e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

Año 2024 Vol. 17 N°. 2

CIMM Centro de Investigación en **Matemática y Meta-Matemática**

EDITORIAL UCR

UCR Universidad de Costa Rica

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573

Vol: 17 · N°. 2 · 2024

Contenido
del Volumen 17. Número 2. Año 2024

Sección 3. Mi formación en EducMate

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573

Vol: 17 • N°. 2 • 2024

Presentación
del Volumen 17. Número 2. Año 2024

En el dinámico mundo de la educación matemática, es crucial explorar tanto el pasado histórico y epistemológico como las innovaciones contemporáneas que están dando forma al futuro de esta disciplina. Valoramos profundamente la herencia histórica de las matemáticas como una fuente de inspiración y de aprendizaje. Los estudios epistemológicos y la historia juegan un papel crucial en cómo comprendemos y enseñamos la matemática.

En esta línea, en el segundo número del año 2024, Cuadernos de Investigación y For-mación en Educación Matemática, comprometida con la difusión de la investigación en la dis-ciplina, presenta ocho artículos y una experiencia de formación.

La historia de las matemáticas proporciona un contexto invaluable para el desarrollo de ideas y teorías fundamentales. Entender la evolución de los conceptos matemáticos a lo largo del tiempo permite a la población estudiantil y docente apreciar la continuidad del co-nocimiento matemático y la importancia de las contribuciones de diferentes culturas y épocas. Conocer la historia de las matemáticas puede motivar a los y las estudiantes al mostrarles la relevancia de los conceptos matemáticos y cómo han sido aplicados en diferentes contextos a lo largo del tiempo. Este elemento ofrece una oportunidad para explorar la relación entre las matemáticas históricas y las matemáticas contemporáneas, demostrando cómo las ideas del pasado continúan influyendo en las prácticas y teorías actuales.

Asimismo, los estudios epistemológicos investigan cómo se ha construido el conoci-miento matemático, qué criterios han guiado la aceptación de teoremas y conceptos, y cómo se han desarrollado las metodologías matemáticas a lo largo de la historia. Esta reflexión crí-tica promueve la comprensión profunda de los fundamentos y la estructura del conocimiento matemático. Los estudios epistemológicos en educación matemática fomentan una visión amplia y multidimensional de la disciplina. Esto implica explorar diferentes enfoques metodo-lógicos, comprender la resolución de problemas matemáticos a lo largo de la historia, y reco-nocer las controversias y debates que han moldeado su desarrollo.

Exploraremos cómo las ideas y métodos matemáticos han evolucionado a lo largo del tiempo, proporcionando una perspectiva para educadores y estudiantes que tengan interés en comprender el contexto y la evolución de la disciplina en cuatro artículos: el álgebra y sus im-plicaciones en educación matemática, la Lingüística Sistémico-Funcional para el análisis del lenguaje matemático, enfoques variacionales en la investigación sobre el cálculo y el teorema de Pitágoras.

Asimismo, nos enfocamos en la difusión de la investigación de vanguardia en educación matemática. Cuatro artículos de investigadores latinoamericanos exponen los principales hallazgos, nuevas ideas, teorías y prácticas que están moldeando la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El primer artículo presenta los resultados obtenidos en una investigación aplicada a 30 estudiantes de 10° de media bachillerato del sistema educativo público panameño con el objetivo de analizar los errores que presentan al resolver ecuaciones cuadráticas utilizando los tres métodos contemplados en el currículo: factorización, completar cuadrados y la fórmula general, a la luz del análisis de errores de Cury.

El segundo artículo se deriva de la investigación titulada *Una mirada narrativa sobre el sentido de la experiencia de ser docente de primaria que enseña matemáticas,* con el objetivo de reconocer los sentidos que otorgan algunos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) a sus experiencias de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

El tercer artículo presenta los principales hallazgos de una investigación que aborda, desde la visión del estudiante, la implementación de las tecnologías de la información y comunicación en cursos del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Costa Rica, desde en un enfoque cuantitativo del tipo descriptivo.

El cuarto artículo se relaciona con la amenaza contextual matemática, ansiedad y memoria de trabajo, y su papel en el desempeño en problemas intuitivos de una tarea matemática, para ello, se analizan resultados de 111 personas estudiantes universitarias costarricenses (edad promedio *M*=21.04 años, desviación estándar *SD*=3.05, 58 mujeres, 53 varones). Además, se controlan variables de ansiedad matemática y capacidad de memoria de trabajo.

En el relato de una experiencia de formación en educación matemática, la autora comparte su aprendizaje a través de la investigación titulada “Recursos, estrategias y dificultades de estudiantes de Precálculo de la Universidad de Costa Rica durante la educación remota de emergencia”, en un curso de carrera, y afirma que esta constituyó una oportunidad trascendental en su formación profesional como educadora matemática, particularmente, sobre las bases teóricas sobre diseños de investigación cuantitativa.

Desde el análisis de errores en la resolución de ecuaciones cuadráticas en estudiantes panameños hasta la narrativa de experiencias docentes en Colombia, pasando por la implementación de tecnologías en la enseñanza universitaria en Costa Rica y el estudio de la ansiedad y la memoria de trabajo en estudiantes costarricenses, cada investigación aporta nuevos conocimientos y reflexiones fundamentales. Estos estudios no solo iluminan áreas específicas de mejora y comprensión en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino que también subrayan la importancia de la investigación continua y la formación profesional para personas educadoras matemáticas.

William Poveda y Rodolfo Fallas
Editores

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
07-34
Recibido: 15/05/2025
Aprobado: 16/06/2024

Artículos de investigación

A NARRATIVE LITERATURE REVIEW OF CONTEMPORARY HISTORIC-EPISTEMOLOGICAL STUDIES ON ALGEBRA: SOME IMPLICATIONS FOR MATHEMATICS EDUCATION

UNA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA NARRATIVA DE ESTUDIOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS CONTEMPORÁNEOS SOBRE EL ÁLGEBRA: ALGUNAS IMPLICACIONES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Alberto López-Acosta[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2903-5413

Gisela Montiel-Espinosa[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

ABSTRACT

Various approaches to teaching and learning of Algebra within Mathematics Education come from classical studies in the History of Mathematics. Consequently, in this second discipline, a narrative literature review of contemporary sources, between 2000 and 2018, in prominent data bases and journals was carried out to identify new elements that could contribute to the strengthening of these approaches. We focused this review on the contributions of recent renowned mathematics historians that have had immersed in new findings related to the development of Algebra. In this paper, we present at least six considerations that can be problematized from the perspective of Mathematics Education, which generate new routes of investigation that could contribute significantly to a more robust and profound understanding of algebraic activity in general, and positively impact on the understanding of development of algebraic activity in mathematical education.

Keywords: history of algebra, history-epistemological studies, algebra development, symbolic algebra.

1 Departamento de Educación Secundaria, Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, San Pedro Montes de Oca, Costa Rica, C. P. 03330. Correo electrónico: luis.lopezacosta@ucr.ac.cr

2 Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, C. P. 07360. Correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN

Diversos enfoques para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra dentro de la Educación Matemática provienen de estudios clásicos de la Historia de la Matemática. En consecuencia, en esta segunda disciplina, se realizó una revisión bibliográfica narrativa de fuentes contemporáneas, entre los años 2000 y 2018, en bases de datos y revistas destacadas para identificar nuevos elementos que pudieran contribuir al fortalecimiento de estos enfoques. Enfocamos esta revisión en los aportes de reconocidos historiadores de las matemáticas recientes que han estado inmersos en nuevos hallazgos relacionados con el desarrollo del Álgebra. En este trabajo presentamos al menos seis consideraciones que pueden ser problematizadas desde la perspectiva de la Educación Matemática, las cuales generan nuevas rutas de investigación que podrían contribuir significativamente a una comprensión más robusta y profunda de la actividad algebraica en general, e impactar positivamente en la comprensión del desarrollo de la actividad algebraica en la educación matemática.

Palabras clave: historia de las matemáticas, estudio histórico-epistemológico, desarrollo del álgebra, álgebra simbólica.

1. INTRODUCTION

Historic-epistemological studies (HES) in Mathematics Education (ME) represent a key element in didactic research to improve the educational practice in mathematics (Artigue, 1990) since they humanize the mathematical activity and provide elements to enrich the knowledge currently taught in schools (Buendía and Montiel, 2011; Furinguetti, 2004; Panasuk & Horton, 2012). There is a vast number of compilations and works regarding the use of the historical dimension in the practice of mathematics education (see Barbin, et. al., 2018; Barbin, Guillemette, & Tzanakis, 2020; Clark, Kjeldsen, Schorcht & Tzanakis, 2018; De vittori, 2023; Díaz-Chang & Arredondo, 2023; Fauvel & Van Maanen, 2002; Fried, 2001, 2007, 2008; Haverhals & Roscoe, 2010; Katz & Tzanakis, 2011; Panasuk & Horton, 2012). For instance, Tzanakis et. al. (2000) established that it contributes to the learning of mathematics, in terms of making visible the progress of ideas, techniques, processes, problems, and questions that are often overshadowed in teaching and, that can be regarded as teaching contents.

Furthermore, other aspects lead to understand the nature of mathematics and its activity. Some of these aspects make the didactic frameworks more robust for teachers, or become affective considerations regarding mathematical activity, such as perseverance, the appreciation of misunderstandings, mistakes, and persisting ideas as part of the mathematical doing; and even a broader perspective of mathematics as a cultural effort (Tzanakis et. al., 2000).

Among the HES objectives stands the understanding of the formation of mathematical thought processes to ground didactic intervention. The processes mentioned refer to the genesis of mathematical ideas, the conditions of their emergence, their evolution, and the persistence of certain problems in specific cultures and periods (Bartolini & Sierpinska, 2000; Gallardo, 2002; Radford, 1997, 2000). These insights can lead us to: i) understand the structure and nature of mathematics as scientific knowledge and its complex development; and ii) have more comprehensive and less simplistic views of the relevance, adaptation, and incorporation of both curricular content and mathematics activity in the classroom. Furthermore, the insights can inform the mathematics educator to devise relevant questions that become decisions on what elements of the mathematical culture should be put into play while teaching mathematics (Kidron, 2016). Moreover, Radford (1997, 2000) states that it is important to have robust theoretical frameworks and methodologies to adequately explain the construction of mathematical knowledge as well as to inform the articulation between the historical and psychological domains for the instructional design.

Particularly, research in the Algebra domain of ME is far more extensive than that in any other topics (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). However, the foundational HES in this domain came from classical studies in the History of Mathematics, to name a few: Boyer (1986), Høyrup (1986), Klein (1968), Mahoney (1981), Nesselmann (1842) and, Piaget and Garcia (1982). These studies provided a more thorough understanding of the development of this area, and they set the foundation for important approaches to the teaching and learning of algebra. However, for a particular study (López-Acosta, 2023) we found that in the last decades, research in the History of Mathematics (HM) has brought new advances regarding the understanding of the algebraic activity. This led us to consider the implications of these insights in the field of the HM compared with previous models and approaches within ME.

In this paper, we present some examples of contemporary HES in the field of HM, regarding the development of symbolic algebra. Furthermore, the examples provide elements and conceptualizations that, as far as this review showed, have not been addressed in ME yet. Therefore, our aim in this work is to provide just a few accounts for new paths for didactic research within ME. This accounts, we believe, are important implications for the research in ME in terms of the potential for new understandings about the algebraic activity not previously considered in the learning and teaching of Algebra.

In the first part of the paper, we present some methodological aspects that guided the narrative literature review. The second part consist in presenting two main results based on HES in algebra within ME that we found more relevant to discuss, considering the new explorations and results derived of later historical studies in HM. We briefly focus on the tripartite model of Nesselman (1842) for the development of algebra and the typically reported contributions of Viète and Descartes to the development of algebra. The third part is oriented to address those recent research findings in the HM, regarding the alternative models for the development of algebra and, other relevant aspects of algebraic reasoning or contributions of Viète and Descartes not previously reported in ME. Based on the second and third parts, we will discuss six relevant considerations providing new insights, further explanations, or comparisons for the development of symbolic algebra and algebraic activity. All these could orient us to ask new questions and find new elements to incorporate in the research of the development of algebraic activity in ME.

2. THE NARRATIVE LITERATURE REVIEW

Narrative reviews, also known as *unsystematic narrative reviews,* are narrative syntheses of previous information (Green, johnson & Adams, 2006). They also can be characterized as an iterative, non-structured and multi-layered process without rigid steps and rules (Green, johnson & Adams, 2006; Juntunen & Lehenkari, 2021). However, a narrative review should “be well structured, synthesize the available evidence pertaining to the topic, and convey a clear message” (Green, johnson & Adams, 2006, p. 106). Typically, as reported by Juntunen & Lehenkari (2021), the literature review process contemplates *the definition of the objective and research questions*, *developing and validating a review protocol*, *searching the literature*, *selecting the literature*, *analysing*, *synthesising*, *concluding* and, *reporting*. We followed this process to do our review.

This narrative literature review was part of a bigger study related to the emergence of the parametric equations in the works of Viète and Descartes (López-Acosta, 2023;

López-Acosta & Montiel, 2021, 2022). In these studies, it was very important to compare the works of these two mathematicians with the previous algebraic tradition to better understand the innovations of both. As a result of the literature review, we found in resent studies in the HM important considerations that we believed were worthy to be problematize in ME, even when those were not related to the foci of the studies cited before.

Thus, in this work we want to convey relevant considerations, to provide new insights into previous models of the development of symbolic algebra and algebraic activity, that are needed to be explored in further studies in Mathematics Education. We were interested in new findings of these topics in the History of Mathematics field and compare them to those of the classical HES within Mathematics Education. The research questions that guide the literature review were: *What new explanations of the development of symbolic algebra have been developed in the history of mathematics? What new types of symbolic operations have been present throughout history?* and *how these insights can bring new paths for research in ME regarding the learning of symbolic algebra?*

The protocol to collect sources different from those in the ME field, as suggested by Siebert (2019), were consulting handbooks, chapters, and prominent compilations; searching highly regarded journals and reference sections of the papers located; and browsing the web. The search began with relevant key terms in databases[3], such as 'algebra', 'symbolic algebra', 'history of algebra', 'symbolic operability', 'algebra development', 'history of symbolic algebra', 'Viète', and 'Descartes'. The last two categories were included eventually on account of the role both mathematicians played in the development of symbolic algebra. We consulted the period between 2000 and 2018.

After collecting the sources, we selected those which could help us respond the research questions and we particularly locate the authors who had studied specific elements related to the development of symbolic algebra, seeking insights concerning the ones established in ME. Finally, we went deeper into the *primary sources* (mainly books, chapters, and papers)—in the sense of Fraenkel, Wallen, & Hyun (2012)—of those authors and their insights to assess how they could provide new questions, research paths, and new elements to advance in the understanding of the algebraic activity. In this phase, we reviewed some original treatises by algebraists considered in the primary sources to fully understand and complement the findings. We did this by solving some of the problems commented in these papers to compare the different types of reasoning and methods addressed. Some of these original treatises are cited in the fourth section.

We found that scholars, such as Albrecht Heeffer, Chikara Sasaki, Giovanna Cifoletti, Henk Bos, Jaqueline Stedall, Jeffrey Oaks, Michel Serfatti, Maria Massa Esteve, Roy Wagner, to mention a few, had made, recently, important contributions concerning the development of algebra in specific periods (Middle Ages, Early Renaissance, Renaissance, and post-Renaissance), cultures, and algebraic practices not fully explored or revisited in ME.

3. SOME HISTORICO-EPISTEMOLOGICAL RESULTS IN ALGEBRA WITHIN MATHEMATICS EDUCATION

It is important to recognize that works like those of Freudenthal (1977), Kieran (1992), Sfard (1995), Gascón (1989, 1994-1995), Charbonneau (1996), Radford (1995, 1996, 1997, 2001), Rojano (1996), Puig (1998), Filloy (1999), Malisani (1999), Gallardo (2002), Puig &

3 Some of the data bases and prominent journals consulted were: Jstor, Web of Science, Science Direct, Springer, Historia Mathematica, Archive for History of Exact Sciences, Philosophica, Foundations of Science.

Rojano (2004), Katz & Barton (2007) and Filloy, Puig & Rojano (2008) had established the fundamentals that led to didactic approaches to algebraic thinking and language development in our field. For the purpose of argumentation in this paper, we only present two main relevant considerations deriving from some of these studies: 'phases in the development of algebra' and 'some elements of the symbolic algebra and the relevance of Viète and Descartes'.

3.1. PHASES IN THE DEVELOPMENT OF ALGEBRA

It is well known that the work of Nesselman (1842) has had an important influence in the research of algebra because of his tripartite model of algebra development. Based on the three phases, *rhetorical*, *syncopated*, and *symbolic,* it was possible to understand the complex and long process it took humanity to develop algebraic symbolism (Malisani, 1999; Kieran, 1992), and formulate reflections and explanations regarding the difficulties students encountered in developing this symbolism. Kieran (1992, p. 391) stated that "some of the cognitive processes involved in learning school algebra find their roots in the historical development of algebra as a system of symbols". This approach has led to questions about the parallelism between phylogenesis and ontogenesis in the case of algebra (see Harper, 1987; Kieran, 1992; Sfard, 1995). Another argument derived from this is that in cognitive terms, the transition between each of the three phases implies a change from procedural to structural thinking (Kieran, 1992; Sfard, 1995).

Nevertheless, this characterization of the development of algebra has been criticized by some researchers pointing out a positivist vision of historical events (see Radford, 1997; Chorlay & de Hosson, 2016) showing that these phases reflect in a limited way the true innovations that took place in each one of them. In addition, not only was the distinction of the phases criticized, but also were the *recapitulationist* approaches to parallelism and the relation of phylogenesis and ontogenesis in general. These critics argued that this relationship was more complex than was thought, and that the incorporation of the socio-cultural dimension in HES came to contradict the recapitulationist approaches (Radford, 1997; Radford and Puig, 2007; Schubring, 2011).

> From a sociocultural perspective, this division of algebra seems to be completely different: syncopated algebra was not an intermediate stage of maturation in which knowledge took a kind of rest in its tiring race towards symbolism. Instead, it was merely a technical strategy that the limitations of writing and the lack of printing in past times imposed on the diligent scribes that had to copy manuscripts by hand (Radford, 1997, p. 27).

As we are going to show later it is precisely the syncopated phase of algebra that has been strongly challenged for some historians.

3.2. SOME ELEMENTS OF SYMBOLIC ALGEBRA AND THE RELEVANCE OF VIÈTE AND DESCARTES

Some works have particularly studied more in depth the production of Viète's *Analytical art* and Descartes' *Cartesian method* during the symbolic phase of algebra (see Harper, 1987; Charbonneau, 1996; Rojano, 1996; Gascón, 1989, 1994-1995; Puig and Rojano, 2004; Filloy, Puig and Rojano, 2008). These works emphasize the degree of generality that algebra reached thanks to the use of symbolism that distinguished between known and unknown numbers, highlighting how algebra emancipated itself from geometry to become an autonomous mathematical field (Charbonneau, 1996; Rojano, 1996). In this stage, the construction of the *algebraic formula* was achieved since the equations did not contain specific coefficients, but coefficients in terms of parameters. Thus, some authors (e.g., Chevallard, 1989; Gascon, 1989, 1994-1995), building on Jacob Klein's (1968) ideas, pointed out the fact that authentic algebraic activity is that which makes a systematic use of parameters and unknowns for the modeling of different kinds of problems, whether arithmetic or geometric. However, one of the most common characterizations of the notion of the algebraic parameter, first found in Viète, refers to its function "to represent *givens* in expressing general solutions and as a tool for proving rules governing numerical relations" (Kieran, 1992, p. 391, original emphasis). In this regard, some researchers (e.g., Chevallard, 1989; Gascon, 1989, 1994-1995) have argued that it was a partial way of understanding the algebraic activity.

Based on this brief description, we must say that the above mentioned and other research works not reported here have produced a vast number of results that have had an impact—to a greater or lesser extent—on the decisions made for mathematics education today (Socas, 2011). Nevertheless, as we will show next, the review of more recent studies in the field of the History of Mathematics shows some progress in aspects we had previously referred to, generating new explanations and models for the algebraic activity, on the functionality of the algebraic symbolism, and about new insights on Viète and Descartes' algebraic analysis.

4. CONTEMPORARY STUDIES IN THE HISTORY OF MATHEMATICS CONCERNING ALGEBRA

As we specified in section 2, by contemporary studies we consider historical studies regarding the development of algebra after the 2000 and, consequently, insights that were not previously incorporated on the approaches for the learning of algebra in the fiel of ME.

One of the most important aspects of contemporary HES in the development of algebra is that the methods and views are based on more contextual accounts of history, trying to avoid anachronisms (Heeffer, 2014). Discussed in this section, studies by Heeffer (2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2014), Massa Esteve (2008, 2012), Oaks (2018), Sasaki (2003), and Stedall (2000, 2003, 2007, 2008, 2011), provide a more robust understanding of the cultural and social characteristics that had an impact on the development of algebra, considering that unlike classical HES in this topic, more sources are available today.

4.1. NEW EXPLANATIONS REGARDING ALGEBRA DEVELOPMENT

Heeffer (2009, 2010a) emphasizes the need to generate alternative models to Nesselmann's, arguing how obsolete it is for current scientific practice to continue considering such model. He finds three problems with the tripartite distinction centered on '*the myth of syncopated algebra*'. The first problem is the chronology of the division since he points out that the rhetorical and syncopated phases overlap with each other. Nesselman considers the period of rhetorical algebra from Iamblichus to Arabic algebra, the Italian algebra of the abacus and Regiomontano, a period that spans approximately from 250 to 1470. The period of syncopated algebra spans from the *Arithmetica* of Diophantus to the European algebra of the mid-17th century, which includes even Viète and Descartes. Finally, the period of symbolic algebra is modern algebra with the symbolism we know today. However, scholars of Diophantus place the *Arithmetica* between 250 and 350. Thus, the rhetorical and syncopated stages overlap almost completely, which leaves the question whether the two systems did not influence each other. The second problem refers to the role of scribes in the translation of manuscripts, he indicates that the first Arabic translations of the *Arithmetica* were obtained around the 12th century, which separates by a long time the original manuscript from its first translation and that, in that period of time innovations were made by the scribes in the transcription of the manuscripts, including abbreviations of the words to save time, effort and money, for which Heeffer points out that the syncopation could not be an invention of Diophantus but of the scribes. Furthermore, he mentions that the first translations of *Arithmetica* into Arabic did not show signs of syncopated structures. Finally, since the symbolism in *Arithmetica* is not close to the algebraic symbol (in the sense of Klein, 1968) but to a ligature, the syncopated category is deprived of the element that distinguishes it from the rhetorical phase.

Based on these arguments and in his own studies, Heeffer (2008a, 2009, 2010a) proposes an alternative model:

1. *Non-symbolic algebra:* this is an *algorithmic type of algebra* dealing with numerical values only or with a non-symbolic model. Typical examples are Greek geometric algebra or the Chinese method of solving linear problems with multiple unknowns (Fāng chéng).

2. *Proto-symbolic algebra*: *algebra which uses words or abbreviations* for the unknown but is not symbolic in character. This would include Diophantus, Arabic algebra, the early Abbacus algebra, and the early German cossic algebra.

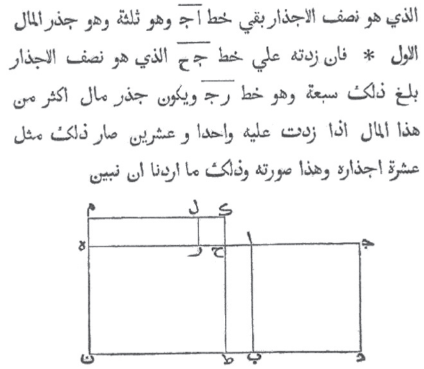
3. *Symbolic algebra: algebra using a symbolic model*, which allows for manipulations on the level of symbols only. It was established around 1560, and prepared by later abbacus and cossic algebra, Michael Stifel, Girolamo Cardano, and the French algebraic tradition. (Heeffer, 2009, p. 9, emphasis added)

Heeffer shows that before the algebraists usually cited for having constructed the algebraic symbolism closest to the modern one—such as Viète and Descartes'—, the way of thinking already possessed a symbolic rationale despite the lack of a symbolic semiotic resource like the modern one has.

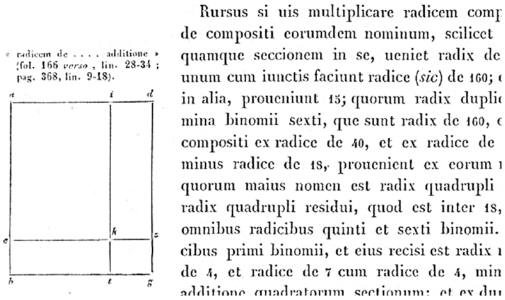
> In our opinion, the road to symbolic algebra was paved by several previous steppingstones that were functional in developing the symbolic mode of reasoning. The major obstacle in recognizing the importance of previous developments has been the *confusion between the use of symbols and symbolic reasoning*. […] [S]everal instances of symbolic reasoning in algebraic problem solving can be identified while no symbols are being used (Heeffer, 2008a, p. 153, emphasis added).

Heeffer (2010a) argues that during the sixteenth century there was a transition from reasoning based on geometric models (Figure 1) to symbolic reasoning, and characterizes it as based on arithmetic rules that can be applied to non-arithmetic objects, assigning to the symbolism the ability not only to represent but also to create new objects (Heeffer, 2008a, 2010a, 2014). Furthermore, he identified that this transition came from the generalization of arithmetic rules to the creation of explanations of 'not understood or accepted objects' in ontological terms, such as the case of negative, irrational, and imaginary numbers (Heeffer, 2008a, 2009, 2010a).

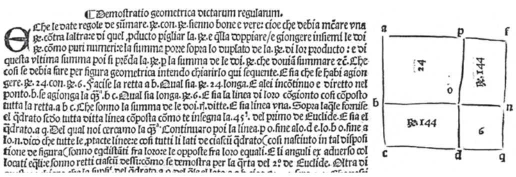
Figure 1 – Epistemic justification based on geometric reasoning.



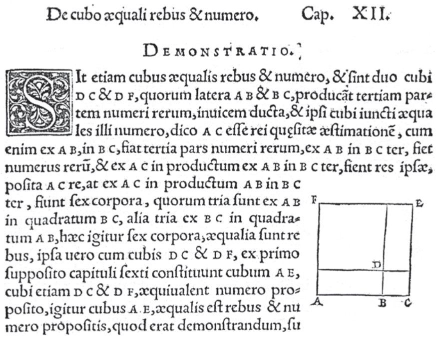
Justification of the rule “*a treasure plus twenty-one dírhems equals ten roots*”
(al-Khwârizmî, in Rosen, 1831, p. ١٣).



Justification for the extraction of some root by Fibonacci
(Boncompagni, 1857, p. 368).



Demonstration for the extraction of some root
(Pacioli, 1523, fol. 117).

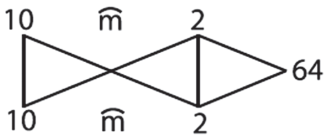


Demonstration of the case *cube equals square plus number* (Cardano, 1545, fol. 31).

Source: Self elaboration.

Heeffer (2014) further shows that, just as those geometric models had the function of *epistemic justifications* for procedures that defined rules for certain cases, arithmetic diagrams also had the function of justifying arithmetic rules and that these were used as a means to validate unaccepted results (Figure 2). In particular, he shows the case of Dardi, cited in Høyrup (2010), who justifies the product of two negative numbers and the case of how Cardano justifies the product of √-15 • √-15, both under the cross-multiplication algorithm.

Figure 2 – Dardi’s justification based on cross-multiplication.



Source: From Høyrup (2010, p. 23).

Dardi justifies that the product of two negative numbers is positive using the following reasoning: since 8 • 8 = 64, which is the same as (10-2) • (10-2) = 64, then, based on the cross-multiplication rule (10-2) • (10-2) = 100 - 20 - 20 + (-2) (-2) = 64, and so (10 - 2) • (10-2) = 60 + (- 2) (- 2) = 64, implying that to ensure the relation between the quantities it must be true that (- 2) (- 2) = 4.

Thus, cross-multiplication is an epistemic justification that validates other objects whose nature is unclear, allowing the construction of new knowledge.

Another of Heeffer's contributions is the characterization of the six phases that led to the emergence of what he calls the *symbolic equation* (Heeffer, 2008a, 2009, 2010a, 2010b) which was completed by Buteo (1559) and, which happened in the period between Cardano's and Gousselin's treatises (1539-1577). These phases—see full description in Heeffer (2008a)—describe a progressive process of objectification of algebraic numbers (negative and imaginary), polynomials, equations, and systems of equations. Except for the third phase, all the others are attributed to Cardano (1539) which could be understood as a sign of a paradigm shift. The phases are as follows:

1. *The expansion of arithmetic operations to polynomials*. The arithmetic operations are applied to objects that are not necessarily natural numbers, such as polynomials and whole numbers, fractions, and irrationals —even those not completely accepted, such as negative and imaginary numbers—.

2. *Equating polynomial expressions*. There is a shift from the classical practice of operating with *co-polynomials* to the operations with polynomials by making it explicit that the affectation in operations occurs on both sides of the equality (Figure 3-I).

