover el acercamiento de eminentes científicos y educadores del hemisferio norte a los estudios sobre la ciencia y la educación en el hemisferio sur.

Entonces, sin demeritar en nada el reconocimiento a su contribución científica como historiador de las matemáticas y de las ciencias, yo quisiera proponer que igualmente nos representemos la medalla Kenneth O. May otorgada a Ubi en el Congreso de México de 2001, inclusive su reciente designación como miembro de la Academia Internacional de Historia de las Ciencias de París, como el reconocimiento a los esfuerzos suyos y de otros colegas por la visibilización internacional de la historia de la ciencia de nuestra región. La lista de conferencias y congresos en los que Ubi ha participado es impresionante. Así como sus estancias como profesor invitado en numerosas universidades y centros de formación. Pero ello no se ha limitado a la realización de tal o cual propósito académico, pues la misma actividad que le ha permitido generar resultados originales en la ampliación del campo conceptual de historia de las matemáticas y las ciencias, también le ha permitido contribuir a formar escuela de pensamiento y consolidar instituciones en este campo. No hay otra manera razonable de entender su frenética presencia en tantos eventos internacionales.

Finalmente, no puedo dejar de referirme al mérito excepcional que los académicos que hemos interactuado con Ubi le reconocemos por encima de todo: su talante pedagógico, su don de gentes, su disposición habitual a escuchar y a relacionarse con los temperamentos y personalidades más diversas, lo cual le ha facilitado orientar sus capacidades a la creación y dirección de distintas instituciones en historia de las ciencias en Brasil y otros países de Latinoamérica y a nivel internacional. Entre ellas cabe mencionar las Presidencias de la Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología (1988-92), de la Sociedad Brasileña de Historia de la Ciencia (1991-93) y de la Sociedad Brasileña de Historia de la Matemática (1999-2007). Igualmente se debe destacar en esta materia, su participación como miembro de los Comités Ejecutivos de la Comisión Internacional de Historia de las Matemáticas (1989-1997) y de la Comisión Internacional de Historia de la Ciencia (1993-2009), y del Consejo de la Asociación de Filosofía e Historia de la Ciencia del Cono Sur (2000-2004).

Bibliografía

Andersen, K. The Awarding of the Kenneth O. May Prize for the Fourth Time. http://www.unizar.es/ichm/may4.html (Web site updated: 10/19/2007 06:00:29).

Arboleda, L. C. (ed.) (1986). *Seminario latinoamericano sobre alternativas para la enseñanza de la historia de las ciencias y la tecnología.* Cali, 4-10 de noviembre de 1984. Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior-ICFES, Universidad del Valle.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and Its Place in History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 5, 1985, FLM Publishing Association, Canada.

D'Ambrosio, U. (1986). Etnociencia: Alternativa para la historia y la enseñanza de las ciencias. En Arboleda (1986).

D'Ambrosio, U. (1992). Ethnomatematics: A Research Program on the History and Philosophy of Mathematics with Pedagogical Implications. *Notices of the American Mathematical Society,* vol. 39, pp. 1183-85.

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism, in *Mathematics Education,* eds. Arthur B. Powell and Marilyn Frankenstein, State University of New York Press, Albany, pp. 13-24.

D'Ambrosio, U. (2000). Historiographical Proposal for Non-Western Mathematics, in: *Mathematics Across Cultures. The History of Non-Western Mathematics,* ed. Helaine Selin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 79-92.

D'Ambrosio, U. (2001). A matemàtica na época das grandes navegações e início da colonização, *Revista Brasileira de História da Matemática,* vol.1, pp. 3-20.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica,* Pitagora Editrice, Bologna, 2002.

D'Ambrosio, U. (2004). A Interface entre História e Matemática: uma visao histórico-pedagógica. Site oficial de Ubiratan D'Ambrosio. http://vello.sites.uol. com.br/ubi.htm (Actualización 2004).

Declaración de Bucarest. *Sociedad Mexicana de Historia de las Ciencias y la Tecnología.* http://www.smhct.org/documentos/Lista_de_documentos.htm (Sitio actualizado el 30 de mayo de 2011).

Quevedo, E. (ed.) (1993). *Historia social de la Ciencia en Colombia.* 10 volúmenes. Proyecto Colciencias OEA, 1983-1986. Tercer Mundo Editores-Colciencias. Bogotá.

Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología y la Tecnología. http://revistaquipu.com/index.html (Sitio actualizado el 30 mayo 2011).

Saldaña, J. J. (1986). Balance general de la historia de las ciencias en América Latina. En Arboleda (1986).

Struik, J. D. (1948a). *Yankee science in the making*. Little, Brown, Boston.

Struik, D. J. (1948b). *A concise history of mathematics*. Dover, New York.

Struik, J. D. (1984a). Early colonial science in North America and Mexico, *Quipu,* vol. 1, pp. 25–54.

Struik, J. D. (1984b). Early colonial science in North America and Mexico, *Quipu,* vol. 2, pp. 323–325.