   The term *coaequare* denotes *the act of keeping related polynomials equal*. The whole rhetoric of abacus texts is based on the reformulation of a problem using the unknown and the manipulation of coequal polynomials to arrive at a reducible expression in the unknown. One looks in vain for equations in abacus texts (Heeffer, 2008b, p. 119, original emphasis).

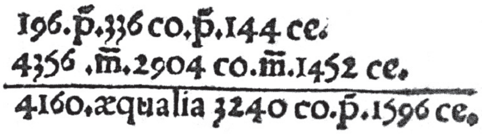
3. *Introduction of the second unknown*. It implies a different treatment compared with equations with only one unknown. Heeffer (2010b) explains that before 1560 it was unusual to use more than one unknown in the solution of problems (Figure 3-II).

4. *Expansion of arithmetical operators to equations*. The multiplication or division by a scalar number on equations is applied. This was first found in Cardano (1539) (Figure 3-III).

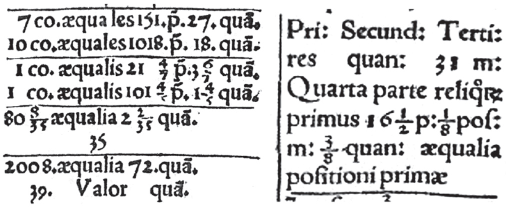
5. *Introduction of letters for multiple unknowns*. The use of several letters is explicitly used to represent each of the unknowns of the problem, a practice that essentially did not exist until before Stifel's work (1544).

6. *Systematic manipulation of linear equations to eliminate unknowns*. Acknowledging the distinction of several unknowns led to the expansion of arithmetic rules applied to the manipulation of equations. Therefore, it was possible to add or subtract for the systematic elimination of unknowns. It was Buteo (1559) who concluded about the construction of the symbolic equation since he used arithmetic operations to eliminate unknowns not only in one equation but also in sets of equations (Figure 3-IV).

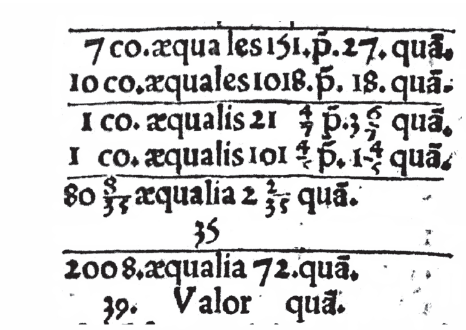
Figure 3 – Transition to the symbolic equation according to Heefer.



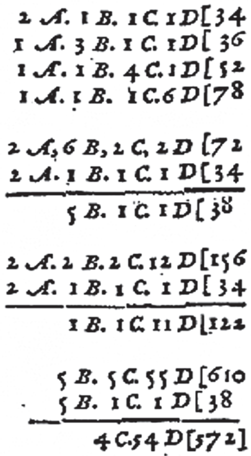
I. Cardano's first equality of polynomials (1539, p. 424).



II. Introduction to Cardano's second unknown (1539, p. 435 & 1545, p. 21).



III. Cardano's operations in equations (1539, p. 435).



IV. Buteo's systematic manipulation of linear equations (1559, p. 194).

Source: Self-elaboration.

4.2. THE RELEVANCE OF GEOMETRIC WORK IN THE DEVELOPMENT OF THE ALGEBRAIC ANALYSIS OF VIÈTE AND DESCARTES

Stedall (2007, 2008, 2011) argues the importance of the geometric work that Viète developed in his mathematical production. She states the following:

> Viète gave algebra a startling new priority as a tool for investigating and analyzing the problems and theorems of classical geometry. Even the hitherto intractable difficulties of doubling the cube or trisecting an angle were now, in his opinion, amenable to algebraic treatment (Stedall, 2011, p. 28).

This interpretation of the relevance of geometry in Viète's work has also been recently argued by Oaks (2018). This author emphasizes that basic geometric knowledge for astronomy was of great interest to Viète before 1570, which led to the development and improvement of geometric models for astronomical calculations (Oaks, 2018).

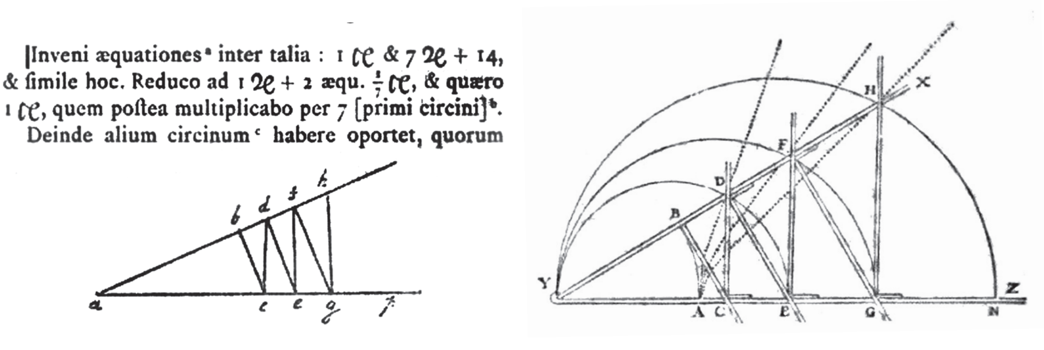
For Oaks (2018) it is sufficient to say that the notion of number in Viète is that of a geometric magnitude. Oaks reinterprets Klein's (1968) dual sense of the number in Viète, implying that Viète was building an *algebra for geometry*, about which Oaks circumvents three problems with non-arithmetic geometric magnitudes, and mentions that this mathematician explicitly solved in his *analytical art:*

> How can equations be formed if the magnitudes participate in the category of "quantity" through ratio and proportion? If magnitudes of different dimension are heterogeneous, how can they be added and subtracted? How can meaning be given to magnitudes of dimension greater than three? (Oaks, 2018, pp. 275-276).

According to Oaks (2018), the first problem was solved using the theory of proportions. Since each proportion establishes an equality, this allows a natural transition from *a:b :: c:d* to *ab=cd*. For the second, the homogeneity law establishes that to compare or operate with the species it is necessary to compare them with magnitudes of the same dimension, which allows the operation as is the case of the equation AC^3-$3(AC \times AB^2\ ) = (CE \times CD^2)$—see Viète (1646, pp. 248-249)—, which is carefully constructed from the comparison of quadratic and cubic expressions with planes and solids, respectively. Finally, Viète solved the third problem by mentioning that magnitudes of dimension greater than three are useful to calculate and solve problems of angular sections, so it can be justified and necessary to work with this kind of dimensions. This is an aspect that Oaks considers Klein (1968) overlooked; and thus, Viète's astronomical and cosmological program makes sense. Furthermore, Oaks (2018) argues that this consideration is where it is possible to see the function of algebraic symbolism because although Viète does not find meaning or significance in these types of dimensions, they are useful. It means that he works through symbolism with objects that are not well understood.

According to Bos (2001) and Sasaki (2003), Descartes had also expressed the importance of geometry in his project of new science, which he called *Mathesis Univesralis* in the *Regulae ad directionem ingenii* (1628, published posthumously in 1701). In a letter to Beeckman in March 1619, Descartes stressed how important his compasses were to him since he used them to demonstrate the solution of equations. Specifically, he showed how to solve a cubic equation ($x^3 = 7x + 14$, in anachronical notation) using the *mesolab*, which appeared in *La Géométrie*, with which the geometric progression 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5,… could be constructed (Figure 4).

Figure 4 – Descartes's mesolab.



I. *Cogitationes Privatae*
(Adam & Tannery, 1908, p. 234)

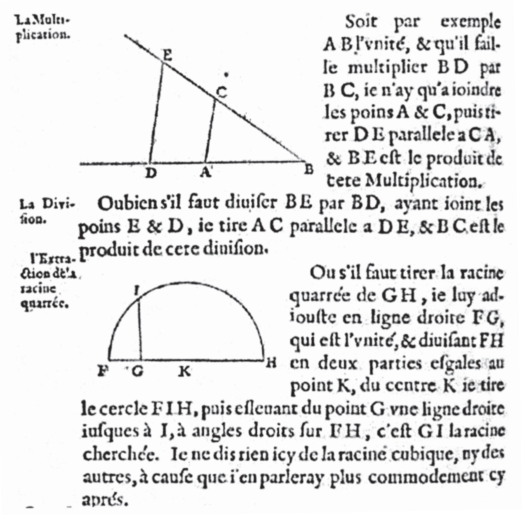
II. *La Géométrie*
(Descartes, 1637, p. 318)

Source: Self-elaboration.

The use of compasses and geometric instruments shows Descartes' interest in finding the solution to equations geometrically (Sasaki, 2003).

Considering the classical geometric analytical method, the synthesis implied the construction of the figure. Therefore, if his project used algebra as a new tool, he had to ensure the construction of the equations and their solutions using geometry. Consequently, algebra was only a part of the cartesian method (Bos, 2001). Under this premise, it makes sense why from the beginning of *La Géométrie* he establishes geometric constructions of the arithmetic operations and the solution to equations (Figure 5).

Figure 5 – Descartes' arithmetization of geometry.



La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

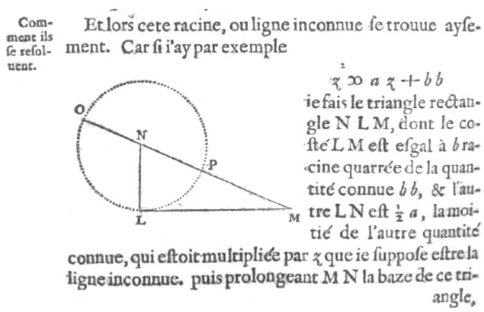
La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Constructions for multiplication, division, and square root (Descartes, 1637, p. 298)



Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \infty a z + b b$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue $b b$, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Construction of the solution to the equation $z^2 = az + b^2$ (Descartes, 1637, p. 302)

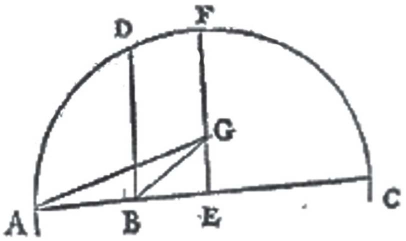
Source: Self-elaboration.

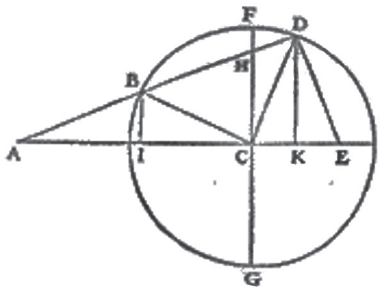
As these studies show, the affirmations regarding the emancipation of algebra from geometry to become an autonomous mathematical field (Charbonneau, 1996; Rojano, 1996), indicates that it was not the case for these mathematicians. Furthermore, in the studies of López-Acosta (2023), López-Acosta & Montiel (2021, 2022), it is discussed that the invention of the parametric quantities was influenced by the geometrical nature of the problems that were solved by both.

It is known that by the time of the *Regulae ad directionem ingenii* Descartes already possessed a large part of the scheme of thought that he definitively embodied in *La Géométrie*—where geometric analysis and algebra played a central role—, however, he still had to overcome the obstacle of dimension. This step was fundamental for the construction of the algebra of segments, first embodied in *La Géométrie* and where parametric quantities appear systematically and explicitly. This fact led to López-Acosta (2023), López-Acosta & Montiel (2021, 2022) to question what happened between 1628 and 1637 that allowed Descartes to make this leap.

In 1631 it was proposed to Descartes to solve the Pappus problem. This *locus* problem, like many of the problems solved by Viète, involves many relations that are not perceptible from the geometrical diagram present in the text, which requires not only a precise system to characterize the known and unknown quantities (see Figure 6 and 7), but a system to approach the geometrical magnitudes. Therefore, it is conjectured that it was the geometrical nature of the problems that allowed Descartes to refine his analytical method (Bos, 2001; Sasaki, 2003).

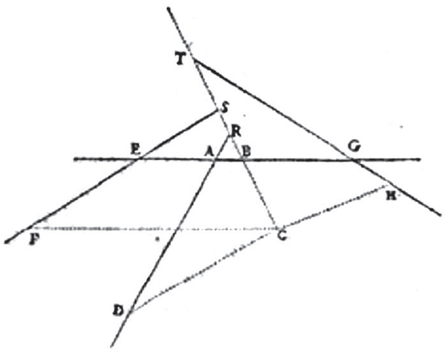
Figure 6 – Problems concerning the trisection of angles in Viète's *Supplementum Geometriae.*

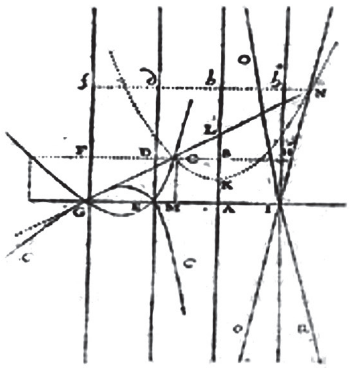




Source: Viète (1646, p. 248 and p. 249 respectively).

Figure 7 – The Pappus problem for four and five lines in *La Géométrie*.

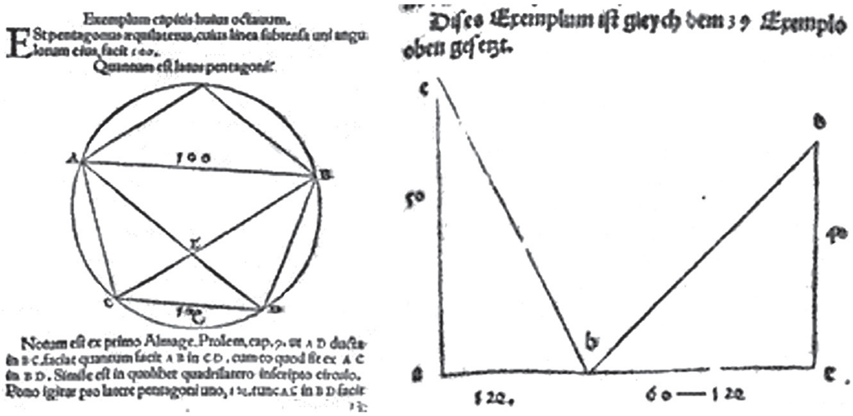




Source: Descartes (1637, p. 309 and p. 336 respectively).

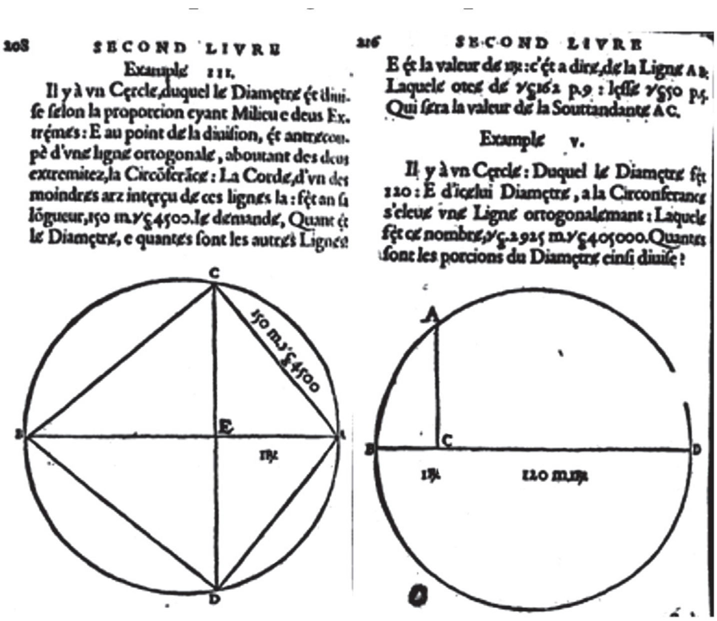
A review of algebraic treatises from between 1494 and 1585—belonging to Luca Pacioli, Girolamo Cardano, Nicola Tartaglia, Jaques Peletier, Ioannes Buteo, Petrus Ramus, Pedro Nunez, Rafael Bombelli, Guillaume Gosselin and Simon Stevin—shows that in the algebraic tradition prior to Viète and Descartes, examples of geometric problem solving did not possess this 'complexity' that was recognized in these later two. For example, in the problems solved by Stifel (1544, 1553) and Peletier (1554)—Figure 8 and 9 respectively—, two things can be identified: the first is that the algebraic expressions involved do not present parameters, but specific coefficients; the second is that the resolution of these problems—unlike the approaches by Viète and Descartes—, was not associated to the construction of formulas or general expressions, but to the determination of the unknown that satisfied the geometric relation established by the problem.

Figure 8 – Examples of geometric problems in Stifel.



Source: Stifel (1544, p. 286 and 1553, fol. 305 respectively).

Figure 9 – Examples of geometric problems in Peletier.



Source: Peletier (1554, p. 208 y p. 216 respectively).

Based on these considerations López-Acosta (2023), López-Acosta & Montiel (2021, 2022) identify that the parametric equation came from the need, both of Viète and Descartes to build an algebra for geometry (Oaks, 2018). For this, as Klein (1968) emphasized, it was needed an extension of the object of study to which the algebra of his predecessors referred, considering not only numbers, but also geometric magnitudes. However, this last consideration makes more sense when analyzing the mathematical activity immersed in the type of geometric problems that both mathematicians solved (see López-Acosta, 2023; López-Acosta & Montiel, 2021, 2022), something that, due to the philosophical and ontological nature of Klein's work, is not possible to see clearly.

4.3. ROOT APPROXIMATION BASED ON ALGEBRAIC REASONING

Another contribution of Stedall (2011) is revealing Viète's work *De Numerosa Potestatum* about the numerical solutions to equations. Such work has not been studied in ME regarding the underlying algebraic thinking. Stedall shows an example of Problem II of this treatise and explains the rationale of the method with which Viète numerically approximates the roots of equations with a degree greater than three. The problem she takes up from Viète's (1646, pp. 166-168) consists in analytically extracting the root of a given cubic number: 157,464.

Viète establishes that an approximation to the root is 50. The reasoning involved considers the expansion of the cube of 50 plus a number k, as shown below:

$$(50 + k)^3 = 50^3 + 3(50)^2k + 3(50)k^2 + k^3 = 157{,}464$$

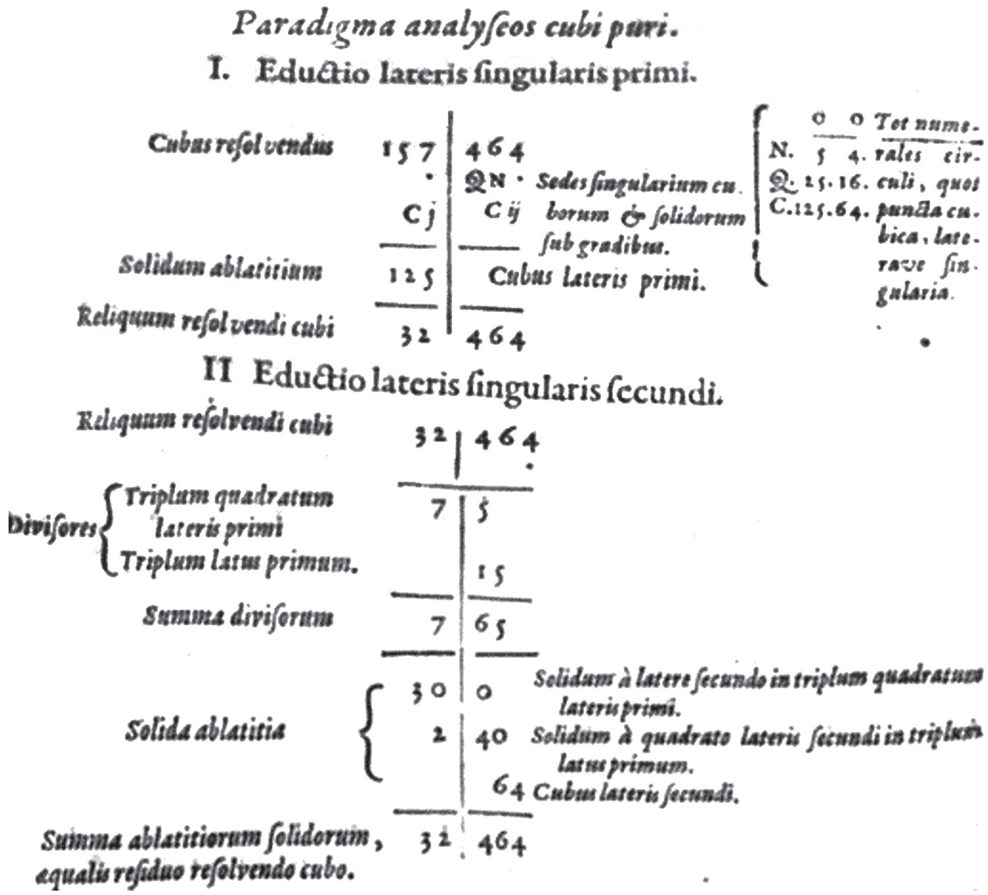
$$125{,}000 + 3(50)^2k + 3(50)k^2 + k^3 = 157{,}464$$

On this relationship, which is described in rhetorical terms in the original text, it begins by subtracting the value of the cube from , obtaining:

$$3\,(50)^2k + 3(50)k^2 + k^3 = 32{,}464$$

Then, he approximates k dividing 32,464 by the coefficient of k (7500), obtaining 4 as a result. This was a strategy previously defined as part of the method with another example (see Viète, 1646, p. 165). Once he gets this approximate value of k, he calculates the values of $3(50)^2\,(4) + 3(50)\,(4)^2 + (4)^3$ and subtracts them from 32,464 getting the rest zero, which is why he determines that the root is 54. Otherwise, Viète states, the root would be irrational. This reasoning is represented schematically using tables in the treatise (Figure 10).

Figure 10 – Viète's schematization of the method of root approximation.



Source: From Viète (1646, pp. 167-168).

This example shows a method for the approximation of roots based on algebraic reasoning that can be further studied.

4.4. THE USE OF ALGEBRAIC SYMBOLISM AS A TOOL TO INVESTIGATE THE STRUCTURE OF EQUATIONS

Further contributions by Stedall (2000, 2007, 2008) are her works related to Thomas Harriot, one of Viète's followers. Stedall shows how Harriot took Viete's results beyond regarding the structures of the equations, managing to investigate and obtain relations between the roots and the coefficients of the polynomials thanks to a more convenient symbolism (Figure 11). "Symbolism became for him not just a more concise way of writing, a kind of mathematical shorthand, but also an investigative tool" (Stedall, 2007, p. 390). Just as Viète, Harriot used vowels for the unknowns and consonants for the known numbers, but he eliminated the words to describe the powers and replaced them with the repetition of the unknown as many times as the power indicated. He also substituted the word equality with the equal sign as Recorde (1557) did.

Figure 11 – Harriot's rewriting of Viète's expressions.

Isagoge
To add (Z square)/G to (A plane)/B
the sum will be (G in A plane) + (B in Z square)/B in G

Praxis

$$\frac{ac}{b} + \frac{dd}{g} = \frac{acg + bdd}{bg}$$

Source: From Stedall (2008, p. 465).

Figure 12 shows that Harriot was investigating the structure of polynomials by multiplying linear factors, which according to Stedall (2011) is one of his greatest contributions to the theory of equations, and that with it, the relationship between the roots and the coefficients of the polynomial could be seen in a "transparent" way. Stedall (2007, p. 383, original emphasis) mentions:

> Harriot's mathematics is almost wordless because he expects (and he is almost always right) that his reader will be able to *see* what he is doing either by following a symbolic argument or from the layout of his material on the page.

Figure 12 – Harriot's investigation of the structure of polynomials.

$$\begin{array}{l|l} a+b & = aa+ba \\ a-c & \quad -ca-bc \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a+b & = aaa+baa+bca \\ a+c & \quad +caa-bda \\ a-d & \quad -daa-cda-bcd \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a+b & = aaaa+baaa+bcaa \\ a+c & \quad +caaa+bdaa \\ a+d & \quad +daaa+cdaa+bcda \\ a-f & \quad -faaa-bfaa-bcfa \\ & \quad\quad -cfaa-bdfa \\ & \quad\quad -dfaa-cdfa-bcdf \end{array}$$

Source: From Harriot (1631, p. 4).

To show more clearly this visual aspect, let us consider Theorem I of Chapter XV of the treatise *Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatvs Dvo*, where Viète (1615) constructs a quadratic equation by considering the following expressions:

$$B - A = S \text{ with greater than } A$$

$$A - B = S \text{ with greater } B,$$

Where B is known, and S is the difference between A and B. By squaring both sides of the equation (for the first case), it is obtained that

$$B^2 - 2BA + A^2 = S^2$$

$$2BA - A^2 = B^2 - S^2$$

Similarly, the same expression is obtained for the second case

$$2BA - A^2 = B^2 - S^2$$

Viète states that if you have and , then you get the equation:

$$12x - x^2 = 20$$

And therefore, it can be determined that $x = 2$ and $x = 10$.

In this example, we can see a direct relationship between the coefficients and the root of an equation, and this relationship can be obtained from the exploration of the symbolic expression. If we start from the general expression $2BA - A^2 = B^2 - S^2$, it is possible to establish that $12 = 2B$, while $B^2 - S^2 = 20$. From these expressions we can obtain the values of B and S and, therefore A, considering that A is the sum or difference of the values of B and S.

4.5. THE PRACTICES OF INCORPORATION AND REWRITING OF PREVIOUS TREATISES

The work of some mathematicians after Viète (see Massa Esteve, 2008, 2012; Stedall, 2007) had addressed the development of the algebraic symbolism and how they produced symbolism increasingly independent of the rhetorical text. Those works argue that this was possible through the rewriting of Viète's original texts to make the reading clearer and to expand on previous results.

For instance, Massa Esteve (2008, 2012) highlights that Viète's work was an inspiration for Pierre Hérigone, who built a full and clearer symbolic writing for mathematical demonstrations. According to her, Hérigone had in mind a didactic plan in which simplicity, clarity, and structure of the writing were fundamental. His aim was "to introduce a symbolic language as a universal language to deal with both pure and mixed mathematics using new symbols, margin notes (which he called "citations"), and abbreviations." (Massa Esteve, 2008, p. 286).

Hérigone not only modified Viète's notations as Harriot had, but he also elaborated a system of abbreviations for recurrent rhetorical expressions. This is derived in highly symbolical texts almost without words. For instance, the powers of the unknown were associated with a numeral at the end of the algebraic term (Figure 13).

Figure 13 – Hérigone's notational symbolic system.

ALGEBR. CAP. I.

Explicatio ſignorum affectionis.

Explication des ſignes d'affection.

+	ſignif.	plus.
~		minus, u *moins.*
~:		differentiam, u *difference.*

Explicatio notarum, u *des notes.*

ab	ſignif.	A in B, *A multiplie par B.*
a2b		A quadratũ in B, *le quarré d'A multiplie par B*
ab2		A in B quadratum, *A multiplie par B quarré.*
ap		A planum, *A plan.*
ap2		A plani quadratum, *le quarré du plan A.*
ap3		A plani cubus, *le cube d'A plan.*
aſ		A ſolidum, *A ſolide.*
aſ2		A ſolidi quadratum, *le quarré de A ſolide.*

Source: From Hérigone (1634, pp. 5-6).

5. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

Based on this brief presentation of some findings in the history of mathematics, related to symbolic algebra, which we have called contemporaries, we have identified new paths, reflections, and questions worthy to *accommodation* (Fried, 2001) for the expansion and development of algebraic thinking within ME; since they have not been explored and studied explicitly yet. This is what we have considered as implications to ME, in the sense that provide new accounts to rethink how algebra was developed in the history and, how these insights could bring new paths to research concepts, heuristics and mathematical practices in order to enhance the understanding of the construction and development of algebraic activity in our field. We recapture six elements from these findings that, as Barbin, et. al. (2020) propose, can be considered as *epistemological contributions* to the teaching and learning of mathematics if incorporated:

1. New explanations for the development of algebra and symbolic algebra

Heeffer's studies (2008b, 2009, 2010a) show an alternative view of the typical division of algebra development as *rhetorical*, *syncopated,* and *symbolic* in ME. It supports the disagreements of other ME researchers about this tripartite model (see Radford, 1997). The division as *non-symbolic algebra*, *proto-symbolic algebra,* and *symbolic algebra*—based on a particular conception of *symbolic reasoning*—vindicates the relevance of the innovations of medieval algebraists, both in their symbolism and functionality. This insight is helpful because it is not based on the semiotic nature of algebraic writing but on a type of mathematical reasoning. Nevertheless, we consider pertinent to consider what Chorlay and de Hosson (2016) say about the division of phases. This division usually implies a positivist vision that tends to implicitly promote that subsequent stages are better than the previous ones, demeaning these in the sense that a subsequent phase replaces the former one. However, during the historical development, this was not the case.

Developed in the period between Cardano (1539) and Buteo (1559), this model acknowledges the emergence of the *symbolic equation,* as a mathematical object. This incorporates arbitrary symbols for both arithmetic operations and unknowns and the equal sign, which in turn implies the systematic operation on itself. In this sense, it would be worthy to deepen, re-contextualize, and/or adapt the results of the development of the symbolic equation in empirical studies related to the development of Heeffer's six moments in the students' algebraic thinking.

2. New characterizations related to algebraic thinking: symbolic reasoning and epistemic justification

The theoretical constructs of *symbolic reasoning* and *epistemic justification* that Heeffer discusses in his research could be incorporated into the ME research in algebra. The first one presents innovative elements that could expand and be articulated with other approaches to characterize algebraic thinking. Kaput (2008, p. 10), for instance, states that the two core aspects of algebraic reasoning rest in the "generalization and the expression of generalization in increasingly systematic, conventional symbol systems" and in the "syntactically guided action on symbols within organized systems of symbols". In this line of thought, Radford (2006, p. 3, original emphasis) proposes that the algebraic activity be characterized by three elements: (a) a sense of *indetermination*, (b) indeterminate objects handled *analytically*, and (c) a peculiar *symbolic* mode to *designate* its objects.

In both characterizations, we can notice the weight that is assigned to symbolization, making it an enhanced characteristic. Although both authors consider that symbolic systems do not necessarily have to correspond to the formal ones of current algebraic symbolism, we believe that these explanations can be strengthened by considering the property of the creation of new knowledge that Heeffer highlights in his research. This would lead to incorporate a pragmatic dimension that transcends from its efficient capacity to store and transmit information (Pimm, 1987; Drouhard and Teppo, 2004), to a creative potential based on a visual function.

The notion of *epistemic justification* also contributes to the discussion of characterization of algebraic activity since it provides a framework to distinguish types of reasoning underlying such activity. To illustrate, consider the *figural* (related to the reconfigurations of geometric forms to demonstrate equation-solving techniques) (Hoyrup, 2002; Radford, 1995, 1996, 2001), the *arithmetic operability* (related to the use of arithmetic operation schemes to demonstrate the existence of unacceptable numbers such as negative, irrational or imaginary), and the *visual symbolic* (related to the use of symbolism as an argument to detect visual patterns in the structures of the equations), among others, which have recently been used by López-Acosta (2023). Under the adoption of this construct, the author distinguishes the algebraic activity of Viète and Descartes from some representative cases of the previous algebraic tradition.

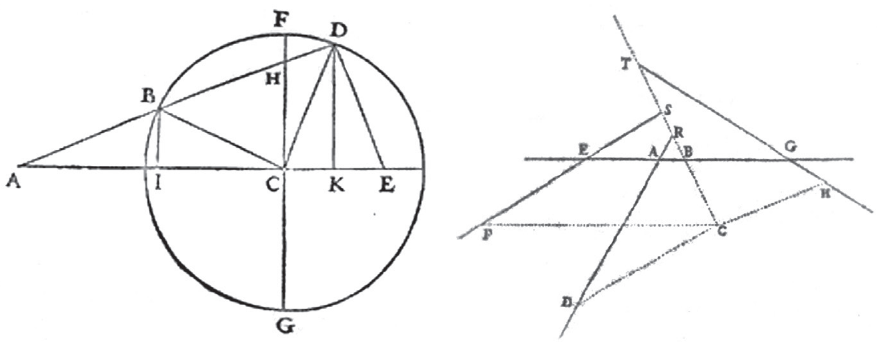
The distinction of these epistemic justifications can also generate approaches for the development of algebraic thinking in students, for which it is equally relevant to carry out empirical studies in our field.

3. The relevance of geometric problems in the development of algebraic analysis

Other works within ME (see Gascon, 1989, 1994-1995, 1999; Ruiz-Munzón, 2010, Ruiz-Munzón, et. al., 2011) describe and justify a model for algebraic activity, based on the epistemological considerations of Piaget and García (1982) and Klein (1968). These works addressed the essential role played by the use of parameters and unknowns in algebraic activity, giving rise to the emergence of mathematical formulas, a great step for the subsequent development of mathematical activity in general, as well as reformulations of the method of analysis-synthesis which Viète used to build his new algebra. Nevertheless, we identified that little has been mentioned about the characteristics of the geometrical activity that Viète and Descartes carried out in their time and how these implied the emergence of the *parametric equation*, i.e., the equations that use parameters and unknowns.

From the works that had addressed the importance of geometric activity in mathematics projects in which Viète and Descartes were involved, López-Acosta (2023), López-Acosta & Montiel (2021, 2022) have had recently conjectured about the emergence of the parametric equation which did not exist in the previous algebraic tradition. The authors ascertains that more than the algebraic work *per se*, it was specifically the complex geometric problems which both mathematicians solved in their attempt to renew the method of geometric analysis through algebra (Figure 14) that gave birth to the parametric equation.

Figure 14 – Complex geometrical problems in Viète and Descartes.



Source: The first image, taken from Viète (1646, p. 249), is related to an angle trisection problem. The second one, taken from Descartes (1637, p. 309), corresponds to the Pappus problem. Both kind of problems were considered as complex by the ancient Greek mathematicians.

With such findings, this research is carrying out didactic explorations with students and mathematics teachers to determine the scope of this conjecture in the creation and use of parametric equations (see López-Acosta et. al, 2024; López-Acosta & Romero-Fonseca, 2023). However, more research in this area is needed.

4. The use of algebraic symbolism as a tool to investigate the structure of equations

Another aspect that has not been significantly addressed in ME is the exploration of the visual character of symbolism, derived from the algebraic analysis first investigated by Viète and which other mathematicians further developed more prolifically, as mentioned by Stedall (2000, 2007, 2008). The visual character of the symbolism is one of the most relevant functions of the modern algebraic symbolism; however, it is hardly ever addressed in the teaching/learning process because algebra school disregards the importance of the formalism of scientific writing and its role as an instrument of thought (Bolea, 2003).

Unlike Viète, Descartes and Harriot, among others dedicated to the *construction of polynomials* to detect visual patterns and regularities between coefficients and roots in equations, in the current school practice, this visual argument is not used. The broadly used practice in which schools approach products such as $(x + a)$ $(x - b)$ is based on pre-established rules, yet to be explained to students. Thus, the algebraic activity at school focuses on rule memorization: 'the square of the common term, plus the product of the sum of the uncommon terms by the common term, plus the product of the uncommon terms. Consequently, these approaches distort the visual potential of symbolism, using the construction of polynomials allowed in its genesis. This aspect highlights and supports the importance of structural approaches to the learning and use of algebraic language (see Kirshner, 1989, 2001; Kirshner and Awtry, 2004).

5. The practice of incorporating and rewriting previous treaties by algebraists

One consideration that may significantly contribute to address the refinement of symbolism in school activities may come from the progressive rewriting of basic algebraic texts, as suggested in the works by Massa Esteve (2008, 2012) and Stedall (2007). They recognized the innovations, simplifications, and prolific ways to improve algebraic symbolism by algebraists based on Viète's texts.

This insight could provide didactic elements to work with students since it would be plausible to set environments dedicated to improving algebraic writing based on initial texts, something not yet addressed in algebra research.

6. New characters and algebraic treatises to be studied

Overall, the review of these contemporary sources can lay foundations to determine new research objects for HES in ME in algebra, since it allows the identification of both algebraists and algebraic treatises that have not been analyzed yet. For instance, the analysis of the work *De Numerosa Potestatum* by Viète could provide new insights that might have an impact on the development of algebraic thinking related to root approximation. Algebraists such as Stevin, Stifel, Peletier, Gousellin, Harriot, Herrigone, and their respective works, among many others analyzed in these studies, could provide new techniques, symbolism, and reasoning that may have been overlooked so far.

In conclusion, these studies can contribute significantly to a more robust and profound understanding of algebraic activity in general and have a positive impact on mathematics education. This should be feasible if relevant theoretical and methodological frameworks for empirical research are constructed, as pointed out by Radford (2000). In this way, with these few examples, we have presented the relevance of contemporary HES in the history of mathematics, showing the possibility of posing new objects of study at different levels. In short, we refer to those related to (i) *thinking*: symbolic reasoning, epistemic justification, the constitution of the symbolic equation, geometrical activity in the emergence of algebraic analysis, the visual character of symbolism to detect patterns between roots and coefficients in the equations; (ii) *historical development*: the non-symbolic, pre-symbolic and symbolic algebra; (iii) *algebraists and treatises not studied before*; and (iv) *theoretical constructs* that could strengthen the methods to analyze algebraic activity.

Thus, we propose that these signaled paths are worthy to be incorporated in the ME research of algebra to study more in depth and to identify their scope in the mathematics education of young students.

STATEMENTS OF AUTHORS' CONTRIBUTIONS

LLA conceived the idea presented along with the respective literature review, the analysis of sources, its narration, as well as the design of the structure of the manuscript. GME actively participated in the review of the methodological structuring of the work and the argumentative structure of the manuscript.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

Data supporting the results of this study will be made available by the corresponding author, LALA upon reasonable request.

5. REFERENCES

Adam, C., & Tanery, P. (1908). *Euvres de Descartes (Vol. X)*. L. Cerf, Ed.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématique, 10*(2), 241–286.

Barbin, E., Guichard, J.-P., Moyon, M., Morice-Singh, C., Metin, F, F., Buhler, M., . . . Hamon, G. (2018). *Let History Into the Mathematics Classroom*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57150-8

Barbin, E., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 333-342). Springer.

Bartolini, B., & Sierpinska, A. (2000). The relevance of historical studies in designing and analysing classroom activities. In J. Fauvel, & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol. 6, pp. 154-161). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research*. Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Departamento de Matemáticas Universidad de Zaragoza.

Boncompagni, B. (1857). *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo vol. I.: Liber Abbaci di Leonardo Pisano*. Scienze Matematiche e Fisiche.

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0087-8

Boyer, C. (1986). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons.

Buendía, G., & Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-Epistemological elements for Trigonometric Functions. In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 67-82). The Mathematical Association of America.

Buteo, J. (1559). *Logistica quae & Arithmetica vulgò dicitur in libros quinque digesta ... ; eiusdem ad locum Vitruuij corruptum restitutio, qui est de proportione lapidum mittendorum ad balistae foramen, libro decimo*. apud G. Rovillium.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice*. Bernardini Calusci.

Cardano, G. (1545) *Ars Magna sive de regulis algebraicis,* Johann Petreius.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics Education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. In L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19-59). Routledge.

Charbonneau, L. (1996). From euclid to descartes: algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 15-38). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_2

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'agébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 45-75.

Chorlay, R., & de Hosson, C. (2016). History of science, epistemology, and mathematics education research. In B. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange, *The didactics of mathematics: Approaches and issues* (pp. 155-189). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_8

Cifoletti, G. (2004). The Algebraic Art of Discourse Algebraic Dispositio, Invention and Imitation in Sixteenth-Century France. In K. Chemla, *History of Science, History of Text* (pp. 123-135). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2321-9_6

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., & Tzanaki, C. (Eds.). (2018). *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonious Partnership*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3

Descartes, R. (1637). *Discours de la me'thode pour bien conduire sa raison & chercher la varite' dans les sciences plus la diotrique, les meteores, et la geometrie, qui sont des essais de cete methode*. Ian Marie.

De Vittori, T. (2021). On the Role of Imagination in the Use of History in Mathematics Education. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3), em0660. https://doi.org/10.29333/iejme/11296

Díaz-Chang, T., & Arredondo, E.-H. (2023). Exploring the relationship between tacit models and mathematical infinity through history. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 18*(2), em0730. https://doi.org/10.29333/iejme/12823

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The future of the teaching and learning of Algebra* (pp. 227-264). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_9

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic Publisher. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. (A. Bishop, Ed.) Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71254-3

Fraenkel, J., Wallen, N., & Hyun, H. (2012). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill.

Freudenthal, H. (1977). What is Algebra and What has it been in History? *Archive for History of Exact Sciences, 16*(3), 189-200.

Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10*, 391–408. https://doi.org/10.1023/A:1011205014608

Fried, M. (2007). Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 203–223. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9025-5

Fried, M. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education: a Saussurean Perspective. *The Mathematics Enthusiast, 5*(2), 185-198.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 1–20.

Gallardo, A. (2002). Historical-epistemological análisis in mathematics education: two Works in didactics of algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 121-139). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_7

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matematicas,* Thèse Doctorale. Barcelone: Université Autonome de Barcelone.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, *11*(1), 77-88.

Green, B., Johnson, C., & Adams, A. (2006). Writing Narrative Literature Reviews for Peer-Reviewed Journals: Secrets of the Trade. *Journal of Chiropractic Medicine, 5*(3), 101–17. https://doi.org/10.1016/S0899-3467(07)60142-6

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 75-90. https://doi.org/10.1007/BF00367915

Harriot, T. (1631). *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova expedita et generali methodo resolvendas*. Walter Warner, Ed.

Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *The Mathematics Enthusiast, 7*(2), 339-368.

Heeffer, A. (2008a). The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models. *Foundations of Science*, *13*, 149-161. https://doi.org/10.1007/s10699-008-9124-0

Heeffer, A. (2008b). A conceptual analysis of early arabic algebra. In S. Rahman, T. Street, & H. Tahiri (Eds.), *The unity of science in the arabic tradition: science, logic, epistemology and their interactions* (pp. 89-128). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8405-8_4

Heeffer, A. (2009). On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. In B. Van Kerkhove (Ed.), *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics* (pp. 1-27). World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd.

Heeffer, A. (2010a). The symbolic model for algebra: functions and mechanisms. In L. Magnani, W. Carnielli, & C. Pizzi (Eds.), *Model-Based Reasoning in Science and Technology. Abduction, Logic, and Computational Discovery* (Vol. Studies in Computational Intelligence (Vol. 314), pp. 519-532). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-15223-8_29

Heeffer, A. (2010b). From the second unknown to the symbolic equation. In A. Heeffer, & M. Van Dyck (Eds.), *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* (Vol. 26) (pp. 57-101). College Publications.

Heeffer, A. (2014). Epistemic justification and operational symbolism. *Foundations of Science, 19*(1), 89-113. https://doi.org/10.1007/s10699-012-9311-x

Hérigone, P. (1634). *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, Per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles. 5 vols*. For the author and Henry Le Gras.

Høyrup, J. (1986). Al-Khwarizmi, Ibn-Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra. *Erdem, 2*(Ankara), 445–484.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old babylonian algebra and its kin*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3685-4

Høyrup, J. (2010). Hesitating progress—the slow development toward algebraic symbolization in abbacus - and related manuscripts, c. 1300 to c. 1550. In A. Heeffer, & M. Van Dyck , *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics, Studies in Logic 26* (pp. 3-56). College Publications.

Juntunen, M. & Lehenkari, M. (2021) A narrative literature review process for an academic business research thesis, *Studies in Higher Education, 46*(2), 330-342, https://doi.org/10.1080/03075079.2019.1630813

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-19). Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Katz, V., & Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9023-7

Katz, V., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9781614443001

Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics, 91*, 149–163. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9666-3

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Macmillan Publishing Company.

Kirshner, D. (1989). The Visual Syntax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287. https://doi.org/10.2307/749516

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83-98). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_5

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257. https://doi.org/10.2307/30034809

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra*. Dover Publications, Inc.

López-Acosta, L. A. (2023). *Análisis algebraico de Viète y Descartes: la ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico* [Tesis doctoral, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN]. Repositorio Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4291

López-Acosta, L. A., Aparicio, E. & Sosa, L. (2024). Procedimientos de estudiantes egresados de bachillerato al resolver un problema de geometría analítica. *Educación Matemática*. *36*(1), 92-120. https://doi.org/10.24844/EM3601.04

López-Acosta, L. & Montiel-Espinosa, G. (2021). El encuentro entre el álgebra y la geométrica en Viète y Descartes y el surgimiento de la ecuación paramétrica. En A. Rosas (Ed.) *Avances en Matemática Educativa*. *Actividad docente*, (pp. 29-49). Editorial Lectorum. ISBN: 10 978-607-457-677-1

López-Acosta, L. A., & Montiel-Espinosa, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17*(3), pp. 539-559 https://doi.org/10.14483/23464712.17062

López-Acosta, L. & Romero, F. (2023). Empleando elementos de la historia de las matemáticas en la formación de docentes de matemática. En Y. Morales-López & M. Picado.(Eds.). *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 244-256). https://doi.org/10.5281/zenodo.11248261

Mahoney, M. (1980). The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century. In S. Gaukroger (Ed.), *Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics* (pp. 141–156). Harvester Press.

Malissani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Una visión histórica. *Revista IRICE, 13*, 1-25.

Massa Steve, M. (2008). Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone. *Historia Mathematica, 35*, 285-301. https://doi.org/10.1016/j.hm.2008.05.003

Massa Steve, M. (2012). The role of symbolic language on the transformation of mathematics. *Philosophica, 87*, 153-193.

Nesselmann, G. (1842). *Versucheiner Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. G. Reimer.

Oaks, J. (2009). Polynomials and equations in Arabic algebra. Archive for *History of Exact Sciences, 63*, 169-203. https://doi.org/10.1007/s00407-008-0037-7

Oaks, J. (2012). Algebraic symbolism in medieval Arabic algebra. *Philosophica, 87*, 27-83.

Oaks, J. (2018). Francois Viète's revolution in algebra. Archive for History of *Exact Sciences, 72*, 245-302. https://doi.org/10.1007/s00407-018-0208-0

Pacioli, L. (1494) *Summa de arithmetica geometria proportioni: et proportionalita. Continetia de tutta lopera*, Paganino de Paganini.

Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2012). Integrating History of Mathematics into Curriculum: What are the Chances and Constraints? *International Electronic Journal of Mathematics Education, 7*(1), 3-20. https://doi.org/10.29333/iejme/266

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo veintiuno editores.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge & Kegan Paul.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. In *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). Grupo Editorial Iberoamérica. Retrieved Febrero 10, 2019, from https://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_8

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: didactic inquiries on the methods and problems of medieval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 28-38.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 39-54). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_3

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel, & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol. 6, pp. 143-170). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_5

Radford, L. (2002). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_2

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American*

Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning and sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145–164. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9024-6

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In N. Bednardz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 137-146). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_9

Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. The Oriental Translation Fund.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. In M. Bosch, J. Gascón, M. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, . . . M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD. CRM Documents. Vol. 10* (pp. 743-765). Centre de Recerca Matemàtica.

Sasaki, C. (2003). *Descartes's Mathematical Thought*. Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1225-5

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning—epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 79-104. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9301-x

Sfard, A. (1995). The development of algebra Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Siebert, D. (2019). Conducting a Timely Literature Search. In K. Leatham (Ed.), *Designing, conducting, and publishing quality research in mathematics education* (pp. 17-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5_2

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación. *Números, 77*, 5-34.

Stedall, J. (2000). Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra. *Archive for History of Exact Sciences, 54*(6), 455-497. https://doi.org/10.1007/s004070050041

Stedall, J. (2003). *The Greate Invention of Algebra. Thomas Harriot's Treatise on equations*. Oxford University Press.

Stedall, J. (2007). Symbolism, combinations, and visual imagery in the mathematics of Thomas Harriot. *Historia Mathematica, 34*, 380-401. https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.05.001

Stedall, J. (2008). Notes made by Thomas Harriot on the treatises of François Viète. *Archive for History of Exact Sciences, 62*(2), 179-200. https://doi.org/10.1007/s00407-007-0019-1

Stedall, J. (2011). *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra. Heritage of European Mathematics*. European Mathematical Society.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra*. Petreius.

Tzanakis, C., Arcavi, A., Correia de Sa, C., Isoda, M., Lit, C.-K., & Niss, M. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol. 6, pp. 201-240). Kluwer Academic Publisher. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

Viète, F. (1615). *De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*. Ex Typographia Ioannes Laquehay.

Viète, F. (1646). *Opera mathematica*. Leiden.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
35-62
Recibido: 09/01/2024
Aprobado: 08/04/2024

Artículos de investigación

COMPRENSIONES ACERCA DE LOS ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS: UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIANTES PANAMEÑOS

UNDERSTANDINGS ABOUT THE ERRORS THAT STUDENTS MAKE WHEN SOLVING QUADRATIC EQUATIONS: AN EXPERIENCE OF PANAMANIAN STUDENTS

Mitzela Barrera González[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-0238-0712

RESUMEN

En la educación media es común observar deficiencias en diferentes áreas de la matemática; no solo en contenidos correspondientes al nivel que se estudia, sino también en contenidos relacionados con conocimientos previos que se enseñan en la educación básica general. Este artículo presenta parte de los resultados obtenidos en una investigación aplicada a 30 estudiantes de 10° de media bachillerato del sistema educativo público panameño con el objetivo de analizar los errores que presentan al resolver ecuaciones cuadráticas utilizando los tres métodos contemplados en el currículo: factorización, completar cuadrados y la fórmula general, a la luz del análisis de errores de Cury. Para la recogida de los datos se aplicó una prueba escrita y se realizaron entrevistas a seis estudiantes, para la comprensión de las resoluciones de los ejercicios de la prueba aplicada.

Los resultados principales mostraron que los estudiantes presentan dificultad en la aplicación de los diferentes métodos debido a la poca destreza en el manejo de contenidos correspondientes tanto al nivel que cursan, 10°, como a contenidos previos pertenecientes a niveles inferiores. Estos últimos fueron los más predominantes; entre ellos, la poca destreza en el uso del lenguaje algebraico. También se observó que prefieren utilizar la fórmula general en lugar de los otros dos métodos, pero presentan deficiencias en el uso de fórmulas. Se concluye que los errores presentados por los estudiantes de 10°al resolver ecuaciones cuadráticas, si bien es cierto indican dificultad en los algoritmos de los métodos estudiados para la resolución de estas, en su mayoría revelan deficiencias relacionadas con contenidos que se enseñan en la educación básica general es decir en conocimientos previos.

Palabras clave: análisis de errores, educación secundaria, álgebra, investigación educativa, Panamá.

1 Departamento de Matemática del Instituto, Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, Ministerio de Educación, Coclé, Panamá. Correo: mitzela1831@gmail.com

ABSTRACT

In secondary education it is common to observe deficiencies in different areas of mathematics, not only in content corresponding to the level being studied but also in content related to prior knowledge taught in general basic education. This article presents part of the results obtained in research applied to 30 10th grade high school students of the Panamanian public educational system with the objective of analyzing the errors they present when solving quadratic equations using the three methods contemplated in the curriculum: factorization, completing squares and the general formula, in light of Cury's error analysis.

To collect the data, a written test was applied, and interviews were conducted with six students, to understand the resolutions of the exercises of the applied test.

The main results showed that students have difficulty in applying the different methods due to poor skill in handling content corresponding to both the level they are studying, 10th, and previous content belonging to lower levels, the latter being the most predominant, mentioning, among them, the little skill in the use of algebraic language. It was also observed that they prefer to use the general formula instead of the other two methods, but they have deficiencies in the use of formulas. It is concluded that the errors presented by 10th grade students, although it is true that they indicate difficulty in the algorithms of the methods studied, the vast majority reveal deficiencies related to contents that are taught in general basic education, that is, in prior knowledge.

Keywords: error analysis, secondary education, algebra, educational research, Panama.

1. INTRODUCCIÓN

Las deficiencias que presentan los estudiantes de 10° (jóvenes entre 15 y 16 años) han sido motivo de preocupación para el departamento de matemática del IPTIA[2] a lo largo de los años, ya que ocasionan un alto porcentaje de fracaso en este nivel, sobre todo en el área de Algebra. Entre los contenidos de 10° que presentan mayor dificultad está la resolución de ecuaciones cuadráticas por los diferentes métodos, pues se les dificulta encontrar sus soluciones e, incluso, saber interpretarlas. Por este motivo surgió el interés en investigar sobre este tema. Además, a lo largo de años de experiencia en la educación media, se ha podido constatar que la resolución de ecuaciones cuadráticas constituye un inconveniente para muchos estudiantes de 11° y 12° al tener que aplicarla en diferentes contenidos y contextos, lo cual ocasiona deficiencias y un bajo rendimiento en estos niveles.

Es importante señalar que esta investigación se desarrolló luego de dos años de educación a distancia por causa de la pandemia Covid-19, por la cual la educación panameña se vio en la necesidad de ofrecer diferentes herramientas que permitieran a los estudiantes continuar con sus estudios adaptándose a sus posibilidades; entre ellas, plataformas digitales, redes sociales y material impreso, como módulos o guías didácticas.

El sistema educativo panameño contempla en el Sub-Sistema Regular, la Educación Pre Escolar, la Educación Básica General (primer nivel, de 1° a 9°), la Educación Media (segundo nivel, de 10° a 12°) y la Educación Superior (tercer nivel, universitario); de las cuales, al ingresar a la Educación Media, el estudiante opta por estudios de Bachillerato o de Segundo Ciclo Industrial. Por lo que es fundamental la secuencia y correlación de contenidos entre un nivel y el otro, para que se dé el principio de continuidad. Por tal razón, el estudiante debe adquirir en Básica General, específicamente en Pre-Media (de 7° a 9°), las habilidades y destrezas matemáticas necesarias que le permitan desenvolverse adecuadamente en su educación Media. Sin embargo, es común observar, que los estudiantes presentan deficiencias en el nivel de Media,

2 El Instituto Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, (IPTIA) es un colegio público de formación técnica que ofrece diez bachilleratos y dos segundos ciclo industrial; ubicado en la provincia de Coclé, distrito de Aguadulce, en una zona urbana y céntrica del país (Panamá) con una población aproximada de 754 estudiantes procedentes de los diferentes corregimientos, incluso de otros distritos, que ingresan en busca de una educación académica técnica

las cuales tienen su origen en la aplicación de conceptos o procedimientos de contenidos que se enseñan durante la etapa de educación Pre-Media.

Cuando el estudiante ingresa a 10° Bachillerato, en el área de Algebra, el currículo contempla “Potenciación con Expresiones Algebraicas”, “Radicación con Expresiones Algebraicas” y “Las ecuaciones Cuadráticas” (Meduca, 2014, pp. 32-34).

Para el contenido de ecuaciones cuadráticas, el objetivo de aprendizaje establece que el estudiante debe ser capaz de aplicar distintos métodos de solución como estrategia para determinar las raíces de ecuaciones (Ministerio de Educación [Meduca], 2014, p. 32). También establece que, para obtener sus raíces, deben enseñarse tres métodos de solución, factorización, completación de cuadrados y fórmula general. Cabe destacar que el método gráfico no es considerado en el currículum, aun cuando el avance tecnológico permite trabajar con este de manera más dinámica e interactiva, y permite a los estudiantes interpretar el significado de las soluciones de las ecuaciones de manera visual. El logro del objetivo del currículum es de mucha importancia, ya que el estudiante debe aplicarlo en los siguientes niveles de estudio, 11° y 12°, en áreas tales como Geometría Analítica, Algebra y Cálculo. Aunado a esto, el estudio de las ecuaciones cuadráticas es necesario para solucionar situaciones en diferentes ramas del quehacer humano, como Física, Ingeniería, Mecánica, Arquitectura, entre otros, para lo que se requiere que el estudiante, además de resolver ecuaciones cuadráticas, comprenda el significado de sus soluciones.

Resulta interesante observar que los errores que cometen los estudiantes cuando están aprendiendo los algoritmos de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas en muchas ocasiones son comunes y están relacionados con conocimientos previos, aun cuando los estudiantes que ingresan al 10° proceden de diferentes instituciones educativas; pues pertenecen a distintas comunidades y llegan a este colegio en busca de una educación técnica industrial una vez que culminan su educación básica general. Esta situación generó las siguientes interrogantes: ¿cuáles son los errores que presentan los estudiantes? ¿Qué está dando origen a estos errores? ¿En dónde se presentan mayormente los errores: en contenidos previos o en los contenidos del nivel que cursan? ¿Por qué los estudiantes de décimo grado presentan errores comunes, si proceden de distintos centros educativos? El estudio pretende dar respuesta a la primera y tercera pregunta, y deja abierta la posibilidad de que este proporcione los insumos para futuras investigaciones que puedan responder el resto de las interrogantes.

Conociendo la importancia de las ecuaciones cuadráticas para la educación media y para la resolución de situaciones cotidianas, las cuales implican además de entender y plantear el problema, conocer y saber aplicar los diferentes métodos para su solución, surge el interés de documentar los errores, analizarlos y categorizarlos. Esto abrirá las puertas para futuras investigaciones sobre las causas de los errores aquí presentados, que permitan elaborar propuestas didácticas para la enseñanza a nivel de Pre-Media y Media.

Por lo antes expuesto, este estudio parte de la consideración de que el error es un aliado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que indagar y reflexionar sobre los errores que cometen los estudiantes proporciona una rica información sobre cómo se construye el conocimiento matemático. Asimismo, constituye una herramienta valiosa para proponer mejoras a la hora de realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el objetivo de mejorar los resultados (Del Puerto et al., 2004). Respecto a esto Torre (2004) afirma que “la pedagogía del error, por su parte, valorara [sic] lo que ya se tiene conseguido y analizara [sic], a través del error, lo que falta mejorar” (p. 7).

Esta situación lleva a la pregunta que es el punto de partida de esta investigación: ¿qué errores presentan los estudiantes de 10° bachiller del Instituto Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, al resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando los diferentes métodos de resolución?