Taton, R. (ed.) (1957-1964). *Histoire générale des sciences.* 3 tomos en 4 volúmenes. Presses Universitaires de France, Paris. Réediton (1966-1983).

The Intellectual Contributions of Ubiratan D'Ambrosio to Ethnomathematics[1]

Patrick Scott
IACME Vice President
United States
pscott@nmsu.edu

Abstract[2]

Ubiratan "Ubi" D'Ambrosio is considered by many to be "the intellectual father of ethnomathematics". He defined and popularized the term as "the art or technique of explaining, knowing, and understanding diverse cultural contexts" (D'Ambrosio, 1990). He formed the International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm) and has been instrumental in helping to make sure that the socio-cultural context of mathematics and its teaching and learning are considered in conferences, publications and the day to day work of thousands of mathematics education around the world.

Key words

Ubiratan D'Ambrosio, Ethnomathematics, Sociocultural Context.

Resumen

Ubiratan D'Ambrosio es considerado por muchos como el "padre intelectual de la Etnomatemática". Él definió y popularizó el término como "el arte o técnica de explicar, conocer y comprender los diversos contextos culturales" (D'Ambrosio, 1990). Formó el Grupo Internacional de Estudio sobre Etnomatemática (ISGEm) y ha sido fundamental en ayudar a cerciorarse de que el contexto socio-cultural de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje sean considerados en las conferencias, las publicaciones y el día a día del trabajo de miles de educadores matemáticos en todo el mundo.

Palabras clave

Ubiratan D'Ambrosio, etnomatemática, contexto sociocultural.

It is a great honor and privilege to be asked by the IACME XIII International Program Committee to participate in the Plenary Round Table on "The Intellectual Contribution of Ubiratan D'Ambrosio in Math Education" and particularly on his contribution to Ethnomathematics. The extent of this honor and privilege can be noted with a simple Google of Ubiratan D'Ambrosio. As I work on this paper on April 30, 2011, I get 157,000 hits. To limit the search I try D'Ambrosio Ethnomathematics and get 5,820 hits. Although many of those are specifically references to Ubi's works, I notice that many of them are in effect other authors essentially writing on his contributions to

[1] Este trabajo corresponde a una mesa plenaria realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en español fueron agregados por los editores.

Ethnomathematics. By changing Ethnomathematics to Etnomatematicas in order to get results for Portuguese and Spanish there are 9,180 hits. Curiously (and beyond the scope of this paper and my expertise) by taking the s off of the end of Etnomatematicas there are only 7,490 hits.

Many in the field consider Ubiratan D'Ambrosio to be "the intellectual father of Ethnomathematics". Ubi himself, with typical humility, gives credit for the first use of the term "Ethnomathematics" to others:

> I recently learned from Claudia Zaslavsky that Otto Raum wrote, in a review of her book, published in African Studies (1976):"(This Mathematics) might perhaps be most suitably called ethno-maths on the analogy of ethno-music, ethno-semantics, etc." And Wilbur Mellerna, in a letter to Gloria Gilmer, published in the NEWSLETTER of the ISGEM (vol.6,n.1,November 1990), says that he had invented the word ethnomathematics in 1967 and that he gave a talk in 1971 using it (D'Ambrosio, 2004).

Ubi has often written that for him a seminal moment in his development of the concept of Ethnomathematics was the organizing of a Panel on "Why Teach Mathematics" for the Third International Congress on Mathematics Education (ICME-3) in 1976 in Karlsruhe, Germany, and the subsequent publication of his related paper on "Overall Goals and Objectives in Mathematics Education" (D'Ambrosio, 1979). He used that forum to insist that, in justifying why mathematics should be in the school curriculum, discussions on the nature of mathematical knowledge needed to give attention to history, philosophy and cognition beyond those traditionally focused on the history of mathematics and the learning of mathematics. Also very importantly, he introduced emphatically the idea that there are other ways of doing mathematics that emerge in different cultures.

Ubi indicates (D'Ambrosio, 2004) that in 1978 at the annual meeting of the American Association for the Advancement of Science in a section organized by Rayna Green on "Native American Science", in a paper that was not published, he first used the " the words ethnoscience and ethnomathematics to designate scientific and the mathematical knowledge and practice of the Native American cultures. These words were mainly focusing extant practices of peoples marginalized by the colonial process." The concept of Ethnomathematics further developed in his thinking as he contemplated a holistic concept of curriculum, and how mathematics was related to society and to culture in general. As he has put it, by 1984 "the ground was prepared" (D'Ambrosio, 2006).

In his plenary lecture at the 1984 ICME 5 in Adelaide, Australia, he presented the theory and examples that led to his now famous conceptualization of Ethnomathematics as Ethno [culture] + mathema [explaining, understanding] + tics [techné, arts, techniques] (D'Ambrosio, 1985). "Thus, we can say that ethnomathematics is the art or technique of explaining, knowing, and understanding diverse cultural contexts" (D'Ambrosio, 1990).