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Mientras aprenden matemática, los estudiantes presentan errores que evidencian que los objetivos propuestos no se han logrado; sin embargo, más allá de eso, constituyen una información valiosa para el docente, pues le permitirá tomar decisiones para la mejora del proceso educativo. Al respecto, Abrate et al. (2006) destacan la importancia de que los profesores de matemáticas identifiquen los errores habituales de los estudiantes con el objetivo de implementar medidas remediales basadas en un enfoque constructivista de enseñanza.

De forma tradicional, el error se ha visto como algo malo en las aulas; motivo por el cual los estudiantes temen equivocarse y, en muchas ocasiones, prefieren dejar los problemas sin resolver. Esto priva al proceso de información enriquecedora. Para Del Puerto et al. (2004), los procesos mentales no pueden observarse, por lo que solo se pueden inferir a través de manifestaciones indirectas. Los errores recurrentes, así como los patrones comunes que los caracterizan, son algunos de los indicadores que permiten deducir sobre estos procesos mentales y la forma en que los conocimientos se estructuran.

El error no representa ausencia de conocimiento, más bien es un indicativo de un conocimiento mal aprendido, que al ser expresado ofrece la oportunidad de ser corregido; por ello constituye un insumo valioso para la mejora del proceso educativo. En palabras de Ruano et al. (2003, como se citó en López González y López Ponce, 2017): "los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (p. 655).

El error es un elemento tan valioso en el proceso de enseñanza-aprendizaje que además de ser una metodología de investigación también puede ser utilizado como metodología de enseñanza. Para Cury (2019), las producciones de los estudiantes constituyen un elemento valioso para la labor docente, y su análisis no se debe considerar como un hecho independiente de esta, más bien debería ser integrado como un componente esencial en los planes pedagógicos no solo de las instituciones educativas, sino también en los planes de clase de cada asignatura tomando en consideración sus objetivos de enseñanza.

Con respecto al error como metodología de investigación, Cury (2019) afirma que corregir una prueba no constituye una investigación si no se tiene establecido en primer lugar, un objetivo que dé respuesta a lo que se desea investigar. Además, considera que la actividad de evaluación diaria que realizan los docentes –en donde señalan y clasifican los errores y aciertos en las producciones de los estudiantes, solo para contabilizarlos– es una investigación muy limitada si no se tratan de entender las formas en que los estudiantes presentan sus respuestas:

> Como metodología de investigación, podemos evaluar el contenido de las soluciones de los estudiantes, pasando por las etapas de pre-análisis, exploración del material y tratamiento de los resultados, obteniendo información que nos permita avanzar en el conocimiento de las causas de los errores. (Cury et al., 2008, p.1)

Por lo que en una primera fase se requiere de una lectura rápida que permita separar y codificar las respuestas según el objetivo de la investigación, para luego profundizar en su análisis, llegando en este paso a la unitarización y categorización de los errores.

De acuerdo con Cury et al. (2008), el proceso de unitarización y categorización implica que el investigador comprenda e interprete los datos para establecer criterios que permitan crear las categorías, con el propósito de ofrecer una representación simplificada de los datos obtenidos, mediante su condensación. Las categorías se pueden presentar en forma de tablas que muestren frecuencias y porcentajes, o a través de un resumen de cada una de ellas. Además, se debe incluir ejemplos de los errores observados.

Para efectos de esta investigación el escenario que se tiene es el de un grupo de estudiantes de 10° de educación media, en donde se observa que estos al aplicar conocimientos previos en la utilización de los diferentes algoritmos de los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas, no solo, no logran el objetivo al presentar errores, sino que la mayoría de estos son comunes, aun cuando los estudiantes proceden de distintas instituciones educativas. En este sentido, Del Puerto et al. (2004) afirman: Hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: a nivel individual, ya que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares y a nivel colectivo, ya que distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje (p. 4).

Esta es una situación conocida por los docentes y no es exclusiva del ámbito educativo panameño, pues muchos estudios hacen referencia a la dificultad que presentan los estudiantes para adquirir nuevos conocimientos debido a falencias en conocimientos previos. Tettay-Mejía et al. (2019) en su estudio realizado en Barranquilla, Colombia, afirman que los errores relacionados con conocimientos aritméticos, presentados por los estudiantes, revelan deficiencias originadas en cursos anteriores. Esto sugiere que los estudiantes pueden haber recibido una formación en la que no se analizó los errores que estos presentaron o que ignoró el conocimiento no adquirido; lo que trae como resultado, que al enfrentarse a nuevos contenidos o al intentar abordar nuevas tareas matemáticas, como en el caso específico de la resolución de ecuaciones de primer grado, los estudiantes presentan deficiencias que contribuyen a la aparición de nuevos errores y dificultan el aprendizaje de nuevos conocimientos.

Candray (2021), en su estudio realizado en El Salvador, también hace referencia a este tema. Dentro de las categorías identificadas por el aporte de los docentes con relación a las operaciones con fracciones, se destaca ausencia de conocimientos tanto teóricos como prácticos del tema, frecuentemente denominadas como conocimientos previos.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

El desarrollo de esta investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo, de tipo descriptivo. Según Quecedo Lecanda y Castaño Garrido (2003), la metodología cualitativa se caracteriza por generar información descriptiva, que incluye expresiones verbales o escritas de las personas, así como su comportamiento observable. Para recolectar los datos se aplicó una prueba escrita y se realizaron seis entrevistas. Este estudio pretende categorizar los errores encontrados en la resolución de ecuaciones cuadráticas en estudiantes de 10° del Bachiller en Electrónica y Electricidad, y producir comprensiones a través de entrevistas realizadas a los estudiantes acerca de sus procedimientos en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Estas comprensiones se produjeron con el propósito de servir como base para futuras investigaciones e intervenciones pedagógicas que ayuden a identificar y solucionar problemas en el ámbito educativo, lo que la convierte en una investigación aplicada. En palabras de Espinoza y Toscano (2015): “las investigaciones según su finalidad son aplicadas si solucionan problemas prácticos en el ámbito educativo” (p. 32).

El estudio se realizó con 30 estudiantes de 10°, quienes en 8° y 9° recibieron clases a distancia de la siguiente forma: el 70% estudió utilizando una plataforma digital (Classroom o MS Team), apoyados por la red social WhatsApp; el 23.3 %, utilizó solo la red social WhatsApp; 3.3% estudió con módulo impreso, y 3.3% utilizó solo la plataforma MS Teams. De los 30 estudiantes participantes del estudio, el 57% realizó sus estudios de Pre-Media (7°, 8°, 9°) en siete centros educativos distintos, mientras que el 43% lo hizo en el IPTIA.

La prueba escrita aplicada consistió en cinco ejercicios de resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos de factorización, completar cuadrados y fórmula general. El instrumento fue estructurado en tres partes; en la primera, se propusieron tres ejercicios de opciones múltiples que indican el método a utilizar, en donde se les solicitó justificar sus respuestas con los procedimientos; en la segunda, se propusieron dos ejercicios sin opciones de respuestas, en donde los estudiantes eligieron el método a utilizar y justificaron su elección; finalmente, en la tercera parte se les solicitó indicar los ejercicios más fáciles y difíciles para ellos. A los estudiantes no se les permitió el uso de calculadora, y se les facilitó la fórmula general. La prueba se aplicó en dos periodos de clase, que corresponden a 76 minutos, con la presencia de la investigadora y la docente de la asignatura como observadora.

Para la selección de los ejercicios se utilizó la Tesis de maestría de Orlando Martínez, (Martínez, 2014), investigación que fue aplicada en un colegio de Panamá. También, se recurrió al Temario para la prueba de conocimientos generales de ingreso a la universidad de Panamá y, finalmente, se seleccionó un ejercicio del libro Algebra de Baldor, texto utilizado como referencia por los docentes del centro educativo en estudio.

Una semana después de la aplicación de la prueba, se realizó una entrevista a seis estudiantes del grupo de estudio, la cual fue grabada con la autorización por escrito de los estudiantes. Estos fueron seleccionados a partir de los siguientes criterios: resultados más altos y más bajos, así como hallazgos considerados significativos por la investigadora en procedimientos tales como escritura de mensaje en la prueba; ejercicios en blanco en la segunda parte, aun cuando demostraron conocimiento de un método en la primera parte; no resolución del ejercicio 1 por factorización, aun cuando se demostró dominio del método en otro ejercicio; elección de opciones sin procedimientos en la primera parte, pero con intento de resolución en la segunda parte de desarrollo. De estos seis estudiantes, el 33.3% realizó sus estudios de Pre-Media en el IPTIA, el 50% en colegios de diferentes comunidades de la provincia y el 16.7% proviene de colegios de otra provincia.

La entrevista se realizó de forma individual en el aula de PROPRAT (Proyecto de perfeccionamiento docente y reforzamiento académico apoyado en el uso de las Tics), con la única presencia de la investigadora. La misma fue grabada con apoyo de un dispositivo móvil, y luego almacenada en una carpeta temporal creada para tal fin. A los estudiantes se les mostró la prueba realizada, y luego se les realizaron las preguntas. El tiempo de las entrevistas osciló aproximadamente entre 2 y 5 minutos cada una.

El análisis de los resultados se hizo siguiendo la metodología propuesta por Cury (2008), apoyada por la estadística de los resultados cuantitativos que dan respuesta a la pregunta de investigación y abren las puertas a otros estudios relacionados con los hallazgos presentados.

Para el proceso cualitativo, se procedió a la codificación de las pruebas y al análisis de los errores para cada ejercicio; fue necesario digitalizar, copiar y recortar las pruebas, lo que permitió agrupar y realizar una observación más detallada y minuciosa de cada ejercicio. En palabras de Cury (2019):

> Para tratar de interpretar los resultados de la investigación, obtenidos a través de este análisis detallado de errores, primero es necesario preguntarse: ¿qué querían decir los estudiantes? Es decir, ¿qué pueden revelar sus producciones escritas, no sólo sobre lo que no saben, sino también sobre lo que sí saben? (p. 83)

Para el análisis y categorización de los errores, se inició con una lectura discriminativa de las respuestas obtenidas en los instrumentos, que condujo a la obtención del corpus de la investigación. Se separaron las respuestas correctas con procedimientos, las incorrectas con procedimientos y las que no tuvieron procedimientos, para facilitar su interpretación y establecer los criterios que dieron origen a las clases o categorías. Se describieron sus características y se presentaron ejemplos para cada ejercicio. Las clases van desde la que contempla las respuestas totalmente correctas hasta la clase en donde los procedimientos no fueron comprendidos, o los errores no presentaron patrones.

4. RESULTADOS

En este artículo se presenta un extracto de los resultados obtenidos en el estudio, limitándolo a la categorización de los errores presentados en los tres ejercicios de opción múltiple de la primera parte del instrumento, y apoyados por datos obtenidos en el estudio cuantitativo y las entrevistas.

4.1. ANÁLISIS DEL EJERCICIO 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por factorización e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6$; $y = 1$

b) $y = 6$; $y = -1$

c) $y = 3$; $y = -2$

d) $y = -3$; $y = 2$

Los datos presentados en la Tabla 1 muestran que el 63.3 %; es decir, aproximadamente 6 de cada 10 estudiantes no resolvieron este ejercicio. Mientras que el 23.3% presentaron procedimientos incorrectos, solo el 10% resolvió correctamente la ecuación cuadrática por el método indicado. Esta situación queda evidenciada en el hecho de que solo el 17.9 % de los estudiantes consideraron este ejercicio como el más fácil (ver Anexo 4). Otro resultado con respecto a la factorización, lo constituye el hecho de que un estudiante que eligió resolver el ejercicio de la tercera parte utilizando este método, justificó su elección haciendo el siguiente comentario: “aunque es el más fácil, este método en ocasiones no funciona muy bien” (ver Anexo 2). Finalmente, de una de las entrevistas también se rescata el hecho de que la dificultad se pudo dar porque la ecuación estaba expresada en términos de y en lugar de x. (Ver Anexo 3)

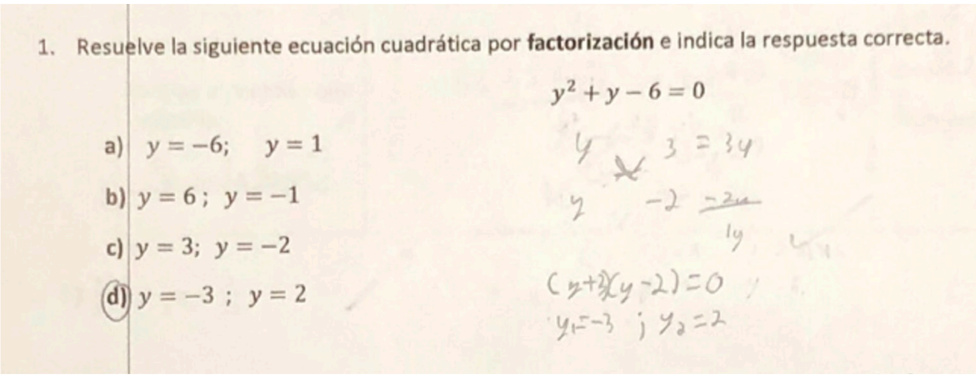
Tabla 1 - Resultados para el ejercicio 1 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

Resolver la ecuación $y^2 + y - 6 = 0$ por el método de factorización.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a $y = -6$; $y = 1$	1	3.3%
Opción b $y = 6$; $y = -1$	3	10.0%
Opción c $y = 3$; $y = -2$	2	6.7%
Opción d (correcta) $y = -3$; $y = 2$	3	10.0%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	1	3.3%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	1	3.3%
En blanco	19	63.4%
Totales	30	100.0%

Para este ejercicio se analizaron 11 respuestas, puesto que 19 lo dejaron en blanco, y se obtuvieron 4 clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas con sus respectivos procedimientos. En este caso se obtuvieron tres soluciones correctas. Los tres estudiantes utilizaron el método del aspa simple para factorizar la ecuación. Se obtuvo también una cuarta respuesta correcta, pero que utilizó un método diferente al solicitado. En la Figura 1 se muestra una de las soluciones.

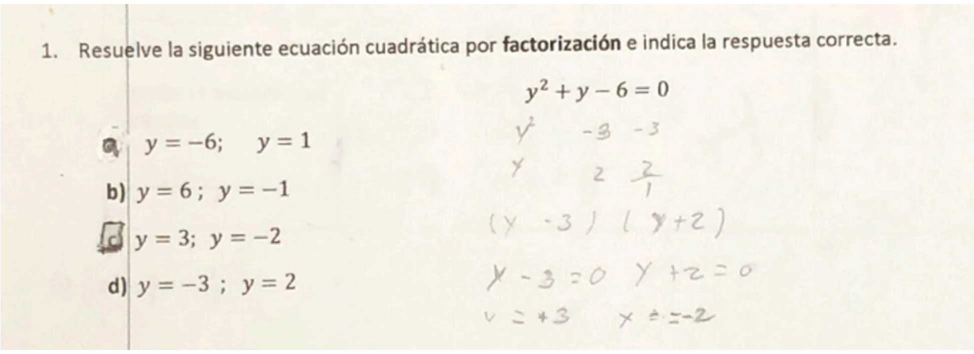
Figura 1 - Respuesta del estudiante 15 al ejercicio 1.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase B: corresponde a las dos respuestas en que los estudiantes utilizaron el algoritmo del método del aspa simple correctamente, encontraron los factores primos, pero equivocaron sus signos. Esto indica falta de dominio de factorización o en la regla de los signos para la suma y resta con números enteros, contenidos correspondientes a conocimientos previos (ver Figura 2).

Figura 2 - Respuesta del estudiante 25 al ejercicio 1.



1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6$; $y = 1$

b) $y = 6$; $y = -1$

c) $y = 3$; $y = -2$

d) $y = -3$; $y = 2$

y^2 -3 -3

y 2 $\frac{2}{1}$

$(y-3)(y+2)$

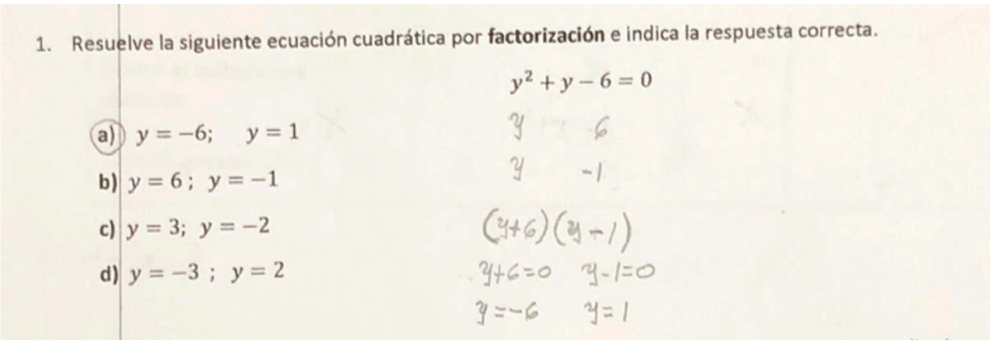
$y-3=0$ $y+2=0$

$y=+3$ $y=-2$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase C: corresponde a dos respuestas en las que los estudiantes no encontraron los factores primos correctos. Esta clase, a diferencia de la anterior, denota desconocimiento del proceso de factorización. En la Figura 3 se observa una de las respuestas.

Figura 3 - Respuesta del estudiante 2 al ejercicio 1.



1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6$; $y = 1$

b) $y = 6$; $y = -1$

c) $y = 3$; $y = -2$

d) $y = -3$; $y = 2$

y 6

y -1

$(y+6)(y-1)$

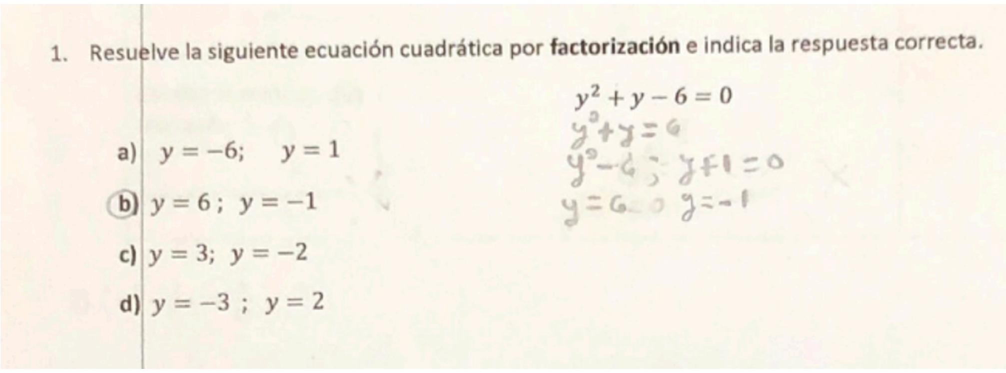
$y+6=0$ $y-1=0$

$y=-6$ $y=1$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase D: corresponde a las respuestas de tres estudiantes, en las cuales no se pudieron comprender los procedimientos utilizados. Para ilustrar una de estas soluciones se presenta la Figura 4.

Figura 4 - Respuesta del estudiante 19 al ejercicio 1.


1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6; \quad y = 1$

b) $y = 6; \quad y = -1$

c) $y = 3; \quad y = -2$

d) $y = -3; \quad y = 2$

$y^2 + y = 6$

$y^2 - 6; \; y + 1 = 0$

$y = 6 \text{ o } y = -1$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Finalizado el análisis del ejercicio 1, se pudo observar que los errores principales de utilizar el método de factorización están asociados a los conocimientos previos específicamente a su algoritmo, tema contemplado en 9° del currículo panameño. Además, generó confusión el hecho de expresar la ecuación cuadrática en términos de y en lugar de x.

4.2 ANÁLISIS DEL EJERCICIO 2

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de completar cuadrados e indica la respuesta correcta

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

a) $x = -3$; $x = -9$

b) $x = 3$; $x = -15$

c) $x = 15$; $x = 3$

c) $x = 9$; $x = 3$

Los resultados de la Tabla 2 muestran que solo el 3.3 % utilizó correctamente el método de completar cuadrado para resolver la ecuación cuadrática, mientras que el 43.3 % presentó errores en los procedimientos. Esto los llevó a elegir la opción equivocada o a no elegir ninguna opción. Se puede observar también que un alto porcentaje (36.7%) dejó el ejercicio sin resolver, lo que se explica en el hecho de que los estudiantes consideran este como uno de los ejercicios más difíciles, por lo que ocupa la segunda posición (ver Anexo 6). Solo un estudiante manifestó que este ejercicio lo había considerado el más fácil (ver Anexo 2).

Tabla 2 - Resultados para el ejercicio 2 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

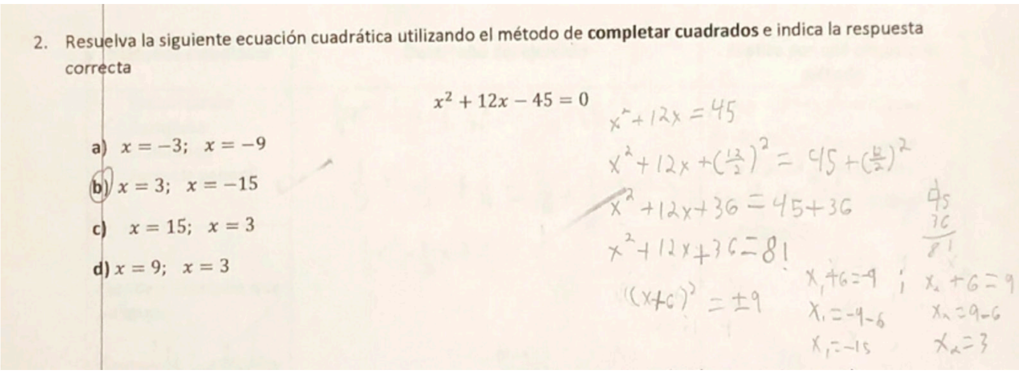
Resolver la ecuación $x^2 + 12x$ - 4 5= 0 por el método de completar cuadrados.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a $x = -3$; $x = -9$	4	13.3%
Opción b (correcta) $x = 3$; $x = -15$	1	3.3%
Opción c $x = 15$; $x = 3$	2	6.7%
Opción d $x = 9$; $x = 3$	1	3.3%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	5	16.7%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	6	20.0%
En blanco	11	36.7%
Totales	30	100.0%

Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de los errores presentados en este ejercicio, se analizaron las 19 respuestas con procedimientos, de las cuales se obtuvieron siete clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas con sus respectivos procedimientos. En este caso, una respuesta en la cual el estudiante utilizó correctamente la completación de cuadrados y eligió la opción correcta. En la Figura 5 se puede observar esta solución.

Figura 5 - Respuesta del estudiante 15 al ejercicio 2.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

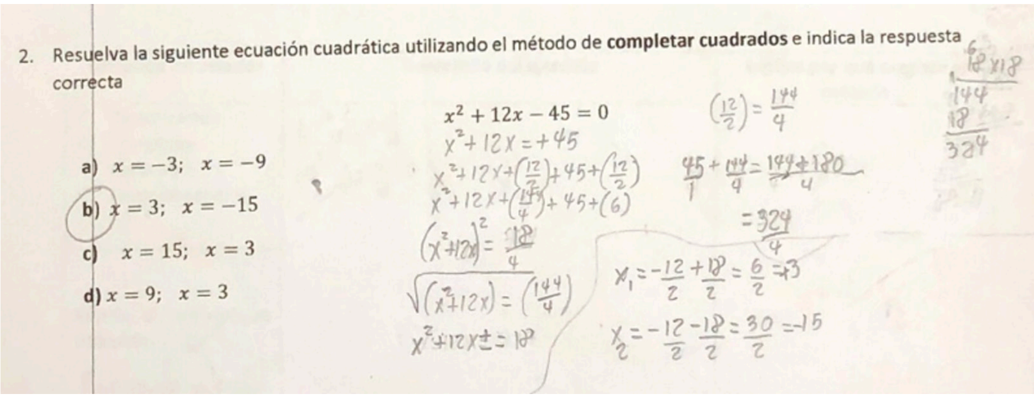
Clase B: corresponde a dos soluciones en que los estudiantes presentaron algunas inconsistencias en el algoritmo del método, específicamente poca comprensión de este y algunos errores en operaciones algebraicas. Además, presentaron errores del lenguaje algebraico, como omisión de signos y símbolos, que dificultaron el proceso, pero igualmente se aproximaron a la respuesta correcta o llegaron a ella, lo cual indica un manejo mecánico del procedimiento. A continuación, se describe una de esas respuestas:

Este estudiante omitió el signo igual (=), lo que hace difícil aplicar las propiedades correctamente; además, no comprende el algoritmo de complementación del trinomio cuadrado perfecto ni balanceo de la ecuación. Esto se evidencia en que omitió la potencia 2 del término que completa el trinomio cuadrado perfecto en ambos lados de la ecuación, pero luego la desarrolló solo en el lado izquierdo, para posteriormente corregir su error realizando la suma correcta del lado derecho. De allí en adelante muestra gran confusión en el algoritmo y en operaciones algebraicas, tales como factorización del trinomio cuadrado perfecto y la radicación. Sin embargo, lo interesante de esta respuesta radica en que, finalmente, pese a la no comprensión del algoritmo, llegó a la respuesta correcta de forma mecánica: planteando y resolviendo las raíces, utilizando las siguientes fórmulas y omitiendo en gran parte el procedimiento que había realizado hasta ese momento.

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \text{y} \quad x = -\frac{b}{2} - \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Veamos su procedimiento en la Figura 6.

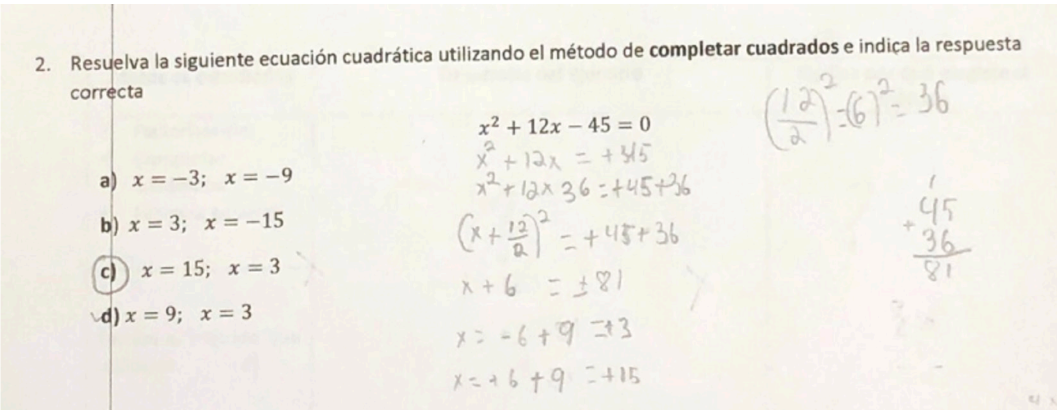
Figura 6 - Respuesta del estudiante 21 al ejercicio 2.



Fuente: prueba aplicada para recolección de datos.

Clase C: corresponde a una solución en la cual se observan nuevamente errores de lenguaje algebraico al omitir el signo más (+) al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto de lado izquierdo. A pesar de esto, demuestra dominio del algoritmo del método, pero se equivocó nuevamente en el procedimiento al despejar la ecuación lineal, pues cambió el signo del valor 6 al calcular la segunda raíz en lugar de cambiarlo al valor 9. (ver Figura 7).

Figura 7 - Respuesta del estudiante 4 al ejercicio 2.


2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

a) $x = -3;\quad x = -9$

b) $x = 3;\quad x = -15$

c) $x = 15;\quad x = 3$

d) $x = 9;\quad x = 3$

$x^2 + 12x - 45 = 0$

$x^2 + 12x = +45$

$x^2 + 12x\ 36 = +45 + 36$

$\left(x + \frac{12}{2}\right)^2 = +45 + 36$

$x + 6 = \pm 81$

$x = -6 + 9 = +3$

$x = +6 + 9 = +15$

$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = (6)^2 = 36$

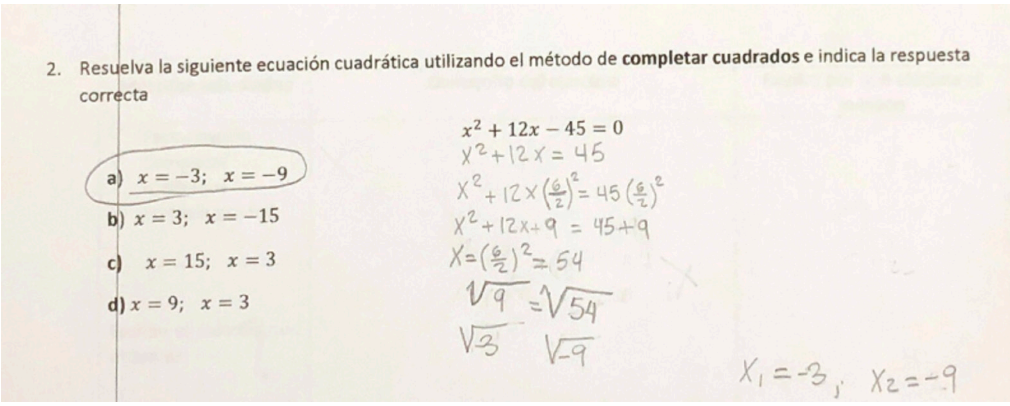
$45 + 36 = 81$

Fuente: prueba aplicada para recolección de datos.