Perhaps the next phase in Ubi's development of Ethnomathematics was his creation of the International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm). To recount how that was accomplished I will reproduce below what I wrote for the first edition of the *ISGEm Newsletter* (ISGEm, 1985).

At the 1985 NCTM Annual Meeting in San Antonio, a few of us lingered after Jeremy Kilpatrick's talk on "Research in Mathematics Education around the World." Ubiratan D'Ambrosio snagged three of us and asked if we would like to attend a short meeting. Unsure of just what he had in mind, we nevertheless eagerly followed him. We found an unoccupied meeting room and got down to business.

On various occasions we had listened to Professor D'Ambrosio's talks on Ethnomathematics. We had just heard Professor Kilpatrick emphasize the importance of Ethnomathematics and been impressed by the keynote address given two nights before at the research pre-session by Alan Bishop of Cambridge University on "The Social Dimensions of Mathematics Education in Research." Prof. D'Ambrosio explained that he felt the concept of Ethnomathematics had generated enough interest that it was time to form a study group. We readily agreed and eagerly began to plan some initial activities.

It was decided we would publish a newsletter to serve as a vehicle for communication of thoughts and projects on Ethnomathematics. Each member of the initial Advisory Board would put together a mailing list of colleagues whom they knew were interested in Ethnomathematics. Plans were made to arrange for special sessions on Ethnomathematics at the InterAmerican Mathematics Education Conference in Guadalajara, Mexico, in November, and at the next NCTM annual meeting.

Gloria Gilmer of Coppin State College agreed to serve as the first Chair of the newly formed group. Rick Scott of the University of New Mexico took on the responsibility of editing the first Newsletter. [Ubi and Gil Cuevas (then at the University of Miami) rounded out the initial ISGEm Advisory Board.]

ISGEm continued to meet every year at the NCTM Annual Meeting under Ubi's guidance. Presentation and panels on Ethnomathematics and cultural influences on mathematics teaching and learning became regular features at national, regional and international conferences. In 1996 the first International Congress on Ethnomathematics (ICEM I) was held in Granada, Spain, in 1998. It has continued every four years with ICEM II in Ouro Prieto, Brazil, in 2002, ICEM III in Auckland, New Zealand, and ICEM IV in Towson, Maryland, USA in 2010 (http://icem-4.org/). Ubi's presence has been actual in many of these events and felt in all of them!

By the 1990s Ethnomathematics was supported by an ISGEm website
(http://isgem.rpi.edu/) and an Internet discussion list (isgem@nmsu.edu).

In the late 1990s the North American Study Group on Ethnomathematics (NASGEm) was formed as an ISGEm Chapter and continues to meet at the NCTM Annual meeting. Other ISGEm Chapters now include the Seção Brasileira do International Study Group on Ethnomathematics (BR.ISGEm)
- http://docente.saofrancisco.edu.br/isgem/
and the Southern African Ethnomathematics Study Group (SAEmSG)
- http://www.rpi.edu/ eglash/isgem.dir/texts.dir/SAEmSG.htm.

The *ISGEm Newsletter,* which often had contributions from Ubi, morphed into the *Journal of Ethnomathematics* and then the peer-reviewed *Journal of Mathematics and Culture* (http://nasgem.rpi.edu/pl/journal-mathematics-culture-s37).

Ubi was awarded the ICMI Felix Klein medal in 2005. In the Citation for that award it is stated that " As a result of his interest in the social and cultural conditions for mathematics education, in particular as regards the nature of mathematical knowledge in different cultures at different times, Ubiratan D'Ambrosio began to develop what is internationally his best-known contribution to the field of mathematics education, the idea of ethnomathematics." And further that "Since its inception, ethnomathematics has continued to grow as a field of research and development and has exerted considerable influence on mathematics education in several continents, above all in Latin America and Africa" (ICMI, 2006).

Ubi has helped many of us to understand "'Ethno' in a much broader sense than merely race" ... "Our conception of "Ethno" encompasses all the ingredients that make up cultural identity of a group: language, codes, values, jargon, beliefs, food and dress habits, physical traits and so on" (D'Ambrosio, 1987). He has always insisted that Ethnomathematics is "a research program in the history and philosophy of mathematics with pedagogical implications" (D'Ambrosio, 2006).

Perhaps Ubi's greatest intellectual contribution to Ethnomathematics should be considered to be his intellectual contribution through Ethnomathematics. He has given us a vision of how mathematics and mathematics education can contribute to "a civilization for all, in which iniquity, arrogance and bigotry have no place" (D'Ambrosio, 2006).

Bibliographic references

D'Ambrosio, U. (1979). Overall goals and objectives of mathematics education. In: *New Trends in Mathematics Teaching IV*. UNESCO/ICMI, Paris, pp. 180?198.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for mathematics education.* Sao Paulo: UNICAMP, Campinas.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer.* Sao Paulo, Brazil: Editora Atica. (Translated into English as *Ethnomathematics: The art or technique of explaining and knowing* by ISGEm.)