Clase D: corresponde a una solución en la cual el estudiante completó el trinomio cuadrado perfecto correctamente y balanceó la ecuación, pero luego, en lugar de factorizar, presentó error algebraico de conocimientos previos al sumar términos no semejantes y dejar el procedimiento incompleto.

Clase E: corresponde a dos soluciones en las cuales los estudiantes equivocaron el algoritmo para completar el trinomio cuadrado perfecto, pues dividieron entre 2 el coeficiente de x dos veces para luego elevarlo al cuadrado. Adicionalmente, presentan errores en el proceso de factorización de trinomios cuadrados perfectos y errores aritméticos al extraer raíces cuadradas. Una de las soluciones se muestra en la Figura 8.

Figura 8 - Respuesta del estudiante 17 al ejercicio 2.


2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

a) $x = -3;\quad x = -9$

b) $x = 3;\quad x = -15$

c) $x = 15;\quad x = 3$

d) $x = 9;\quad x = 3$

$x^2 + 12x - 45 = 0$

$x^2 + 12x = 45$

$x^2 + 12x\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 45\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$x^2 + 12x + 9 = 45 + 9$

$x = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 54$

$\sqrt{9} = \sqrt{54}$

$\sqrt{3} \quad \sqrt{-9}$

$x_1 = -3;\quad x_2 = -9$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase F: corresponde a cuatro soluciones en las cuales los estudiantes equivocaron el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado de la división 12/2. A partir de allí, presentaron errores algebraicos, aritméticos y de sintaxis que les impidieron terminar el procedimiento. Entre ellos:

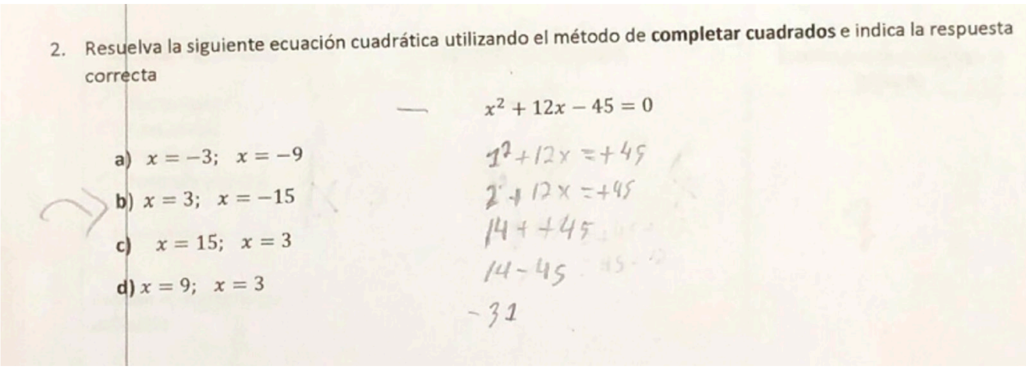
$x^2 + 12x - 45 = 0$ al despejar $x^2 + 12x = - 45$

$45 + (12/2) = 77$

$\sqrt{6} = 3$

Clase G: corresponde a ocho soluciones en las cuales no se entiende el procedimiento o utilizaron de forma incorrecta un método alternativo al solicitado. La Figura 9 presenta una de estas respuestas.

Figura 9 - Respuesta del estudiante 1 al ejercicio 2.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Como se puede observar en las diferentes categorías presentadas para este ejercicio, un gran número de estudiantes mostraron dificultad en el uso del método de completación de cuadrados por falta de comprensión del proceso. Aunado a esto, presentaron gran deficiencia en el uso del lenguaje algebraico, lo que condujo a errores en la sintaxis del algoritmo; fue muy común la omisión del signo de igual y el de la operación de suma. Además, las producciones evidencian poco manejo en las operaciones algebraicas tales como factorización, resolución de ecuaciones lineales, radicación, suma o resta de términos semejantes y suma de fracciones; contenidos que son enseñados en la educación Pre-Media.

4.3. ANÁLISIS DEL EJERCICIO 3

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando la formula general e indica la respuesta correcta

$$a^2 + 4a - 3 = 0$$

a) $a = -2 + \sqrt{7}$; $a = -2 - \sqrt{7}$

b) $a = -3$; $a = -1$

c) $a = 12$; $a = -16$

c) $a = 2 + \sqrt{14}$; $a = 2 - \sqrt{14}$

Formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este ejercicio fue considerado, por la mayoría de los estudiantes, como el más fácil (ver Anexo 4); se obtuvo que solo el 13.4% no lo resolvieron (ver Tabla 3), a diferencia de los ejercicios 1 y 2 (ver Tabla 1 y Tabla 2). Sin embargo, ningún estudiante resolvió correctamente el ejercicio, pues el 10% que llegó a la solución correcta utilizó otro método distinto al solicitado. En tanto que el 76.6 %; es decir, aproximadamente 7 estudiantes de cada 10 resolvieron incorrectamente o no completaron el procedimiento, lo que provocó que el 30% de los estudiantes no eligiera ninguna de las opciones dadas. Con este resultado se puede observar una preferencia de los estudiantes por el uso del método de la fórmula general, pues el 66.7 % lo eligió para resolver el ejercicio 4 (ver Anexo 1). Además, cuatro estudiantes de los seis entrevistados consideraron como ejercicio más fácil aquel en donde utilizaron el método de la fórmula general, y expresaron, también, que aun cuando lo prefieren, les causa dificultad su uso (ver Anexo 2).

Sin embargo, este no fue el mismo escenario para el ejercicio 5, que presentaba una ecuación cuadrática con coeficientes racionales no enteros, para el cual solo el 16.7 % eligió utilizar la fórmula general, sin obtener resultados correctos; mientras que el 70%, es decir, 7 de cada 10 estudiantes no eligieron ningún método de resolución y dejaron el ejercicio sin resolver (ver Anexo 1). Lo anterior muestra la dificultad que presentan los estudiantes al operar con coeficientes no enteros, y esta situación genera la pregunta: ¿están los docentes utilizando ecuaciones cuadráticas con coeficientes racionales no enteros cuando enseñan el método de la fórmula general?

Es importante señalar, también, que ningún estudiante aplicó el concepto de ecuaciones equivalentes para resolver el ejercicio 5, lo que denota deficiencia en este concepto. Se evidencia la necesidad de trabajar más con el conjunto de los números racionales; específicamente con los no enteros, pues los estudiantes revelan que el tener que trabajar con estos números les causa temor y mucha dificultad, lo que queda evidenciado al ser este ejercicio considerado por ellos como el más difícil (ver Anexo 4). Además, se rescatan las palabras de algunos de los entrevistados, con las que manifestaron la dificultad que representa para ellos trabajar con fracciones al utilizar la fórmula general, pues no saben qué hacer con ellas. Incluso, uno de ellos considera que "esta ecuación no podría resolverla por la formula general por tener fracciones como coeficientes" (ver Anexo 3).

Tabla 3 - Resultados para el ejercicio 3 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

Resolver la ecuación $a^2 + 4a - 3 = 0$ por el método de fórmula general.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a (correcta) $a = -2 + \sqrt{7}$; $a = -2 - \sqrt{7}$	0	0.0%
Opción b $a = -3$; $a = -1$	4	13.3%
Opción c $a = 12$; $a = -16$	6	20.0%
Opción d $a = 2 + \sqrt{14}$; $a = 2 - \sqrt{14}$	4	13.3%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	3	10.0%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	9	30.0%
En blanco	4	13.4%
Totales	30	100%

Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de este ejercicio se trabajó con un corpus de 26 respuestas, dado que solo 4 no presentaron procedimientos. Lo que resultó en cinco clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas sustentadas con el procedimiento del método indicado. Para este ejercicio solo hubo una solución con respuesta correcta, pero sin procedimiento para sustentarla, por lo que fue descartada.

Clase B: corresponde a las soluciones que presentan correctamente la sustitución en la fórmula y su manejo, pero presentan errores aritméticos en la operación de radicación. Se puede observar como una vez extrajeron la raíz cuadrada, volvieron a escribir el signo radical, lo que demuestra falta de comprensión de la operación. En esta clase tenemos seis soluciones. En la mayoría de los casos utilizaron las opciones dadas que tenían similitud con su procedimiento para indicar la opción de respuesta, aun cuando no habían llegado a la misma. Se ilustran algunos de los errores presentados:

- $\sqrt{28} = \sqrt{14}$ (4 soluciones)
- $\sqrt{28} = \sqrt{7}$ (1 solución)
- $\sqrt{28} = \sqrt{2}$ (1 solución)

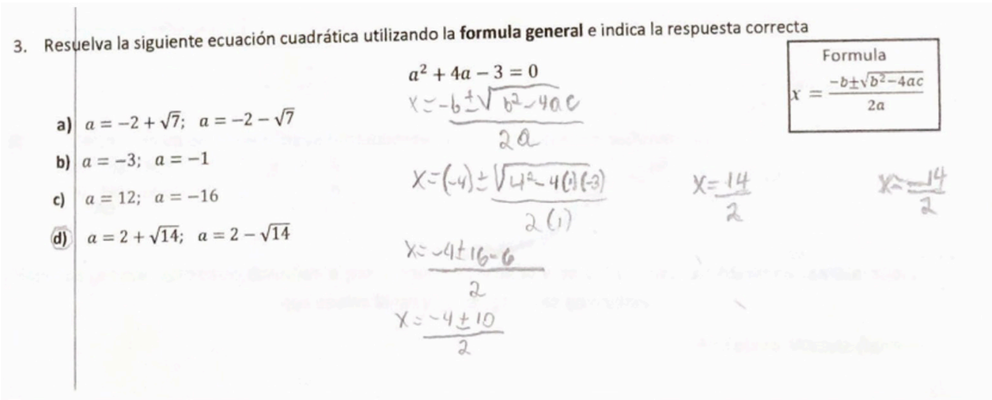
Clase C: corresponde a las siete soluciones en las que los estudiantes sustituyeron correctamente en la fórmula, pero presentaron errores al no manejar correctamente operaciones aritméticas como la potencia, multiplicación, suma y resta con números enteros dentro del radical y en pasos posteriores, lo cual conllevó a respuestas equivocadas o a no culminar el procedimiento. A continuación, algunos errores:

- $-4\,(1)\,(-3) = -12$ (regla de los signos para la multiplicación, 4 soluciones)

- $4^2 = 8$ (potenciación, 3 soluciones)
- 2 errores al multiplicar $4 \times 1 \times 3$ (tablas de multiplicación)
- $-4 + 2 = -6$, $-4 - 2 = -2$ (ley de los signos para la suma y resta, 3 soluciones)

Clase D: corresponde a cinco soluciones en las que los estudiantes presentaron dificultad en el manejo de la fórmula una vez sustituyeron correctamente los valores de a, b y c; omitieron el signo del radical, además de cometer errores de origen aritmético (ver Figura 10).

Figura 10 - Respuesta de estudiante 30 al ejercicio 3.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase E: corresponde a ocho soluciones en las cuales los estudiantes no supieron sustituir los coeficientes a, b y c correctamente en la fórmula, además de cometer errores aritméticos en el cálculo de raíz cuadrada y leyes de los signos para la suma y resta.

- Identificación incorrecta de a, b y c en la ecuación, prevaleciendo el hecho de que no identifican el coeficiente a = 1 y, en su lugar, utilizan el exponente 2. (4 soluciones)
- Sustitución errónea, dejar letra sin sustituir o sustituir una mal o equivocar los signos de los coeficientes. (4 soluciones)
- $\sqrt{28} = 14$, radicación (una solución)
- $1 - 14 = 13$, leyes de los signos para la resta (una solución)

Del análisis y categorización de los errores de este ejercicio de aplicación de la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática se puede observar que, aun cuando existe preferencia en su uso, los errores presentados en su mayoría corresponden a operaciones con números reales, entre ellas, la radicación. Los estudiantes parecen no comprender su significado, y no reconocen el signo radical como indicativo de una operación que, al resolverse, ya no debe escribirse. Además, resuelven la operación como la mitad del radicando; al igual que resuelven la potencia 2 como el doble de la base. También, es común observar las dificultades en la aplicación de las reglas de los signos para la suma, resta y multiplicación de números reales.

Otro hallazgo significativo lo vemos en los errores presentados en la multiplicación, los cuales reflejan deficiencias en las tablas de multiplicar. Los errores antes mencionados corresponden a contenidos enseñados en la educación Primaria y Pre-Media, por lo que son conocimientos previos del estudiante.

Con relación a la comprensión del método, los errores encontrados fueron menos que los referidos a las operaciones con números reales; en este sentido algunos estudiantes presentaron omisiones de algunos elementos de la fórmula, como el signo radical o los signos de las operaciones de suma y resta, lo que dificultó la correcta sintaxis del algoritmo. Además, en algunas ocasiones olvidaron sustituir alguna de las tres variables.

Es importante señalar que se observó gran dificultad en el reconocimiento del coeficiente cuando este es 1, para lo cual señalan que es 2 si se refiere al coeficiente a (término que contiene la variable al cuadrado) y en el caso de que sea b, escriben la variable de exponente 1 como el coeficiente.

5. CONCLUSIONES

Luego de realizar este estudio, se pueden documentar los errores que cometen los estudiantes de décimo grado del bachiller del Instituto Profesional, Técnico e Industrial de Aguadulce en la resolución de ecuaciones cuadráticas al utilizar los diferentes métodos contemplados en el currículo panameño. Como se pudo observar, los errores corresponden tanto a dificultades en conocimientos previos, de origen aritmético y algebraico, cuanto a errores correspondientes a los algoritmos propios de cada método (errores de procedimiento y de lenguaje algebraico). Los primeros fueron los más predominantes y explican la dificultad para lograr resolver ecuaciones cuadráticas; dado que corresponden a conocimientos previos del estudiante, este rara vez podrá llegar a la solución correcta, incluso si maneja correctamente el algoritmo del método a utilizar. Es importante señalar la dificultad que presentan los estudiantes en el uso de fórmulas, ya que esta habilidad es muy necesaria en una educación técnica industrial, por lo que se deben tomar acciones correctivas en esta vía.

A continuación, se presenta una lista resumida de las categorías detalladas en la sección de resultados para cada método de resolución solicitado en los ejercicios de opciones múltiples.

Método de factorización:

- Uso correcto del algoritmo del método del aspa simple, encontrando los factores primos, pero equivocando sus signos, lo cual denota dificultad en la regla de los signos para suma y resta.

- Uso incorrecto del método del aspa simple al no encontrar los factores primos correctos. Esta clase, a diferencia de la anterior, denota desconocimiento del proceso de factorización.

- Procedimientos no comprendidos.

Método de completar cuadrados:

- Inconsistencias en el algoritmo del método, específicamente poca comprensión de este y algunos errores en operaciones algebraicas; además, errores del lenguaje algebraico, como omisión de signos y símbolos, que dificultaron el proceso, pero igualmente se aproximaron a la respuesta correcta o llegaron a ella, lo cual indica un manejo mecánico del procedimiento.

- Errores de lenguaje algebraico al omitir el signo + al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto de lado izquierdo. A pesar de esto, la solución demuestra dominio del algoritmo del método, pero se equivocó nuevamente al despejar la ecuación lineal, pues cometió errores en el procedimiento, cambiando el signo del valor 6 en lugar de cambiarlo al 9 cuando calculó la segunda raíz.

- Uso correcto del proceso para completar el trinomio cuadrado perfecto y balance de la ecuación, pero luego, en lugar de factorizar, el estudiante presentó error algebraico de conocimientos previos al sumar términos no semejantes y dejar el procedimiento incompleto.

- Errores en el algoritmo para completar el trinomio cuadrado perfecto, pues dividieron entre 2 el coeficiente de x dos veces para luego elevarlo al cuadrado. Adicionalmente presentan errores en el proceso de factorización de trinomios cuadrados perfectos y errores aritméticos al extraer raíces cuadradas.

- Error al encontrar el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado de la división 12/2. A partir de allí, presentaron errores algebraicos, aritméticos y de sintaxis que les impidieron terminar el procedimiento.

- Procedimientos no comprendidos.

Método de la fórmula general:

- Uso correcto de la sustitución de los coeficientes en la fórmula y las operaciones de potencia, multiplicación y suma o resta, pero con errores aritméticos en la operación de radicación. Se puede observar cómo una vez extrajeron la raíz cuadrada, volvieron a escribir el signo radical, lo que demuestra falta de comprensión de la operación. En la mayoría de los casos utilizaron las opciones dadas que tenían similitud con su procedimiento para indicar la opción de respuesta, aun cuando no habían llegado a la misma.

- Sustitución correcta de los coeficientes en la fórmula, pero presentaron errores al no manejar correctamente operaciones aritméticas como la potencia, multiplicación, suma y resta con números enteros dentro del radical y en pasos posteriores.

- Dificultad en el manejo de la fórmula una vez sustituyeron correctamente los valores de a, b y c; omitieron el signo del radical, además de cometer errores de origen aritmético.

- Error al sustituir los coeficientes a, b y c en la fórmula; además de errores aritméticos en el cálculo de raíz cuadrada y leyes de los signos para la suma y resta.

- Identificación incorrecta de a, b y c en la ecuación; prevalece el hecho de que no identificaron el coeficiente $a=1$ y, en su lugar, utilizaron el exponente 2.

- Sustitución errónea, dejar letra sin sustituir o sustituir una mal o equivocar los signos de los coeficientes.

- Interpretar la raíz cuadrada como una división por 2.

De las entrevistas realizadas se rescata el señalamiento de los estudiantes de que los procesos son meramente memorísticos, y que suelen olvidarlos con facilidad; además de que ninguno de los seis estudiantes entrevistados sabía qué representaban las soluciones de dichas ecuaciones (ver Anexo 2). Por ello, utilizar un método para resolverlas se convierte en un camino sin sentido; no comprendieron el para qué ni el porqué, lo cual se vio reflejado en la primera parte de opción múltiple de la prueba, en donde ninguno de los 30 estudiantes utilizó las opciones dadas para comprobar las soluciones correctas. Esta situación puede derivarse del hecho de que el currículum panameño no contempla el método grafico para la resolución de ecuaciones cuadráticas, algo que permitiría al estudiante observar dichas soluciones de forma gráfica con ayuda de la tecnología, y entender mejor el significado de estas.

Un resultado no esperado lo constituyó el alto porcentaje (63.4%) de respuestas en blanco para el ejercicio 1, el cual consistía en una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$. Esta ecuación debía ser factorizada, pero, en lugar de ser expresada en términos de x, se utilizó la letra y, lo que causó dificultad para los estudiantes. Por tal razón es de suma importancia que, al enseñar ecuaciones, se insista en el significado de las variables y se utilicen letras diferentes de x. Otro resultado, quizás un poco más esperado, fue el temor y dificultad de los estudiantes al trabajar con fracciones; el ejercicio 5, que consistió en una ecuación cuadrática con coeficientes racionales no enteros, resultó ser el ejercicio más difícil para ellos, por lo que fue el menos resuelto. Este hecho nos lleva a la siguiente pregunta: ¿se aplica la fórmula general con coeficientes no enteros? En caso de no ser así, ¿por qué? Es importante que las ecuaciones no solo sean presentadas con coeficientes enteros, sino que se incluyan coeficientes no enteros para los diferentes métodos (donde apliquen). Esto con el objetivo de que los estudiantes obtengan destrezas en el manejo de operaciones con números racionales no enteros, y no los perciban como números extraños o con los cuales no se puede operar.

Otra observación importante es el hecho de que los estudiantes muestran confusión para reconocer los coeficientes a y b cuando son iguales a 1, por lo que se sugiere hacer actividades para reforzar este aprendizaje. Se puede concluir, también, que los estudiantes tienen preferencia por el uso del método de la fórmula general; sin embargo, presentan dificultad en su uso, la cual radica principalmente en la falta de destreza en el uso de fórmulas y en el poco dominio de las operaciones básicas con números reales (leyes de los signos, identificación de la operación de sumas y restas, potenciación y radicación). Por lo que sería importante revisar el currículum y analizar la utilidad de considerar el uso y manejo de fórmulas como contenido previo al de ecuaciones cuadráticas y uso de la fórmula general, así como reforzar las operaciones con números reales.

Si bien es cierto que este estudio no pretende generalizar los resultados, en la experiencia docente en educación media bachiller se observa como los errores aquí documentados se han venido repitiendo cada año por las diferentes generaciones. Es importante entonces que, a partir de estudios como este, que proporcionan insumos para futuras investigaciones, se establezcan estrategias remediales que ayuden a minimizar los errores de los estudiantes, ya sean de conocimientos previos o del año en curso. Para esto, también debe considerarse la integración de los docentes de los niveles educativos Primaria, Pre-Media y Media de las diferentes instituciones que dan continuidad a la formación de estudiantes dentro de un mismo sector geográfico.

A modo de reflexión, y tal como lo indica Cury (2019):

> Si bien los investigadores pretenden comprender los errores que cometen los estudiantes y descubrir sus causas, remediarlos o utilizarlos como "herramientas para el aprendizaje", parece que la mayor dificultad a la que se enfrentan está relacionada con la falta de actividades que desafíen al estudiante a querer cambiar su actitud hacia ese error. (p. 54)

Es importante que los docentes incursionen en esta metodología de investigación y se conviertan en investigadores de aula, valoren el error como insumo necesario para el proceso de enseñanza aprendizaje e inculquen el valor de este a los estudiantes a través de diferentes actividades. Esto ayudaría a cambiar la percepción del error en las aulas de clase, y que este elemento sea aprovechado al máximo.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

MBG concibió la idea y desarrolló toda la investigación, desde la recogida y análisis de los datos hasta la presentación del trabajo final de forma individual.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por MBG, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la SENACYT por la oportunidad brindada con el diplomado Investigación en el aula de matemática, el cual me proporcionó los insumos necesarios para llevar a cabo esta investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matematica: Análisis de causas y sugerencias de trabajo. 1ra Edición. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Ávila, C., Becerra, O., Rodríguez, D. y León, L. (2018). Solución de Ecuaciones Cuadráticas con una incógnita y con raíces Reales.

Baldor, A. (2011). Algebra. México: Ultra S.A. de C.V.

Bardin, L. (1996). El análisis de contenido. Madrid: Akal.

Candray, J. C. (2021). Concepciones Docentes a cerca de los Errores que cometen los estudiantes al resolver operaciones básicas con Fracciones. Revista Paradigma, Vol. LXII, Nro. 1, 130-155.

Cury, H. N. (2019). Análise de erros: o que podemos aprender das respostas dos alunos. 3ra Edición. Autêntica editores: Belo Horizonte.

Cury, H., Bisognin, E. y Bisognin, V. (2008). A análise de erros como metodología de investigación.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación.

Dirección general de admisión. (2016). Temario para la prueba de conocimientos generales. Panamá: Universidad de Panamá.

Espinoza Freire, E. y Toscano Ruiz, D. (2015). Metodología de Investigación Educativa y Técnica. Machala: UTmach.

López González, W. O. y López Ponce, W. d. (2017). Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la matematica en el segundo año de educación media. Educere, 653-667.

Martínez, O. (octubre de 2014). El Método Genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primero y segundo grado. Tesis. Penonomé, Panamá.

Ministerio de Educación. (2014). Programa Curricular de Matemática. Décimo Grado. Panamá, Panamá: Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa.

Quecedo Lecanda, R. y Castaño Garrido, C. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de Psicodidáctica, nº 14 , 5-40.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. Investigación en Educación Matemática XI, 19-52.

Tettay-Mejía, S. I., Pulgar-García, M. y Rojas- Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. Praxis, 15(2), 193-205.

Torre, S. d. (2004). Aprender de los errores. Buenos Aires (Argentina): Magisterio del Rio de la Plata. Primera Edición.

Anexo 1

Preferencias en la elección del método de resolución para los ejercicios N°4 y N°5

	Ejercicio N°4 Resuelva $\mathbf{8x^2 - 2x - 15 = 0}$ Por cualquiera de los métodos estudiados.		**Ejercicio N°5** Resuelva $\mathbf{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{10}}$ por cualquiera de los métodos estudiados	
Método	**Total**	**%**	**Total**	**%**
Método de Factorización	3	10%	0	0.0%
Método de Completar Cuadrados	2	6.7%	4	13.3%
Método de Fórmula General	20	66.7%	5	16.7%
Sin elección	5	16.6%	21	70.0%
Total	30	100%	30	100%

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 2

Entrevista con preguntas comunes para los seis estudiantes y sus respuestas

Pregunta	**De la prueba que realizaste ¿Cuál de los problemas te pareció más fácil, por qué? Justifica.**		**¿sabes que representan las soluciones de la ecuación?**
Estudiante 1	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*“Como es un solo procedimiento que nada más se cambian son los números lo hallo más fácil que los demás”*	*“No”*
Estudiante 2	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*“Porque el aspa simple no lo comprendí muy bien, no lo pude entender y el otro tema lo estábamos comenzando a dar así que no estaba muy claro en todo”*	*“No”*
Estudiante 3	Ejercicio N°1 (factorización)	*“Puesto que la fórmula de factorización es en mi concepto un poco más sencilla, el método es corto y sencillo de recordar, pero hay ocasiones en que no funciona muy bien”*	*“Representan dos raíces de una incógnita”*
Estudiante 4	Ejercicio N°4 Elegían el tema Método elegido: fórmula general.	*“Porque podía elegir trabajar con la formula general y ese tema lo había entendido un poco, aunque se inicia fácil pero después se pone complicado”*	*“No recuerdo”*
Estudiante 5	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*“Con esa fórmula yo me puedo guiar para poder multiplicar los números mejor, aunque a veces no sé qué más hay que hacer”*	*“No sé”*
Estudiante 6	Ejercicio N°2 (completar cuadrados)	*“Porque conozco bien el procedimiento de completar cuadrados”*	*“No sé”*

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 3

Entrevista con preguntas individuales para cada estudiante y sus respuestas.

Estudiante	Pregunta	Respuestas
Estudiante 1	1. Porque en la segunda parte, cuando no se te indico que método utilizar, ¿no resolviste ninguno? ¿por qué no usaste la formula general, si en el ejercicio Nº3 de la primera parte, trabajaste la formula general bastante bien, solo con algunos errores aritméticos? (Ver Anexo 5)	*"Porque demore mucho en el primero y cuando iba a resolver el ejercicio Nº4 no me dio tiempo. Lo hubiera resuelto por formula general".*
	2. ¿Porque factorizaste en el ejercicio Nº2, aun cuando se te había pedido usar completar cuadrado y sin embargo no pudiste factorizar en el ejercicio Nº1? (Ver Anexo 5)	*"Porque la Nº2 si tenía x y la Nº1 no".*
	3. Crees que la ecuación del ejercicio Nº5 se puede resolver usando la formula general?	*"No, yo no lo podría hacer porque estoy acostumbrado a números, con las fracciones me enredaría".*
Estudiante 2	1. Porque escribiste, "no me acuerdo de nada, ¿perdón" en los ejercicios que se debían resolver por factorización y completar cuadrados? ¿Considera que estos métodos son memorísticos?	*"Si. Si los volviera a dar los pudiera recordar y los podría resolver, con el tiempo se me olvidan".*
	Porque no intentaste hacer el ejercicio N°5 por ninguno de los 3 métodos	*"No recordaba cuando se tiene que invertir este valor, creo que tiene que ver con las fracciones".*
Estudiante 3	1. Me llamo mucho la atención que para resolver el ejercicio N°5 elegiste completar cuadrados. Expresaste que por tener fracciones es más fácil de resolver con ese método. Háblame de eso.	*"Pues aquí en el IPTIA mi profesora de matemática nos ha enseñado mucho a trabajar con fracciones entonces como es un procedimiento que ya tenía muy fresco en la mente se me hizo mucho más sencillo trabajarlo por completar cuadrados, pero no dividí 1/2 entre dos, creo que me confundí porque ya había un 2".*
Estudiante 4	1. En los tres primeros ejercicios, encerraste la posible respuesta sin procedimientos, ¿en qué te basaste para elegir?	*"Lo hice en mi mente, siempre he visto que la profesora lo hace así, mirando la ecuación. Por ejemplo, en el ejercicio Nº1 que dice , seria 1, el menos se restaría por eso elegí -1 y 6. Busque los números que se parecían".*

Estudiante	Pregunta	Respuestas
Estudiante 5	1. En el primer ejercicio se te pidió usar factorización, pero en su lugar usaste formula general, ¿por qué? (Anexo 6)	*"Yo me se la factorización, pero hay veces que me tranco y ni para adelante ni para atrás y allí es donde viene el problema, me gusta más la formula general".*
	2. Expresaste que el método de la formula general se te hace más fácil, pero que se pone complicado. ¿A qué te refieres con eso?	*"Porque hay partes donde me pone a pensar y allí es donde viene el problema porque por lo menos hay partes donde no se si hay que sumarlo o restarlo o que hay que hacer y de una vez viene el problema".*
Estudiante 6	1. En la primera parte de la prueba resolviste correctamente el ejercicio N°2 por completar cuadrados, ¿por qué no utilizaste este método para resolver el ejercicio N°4?	*"No se podía usar porque había un 8 delante de equis cuadrada y mejor use el aspa simple".*
	2. En el ejercicio N°5 escribiste que ibas a usar la formula general pero solo ordenaste la ecuación. ¿Por qué no continuaste?	*"Porque no sabía qué hacer con las fracciones".*

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 4

Resultados de la tercera parte de la prueba

a) **Ejercicio o ejercicios más fáciles**. En esta pregunta el estudiante podía elegir varios ejercicios al considerarlos fáciles, por lo que el porcentaje fue tomado con base en la cantidad total de respuestas. Además, algunos no contestaron a esta pregunta.