D'Ambrosio, U. (2004). A reflection on Ethnomathematics: Why teach Mathematics? Retrieved April 30, 2011, from http://vello.sites.uol.com.br/why.htm.

D'Ambrosio, U. (2006). The scenario 30 years after. Retrieved April 30, 2011, from http://www.math.auckland.ac.nz/Events/2006/ICEM-3/1.Keynote/D%27Ambrosio-plenary-prez.ppt.

ICMI - International Commission on Mathematics Instruction (2006). Citation for the 2005 ICMI Felix Klein Medal to Professor Ubiratan D?Ambrosio. *ICMI Bulletin*, 58, 8-10.

ISGEm. (1985). The formation of ISGEm. ISGEm Newsletter, 1, 1. Retrieved May 3, 2010 from http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem11.htm.

Appendix A

An Incomplete Bibliography of Works of Ubiratan d'Ambrosio on Ethnomathematics

One way to measure his intellectual contribution is through the quantity and quality of his publications related to Ethnomathematics. Below is a first attempt at bibliography of such work.

D'Ambrosio, U. (1976) Objectives and goals of mathematics education, *Proceedings of the 3rd International Congress of Mathematics Education*, Karlsruhe, Germany (Paris: LINES CO, 1979).

D'Ambrosio, U.(1977). Science and Technology in Latin America during its discovery. *Impact of Science on Society,* 27(3), 267-274.

D'Ambrosio, U. (1979). Overall goals and objectives of mathematics education. In: *New Trends in Mathematics Teaching IV* . Paris: UNESCO/ICMI, pp. 180–198.

D'Ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical and pedagogical implications, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 11(4), 479-488.

D'Ambrosio, Ubiratan (1980). Uniting reality and action: a holistic approach to mathematics education, in Teaching Teachers. Teaching Students edited by L.A. Steen & D.J. Albert, Boston: Birkhauser, pp. 33-42.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Teaching and Learning of Mathematics*, p. 44-48.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for mathematics education*. Sao Paulo: UNICAMP, Campinas.

D'Ambrosio, U: (1985). Mathematical education in a cultural setting, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologv*, 16(4), 469-477.

D'Ambrosio, U. (1985). A methodology for Ethnoscience: The need for alternative epistemologies. *Theoria Segunda Epoca* (San Sebastian), 1(3), pp.397-409.

D'Ambrosio, U. (1986). Matematica per paesi ricchi e paesi poveri: anologie e differnze, *L'Educazi one Matematica* (Cagliari), 1(2), 187-197.

D'Ambrosio, U. (1986). Culture, cognition and science learning. In J.J. Gallager & G. Dawson (eds.), *Science education and cultural environment in the Americas* (pp.85- 92). Washington: NSTA/NSF/OAS.

D'Ambrosio, U. (1986). Some reflections on the western mode of thought. In Eiji Hat- tori (Ed.), *Science and the boundaries of knowledge: The prologue of our cultural past* (Final Report of Venice Symposium). Paris: UNESCO.

D'Ambrosio, U. (1987). Reflections on Ethnomathematics. *ISGEm Newsletter*, 3(1), 3-4.

D'Ambrosio, U. (1988). A research program in the history of ideas and cognition. *ISGEm Newsletter*, 4(1), 5-7.

D'Ambrosio; U. (1988). *Da realidades a acao: Reflexoes sobre educação matemática*, Summus Editorial, Sao Paulo, 1986 (2a. edicao 1988).

D'Ambrosio, U: (1988). Socio-cultural influences in the transmission of scientific knowledge and alternative methodologies. *Cuadernos de Quipu*, 2, 25-133.

D'Ambrosio, U. (1990). Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer. Sao Paulo, Brazil: Editora Atica. (Translated into English as Ethnomathematics: The art or technique of explaining and knowing by ISGEm.)

D'Ambrosio, U. (1991). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In Harris, M. (ed.) *School mathematics and work*, London: Falmer Press, p.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa. *Educação Matemática*, 1(1). 1993.

D'Ambrosio, U. & Ascher, M. (1994). Ethnomathematics: A dialogue. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 36-43.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática: Da teoria a prática*. Campinas, Brazil: Papyrus.

D'Ambrosio, U. (1997). Preface. In: Powell, A. & Frankenstein, M. *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. New York: SUNY Press.

D'Ambrosio, U. (2003). Stakes in mathematics education for the societies of today and tomorrow, *Monographie de L?Enseignement Mathematique* (39), 301–316

D'Ambrosio, U. (2004). A reflection on Ethnomathematics: Why teach Mathematics? Retrieved April 30, 2011, from http://vello.sites.uol.com.br/why.htm.

D'Ambrosio, U. (2006). The scenario 30 years after. Retrieved April 30, 2011, from http://www.math.auckland.ac.nz/Events/2006/ICEM-3/1.Keynote/ D%27 Ambrosio-plenary-prez.ppt.