Ejercicios	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5
Totales	7	5	15	11	1
Porcentaje	17.9%	12.8%	38.4%	28.2%	2.7%

Fuente: Elaboración propia.

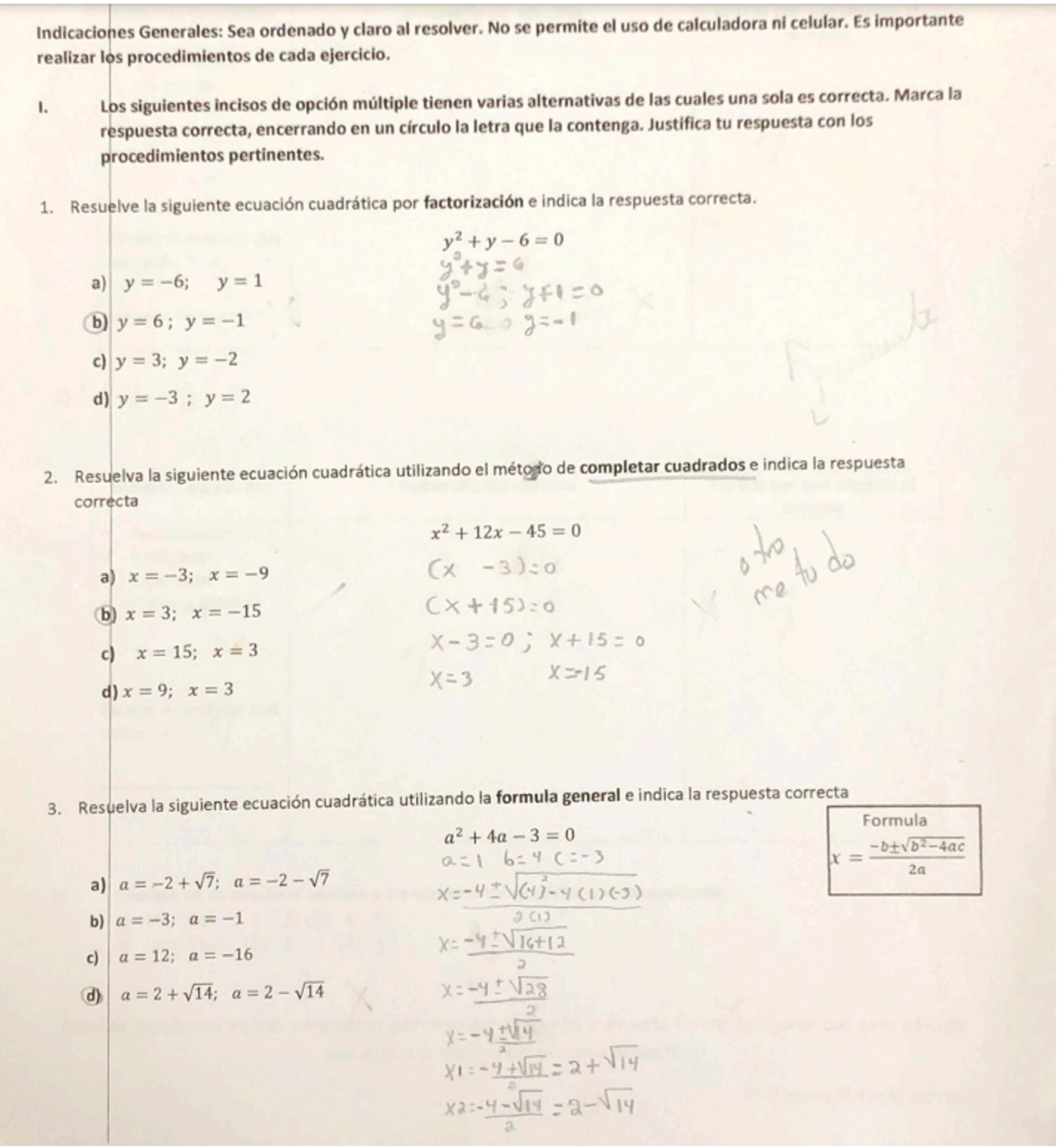
a) **Ejercicio o ejercicios más difíciles**. En esta pregunta el estudiante podía elegir varios ejercicios al considerarlos difíciles, por lo que el porcentaje fue tomado con base en la cantidad total de respuestas. Además, algunos no contestaron a esta pregunta.

Ejercicios	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5
Totales	9	9	4	5	18
Porcentaje	20.0%	20.0%	8.9%	11.1%	40%

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 5

Primera parte de la prueba del estudiante 1 entrevistado.



Indicaciones Generales: Sea ordenado y claro al resolver. No se permite el uso de calculadora ni celular. Es importante realizar los procedimientos de cada ejercicio.

I. Los siguientes incisos de opción múltiple tienen varias alternativas de las cuales una sola es correcta. Marca la respuesta correcta, encerrando en un círculo la letra que la contenga. Justifica tu respuesta con los procedimientos pertinentes.

1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$y^2+y=6$

y^2-6 ; $y+1=0$

$y=6$ o $y=-1$

a) $y = -6$; $y = 1$

b) $y = 6$; $y = -1$

c) $y = 3$; $y = -2$

d) $y = -3$; $y = 2$

2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

$(x\ \ -3)=0$

$(x+15)=0$

$x-3=0$; $x+15=0$

$x=3$ $\quad$ $x=-15$

otro metodo

a) $x = -3$; $x = -9$

b) $x = 3$; $x = -15$

c) $x = 15$; $x = 3$

d) $x = 9$; $x = 3$

3. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando la **formula general** e indica la respuesta correcta

Formula
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$a^2 + 4a - 3 = 0$$

$a=1$ $b=4$ $c=-3$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-3)}}{2(1)}$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2}$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{2}$

$x=-4\frac{\pm\sqrt{14}}{2}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{14}}{2}=2+\sqrt{14}$

$x_2=\frac{-4-\sqrt{14}}{2}=2-\sqrt{14}$

a) $a = -2 + \sqrt{7}$; $a = -2 - \sqrt{7}$

b) $a = -3$; $a = -1$

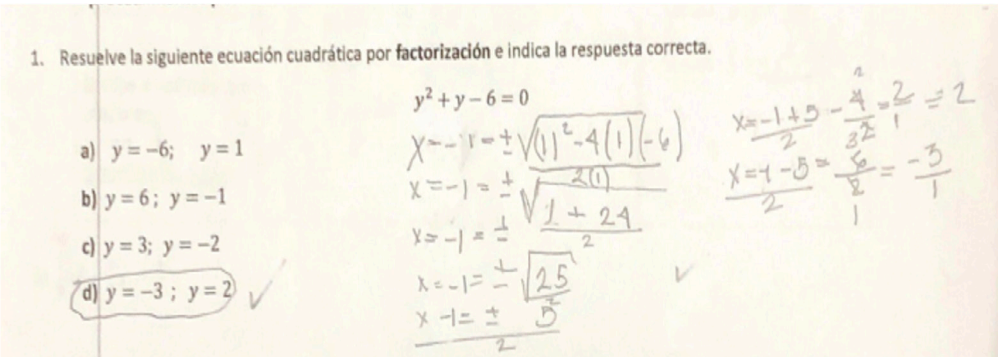
c) $a = 12$; $a = -16$

d) $a = 2 + \sqrt{14}$; $a = 2 - \sqrt{14}$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Anexo 6

Ejercicio 1 de la prueba del estudiante 5 entrevistado.



1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$y^2+y-6=0$

a) $y=-6;\quad y=1$

b) $y=6;\; y=-1$

c) $y=3;\; y=-2$

d) $y=-3;\; y=2$

$x=-1 \pm \frac{\sqrt{(1)^2-4(1)(-6)}}{2(1)}$

$x=-1 \pm \frac{\sqrt{1+24}}{2}$

$x=-1 \pm \frac{\sqrt{25}}{2}$

$x=\frac{-1 \pm 5}{2}$

$x=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$

$x=\frac{-1-5}{2}=\frac{6}{2}=\frac{-3}{1}$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
63-81
Recibido: 12/03/2024
Aprobado: 04/04/2024

Artículos de investigación

LOS SENTIDOS DE APRENDER Y ENSEÑAR MATEMÁTICAS EN LAS VOCES DE FUTUROS EDUCADORES MATEMÁTICOS

THE MEANINGS OF LEARNING AND TEACHING MATHEMATICS IN THE VOICES OF FUTURE MATHEMATICS EDUCATORS

Camila Ximena Muñoz López[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-3887-3615

Luisa María Romero Reina[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0005-6730-5962

Elizabeth Torres Puentes[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3642-0571

RESUMEN

Este artículo se deriva de la investigación titulada *Una mirada narrativa sobre el sentido de la experiencia de ser docente de primaria que enseña matemáticas*. Los resultados expuestos aquí, obedecen al objetivo de reconocer los sentidos que otorgan algunos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) a sus experiencias de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Dicha investigación adoptó un enfoque cualitativo, utilizando el método de estudio de caso. Para el acopio de datos, se diseñaron entrevistas de tipo narrativo. Se seleccionaron cuatro participantes, todos ellos maestros en formación de la cohorte 2019-2 de la licenciatura.

Identificamos algunos miedos y dificultades hacia/con las matemáticas, que de manera positiva se han ido transformando en empoderamiento. Reconocimos los sentidos otorgados a la experiencia de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, a partir de la práctica reflexiva, que deviene en un compromiso como futuros profesores.

Palabras clave: Sentido. Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Experiencia. Práctica reflexiva.

1 Licenciada en Educación Básica Primaria. Docente de primaria del sector educativo oficial. Bogotá, Colombia, código postal C. P. 110411. Correo electrónico: cxmunozl@upn.edu.co.

2 Licenciada en Educación Básica Primaria. Docente de primaria del sector educativo privado. Bogotá, Colombia, código postal C. P. 11161. Correo electrónico: lumromeror@upn.edu.co.

3 Doctora en Educación. Docente en la Facultad de Educación de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, código postal C. P. 111311. Correo electrónico: etorresp@pedagogica.edu.co

ABSTRACT

This article is derived from the research titled A narrative look at the meaning of the experience of being a primary school teacher who teaches mathematics. The results presented here obey the objective of recognizing the meanings that some students of the Bachelor's Degree in Primary Basic Education of the National Pedagogical University (Colombia) give to their learning and teaching experiences of mathematics. This research adopted a qualitative approach, using the case study method. To collect data, narrative interviews were designed. Four participants were selected, all of them student teachers from the 2019-2 cohort of the bachelor's degree.

We identified some fears and difficulties towards/with mathematics, which have been positively transformed into empowerment. We recognized the meanings given to the experience of learning and teaching mathematics, based on reflective practice, which becomes a commitment as future teachers.

Keywords: Meaning, teaching, and learning of mathematics, experience, reflective practice.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es un viaje complejo que involucra múltiples dimensiones cognitivas, emocionales y sociales. En este viaje, los estudiantes no son meros receptores pasivos de conocimiento, sino que se convierten en participantes activos cuyas voces y experiencias son fundamentales para comprender cómo se construye el entendimiento matemático. En este artículo, reconocemos algunos sentidos vinculados al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a través de las voces auténticas de los estudiantes para profesor de la básica primaria que enseña matemáticas. La pregunta que orientó la investigación de la cual emergió este artículo, fue ¿Cuáles son los sentidos que otorgan a sus experiencias de aprendizaje en relación con sus experiencias de enseñanza de las matemáticas, algunos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional, a partir de sus narrativas?

Entendemos por sentido con Cerquera et al (2016) como la búsqueda de las ideas que nos transforman de manera individual pero que a su vez nos permite identificarnos como colectivo, así nos sumergimos en las experiencias, percepciones y desafíos de un grupo de estudiantes para profesor de básica primaria, buscando comprender cómo se entrelazan las dimensiones personales y sociales en la construcción del conocimiento matemático. Al dar voz a los estudiantes para maestro, no solo buscamos comprender sus puntos de vista, sino también honrar sus experiencias, de allí se considera que existe una ruptura entre las experiencias de en grupo de estudiantes de la cohorte 2019-2 de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional -UPN, pues presentaban ciertos temores frente al aprendizaje de las matemáticas y a su enseñanza, lo cual dificultaba su proyección e identidad como educadores matemáticos (Muñoz y Romero, 2023).

Los procesos de enseñanza de los maestros en formación se ven influenciados por las experiencias que impactaron su aprendizaje de las matemáticas en su infancia, y dichas experiencias intervienen en sus prácticas de enseñanza positiva o negativamente. Penafiel, Stoehr y Martínez (2016), a propósito, mencionan que las experiencias de ansiedad con las matemáticas, vividas por profesoras de Educación Básica con quienes desarrollaron su investigación, impactaron en su aproximación a la enseñanza de la asignatura, de tal manera que "los profesores que están ansiosos con la matemática frecuentemente traspasan su propia ansiedad a sus estudiantes, lo que puede generar una perpetuación del problema" (p. 396).

De acuerdo con lo anterior, afirmamos que reconocer el sentido que este grupo de estudiantes otorgan a sus experiencias de enseñanza y aprendizaje, es importante en la proyección del rol del maestro, como lo afirma Llinares, (2016),

> reconocer y dar sentido a los hechos que suceden en la clase de matemáticas desde la perspectiva de poder explicar e informar el aprendizaje de las matemáticas, permite generar información contextual para apoyar las decisiones de acción que debe tomar el profesor con el objetivo de favorecer el aprendizaje de sus alumnos (p. 58).

2. ELEMENTOS TEÓRICOS/ ELEMENTOS CONCEPTUALES/ ELEMENTOS HISTÓRICOS

Para el desarrollo de este apartado, reconocemos tres categorías teóricas: el sentido, la experiencia, y la práctica reflexiva.

Comprender el sentido que le damos a nuestras prácticas, puede resultar complejo, según desde el lugar en el que nos posicionemos. Desde una visión psicológica, Ordoñez, Mondragón y Muñoz (citados en Cerquera et al, 2016), reconocen que “el sentido alude a las connotaciones que evoca una palabra en nuestra mente; es diferente en cada persona, dependiendo de sus experiencias y de los contextos en los que se desenvuelve, razón por la cual podría caracterizarse como cambiante” (p. 306).

Por su parte desde una visión psicosocial, González Rey (2010), afirma que el concepto de sentido “aparece [por primera vez] solo en el último período de la obra de Vygotsky y su presencia fue efímera. Sin embargo, fue una idea que en poco tiempo tuvo una interesante evolución” (p. 242). Vygostky en sus trabajos reconoce que el sentido tiene una relación con la *vivencia*, concepto que, si bien no fue totalmente desarrollado en la obra de este autor, lo identifica como la capacidad de generalización que tiene el niño, y para que se de dicha generalización se requiere de la experiencia. Así podemos entrever que el sentido esta anidado en la experiencia. Si bien Vygostky recurre a Paulhan, para asociar la categoría sentido esencialmente al uso de la palabra y a su relación con las estructuras de significado del lenguaje, va un poco más allá “al relacionarla con la personalidad y la vida psíquica como un todo” (González- Rey, 2009, p. 62).

Desde una visión pedagógica Cerquera et al (2016), reconocen que el sentido se “configura de acuerdo con lo que los individuos requieren para su estilo de vida, y de cómo ha ido estructurando dicho “sentido” en busca de una idea o de un acto de transformación individual, que se intensifique con el grupo al cual pertenece” (p. 307). Es precisamente en esta visión que centramos nuestros análisis, identificando que las personas producen sentidos, y con ellos pueden significar el mundo, sus experiencias y proyectarse en una vida con otros, por ello concebimos a los maestros, en particular los maestros de básica de primaria, como productores de sentidos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Así, encontramos un vínculo estrecho entre sentido y experiencia. La experiencia la entendemos, desde Larrosa (2009), como el acontecimiento que marca, como “eso que me pasa”. Díaz (2007), retoma a Larrosa para mostrar la relación entre experiencia, sentido y narrativa, indicando que,

> la experiencia, entendida como aquello que “me pasa”, aquello que “me afecta” subjetivamente, y, por tanto, “me forma y me transforma” (…), se constituye en fuente inagotable de significado y sentido, pues en ella se abre el espacio existencial para que el sujeto se encuentre a sí mismo y a las situaciones que vivencia en su trayectoria biográfica. Por ello, referirse al significado y al sentido es considerar en el plano

> histórico-social, la relación entre experiencia y narrativa como factor decisivo en los procesos de constitución de la subjetividad. (p. 56)

De acuerdo con Diaz (2007), el sentido solo toma relevancia cuando se es consciente de la experiencia, y de lo que ella suscita en los sujetos, por ello para el caso de los maestros en formación y su experiencia con las matemáticas, es vital pensar en su práctica, pues esta es importante en la formación de profesores para educación básica primaria ya que permite poner a disposición de la experiencia de enseñanza, los saberes que se han acopiado en otros ciclos vitales, propiciando la construcción de nuevos conocimientos profesionales en el aula. Como mencionan Jiménez, Limas y Alarcón (2016),

> la práctica pedagógica es una producción de experiencias que conlleva a desarrollar nuevas técnicas encaminadas al mejoramiento de las mismas, puesto que la sociedad actual enmarcada por la globalización y la transformación requiere profesores íntegros que desarrollen la condición humana. (p.135)

Además, Castro, Peley y Morillo (citados en Jiménez, Limas, Alarcón, 2016) consideran que la práctica pedagógica es una acción que permite innovar, profundizar y transformar la enseñanza, puesto que acerca al maestro en formación a la realidad escolar y al sistema educativo, posibilitando el reconocimiento de su contexto y las problemáticas que surgen en su profesión. En la misma línea, Arias y Amador (2024) indican la importancia de la resolución de contingencias, las positivas interacciones docente-estudiante y lectura de los contextos para tener una práctica pedagógica pertinente.

De acuerdo con todo lo anterior encontramos que al vínculo entre sentido y experiencia se le suma el vínculo con la práctica reflexiva. Según Bolívar (2021), la experiencia es el foco de la reflexión, y solo con ella se produce aprendizaje, en palabras de la autora,

> el aprendizaje se presenta, así como resultado de la experiencia, dónde la reflexión se ubica como puente en un ciclo continuo, que a modo de espiral hace que cada vez más la reflexión sea deseable porque a través de ella se consigue más aprendizaje (p. 236).

Bolívar (2021), reconoce que en “la reflexión como reconstrucción de la experiencia” (p. 237), es donde efectivamente se desarrolla la reflexión de los profesores. La experiencia es entonces el foco de la reflexión, pues por si sola la experiencia no produce aprendizaje, en palabras de la autora,

> el aprendizaje se presenta, así como resultado de la experiencia, dónde la reflexión se ubica como puente en un ciclo continuo, que a modo de espiral hace que cada vez más la reflexión sea deseable porque a través de ella se consigue más aprendizaje (p. 236).

Adicionalmente Bolívar afirma que la postura crítica debe ser un elemento que caracterice la práctica reflexiva, por lo tanto, entiende “la práctica reflexiva como el articulador entre el pensamiento crítico con el aprendizaje experiencial” (Harrison et al., 2005, citado en Bolívar, 2021, p. 239). Bolívar, reconoce que, la práctica reflexiva crítica implica que los sujetos sean conscientes de las relaciones de poder presente en los procesos educativos que impactan el aula.

Aunque en el campo de la educación matemática se ha venido avanzando en la comprensión del vinculo entre sentido, experiencia y la práctica reflexiva, la mayoría de ellas hacen el estudio desde las categorías separadamente y tocan de manera tangencial la relación con las otras. Una revisión de dichas investigaciones permitió identificar tres asuntos fundamentales: los sentidos otorgados por los estudiantes para profesor, a la enseñanza de las matemáticas; la formación de profesores de primaria que enseñan matemáticas; y el impacto de sus experiencias escolares en la enseñanza de las matemáticas.

En relación con los sentidos que otorgan los futuros maestros a la enseñanza de esta área, se ubica el trabajo desarrollado por Bonilla y Medina (2014), cual se trazó el objetivo de caracterizar los sentidos que una docente y sus estudiantes de quinto de primaria, dan a las estrategias pedagógicas para motivar el aprendizaje de la matemática, en particular en la sistematización e interpretación de datos estadísticos. En esta investigación se concluye que las estrategias pedagógicas implementadas resultan motivantes para los estudiantes y facilitan el proceso de aprendizaje, no solo en matemáticas, sino en general de todas las áreas. Esa investigación logró evidenciar que no existe una mejor combinación que un alumno motivado para aprender y un profesor motivado y apasionado por lo que enseña, con pertinentes herramientas pedagógicas y didácticas.

Otra investigación relacionada con este asunto es la desarrollada por Castellanos (2018), en la que se planteó los sentidos que los futuros profesores de matemáticas (FPM) otorgan a la práctica docente a través de algunos de los problemas profesionales que enfrentan. La autora logró mostrar cómo el proceso formativo mediado por el ciclo del modelo reflexivo promueve procesos de discusión e intercambio y concluyó principalmente, que dicho proceso formativo se ve impactado por las problemáticas de tipo profesional que impactan las trayectorias de quienes se forman para profesor.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con la formación de profesores para la básica primaria que enseñan matemáticas, se ubica la investigación desarrollada por Garzón (2017) la cual se centró en recuperar e interpretar las perspectivas pedagógicas y epistemológicas de la formación de docentes en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, a partir de la documentación en fuentes orales y escritas. Con ese propósito la autora recurre a Tedesco (2002) para hacer énfasis en la formación del docente integral y la reflexión de su quehacer, el papel en la sociedad y en la cultura, así como su capacidad para indagar, crear y reconstruir los saberes. También retoma las tesis de Zuluaga (1999) quien hace énfasis en el saber pedagógico y las prácticas en la formación de profesores de primaria. Garzón concluye a partir de su investigación que la formación de profesores de matemáticas se ha transformado de manera epistemológica en Colombia y el mundo, por el acceso a la información que se tiene por medio del internet permitiendo tener diferentes miradas del conocimiento didáctico del contenido.

Una segunda investigación relacionada con este asunto es la desarrollada por Torres (2016), quien se trazó como objetivo reconocer aspectos en torno a la historicidad del docente de matemáticas que facilitan o impiden la realización de políticas educativas en la enseñanza de las matemáticas. La autora concluye que la historicidad en la formación docente incide en el desarrollo de las políticas educativas en el área de matemáticas a través de esa tensión entre lo ideal y la realidad de la escuela, por lo tanto, se hace necesario realizar un análisis respecto a la formación en el área de matemáticas que reciben los estudiantes en la formación universitaria.

Una tercera investigación, relacionada con la formación de profesores de primaria que enseñan matemáticas, es la desarrollada por Lupiáñez (2010) quien plantea una caracterización de las competencias que deben desarrollar los profesores de matemáticas que enseñan en los cursos de educación primaria. Analiza la idea que se plantea de competencia en la formación de profesores, así como las nuevas directrices para la construcción de publicaciones, proyectos e innovaciones de la comunidad europea, que permiten comprender cómo el profesor de matemáticas de primaria necesita desarrollar competencias para una mejor práctica en el aula. El autor concluye que es importante que los programas de formación de profesores establezcan didácticas que permitan una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y el desarrollo de competencias curriculares, colaborativas y profesionales, a través de la práctica docente y la evaluación.

Ahora bien, en cuanto al impacto de las experiencias escolares en la enseñanza de las matemáticas, se encontraron dos investigaciones relacionadas. Una de ellas es la desarrollada por Diaz y Vanegas (2017), en la que se analizaron las representaciones de los maestros en cuanto a la relación de las matemáticas y la construcción de estas antes de ingresar a la universidad. Así se analiza e interpreta narrativas de los maestros en formación de la Licenciatura en Educación infantil de la UPN, en torno a las experiencias previas en el área de matemáticas. Las autoras concluyen que las creencias, emociones y actitudes se construyen en las interacciones que el sujeto tiene con el saber, en este caso el saber matemático, así como con los docentes que guían el proceso, sus compañeros y el contexto.

Una segunda investigación en esta línea es la propuesta Torres (2023), quien se planteó como propósito identificar en las narrativas de estudiantes para profesor, experiencias vinculadas al proceso de configuración de sujetos políticos en la formación de profesores de matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional. El autor concluye que las narraciones de los maestros en formación dejan ver cómo las matemáticas y la enseñanza han generado una identidad, la cual se ha establecido a partir de las experiencias, reflexiones, modelos de profesor.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La investigación de la cual se produce el presente artículo, se centró en la perspectiva cualitativa, entendida por Cerrón (2019) como una manera de investigación flexible, sistemática y crítica de los comportamientos de los investigados, que ubica al maestro investigador cualitativo como un actor social que requiere de la interacción con los investigados, denominados por el autor "agentes educativos", conociendo así "sus representaciones para comprender, interpretar, criticar y ejecutar la mejora continua del sistema educativo a partir de las huellas pedagógicas" (p. 2).

Se optó por el estudio de caso como método, dado que se trabajó con las narrativas de cuatro estudiantes de la Licenciatura en Básica Primaria de la cohorte 2019-2 que enseñaron matemáticas durante sus prácticas pedagógicas, y se usó la entrevista semiestructurada como técnica de recolección de datos, de acuerdo con Lopezosa (2020), este tipo de entrevista,

> tiene menor rigidez que las entrevistas estructuradas, ya que cuentan con preguntas fijas, pero en este caso los entrevistados pueden contestar libremente sin necesidad de elegir una respuesta específica como sucede en las entrevistas estructuradas. Incluso los investigadores pueden interactuar y adaptarse a los entrevistados y a sus respuestas, en definitiva, son entrevistas más dinámicas, flexibles y abiertas, y, por tanto, permiten una mayor interpretación de los datos que con las entrevistas estructuradas. (p. 89)

Las narrativas de los cuatro estudiantes se sistematizaron en una matriz de categorías y se presentaron referenciadas bajo un código para el estudiante y la línea de transcripción, por ejemplo, para el entrevistado 3, cuya línea de transcripción 50 se ha citado, aparecerá el código: Estudiante 3, 50. Las cláusulas narrativas analizadas en el marco de este artículo, se relacionan con los sentidos que otorgan los entrevistados a sus experiencias de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas.

Las categorías de análisis que se construyeron para dar cuenta del objetivo se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Categorías analíticas.

Objetivo especifico	Macrocategoría	Indicador
Reconocer los sentidos que otorgan algunos estudiantes de la Licenciatura en básica primaria, a sus experiencias de aprendizaje y enseñanza de matemáticas.	Sentidos del aprendizaje de las matemáticas	Las cláusulas narrativas que muestran las creencias/concepciones/identificación con la importancia o no del **por qué se aprende** matemáticas
	Sentidos de la enseñanza de las matemáticas	Las cláusulas narrativas que muestran las creencias/concepciones/identificación con la importancia o no **del por qué se enseña** matemáticas

Fuente: Construcción propia.

4. RESULTADOS/DISCUSIONES

De acuerdo con el objetivo de la investigación abordado en este artículo, se presenta el análisis de dos macrocategorías: sentidos del aprendizaje y sentidos de la enseñanza de las matemáticas.

4.1. SENTIDOS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En relación con la primera macrocategoría se evidenciaron cuatro categorías asociadas que la configuran, en donde se reconoce algunas experiencias frustrantes de los entrevistados, pero que a su vez son reflexionadas para construir en ellas empoderamiento.

4.1.1. El sentido de igualdad en el aprendizaje de las matemáticas

Los entrevistados manifiestan que desde una mirada reflexiva han identificado cómo las matemáticas pueden ser aprendidas por todos y no son exclusivas de personas muy inteligentes o superdotadas, ya que dicha creencia ha perdido validez, puesto que los maestros en formación reconocen que es posible aprender matemáticas a pesar de las experiencias poco gratas para ellos. De acuerdo con lo anterior la entrevistada 4 relata,

> *hoy en día, sí, creo que soy buena para las matemáticas, después de todo lo que sufrí. Reconozco que, no aprendo con métodos tradicionales, pero también creo que eso me ayuda a pensarme en enseñar de una manera creativa y siendo maestra de educación primaria y trabajar con niños, entonces creo que para ellos sería más fácil aprender de esta manera*. (Estudiante 4,15)

En la narrativa anterior se identifica que la entrevistada reconoce que es buena para las matemáticas, a pesar de las experiencias en el aprendizaje infantil que presentaron desencuentros, por tanto, no es cierta la creencia negativa en torno a las matemáticas "*no soy bueno para las matemáticas*". En consonancia con lo anterior Martínez (2011) afirma que "no existe un «gen» matemático que sea poseído por algunos alumnos y no por otros, y que dicho gen predisponga al aprendizaje. No hay personas «negadas» para la matemática, y ante las cuales cualquier esfuerzo es inútil" (p. 98).

Aludiendo a lo anterior se evidencia que las personas no nacen "negadas" para aprender matemáticas y que dicha afirmación se debe más a la concepción de quienes no aprenden de una manera homogénea y tradicional. Por tanto, el maestro de matemáticas requiere ser un profesional en educación que consiga que sus estudiantes, conforme a su edad y grado de desarrollo, alcancen competencias matemáticas. De acuerdo con ello la narrativa del estudiante 3,

> *las matemáticas recibidas en la universidad [Matemáticas I, II y III] en este proceso pedagógico me han servido muchísimo, porque me enseñaron muchas de las metodologías que yo utilicé para enseñar y he conocido profesores que muestran las matemáticas de una manera que enamora. Al principio para mí era frustrante saber que iba a enseñar matemáticas, cuando a mí las matemáticas no me gustan. Sin embargo, es algo que ha ido cambiando, pues sé que es importante aprender y desaprender, porque no solo es el aprendizaje que uno va teniendo en el tema pedagógico, sino también que uno va cortando muchos paradigmas con los que uno crece en torno a las matemáticas.* (Estudiante 3,52)

El entrevistado alude a la mala relación que tenía con las matemáticas y al choque que generó en él saber que tendría que enseñar matemáticas, causando frustración, pues él no reconocía saber matemáticas y fue en la formación como profesor que identificó que aprender las matemáticas es posible, además que es viable enseñarla de una manera distinta. De acuerdo con lo anterior, se hace necesario transformar la creencia nociva en los ciudadanos en general, que hay quienes sí pueden aprender matemáticas y quienes no.

4.1.2. El sentido de unas matemáticas para la vida

Los entrevistados coinciden en la importancia que le otorgan al aprendizaje de las matemáticas, pues las consideran útiles para resolver problemas de la vida cotidiana, tal como lo relata la entrevistada 1.

> *Lo que pretendo enseñarles a los chicos es lo importante que son las matemáticas. Son indispensables, son útiles, son necesarias en tu diario vivir. Las matemáticas no son tan difíciles o complejas como de pronto las pintan, como se imaginan. Pienso que uno las necesita todos los días, porque no hay un día en que tú no necesites las matemáticas.* (Estudiante 1, 24-25)

De acuerdo este fragmento se evidencia la necesidad de dar sentido a aprender matemáticas, puesto que es necesario que quien aprende reconozca en las matemáticas una herramienta para resolver problemas de la vida diaria. Al respecto en la siguiente narrativa se identifica cómo el entrevistado 2 le halla sentido.

> *Al principio no lo notaba, pero hoy en día, veo las matemáticas como algo fundamental, necesario, que está inmerso en todos los aspectos de nuestra vida. Realmente, a veces uno no lo nota, las matemáticas están en todo, simplemente en hacer cálculos, en hacer cuentas. Realmente están, y ahí es donde viene el dicho "las matemáticas son el lenguaje de Dios" pues están realmente presentes en todo. Las*

> *matemáticas están inmersas en la vida de manera inconsciente de todos los seres humanos*. (Estudiante 2,31)

Con lo narrado anteriormente por el entrevistado se reconoce el uso de las matemáticas para desenvolverse en el mundo, de ahí la responsabilidad del docente en poseer el conocimiento matemático y pedagógico para que los niños de la básica primaria reconozcan que aprender matemática tiene un sentido. Al respecto Albertí (2018) afirma que,

> llevar situaciones de la vida cotidiana al ámbito académico no significa llevar a clase una situación cotidiana de cualquier forma. El educador responsable debe ser consciente de que convertir una situación cotidiana en una situación de aprendizaje matemático no es algo banal. Debe tener razones didácticas y pedagógicas para hacerlo, esto es, curriculares: competencias del ámbito matemático, procedimientos, conceptos, contenidos, relaciones con otras materias y evaluación. (p. 25)

4.1.3. El sentido de unas matemáticas divertidas

Los entrevistados en sus narrativas sobre sus experiencias de aprendizaje, otorgan un valor significativo al uso de recursos, materiales y juegos. Al respecto encontramos el siguiente relato.

> *El tema que nunca aprendí, bueno para mí, era muy difícil resolver los problemas de álgebra. Era horrible porque yo me frustraba muchísimo. Bueno, y en esa época también manejaban un librito que se llama Calculín, creo que se llama así. Tenías que resolver distintas problemáticas y ahí te daba como el número, con base a eso, tenías que hacer una figura. Para mí era muy difícil porque a mí desde pequeña se me han complicado las matemáticas. Siempre encuentro la manera de aprenderlas de una manera distinta, que en esencia es lo mismo, pero desde otra perspectiva. Creo que lo más difícil fue pasar a ver cómo los números y las letras se combinaban, ver toda esa problemática, descomponer y hacer todo eso, cosas que para mí siempre fueron muy duras*. (Estudiante 4,11-13)

En lo narrado por la entrevistada se reconoce que el uso del recurso *Calculín* supuso gran dificultad para ella, puesto que no lo comprendía. De acuerdo con ello, Torres y Casallas (2021) afirman que,

> el profesor debe estimar de manera rigurosa el carácter de los libros que decida considerar como ayudas al estudio, pues más allá de tener una agradable presentación, ejercicios y problemas, debe ser el adecuado en términos del contenido; no debe presentar sesgos en relación con el significado que se da a las matemáticas. (p. 211)

Atendiendo a lo anterior se evidencia que el docente tiene la responsabilidad de reconocer los recursos, los materiales, o los juegos que posibiliten en los estudiantes la comprensión y el significado de las matemáticas y es en estas experiencias que los estudiantes aprenden de manera significativa. Al respecto uno de los entrevistados narra,

> *bueno, en primaria, el tema que nunca se me va a olvidar son las multiplicaciones. Tuve la oportunidad de experimentar por medio del juego y entender cómo, cuál, es el sentido de multiplicar. Eso fue lo que mejor aprendí y me divertí. Y en secundaria, aprendí muchísimo lo que tiene que ver con el seno, el coseno y la hipotenusa; todo ese tipo de cosas era mi tema favorito*. (Estudiante 4,9)

En la narración anterior se evidencia cómo a través del juego (play o game) la entrevistada aprende a multiplicar, aludiendo a una experiencia significativa y divertida. Al respecto

Alsina y Planas (citados en Torres y Casallas, 2021), reconocen que la "función del juego es favorecer el desarrollo intelectual, social y emocional de manera divertida, estimulante y motivadora" (p. 212).

4.1.4. El sentido de unas matemáticas con compromiso

Esta categoría se configura a partir del reconocimiento del contrato didáctico entendido de acuerdo con Chevallard (1998) como aquel que "toma ese saber cómo objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje y une en un mismo sitio a docentes y alumnos" (p. 50). A propósito de ello las narrativas de los estudiantes para profesor buscan visibilizar la importancia del contrato didáctico en el aprendizaje de las matemáticas, ya que estudiante y maestro se plantean los mismos propósitos en aras de propiciar el aprendizaje. El entrevistado 2 narra al respecto,

> *creo que por las cuestiones de la adolescencia yo me desprendí demasiado de las matemáticas y no las veía como algo de mí, porque yo me involucraba más y me sentía mucho más seguro en las cuestiones creativas, en el dibujo, en el diseño, entonces, yo decía que no soy bueno para las matemáticas, pero eso no significaba que fuera mal estudiante; porque todos tenemos distintos dones. Sin embargo, aprobé la asignatura y sufrí mucho, pero realmente, y ya haciendo un ejercicio así muy sincero, quedaron bastantes vacíos conceptuales en lo que fue décimo y once, lo que fue álgebra, trigonometría y ecuaciones, ¡tremendo!* (Estudiante 2,11)

En lo narrado por el entrevistado, se observa que su interés no estaba en la matemática, situación que ocasionó que la dejara de lado y al final sufriera para lograr aprobar la asignatura. Sin embargo, a pesar de no reprobar, quedan vacíos en el proceso de aprendizaje, por tanto, se evidencia que el estudiante no asume su responsabilidad en la tarea de aprender matemáticas.

El contrato didáctico, que establecen estudiante y maestro, se moviliza en pro del fomento de experiencias significativas para aprender, que suponen interés en los estudiantes y sentido a lo que aprende. La siguiente narrativa visibiliza cómo en el contrato didáctico, el maestro se preocupa por desarrollar acciones que permitan que el estudiante aprenda,

> *La maestra de matemáticas [de la universidad] siempre decía: «¿no entendiste?, ¿te vuelvo a explicar?», cosa que antes era [en el colegio] «si no entiende, pues busque por otro lado quién le ayude», en cambio la maestra te repetía de la misma manera, luego de otra forma, hasta que uno le entendía, ella no dejaba de explicarle. Creo que eso es un gran ejemplo y nos ayuda también a hacer las paces con las matemáticas.* (Estudiante 4, 44)

En la anterior narrativa se muestra la manera cómo la docente propicia un espacio de confianza que motiva a la estudiante en torno al aprendizaje de las matemáticas. El contrato didáctico, supone en la formación profesional grandes ventajas al fomentar la motivación, responsabilidad y autonomía en aras de aprender.

4.2. SENTIDOS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La segunda macro categoría que se expone en este artículo se relaciona con el sentido de enseñanza, su análisis se presenta en cinco categorías, todas ellas vinculadas con la transformación de la mirada hacia las matemáticas de los estudiantes para profesor, y el inicio de la consolidación de una identidad como educadores matemáticos.

4.2.1. El Sentido de unas matemáticas enseñables y aprendibles

En esta categoría, se observa cómo los entrevistados aluden a experiencias de enseñanza de las matemáticas, reconociendo que estas se pueden enseñar y aprender, siempre y cuando se haga de manera consiente, usando recursos, materiales, juegos, estrategias, y métodos que les permitan a los estudiantes dar sentido a lo que aprenden. Al respecto encontramos el siguiente relato,

> *Siento que las matemáticas son muy importantes y no tienen que ser el "coco" de primaria, ni de bachillerato, sino que es necesario darles las herramientas a los niños para aprenderlas y ver lo importantes que son en la vida, en su diario vivir, en su casa, en el colegio. No solo verla como una evaluación o una materia para pasarse; es una herramienta para el desarrollo de toda su vida*. (Estudiante 1, 23)

De acuerdo con lo narrado, se evidencia que la entrevistada reconoce que la matemática se puede enseñar y aprender, cuando el maestro afila sus herramientas didácticas y le da sentido a la matemática en el mundo del niño. El maestro tiene un papel muy importante en la enseñanza, ya que toma el conocimiento y lo estructura de tal manera que pueda ser enseñado y aprendido. Los entrevistados coinciden en proyectar una enseñanza distinta desde su práctica reflexiva, con el fin de impedir la perpetuación de modelos que distancian al maestro de propiciar experiencias significativas de enseñanza y lo restringe a la trasmisión de saberes, esta particularidad la evidencia el estudiante 2 en su relato,

> *Soy bueno en algunos temas de matemáticas, y, sobre todo, creo que soy muy bueno enseñándolas. Trato de ser muy creativo, y realmente creo que eso fue un campo fuerte muy chévere que desarrolló la universidad, el brindarnos ciertas estrategias, materiales y la motivación en las clases de matemáticas. Demostrar que las matemáticas no son difíciles, no repetir ese ciclo, porque es un ciclo que realmente se ha repetido muchas veces, donde culturalmente vemos las matemáticas como algo malo, aburrido, difícil, complicado*. (Estudiante 2,12)

Las matemáticas pueden enseñarse de una manera distinta, recursiva y divertida sin desatender sus propósitos y es a través de la formación del maestro que el entrevistado lo reconoce. Atendiendo lo anterior Martínez, et al. (citados en Torres y Casallas, 2021) manifiestan que,

> La manipulación permite el descubrimiento de propiedades de los objetos matemáticos por medio de los sentidos, pero para lograr la abstracción de dichas propiedades se requiere de modelos, por ello la manipulación permite que el niño matematice y modelice. (p. 209)

Los recursos, materiales y juegos usados en la enseñanza de las matemáticas, posibilitan que el estudiante, a partir de su manipulación exponga sus razonamientos matemáticos, atendiendo a los modelos propuestos por el maestro, y logre finalmente representar lo que aprendió. Por tanto, la necesidad de que el maestro conozca la manera de usar con sentido dichas herramientas. Al respecto Torres y Casallas (2021) manifiestan que,

> en la enseñanza de las matemáticas el uso de recursos tangibles y no tangibles se convierte en instrumento que favorece el proceso de matematización y representación de ideas matemáticas, apoyando el ejercicio de aprendizaje, dando además la oportunidad de reconocer el lenguaje matemático en el que es posible representar el mundo y sus vivencias. (p. 211)

4.2.2. El Sentido de desaprender las matemáticas para enseñarlas

En la segunda categoría de análisis se asume la tarea del maestro de desaprender, volver a aprender y enseñar las matemáticas como un compromiso que adquiere para con sus estudiantes y consigo mismo. Relacionado con lo anterior la siguiente narrativa,

> *Pienso que se ha venido transformando ese pensamiento de las matemáticas y reconociendo su utilidad en la vida. Yo quiero lograr eso, que mis estudiantes descubran, a través de las clases de matemáticas, que son importantes, que las necesitan en sus vidas, que no son tan difíciles como pueden pensar, que sepan que no son malos, que no son negados para las matemáticas.* (Estudiante 1,27)

La entrevistada en la anterior narrativa, alude a un pensamiento que en ella se ha erradicado de la matemática difícil de aprender y carente de sentido, por el contrario, busca que en sus experiencias de enseñanza sus estudiantes vean las matemáticas fáciles y útiles para la vida. Al respecto, Guacaneme, Obando, Garzón y Villa (2013) afirman que,

> Al introducir la idea de pensamiento matemático como un eje central sobre el cual estructurar el currículo de matemáticas, se trata de mostrar la importancia del desarrollo de un currículo centrado en los procesos de conceptualización de los alumnos que los lleven a la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana, integrado en unidades complejas que le brinden autonomía intelectual, y sobre todo, que se logre la formación de un ciudadano con una cultura matemática mínima que le permita mejorar su calidad de vida. (p. 20)

El maestro que enseña matemáticas tiene como misión al momento de construir e implementar el currículo, articularlo a prácticas que den cuenta de las vivencias de los estudiantes, permitiéndole dar sentido a lo aprendido y usarlo en su cotidianidad. Al respecto la siguiente narrativa,

> *Hoy en día, pienso que es bonito poder hacer algo diferente para enseñar las matemáticas, contrario a lo que pasé en la básica primaria, pues yo no veía lo útil de aprender matemáticas, solo pensaba en lo aburrida y difícil que era y en pasar la materia y ya, no me gustaba, me frustraba. Entonces como profe debo buscar maneras diferentes de enseñar y no caer en lo mismo de siempre llegar a usar el tablero y ya.* (Estudiante 3, 24)

El entrevistado reconoce que él no puede enseñar las matemáticas de la manera como las aprendió, ya que los métodos empleados no fueron los más funcionales, ni motivantes, por tanto, reconoce que el maestro que enseñe matemáticas requiere plantear experiencias desde donde el estudiante sea quien construya conocimiento matemático. Al respecto la siguiente narrativa,

> *He tenido la oportunidad de enseñar matemáticas en algunos grupos, en ocasiones los niños llegan al colegio ya mentalizados en que las matemáticas son malas, son difíciles, son complejas, pero a medida que se avanza es muy bonito ver que lo que hiciste para que aprendieran sirvió para que les guste la matemática, ver la satisfacción de ellos al lograr solucionar una situación problema, que ellos se sientan partícipes, porque son de su contexto, el utilizar otros recursos, no simplemente el tablero y copiar. (Estudiante 2, 13)*

En la narrativa anterior el entrevistado alude a la importancia de que las experiencias de la enseñanza tengan en cuenta el contexto del estudiante, haciendo uso de recursos adicionales a los convencionales dando sentido a lo aprendido, sin reducirlo a la replicación de una lección, evitando perpetuar las concepciones de las matemáticas "coco".

4.2.3. El sentido de la reconciliación con las matemáticas

En esta tercera categoría de análisis se presentan los relatos de dos de las entrevistadas, donde reivindican su relación con las matemáticas, ya que pasa de ser tormentosa a valorada y hasta amada. De acuerdo con lo anterior la siguiente narrativa de la estudiante 4,

> *Ya no me dan miedo las matemáticas. Siento que cambió la forma de ver las matemáticas a una manera más tranquila, creativa, más linda, gracias precisamente a la formación en matemáticas de la licenciatura, y me permitió reflexionar sobre la manera cómo el maestro siempre ha de influir en nuestro crecimiento como personas.* (Estudiante 4,43)

La entrevistada alude al cambio de perspectiva frente a las matemáticas, a partir de su experiencia de formación como licenciada en básica primaria y en particular en las prácticas pedagógicas. Al respecto Gamboa y Moreira (2017) manifiestan que,

> En relación con los requisitos que debe cumplir un estudiante para ser bueno en matemáticas, señalan que el gusto por la materia, la dedicación, disciplina y los buenos hábitos de estudio son fundamentales para ello. Una mente positiva también influye. (p. 21)

De la anterior reflexión es importante visibilizar que el gusto hacia la matemática es clave para su enseñanza, ya que no se podría enseñar la matemática con desagrado, sin incidir con esta impresión en los niños. Por tanto, cuando se ama lo que se hace se transmite en los estudiantes otras sensaciones. Al respecto la siguiente narrativa,

> *Hoy en día, haciendo la licenciatura en la Pedagógica, renació en mí un amor por las matemáticas que tengo escondido desde chiquita, pero no sabía que existía. Sí, me gustan las matemáticas, me encantan. Ya confirmé que soy buena para las matemáticas y que puedo hacer bien las cosas en mis clases cuando las enseño.* (Estudiante 1, 57)

La entrevistada descubre que ama la matemática gracias a la formación que recibió y sus experiencias de enseñanza, reconciliándose frente a sus experiencias en el aprendizaje poco gratas.

4.2.4. Los sentidos de ser profesor de matemáticas

Las narrativas que se presentan en esta cuarta categoría de análisis buscan visibilizar las características del profesor de matemáticas, configurado a partir de las dimensiones de la identidad del profesor "*ser, hacer* y *saber*", donde se alude a un *profesor de matemáticas comprometido, reflexivo y consiente*. En relación con ello encontramos el siguiente relato de uno de los entrevistados,

> *Para ser un buen profesor de matemáticas, primero tiene que ser bueno en lo que hace. Debe darle valor a su posición, a su labor, debe saber de matemáticas, tener una muy buena capacitación, saber enseñar. También siento que un profesor debe ser carismático con los estudiantes, tiene que ser un líder, debe ser innovador.* (Estudiante 1,22)

La entrevistada en la anterior narrativa alude a la caracterización del profesor de matemáticas, donde el reto que supone enseñarlas configura la identidad del maestro con respecto su quehacer. Al respecto Guacaneme y Salazar (2022) afirman que,

> La identidad del profesor de matemáticas debe ser entendida en su acepción básica como el conjunto de rasgos propios de un individuo o de una colectividad que los caracteriza frente a los demás. ¡Ojo! no debe ser entendida en otra de sus acepciones, es decir calidad de idéntico, por cuanto consideramos que ningún sujeto puede, ni debe ser igual a otro, ni propendemos por una homogenización de los profesores de matemáticas, así las cosas la identidad del profesor de matemáticas refiere a la condición donde ser profesor de matemáticas, es decir a los rasgos que le son propios en su calidad de profesional de la educación en y a través de las matemáticas lo diferencian de otros profesionales. (Universidad Pedagógica Nacional, 09:05)

El ser, el saber y el hacer del profesor de matemáticas se interrelacionan de manera armónica, configurando su identidad profesional, haciéndolo *auténtico*. Aludiendo a lo anterior el entrevistado 2 narra,

> *Las características que debe tener el profesor de matemáticas son conocer al estudiante, ser comprometido, amar esta profesión, debe investigar, aprender y desaprender. Yo creo además que es fundamental para un profesor ir conociendo el qué hacer docente, pero el qué hacer del estudiante también y reflexionar siempre para mejorar… si no tienes esto es mejor que empaque su maleta y chao*. (Estudiante 3, 51)

El entrevistado alude en su narrativa que la enseñanza de las matemáticas exige en el profesor que las enseña un equilibrio entre su conocimiento conceptual, didáctico e instruccional; así como la reflexión en sus experiencias de enseñanza en aras de mejorar. Lo anterior se ve reflejado en lo que expone Riveros y Monroy (2022)

> Evidenciamos que la práctica reflexiva transforma las prácticas del profesor de matemáticas, generando cambios, principalmente en sus dimensiones, cambios en su ser, en su hacer y en su saber dentro del aula de clases, como ejemplo de esto, identificamos que al hacer el análisis de cada una de los pasos del ciclo de transformación se generaba un cambio en las diferentes dimensiones de la identidad del profesor de matemáticas y como consecuencia de estos cambios se produce un crecimiento en su desarrollo profesional. Es decir, que efectivamente la práctica reflexiva se constituye como una estrategia para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. (p. 200)

Es la reflexión sobre la práctica la que posibilita en el profesor de matemáticas, que se transformen las dimensiones que configuran la identidad desde el ser, hacer y saber, posibilitando su desarrollo como profesional de la educación. Al respecto la narrativa del entrevistado 2,

> *El profesor de matemáticas no solo es profesor en la búsqueda de una profesión, sino en el amor a esto, la vocación, es capacitarse, aprender y reflexionar para mejorar la educación de los niños y que se cambie de pronto ese chip que tenemos de la educación primaria como guardería, un pensamiento que lastimosamente se ve reflejado en nuestro país*. (Estudiante 2, 37)

En la narrativa anterior el entrevistado hace evidente que la configuración del ser maestro de básica primaria que enseña matemáticas, se inscribe en la motivación que lo impulsan a desarrollarse profesionalmente, en aras de mejorar su quehacer. Conforme a lo anterior Guacaneme, Obando, Garzón y Villa (2013), reconocen que,

> no basta con la formación disciplinar del profesor de matemáticas, se requieren del profesor conocimientos profesionales (como los conocimientos didácticos) que le permitan entender la complejidad de sus prácticas profesionales y cualificar su ejercicio profesional acorde a las condiciones socioculturales del país. (p. 35)

Como se afirma anteriormente la formación del maestro de matemáticas atiende no solo a los saberes conceptuales, sino también a los didácticos que le permite hacer una lectura del contexto en el cual realiza la enseñanza de las matemáticas y mejorar en su quehacer.

4.2.5. El Sentido de la transformación

La quinta categoría de la macrocategoría relacionada con los sentidos otorgados a la experiencia de enseñanza de las matemáticas se configura desde el sentido utópico de la educación en el que el maestro adopta una postura crítica frente a su realidad, la adversidad y concibe la educación como una práctica libertaria. Aquí, se inscriben las narrativas de los maestros en formación que reconocen que ser maestro es una lucha y en torno a ello toman una postura crítica en fomento de la transformación de la educación. Al respecto la narrativa del entrevistado 3,

> *Si nosotros como profesores o como futuros profesores no le damos la importancia y no visualizamos lo importante que es el profesor en la sociedad, va a seguir así y lo que va a pasar es lo que ha pasado por muchos años y es que los niños no se interesan en educarse y se interesen tal vez en la guerra, como ha pasado en este país tanto tiempo, ya llevamos más de 50 años en guerra interna en el país y muchos de los niños viven en ese mundo aún, aprendiendo violencia.* (Estudiante 3, 74)

El entrevistado resalta la labor y lucha del docente en los ámbitos rurales, donde la violencia ha arrancado los sueños de niños, niñas y jóvenes y los ha entregado al combate. Ser docente no es una elección al azar, puesto que se vincula con una postura que moviliza transformaciones a pequeña escala desde la escuela, a pesar de las circunstancias y de las condiciones laborales de los maestros en Colombia. De acuerdo con lo anterior, las condiciones laborales precarias de algunos colegios y su explotación laboral, no supone ser una causa que determine no querer desempeñarse como maestro. Al respecto la narrativa de la entrevistada 1,

> *Realmente, en esta profesión hay ocasiones en las que se siente la desmotivación porque hay colegios en los que realmente se encargan de explotar al maestro de tal forma que uno se cuestiona. (…) Yo siento que ser docente es una vocación y que esa vocación yo la tengo desde que tenía seis años y nunca se irá. Antes como que, la llama de ese amor a esta profesión crece y crece. La verdad, dudo mucho que llegue el día en que diga: «No quiero ser más profe, no».* (Estudiante 1,39)

La entrevistada no solo expone las condiciones laborales precarias del maestro de la básica primaria, sino que contrapone esas condiciones a la valoración de su labor, es una cuestión de amor. Este tipo de reflexión posibilita en el maestro reconocer que su sentir moviliza sus acciones y en esas acciones el maestro hace escuela, plantea una postura siempre critica frente a los infortunios de la carrera docente, expresamente hablando de la remuneración económica. El estudiante 3 relata que,

> *Por esa razón yo quise ser profesor, porque yo pienso que la transformación está en la educación, a pesar de que en este país no es muy bien valorada, porque pues, la verdad, la educación docente en este país no es la más valorada, ni bien pagada.* (Estudiante 3,75)

En consonancia con lo anterior el entrevistado alude a las condiciones sociales que atraviesa el profesor no son sencillas, ya que las condiciones laborales precarias y la poca valoración de la labor docente supondrían un panorama poco alentador y desmotivante. Sin embargo, el maestro todavía supone en la educación la puerta a la transformación.

5. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Tras la recolección y análisis de las narrativas de los maestros en formación a la luz del objetivo aquí expuesto, las dos macrocategorías y las categorías que devinieron de cada una, hemos podido concluir que los profesores en formación entrevistados dan sentido significativo a su experiencia con las matemáticas como estudiantes, pero las reconfiguran a la hora de enseñarlas, pues consideran vital garantizar que la relación de los niños en particular de la básica primaria, con esta área, se proyecte de manera más significativa.

Se hace evidente que los entrevistados reconfiguran el sentido de aprender matemáticas, pues la frustración y el fracaso que padecieron en sus experiencias de aprendizaje los empodera para enseñar de manera distinta. Dicho empoderamiento lo encuentran precisamente en la formación en educación matemática necesaria para su práctica como profesores de la básica primaria.

Dicho empoderamiento da un nuevo sentido a la forma en que los estudiantes perciben y se relacionan con las matemáticas ya que aprendieron bajo un método tradicional caracterizado por enfoques de enseñanza más rígidos y centrados en la memorización de procedimientos, y sus creencias de otrora los llevaron a ver las matemáticas como una disciplina intimidante y difícil. La transformación de esa creencia es lo que los lleva a un compromiso autentico para enseñar mediante el uso de métodos, metodologías, estrategias, recursos, materiales, juegos, entre otros; que posibilita en el niño comprender más fácilmente el mundo a partir de la lectura que les permite las matemáticas.

Así, en las narrativas de estos cuatro maestros en formación, se muestra que su intención de enseñanza enfoca en la aplicación de conceptos matemáticos en situaciones prácticas, y en la resolución de problemas como un proceso que permite hacer de las matemáticas una herramienta poderosa para abordar situaciones cotidianas.

Se puede entonces concluir que de acuerdo con la pregunta y el objetivo que orientó el estudio del cual emergió este artículo, se planteó el análisis alrededor del sentido que los entrevistados le dan tanto al aprendizaje como a la enseñanza de las matemáticas. En cuanto al aprendizaje los estudiantes para profesor que hicieron parte del estudio reconocen que tienen una mirada poco tradicional y mas bien novedosa, por ejemplo, al plantear que el aprendizaje debe ser divertido, con una aplicación en la vida cotidiana, y que no debe servir como un elemento discriminatorio y excluyente para aquellos que no han desarrollado determinadas habilidades.

Muy de la mano con los sentidos otorgados al aprendizaje se da la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, así, los entrevistados coinciden en afirmar que se deben configurar como maestros alternativos a la escuela tradicional, que estén en constante aprendizaje, pero sobre todo que estén abiertos a desaprender constantemente. Las narrativas de los entrevistados permiten ver una reconciliación con sus experiencias traumáticas con las matemáticas, y que han venido caminando hacia la consolidación de su identidad como profesores de básica primaria que enseñan matemáticas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo es producto de la investigación titulada Una mirada narrativa sobre el sentido de la experiencia de ser docente de primaria que enseña matemáticas, desarrollada por CXML y LMRR, y orientada por ETP. La investigación se articuló a la investigación desarrollada por dos docentes entre ellas ETP, que se tituló Identidades narrativas de profesores de matemáticas vinculados a programas de formación de la Universidad Pedagógica Nacional, en el marco de la convocatoria 2022 del Centro de investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional –CIUP-, cuyo objetivo general fue caracterizar las identidades y trayectorias de formación de un grupo de estudiantes para ser profesor de matemáticas. Nuestra investigación se vinculó al objetivo específico, reconocer las identidades narrativas que emergen en un grupo de estudiantes vinculados en programas de formación en la Universidad Pedagógica Nacional, en relación con los sentidos que le otorgan a ser profesor de matemáticas. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles en el el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional en el vínculo de tesis de pregrado, y en el repositorio del CIUP-UPN. Si se requiere información adicional se puede consultar con los autores correspondientes, CXML, LMRR y ETP. previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria que aportaron con sus narrativas al objetivo general y específicos de la investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alberti, M. (2018). *Las matemáticas de la vida cotidiana: La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión*. Madrid: Los libros de la Catarata.