To keep up with Ubi's publications at his website go to:
http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm .

Ubiratan: el tejedor de redes[1]

Carlos E. Vasco
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
Universidad del Valle, Cali
Colombia
carlosevasco@gmail.com

Resumen[2]

Se destaca y comenta una de las aristas importantes en el quehacer de Ubiratan D'Ambrosio: su labor tesonera en el establecimiento de vías de comunicación entre las matemáticas y las diversas ramas de la cultura.

Palabras clave

Ubiratan D'Ambrosio, matemática y cultura.

Abstract

An important trait of the activity of Ubiratan D?Ambrosio will be discussed: his tenacious work in establishing communication channels between mathematics and other cultural activities.

Key words

Ubiratan D'Ambrosio, math and culture.

Mis colegas se han referido ya a los logros y contribuciones de Ubiratan a las matemáticas, a la filosofía y epistemología de las matemáticas, a la didáctica de las matemáticas y a la formación avanzada en las maestrías y doctorados, como lo ha hecho Marcelo Borba; a la etnomatemática dambrosiana, como lo ha hecho Rick Scott, y a la historia de las matemáticas, como lo ha hecho Luis Carlos Arboleda. Eso me permite a mí concentrarme en otros aspectos que considero trascendentales en los aportes de Ubiratan a todos y cada uno de nosotros, al Brasil, a Latinoamérica y a la humanidad. Todos y cada uno de nosotros los aquí presentes hemos aprendido mucho de él en todas y cada una de esas ramas del árbol frondoso de la cultura que tienen que ver directa o indirectamente con las matemáticas.

El aporte de la etnomatemática dambrosiana es precisamente que todas esas ramas del árbol de la cultura tienen que ver intrínseca y profundamente con las matemáticas. Así lo señaló Marcelo con su alusión a la interdisciplinariedad, Rick con su referencia a las ciencias naturales y a la cultura, y Luis Carlos a la historia de las matemáticas. Ubiratan bien puede pues llamarse "el tejedor de redes", en este caso, de tupidas redes entre las matemáticas, las demás ciencias sociales y naturales, la historia, la filosofía y todas las ramas de la cultura.

[1] Este trabajo corresponde a una mesa plenaria realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en español y en inglés fueron agregados por los editores.

Si le concediera a él ahora una interpelación, me recordaría la íntima relación entre el tejido de las redes y la teoría de grafos, y la conexión etimológica entre la palabra "red" y la denominación de los retículos de Boole y de Heyting. Por ello no necesito volver sobre sus contribuciones científicas y académicas en todas estas ramas del árbol frondoso de la cultura.

Quiero más bien recordar ahora sus contribuciones en aspectos si acaso más humanos y más profundos. Me refiero a la construcción, reparación y refinamiento del tejido de esas redes de relaciones afectivas, de confianza y acogida que hacen humanamente posible el trabajo continuado y tesonero por las matemáticas y la educación matemática. Son esas las redes acogedoras y cálidas que permiten que las personas más jóvenes se acerquen a nosotros no con temor o sentimientos de inferioridad, sino con el deseo de continuar esta labor interminable y de ir más allá que nosotros los veteranos de estas lides.

El Congreso Inter-Americano de Educación Matemática CIAEM se reúne sólo cada cuatro años; pero en los largos meses entre una y otra reunión y durante la semana de cada una de las reuniones, Ubiratan ha actuado y sigue actuando paciente y tesoneramente en su labor de tejedor de redes, labor callada y paciente, poco apreciada por muchos, apenas notada por unos pocos, y hasta resistida por algunos.

Para esa labor se requiere no sólo una sólida autoridad intelectual, sino también una gran autoridad moral, y no sólo las más elevadas competencias académicas, sino las más refinadas competencias comunicativas, sociales y pedagógicas.

Ubiratan se va acercando ya a los cuarenta años de paciente y callada labor personal, antes por cartas, como nos lo contó Salett Bimvengut esta mañana, y ahora por correo electrónico, sin perder una oportunidad de hacerlo personalmente y cara a cara. Son casi cuarenta años de esfuerzos discretos y continuados para tejer, mantener, estrechar, cuidar y reparar las redes de comunicación, de afecto, de confianza y acogida que hacen posible el trabajo continuado y tesonero de los directivos actuales, los expresidentes, los miembros del Comité y todos los miembros activos del CIAEM en cada país, desde el Canadá hasta la Patagonia, que son todos y todas ustedes.

Podríamos muchos de los presentes recordar momentos y anécdotas que nos permitirían experimentar una y otra vez la presencia física, de Ubiratan, la fuerza, la masa y la temperatura de esta presencia constante en los momentos difíciles del CIAEM, que los ha habido, y si han sido pocos, ha sido precisamente porque ese campo de atracción que él crea a su alrededor ha impedido que fueran más.