Arias, D. y Amador, J. (2024). Entre la calidez y el debido proceso. Interacciones docente-estudiante en el aula de ciencias sociales e historia. *Revista Pedagogía y Saberes, 60, 132-145*. https://doi.org/10.17227/pys.num60-20067

Bolívar, R. (2021). Experiencia, reflexión y profesionalización: el doble juego del enfoque de la práctica reflexiva en la formación de maestros. *Praxis Pedagógica*, 21(30), 222-246. http://doi.org/10.26620/uniminuto.praxis.21.30.2021.222-246

Bonilla, C. y Medina, J. (2014). Sentidos otorgados a las estrategias pedagógicas para incentivar la motivación en un proceso de aprendizaje de matemáticas en quinto de primaria del Colegio Unidad Pedagógica. Tesis para optar al título de psicólogo. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.

Castellanos Sánchez, M. T. (2018). 1B079 Sentido otorgado a las situaciones de la práctica docente: Un estudio con profesores en formación. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (Extraordin). https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/8851

Cerquera, A, Corredor F., Cuero C, y Rivera, V. (2016). *Sentido y Significado de ser Docente: Reflexiones para re-pensar la educación*. *Plumilla Educativa*, 18(2), pp. 303–317. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.18.1970.2016

Cerrón Rojas, W. (2019). *La investigación cualitativa en educación*. *Horizonte de la Ciencia*, 9(17), 1-8. Recuperado de: https://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/219

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. *Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUÉ.

Díaz Meza, C. J., (2007). Narrativas docentes y experiencias escolares significativas: relatando el sentido de ser maestro. *Revista Guillermo de Ockham*, 5(2),55-65. [fecha de Consulta 16 de enero de 2024]. ISSN: 1794-192X. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=105316865004

Díaz, J., y Vanegas, N. (2017). ¿Los afectos afectan al estudiar Matemáticas? Algunas representaciones en torno a las Matemáticas construidas por estudiantes de la Licenciatura en Educación Infantil antes de su ingreso a la UPN. Tesis para optar al título de licenciada en educación infantil. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Gamboa, R., y Moreira, T. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 17(1), 1-45.

Garzón, F. (2017). La Formación de Profesores en el Proyecto Curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Tesis para optar al título de licenciada en educación básica con énfasis en ciencias sociales. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

González Rey, F. (2009). Historical relevance of Vygorsky´s work: its significance for a new approach to the problem of subjectivity in psychology. *Outlines.Critical Practice Studies*, 1, 59-73.

González-Rey, F. L. (2010). Las categorías de sentido, sentido personal y sentido subjetivo en una perspectiva histórico-cultural: un camino hacia una nueva definición de subjetividad. *Universitas Psychologica*, 9(1), 241-253.

Guacaneme, E. y Salazar, C. (2022). Catedra Doctoral en Educación y Pedagogía 2022- 1: Educación en ciencias y matemáticas: contextos, desafíos y oportunidades, Lección 10: Aspectos esenciales en la constitución de la identidad del profesor de matemáticas como oportunidades y retos para la formación. https://www.youtube.com/watch?v=L5MFOd5417Y

Guacaneme, E., Obando, G., Garzon, D., y Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, 11-49.

Jiménez Espinosa, A., Limas Berrío, L. J., y Alarcón González, J. E. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis y Saber*, 7(13), 127–152. https://doi.org/10.19053/22160159.4169

Larrosa, J. (comp) (2009). *Experiencia y alteridad en educación*. Rosario: Homo sapiens.

Llinares, S. (2016). ¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *Cuadernos,* 15, pp. 57-67.

Lopezosa, C. (2020). *Entrevistas semiestructuradas con NVivo: pasos para un análisis cualitativo eficaz*. En Lopezosa C, Díaz-Noci J, Codina L (Eds.), Methodos Anuario de Métodos de Investigación en Comunicación Social, 1 (pp. 88-97). Barcelona: Universitat Pompeu Fabra.

Lupiáñez, L. (2010). Competencias del profesor de educación primaria. Documento no publicado (Informe). Granada: Universidad de Granada.

Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). Bordón*: revista de pedagogía*, 63(4), 95-110.

Muñoz, C. X. & Romero, L. M. (2023). *Una mirada narrativa sobre el sentido de la experiencia de ser docente de primaria que enseña matemáticas*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/19054.

Penafiel, B., Stoehr, K., y Martínez, S. (2016). In-service teachers narrative experiences of mathematics anxiety. [Experiencias narrativas de profesores de educación básica con la ansiedad matemática] En M.B. Wood, E.E. Turner, M. Civil, y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 395–401). Tucson, AZ: The University of Arizona. [Enlace: https://scholarcommons.scu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1063&context=tepas]

Riveros, D., y Monroy, Z. (2022). *La práctica reflexiva, una estrategia para el desarrollo profesional del docente* *de Matemáticas*. Tesis para optar al título de Magíster en Docencia de las Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.

Torres, E., y Casallas, L. (2021). Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas. *Infancias imágenes*, 20(2), 1-10

Torres, R. A. (2023). Experiencias para la configuración de los profesores de matemáticas en formación como sujetos políticos en la Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/18482

Torres, W. (2016). Incidencia de la Historicidad en la Formación Pedagógica de los Docentes de Matemáticas sobre la Realización de la Política Educativa para el Área de Matemáticas. Tesis para optar al título de licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
83-102
Recibido: 15/08/2023
Aprobado: 13/09/2023

Artículos de investigación

PERCEPCIÓN ESTUDIANTIL DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL USO DE TICs EN CURSOS DE MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

STUDENT PERCEPTION OF THE IMPLEMENTATION ON THE USE OF INFORMATION AND COMUNICATION TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS COURSES

Byron Solano Herrera[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-3374-8158

Claudio Zúñiga Retana[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0006-6825-5677

Adriana Arias Guerrero[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0001-2362-3062

Javier Trejos Zelaya[4]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4459-9188

RESUMEN

En este artículo se presentan los principales hallazgos de una investigación que aborda, desde la visión del estudiante, la implementación de las tecnologías de la información y comunicación (TICs) en cursos del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Costa Rica. La metodología utilizada se basa en un enfoque cuantitativo del tipo descriptivo. Se explican variables como TICs, percepción de los estudiantes ante el uso de estas y rendimiento académico. Con base en tales definiciones se construyeron dos instrumentos de recolección de datos, los cuales fueron dotados de validez y confiabilidad. Una vez calibrados, los instrumentos fueron aplicados en dos momentos a una muestra elegida a conveniencia. El análisis de la información se llevó a cabo mediante métodos estadísticos, y se mostraron como principales resultados creencias positivas respecto al uso de las TICs, unidos a una alta aprobación de los estudiantes, donde destacó un rendimiento alto de estudiantes repitentes. Una de las conclusiones fue que el uso que dan los estudiantes a las TICs durante sus procesos de estudio es la agilización y verificación de resultados en la comprensión de conceptos y resolución de ejercicios.

1 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 11501-2060. Correo electrónico: byron.solano@ucr.ac.cr

2 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 11501-2060. Correo electrónico: claudio.zunigaretana@ucr.ac.cr

3 Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 474-2050. Correo electrónico: aariasg@uned.ac.cr

4 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 11501-2060. Correo electrónico: javier.trejos@ucr.ac.cr

Palabras clave: Matemática, educación, percepción, tecnología.

ABSTRACT

This article presents the main findings of an investigation that addresses the implementation of information and communication technologies (ICTs) in courses offered by the Department of Applied Mathematics at the University of Costa Rica from the student's perspective. The methodology used is based on a quantitative approach of the descriptive type. Variables such as ICTs, students' perception of their usage, and academic performance are explained. Based on these developments, two data collection instruments were constructed, which were endowed with validity and reliability. Once calibrated, the instruments were applied at two points in time to a conveniently chosen sample. The information analysis was conducted using statistical methods, revealing as main results positive beliefs regarding the use of ICTs along with high student approval rates, highlighting a notable performance by repeating students. One of the conclusions drawn was that students utilize ICTs to expedite and verify results in understanding concepts and resolving exercises during their study processes.

Key words: Math, education, perception, technology.

1. INTRODUCCIÓN

La poca información centrada en la perspectiva del estudiante en proyectos que involucran el uso de TICs y la enseñanza de la matemática en la universidad motivó a describir la percepción del estudiantado, con el fin de generar información que permita realizar mejoras en la práctica educativa, tanto a nivel docente como administrativo.

Las tecnologías de la información y comunicación han incursionado en la actualidad en muchas ramas del conocimiento, entre ellas, la educación matemática. Ejemplo de esto es la implementación del Proyecto Integración de las TIC en los cursos de Matemática (PITM) en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. Como explica el profesor Edgardo Arita (comunicación personal, 31 agosto, 2017), coordinador del proyecto, tal iniciativa tiene origen desde 2006 y se consolida como proyecto en 2009. Consiste en utilizar las TICs como herramientas para promover un nuevo modelo de docencia más interactivo, dinámico y colaborativo, con el fin de reforzar el aprendizaje del estudiantado en algunos de los cursos de matemática aplicada, los cuales tienen una modalidad denominada con uso de computadoras. La metodología consiste en impartir tres de las cinco horas presenciales de clases en un laboratorio de cómputo acondicionado para que tanto el docente como los estudiantes puedan tener acceso a una computadora con diversos programas especializados en matemática. Asimismo, PITM permite a docentes compartir sus experiencias impartiendo cursos con computadoras, al tiempo que se discuten promociones y resultados relacionados con tales asignaturas.

El proyecto enfoca su atención en la labor docente, dando poca o nula atención a la perspectiva del estudiantado ante el uso de las computadoras, lo cual genera un vacío de conocimiento al respecto. Bajo este panorama y reconociendo la importancia que dan autores como Villalobos, Melo y Pérez (2010) en prestar atención a la visión del estudiante sobre la práctica educativa; y Vilatuña, Guajala, Pulamarín y Ortiz (2012) acerca de la importancia de la percepción en el accionar del individuo, es que se gesta la presente investigación.

Desde un enfoque cuantitativo, se tiene como objetivo analizar, de forma descriptiva, la implementación de las TICs desde el punto de vista de los estudiantes matriculados en los cursos del Departamento de Matemática Aplicada, de la Universidad de Costa Rica, con empleo de computadoras, en el II ciclo 2018.

Los antecedentes se clasificaron en tres vertientes: la aplicación de las TICs a la educación a nivel general, a nivel de enseñanza de la matemática y en el desarrollo de metodologías innovadoras en el ámbito de la educación matemática costarricense. Se encontraron como patrones comunes la evaluación de la integración de las TICs en la educación superior y la convergencia con ciertas variables de nuestro interés, como el rendimiento académico y la percepción con relación a metodologías que involucran el uso de la tecnología a nivel universitario.

En la sección 2 se presenta el referente teórico en que basamos nuestro estudio, el cual comprende la percepción desde tres dimensiones: creencias, ambiente social y metacognición, y su relación con las TICs. En la sección 3 se describe la metodología utilizada. En la sección 4 se muestran los resultados obtenidos. Se finaliza con las conclusiones en la sección 5.

2. REFERENTE TEÓRICO

Es fundamental para el desarrollo del trabajo una clara definición de los conceptos a utilizar y cuantificar, por lo que en esta sección se profundizará en las variables de percepción, TICs y rendimiento académico.

2.1. PERCEPCIÓN CON RESPECTO AL USO DE LAS TICS

En las siguientes líneas se define percepción para efectos de este estudio, enfatizando tres dimensiones de tal constructo, las cuales serán expuestas mostrando su impacto en el concepto y lo que representan.

El concepto de percepción es sumamente amplio y se debe dar la atención que merece como constructo y proceso. La percepción se entenderá según la postura desde la que se mire; no obstante, Coren, Ward y Enns (2001) explican que el tema común en los estudios de la percepción es la forma en que las personas construyen una representación consciente del entorno. Hernández (2017) dicta una serie de definiciones del término desde distintas posturas: empirista, gesaltiana, cognitiva, conductual, gibsoniana, computacional, psicoanalista y desde el procesamiento de la información.

Para esta investigación se tienen varios puntos de encuentro con diversos enfoques, a saber: el enfoque empirista, el cognitivo, el psicoanalista y el de procesamiento de la información. Se coincide con el enfoque empirista en el papel que juegan los sentidos en la recepción de estímulos exteriores; sin embargo, la percepción no se queda ahí, ya que como explica el enfoque cognitivo, la cognición permite dar una mejor interpretación a los estímulos recibidos. Asimismo, tal y como expone el enfoque de procesamiento de la información, la percepción no debe ser tratada de forma individual, sino dentro de un colectivo con otros procesos de la mente. Finalmente, se concurre con el psicoanálisis en el papel de la percepción como un proceso subjetivo al estar permeado por el inconsciente singular de cada persona. Estas posturas nos permiten estudiar definiciones acordes que permitirán generar el constructo que guiará el resto del estudio.

Desde una visión psicológica, Kelly explica que la percepción es el "proceso mental de interpretar y dar significado a la sensación de un objeto determinado" (1982, p. 69). Convergente con la definición anterior, Morris y Maisto (2005) describen la percepción como el "proceso de crear patrones significativos a través de la información sensorial pura" (p. 453). Dos procesos resaltan hasta el momento: la recepción de un estímulo y la creación de un significado. No obstante, hay factores que toman un papel preponderante, como lo son las experiencias previas. Vargas (1994) explica como los estímulos representados por experiencias nuevas son contrastados con experiencias previas para generar interacción con el entorno.

Otro de los factores que incide en este proceso de construcción de significados es el ambiente. Guardiola (2014) da importancia al ambiente en su definición de percepción, al construirla como el conjunto de procesos y actividades relacionadas con la estimulación que alcanza a los sentidos, mediante los cuales obtenemos información respecto a nuestro hábitat, las acciones que efectuamos en él y nuestros propios estados internos.

Finalmente, Vilatuña, et al., (2012) citando a Munkong y Juang (2008), presentan una definición del proceso perceptivo en la que ponen especial atención al papel de la cognición:

> El proceso perceptivo es el mecanismo sensorio-cognitivo de gran complejidad mediante el cual el ser humano siente, selecciona, organiza e interpreta los estímulos, con el fin de adaptarlos mejor a sus niveles de comprensión, mediante el cual es posible formarse subjetivamente un cuadro coherente y significativo del mundo físico real del cual forma parte, así, identifica, recupera, y responde a la información recibida a través de los sentidos. (p. 128)

Con estos indicios podemos entender la percepción como un proceso mental de interpretar y dar significado a la información sensorial con el fin de crear significados o juicios. No obstante, de las definiciones previas se pueden desprender tres dimensiones que nos permitirán analizar el término. La primera dimensión es el aspecto subjetivo desde las experiencias previas, que profundizaremos como creencias, la segunda será el ambiente social, y finalmente la metacognición.

2.1.1. Creencias

Un enfoque importante a la hora de considerar la percepción de un estudiante son sus experiencias previas, ya que autores como Kelly (1982), Vargas (1994) y Coren et al. (2001) exponen que hay un momento en el proceso perceptivo cuando se recurre a ellas para interpretar nuevas experiencias. No obstante, más allá de las experiencias, están las creencias. Como explican Falsetti y Rodríguez (2005), la percepción de un alumno acerca del uso de los recursos didácticos contiene un componente o elemento afectivo representado por las creencias. La conexión que hay entre las experiencias y las creencias es que las primeras son la base de las segundas (Gómez, 2000; Vila y Callejo, 2005).

De esta manera, pondremos énfasis en el papel de las creencias en nuestro constructo de percepción, ya que como explica Francica (2016), el sujeto siempre buscará la forma de interpretar los resultados de la realidad de modo tal que sean congruentes con sus creencias.

Pulido (2014) define las creencias como conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicar y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales. A pesar de que las creencias no son un conocimiento objetivo, según Diez (2017), éstas generan un efecto en la percepción y una disposición o tendencia a actuar. De manera particular, en el área de Educación Matemática, Gamboa y Moreira (2017) explican como las creencias tienen un impacto en el compromiso, desempeño y rendimiento en la disciplina.

Finalmente, Gómez (2000) explica como los estudiantes logran crear resistencia ante metodologías que no van acorde a las creencias de cómo debe ser la educación para ellos. De esta manera concluimos que las creencias son un factor que condiciona la percepción de los estudiantes.

2.1.2. Ambiente Social

Nuestro insumo del concepto de percepción va más allá de ser un proceso de estímulo y respuesta; el flujo de información que se da con el ambiente social representa un elemento por considerar. Navarro (2013) expone que el entorno donde se vive y las personas con las que se comparte intervienen en el comportamiento psicológico, y guían de cierto modo el comportamiento y el funcionamiento cognitivo del estudiante.

La importancia del ambiente en la percepción tiene su influencia en el recibimiento e interpretación de estímulos:

> La manera de clasificar lo percibido es moldeada por circunstancias sociales. La cultura de pertenencia, el grupo en el que se está inserto en la sociedad, la clase social a la que se pertenece, influyen sobre las formas como es concebida la realidad, las cuales son aprendidas y reproducidas por los sujetos sociales. (Vargas, 1994, p.49)

En el contexto de educación universitaria donde se desarrolla la presente investigación, el ambiente social toma un lugar preponderante ya que los estudiantes son parte de un sistema social universitario donde se mezclan y discuten diferentes entes con creencias, experiencias y criterios particulares. Este intercambio constante trae como consecuencia la creación de nuevas sensaciones y significados que modifican la percepción de los estudiantes.

El ambiente social se entenderá como la interacción que se da entre un sujeto, el cual, en este caso, se trata de cada estudiante matriculado en los cursos del Departamento de Matemática Aplicada en la modalidad con uso de computadoras, junto con sus grupos de pares y profesores.

De tal definición se destacan dos elementos importantes: propiedades particulares y los sujetos que intervienen. Por un lado, la clase de modalidad con uso de computadoras se caracteriza, según el profesor Edgardo Arita (comunicación personal, 31 agosto, 2017), por el uso de las computadoras como herramienta de mediación pedagógica, metodologías de clase interactivas y colaborativas, rubros evaluativos particulares con respecto a un curso fuera de esta modalidad y el uso de diversos medios de comunicación y de consulta para el profesor y los estudiantes.

Por otra parte, el papel de los docentes y los grupos de pares en el trabajo tendrá un énfasis particular ya que estos de manera particular juegan un papel primordial en la construcción del ambiente educativo. Desde Vygotsky (1995) y pasando por Rico (1995) se presenta el aprendizaje como un proceso dinámico de interacciones del alumno con el profesor y compañeros. Ya diversos estudios como los de Soca (2002) y Rodríguez y Escudero (2000) evidencian como las relaciones positivas entre estudiantes pueden potenciar la consecución de logros educativos por parte de los alumnos.

2.1.3. Metacognición

Linarez y Guzmán (2014) explican como Flavell analiza estudiantes conscientes de los procesos y estrategias cognoscitivas que realizaban, corroborando así que los humanos son capaces de razonar acerca de sus propios procesos de aprendizaje. De esta manera Flavell

(1996) expone que la metacognición es el conocimiento sobre el conocimiento, además agrega que se trata de otro conocimiento o actividad cognitiva que regule cualquier aspecto de la cognición. Además, propone que la metacognición se pone en práctica cuando se reflexionan y regulan procesos como la adquisición de conciencia de las dificultades al aprender algo.

Estos primeros pensamientos funcionaron de insumo para otras definiciones posteriores, así como caracterizaciones, de las cuales se resaltan algunas. De acuerdo con Weinstein y Mayer (1986), citados por Muller (2009), la metacognición es el conocimiento y el autocontrol que una persona tiene sobre su propia cognición y actividades de aprendizaje, lo que señala que se tiene conciencia de sus estilos de pensamiento, el contenido de los mismos y la habilidad para controlarlos, para poder organizarlos, revisarlos y modificarlos del aprendizaje y problemas a resolver.

Buron (1996) explica que

> la metacognición es el conocimiento y regulación de nuestras propias cogniciones y de nuestros procesos mentales: percepción, atención, memorización, lectura, escritura, comprensión, comunicación; qué son, cómo se realizan, cuándo hay que usar una u otra, qué factores ayudan o interfieren su operatividad. (p. 10)

Con estas ideas definimos metacognición como aquellos procesos cognitivos en los cuales el individuo interpreta y genera conocimientos que, a su vez, son utilizados en la regulación de nuevos saberes. En este sentido la metacognición involucra que los sujetos puedan identificar y reconocer sus fortalezas y debilidades cognitivas. Esto es fundamental porque se puede aplicar la metacognición como una vía para obtener los conocimientos de los estudiantes sobre el aprendizaje y la enseñanza que han recibido en un ambiente educativo que implemente las TICs.

En relación con las definiciones de percepción mencionadas anteriormente, la metacognición se enfoca en la parte de las interpretaciones que se encuentran ligadas con la supervisión y control de los procesos cognitivos que se desarrollan con base en los estímulos percibidos del ambiente. Asimismo, en la percepción, la metacognición radica su importancia en modificar pensamientos establecidos para poder adaptarlos a las distintas situaciones o generar nuevos conocimientos. Así se da un proceso cognitivo con el fin de dar un significado a los estímulos recibidos.

La metacognición se categoriza en dos componentes: una declarativa y otra procedimental. Falsetti y Rodríguez (2005) definen el conocimiento declarativo mediante el cual “el sujeto es capaz de reconocer qué tipo de acciones y cuáles tareas le son beneficiosas para aprender, reconocer sus recursos intelectuales y sus habilidades como aprendiz” (p. 322); mientras que los autores refieren el conocimiento procedimental al cómo implementar lo aprendido.

Así, la componente declarativa es la que tiene mayor peso en relación con la percepción; ya que la percepción que tiene un estudiante acerca de las interacciones didácticas que coadyuven a su aprendizaje en Matemática se encuentra relacionada con el aspecto declarativo de la metacognición (Falsetti y Rodríguez, 2005).

De esta manera, el fin de la metacognición es permitirnos conocer las reflexiones que ha realizado, realiza o realizará el o los estudiantes sobre la información percibida en su aprendizaje y enseñanza asistida por las TICs; y con un menor peso se toma en consideración la componente procedimental, ya que es un fin conocer los efectos percibidos por el estudiante al implementar las TICs.

2.2. TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN

Existe gran cantidad de definiciones acerca de las TICs en la literatura. No obstante, mientras algunas se enfocan solamente en el acceso a la información, otras se enmarcan en la comunicación. Para este trabajo, además de contemplar los elementos mencionados anteriormente, dirigiremos nuestra atención a aquellas que contemplen en cierto grado el aspecto social. En una investigación realizada en Cobo (2009), en la que analizan diversas definiciones de TICs, se mostraron algunas características sobresalientes, las cuales son: la vinculación de aparatos electrónicos como soporte para el desarrollo de comunicaciones e interacción de información disponible; la comunicación como elemento que permite derribar las barreras del tiempo y el espacio; el acceso a la información que permite a personas reunir, distribuir, almacenar, modificar, proteger y actualizar contenidos.

Una definición de TICs que se aproxima a lo descrito es la de Baelo y Cantón (2009):

> Son una realización social que facilitan los procesos de información y comunicación, gracias a los diversos desarrollos tecnológicos, en aras de una construcción y extensión del conocimiento que derive en la satisfacción de las necesidades de los integrantes de una determinada organización social. (p. 2)

De manera que para esta investigación se entienden por TICs a aquellas herramientas tecnológicas cuyo funcionamiento se basa en computadoras, teléfonos y tabletas inteligentes de forma directa o indirecta, que pretenden impulsar la comunicación entre personas y la interconectividad de los individuos con la información y, por tanto, tienen un carácter de utilidad en la sociedad y la educación.

Es necesario enmarcar nuestros pensamientos acerca de las TICs en ambientes propiamente educativos, para tener una base que permita crear dimensiones o aspectos específicos a medir durante el trabajo. En este sentido, tal y como explica Burbules (2001) en Raichman, Sabulsky, Totter, Orta y Verdejo (2011):

> Las TIC no se tratan de meras herramientas, en el sentido de objetos usados para alcanzar determinados fines ni de sostenerlas desde una visión de panacea, según la cual las TIC traen consigo posibilidades intrínsecas capaces de revolucionar la educación. Por el contrario, las TIC son ahora un entorno o ambiente en el cual suceden cosas, el conocimiento se transforma, los modos de comunicación se diversifican, la interacción se intensifica y todo ello hace posible el establecimiento de formas diferentes de vínculos pedagógicos, y se promueven ámbitos propicios para la colaboración. (p. 24)

La vinculación de TICs y educación responde a una necesidad de preparar a la población para que se incorpore a una sociedad del conocimiento e información. Así, Torres y Redondo (2004) en Acosta (2016) mencionan que las TICs modifican de manera significativa los paradigmas educativos convencionales; y también contribuyen a la creación de nuevos modelos de enseñanza y aprendizaje, puesto que la educación no es ajena a los procesos de tendencia tecnológica.

Es con base en el aporte teórico de las TICs que estas se enmarcan en tres dimensiones:

1. Acceso a recursos tecnológicos. Esta dimensión está relacionada con la incidencia con la que los estudiantes utilizan las TICs en sus procesos de estudio. El acceso no debe confundirse con la disponibilidad de los recursos tecnológicos de los estudiantes, sino que se refiere a la frecuencia con que los estudiantes implementan la tecnología en su aprendizaje.

2. Comunicación digital. Se entenderá la comunicación digital como la facultad de la tecnología que le permite al estudiante intercambiar información y datos con sus compañeros o docentes de forma sincrónica o asincrónica. En Castro, Guzmán y Casado (2007) se expone que los medios digitales contribuyen a realizar con efectividad y eficiencia los procesos de aprendizaje; tanto individuales como grupales, además de facilitar que la información y el conocimiento de cualquier tipo puede ser enviado, recibido, almacenado y posteriormente recuperado, sin ninguna limitación geográfica; se eliminan así restricciones de espacio y tiempo en el campo educativo.

3. Beneficios obtenidos al usar las TICs. Esta dimensión responde al hecho de que, tal y como se expresa en UNESCO: “el solo acceso a la tecnología no se traduce automáticamente en mejores resultados de aprendizaje” (2013, p. 29). Los beneficios obtenidos por los estudiantes dependerán del uso que estos le den, por tal motivo resulta importante conocer desde la perspectiva del estudiante cómo se refleja el uso de la tecnología en beneficio de su proceso de aprendizaje. Entenderemos *beneficio* desde su noción más intuitiva, como la mejora que puede experimentar el alumno en su proceso de formación gracias a las TICs.

2.3. RENDIMIENTO ACADÉMICO

El rendimiento académico abarca distintas dimensiones. Yangali y Rodríguez (2016) explican que es un “concepto multifacético, que está relacionado con diferentes dominios de aprendizaje, que se mide de formas distintas y con diferentes propósitos” (p. 14). No obstante, según los fines de esta investigación se entenderá de una forma más objetiva, como la nota final de cada estudiante en el curso con computadora matriculado. Cascón (2000) citado en Ruiz, Ruiz y Ruiz (2010) analizó

> algunas propiedades psicométricas de las calificaciones escolares, con el objeto de observar si guardan la bondad psicométrica suficiente para ser utilizadas como criterio del rendimiento académico, demostrando que se justifica el uso científico de la media de las calificaciones escolares como criterio de rendimiento escolar. (p. 1)

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1. ENFOQUE

Se utilizó el modelo cuantitativo como enfoque para realizar la investigación, ya que brinda las pautas para la recolección de datos a utilizar y el procesamiento de los mismos. De este modo, y a la luz de un paradigma positivista, se buscará maximizar la objetividad y la rigurosidad en la adquisición y análisis de datos.

De manera particular, el trabajo se clasifica como no experimental ya que, siguiendo a Hernández, Fernández y Baptista (2010), en esta investigación no se manipulan variables deliberadamente. De manera que no se influyó en el desarrollo de las lecciones ni en la manipulación de las herramientas tecnológicas utilizadas en las clases, sino que se analizaron fenómenos en su contexto natural.

3.2. UNIDADES DE ANÁLISIS

Para la población se consideran los 241 estudiantes matriculados en los cursos del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Costa Rica, bajo la modalidad *con uso de computadoras* en el II ciclo 2018. Tramitados los permisos con las entidades correspondientes, se programó la aplicación de los instrumentos en horarios lectivos de los cursos con laboratorio de computadoras en semanas específicas. Por variables no controlables, como la deserción y la ausencia de estudiantes en los momentos de la aplicación de los cuestionarios, es que se decide utilizar un muestreo no probabilístico por conveniencia. De esta manera, la muestra consistió en 120 estudiantes presentes en los momentos de aplicación de los instrumentos.

3.3. TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN

Para recolectar los datos acerca de la percepción y uso de las TICs de la muestra en cuestión, se procedió a la aplicación de dos cuestionarios: uno en la segunda semana del II ciclo 2018, y el otro en la semana catorce del mismo ciclo. Ambos instrumentos se sometieron a un riguroso proceso para obtener la mayor fiabilidad (confiabilidad-validez). Lo anterior a la luz de la Teoría Clásica de los Test (TCT).

Por tanto, mediante esta dimensión queremos obtener información para analizar si se está cumpliendo el fin de la comunicación digital expresada previamente por los autores. Para esta investigación en