Ubiratan asistió a la tercera CIAEM en Bahía Blanca en 1972. En esa reunión fue nombrado presidente Luis Santaló, y Leopoldo Nachbin era el vocal principal como representante del Brasil. Allí empezó la labor personal y social de Ubiratan, el tejedor de redes.

Ahora se habla mucho de las "redes sociales" como un invento del siglo XXI, pero Ubiratán las conocía perfectamente cuando aún no había computadores personales ni Internet.

Yo conocí a Ubiratan en la cuarta CIAEM en Caracas en 1975, en donde presentamos una ponencia con Ricardo Losada y María Falk, aquí presentes, además del profesor

Jairo Charris, ya fallecido. En esa reunión, Ubiratan fue nombrado primer vicepresidente. En la siguiente, en Campinas, fue nombrado como presidente.

En Santo Domingo le sucedió Eduardo Luna, y luego Fidel Oteiza. Les seguí yo y luego Salett, ahora Ángel. Pero el presidente imaginario del CIAEM ha seguido y sigue siendo Ubiratan, consejero infatigable y certero. Su presencia constante y sus sugerencias atinadas han hecho más fácil para nosotros sus sucesores ejercer ese cargo. Afortunadamente, Salett le aprendió algunas de sus artes de tejedor de redes, y ahora Ángel ha empezado a ejercer esa labor tan necesaria. Ojalá ambos continúen en ella, cada vez con más tiempo y cuidado en la medida en que Ubiratan vaya teniendo que disminuir su dedicación por razones de salud.

Para ejemplificar esta labor de tejedor de redes traeré a la memoria sólo un discurso breve de Ubiratan en uno de esos momentos difíciles del CIAEM, en marzo de 2003, del que selecciono unos pocos párrafos que hablan por sí mismos.

Recordó en ese entonces los ideales de los años 60 y 70, cuando se creó el CIAEM con la esperanza de que las matemáticas modernas iban a traer mucho progreso en la ciencia, la tecnología y la prosperidad para Latinoamérica, y la oposición que se despertó en muchos países latinoamericanos por razones políticas, entonces y hasta hace muy poco muy explicables. Dijo así Ubiratán en ese portuñol tan suyo y tan expresivo, que nos facilita a todos los que hablamos español peninsular o hispanoamericano, o portugués peninsular o brasileiro, comprenderle perfectamente:

> La motivación era, y es, aproximar a todos en torno de un evento que visa días mejores para nuestra región. Fue esa la motivación para la creación del CIAEM. En aquel momento hubo mucha resistencia, puesto que 'era una propuesta de los americanos'. Las comisiones hermanas, de biología, física y química, no sobrevivieran a la oposición. Cuando yo entré en el CIAEM, en Bahía Blanca en 1973 [o en 1972], encontré las marcas de la oposición en México. [...] Y así continuó el CIAEM, en un clima de conflicto interno en México, que se amplió a otros países.

Habló luego de la fundación de la RELME, y de cómo fue cambiando el ambiente inicialmente hostil, hasta que en 2001 recibió una invitación formal a dar una conferencia en la RELME de Buenos Aires:

> En julio de 2001 la comisión organizadora del RELME en Buenos Aires me invitó a dictar una conferencia. Acepté, pero por razones de salud no pude ir. Interpreté esa invitación como un gesto de aproximación del RELME al CIAEM. Muy bueno. Si alguien que no se creía como amistoso nos ofrece la mano, no ha por qué no aceptarla y reciprocar el gesto. Yo entiendo que algunos ven en el aceptar y reciprocar ingenuidad, o, lo que es peor, intereses otros. ¡Honi soit qui mal y pense!

Y terminó su discurso con un autorretrato que yo no puedo superar:

> Mi trayectoria de vida ha sido de conciliar. La búsqueda de paz y armonía es, muchas veces, casi imposible. Pero convivir con animosidad es uno de los triunfos de la racionalidad.

Sobran más palabras. Sólo queda un abrazo emocionado para esta persona tan extraordinaria, que después de 39 años desde Bahía Blanca hasta Recife sigue en su trayectoria de prudente y discreto tejedor de redes y conciliador de las personas, de las culturas y de los países, así como de asiduo tejedor de redes y conciliador de las matemáticas con las otras ciencias y con todas las demás ramas del árbol frondoso de la cultura.

¡Gracias, Ubiratan!

Ubiratan D'Ambrosio: Educador matemático brasileiro e internacional[1]

Marcelo C. Borba
Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática,
GPIMEM
Pós-Graduação em Educação Matemática, Depto. de Matemática,
UNESP, Rio Claro, SP
Brasil
mborba@rc.unesp.br

Resumo[2]

Neste artigo são apresentadas breves notas sobre a concepção de pesquisa, de orientação e do pensar de Ubiratan D'Ambrosio. É realçado seu papel na Educação Matemática brasileira e na internacionalização da mesma. Algumas referências são listadas para que o interessado possa saber mais sobre esse educador.

Palavras chave

Etnomatemática, educação para paz, modelagem, UNESP, educação matemática.

Abstract

This article presents some brief notes on Ubiratan D?Ambrosio?s thinking and his conception of research. It will highlight his role in Brazilian math education and its internationalization. Some references are listed for those interested in knowing more about this educator.

Key words

Ethnomathematics, education for peace, modeling, UNESP, math education.

Eu diria que é mais apropriado "relatar sobre pesquisas", descrevendo para o aprendiz uma variedade de exemplos que outros fizeram. Alguns refletem o que fizeram e organizam os passos tomados numa exposição coerente, buscando apoio de outros teóricos. Legítimo. Mas jamais cobrar a arregimentação em uma ou outra das correntes metodológicas. É importante tomar todo cuidado para que a disciplina Metodologia da Pesquisa não tenha o caráter de catequese. Claro, ler e ouvir relatos e conhecer algumas teorizações pode ajudar o aprendiz na criação de sua própria metodologia. Como dizia Antonio Machado: "Caminhante não há caminho. Faz-se caminho ao andar. (D'Ambrosio, 2004, p. 21-22)

[1] Este trabajo corresponde a una mesa plenaria realizada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. Introdução

Nesta mesa me foi dada a incumbência de falar sobre o papel de Ubiratan D'Ambrosio na Educação Matemática brasileira. Isso é uma missão impossível de ser feita em poucas páginas. Neste texto apresentarei apenas alguns comentários em relação ao papel dele e indicarei algumas referências para que o leitor possa procurar saber mais sobre a obra desse educador, matemático e educador matemático. Se aceitar o convite para ler a referências citadas, será possível obter diferentes perspectivas, a partir de diferentes autores, sobre a relevância de D'Ambrosio para a Educação Matemática brasileira. Inicialmente, mostrarei da onde falo, para que o leitor possa saber de qual perspectiva vejo Ubiratan!

2. D'Ambrosio e a Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP

Conheci Ubiratan, ao ingressar no primeiro programa de pós-graduação stricto sensu da América do Sul, em 1984. O programa de pós-graduação da UNESP de Rio Claro, SP, tinha Ubiratan D'Ambrosio e outros professores da UNICAMP como peças fundamentais para um programa que tinha o desafio do pioneirismo. Esses professores da UNICAMP se uniram a um grupo de professores da UNESP, para gerar um modelo de pesquisa que até hoje se espalha Brasil a fora. Esse programa de pós-graduação, arquitetado de forma coletiva, sob a liderança da professora Maria Aparecida Viggiani Bicudo, fundaria uma tradição de pesquisa que se espalharia para os diversos programas hoje existentes em Educação Matemática no país (D'Ambrosio & Borba; 2010).

D'Ambrosio já era, na primeira fase do programa de pós-graduação, um doutor maduro, tendo completado seu doutorado em Matemática em 1963, em São Carlos, uma cidade próxima a Rio Claro. D'Ambrosio foi fundamental para o programa, dentre outras coisas por ter plantado nele, e também lá desenvolvido, sua ideias referentes à etnomatemática. Recentemente, tive a honra de escrever o prefácio do primeiro livro que Ubiratan D'Ambrosio publicou em inglês no ano de 2006, em editora comercial do exterior, que ilustra esta ideia. Neste prefácio afirmo que:

> I believe the reader will find great inspiration in this book for reflection and new research. I have been Ubi's student since 1984, although I stopped studying with him formally in 1987 when he, as a member of my Masters committee, helped me in the defense of the first thesis using the notion of ethnomathematics. I still learn with his new ideas, but mostly with his young spirit! I am sure that the reader will share with me this experience of being his eternal student (Borba, 2006).

A afirmação de que sou seu estudante para sempre, não foi uma frase de efeito ou uma maneira de expressar gratidão pelo professor que me apresentou ideias totalmente novas, em particular sobre etnomatemática. Já em 1984, no curso de "Tendências Atuais em Educação Matemática", ministrado por ele, foram expostas ideias sobre: etnomatemática, leitura de romances e Educação Matemática, folhas semanais como critério de avaliação, resolução de problemas e criatividade, calculadoras e Educação Matemática, que bombardeavam meu cotidiano. Vim a Rio Claro pronto para fazer uma dissertação sobre materiais concretos, mas a ideia de juntar meu passado de militante com um conceito totalmente novo, etnomatemática, levou-me a aprofundar nessa ideia e a realizar a primeira pesquisa de campo utilizando essas noções. A dissertação pode ser vista como o meu primeiro livro e teve a presença marcante do Ubiratan.

Creio que essa não é uma experiência de tê-lo como eterno orientador não é individual. Vários outros autores, como por exemplo, Mattos (2007) reporta ideias semelhantes. D'Ambrosio tem vários ex-alunos, que continuam sendo seus alunos, mesmo não tendo sido orientado por ele. Esses alunos estão espalhados nos mais de setenta programas de Educação Matemática existentes no Brasil e em outros programas das áreas de Educação e Matemática.

3. D'Ambrosio e a pesquisa em Educação Matemática no Brasil

Ubiratan, após dar início ao programa da UNESP de Rio Claro, também ensinou em mais de uma dezena de outros programas no país, dividindo com todas as suas ideias sobre etnomatemática, modelagem e Matemática para Paz. Sua perspectiva sobre etnomatemática também influenciou historiadores da matemática a considerarem o contexto cultural em análises que poderiam ser feitas apenas de forma asséptica ou focando excessivamente na figura de matemáticos.

Ubiratan marcou profundamente a Educação Matemática brasileira pela oferta intensa da disciplina "Tendências Atuais em Educação Matemática" que era para muitos de nós, até duas década atrás, a única porta de comunicação constante com o que se pensava sobre Educação Matemática fora do Brasil. Ubiratan além de influenciar a Educação Matemática brasileira se tornou um dos primeiros pesquisadores, oriundos de países periféricos, a influenciar a Educação Matemática internacional.

Etnomatemática e Ubiratan se tornaram sinônimos de Educação Matemática brasileira, até o momento em que etnomatemática se tornou uma ideia sem fronteiras e a Educação Matemática brasileira passou a ter produção consistente, em nível internacional, também em outras áreas. Neste processo de tornar a Educação Matemática brasileira uma região de inquérito associada a vários nomes e linhas de pesquisa, de novo D'Ambrosio teve papel fundamental ao indicar pessoas para comissões, escrever prefácios de livros publicados no exterior e apoiar projetos em nível internacional.

4. Conclusão

Esta breve nota sobre a importância de Ubi D'Ambrósio para a Educação Matemática brasileira, nem de longe pretende suprir a multifacetada visão de D'Ambrosio sobre fenômenos não apenas de Educação Matemática, mas sobre a vida e o mundo, dentro da visão holística que o caracteriza como pensador. Mesmo a obra organizada por Valente (2007), sobre Ubiratan, não supre tal vácuo de acordo com o próprio organizador do livro. Essa obra e mais algumas referências listadas darão ao leitor uma chance de conhecer uma faceta deste grande pensador. Entretanto, que fique aqui um alerta: se

Ubiratan já tem ideias provocantes em seus livros, capítulos e artigos, quando ministra uma palestra ele consegue nos provocar de maneira mais intensa ainda. Então, não deixe de assistir a próxima palestra de Ubiratan D'Ambrosio.

Agradecimentos

Embora seja minha a responsabilidade pelo conteúdo escrito no capítulo, agradeço as sugestões apresentadas por Silvana Santos e Nilton Domingues, membros do GPIMEM e orientandos, quando da elaboração desse artigo.

Bibliografia

Borba, M. (2005). *Uma Revisão Crítica da Produção Pós-Doutorado Marcelo de Carvalho Borba*. Livre Docência - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Borba, M. (2006). *Preface*. In: D'Ambrosio, U. (2004). Ethnomathematics: link between traditions and modernity. Netherlands: Sense Publishers.

Borba, M. (2007). *Ubiratan D' Ambrosio*: Orientador, Professor, Educador. In: Wagner, R. *Ubiratan D'Ambrosio*: Conversas - Memórias - Vida Acadêmica - Orientandos - Educação Matemática - Etnomatemática - História da Matemática - Inventário Sumário do Arquivo Pessoal. São Paulo: Annablume. Cap. 3, p. 77-87.

Borba, M.; Villareal, M. (2005). Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. *Springer*. U.S.A, v. 39.

D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics*: link between traditions and modernity. Netherlands: Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (2004). *Prefácio*. In Borba, M.; Araújo, J. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, U.; Borba, M. C. (2010). Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. In.: *ZDM Mathematics Education*, v. 42, nº 3-4, 271-279. DOI 10.1007/s11858-010-0261-x

D'Ambrosio, U. (2005). Armadilha da Mesmice em Educação Matemática. In.: Boletim de Educação Matemática, *Bolema*. Rio Claro: UNESP. 18(24), 95-110.

Fiorentini, D. (2004). *Pesquisar Práticas Colaborativas ou Pesquisar Colaborativamente?* In: Borba, M.; Araujo, J. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Mattos, A. (2007). *Não há causa sem liderança*: a educação matemática possui Ubiratan D' Ambrosio. In: Wagner, R. *Ubiratan D' Ambrosio*: Conversas - Memórias - Vida Acadêmica - Orientandos - Educação Matemática - Etnomatemática - História da Matemática - Inventário Sumário do Arquivo Pessoal. São Paulo: Annablume, Cap. 3, p. 77-87.

Wagner, R. *Ubiratan D' Ambrosio*: Conversas - Memórias - Vida Acadêmica - Orientandos - Educação Matemática - Etnomatemática - História da Matemática - Inventário Sumário do Arquivo Pessoal. São Paulo: Annablume, 2007. 214 p.

CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA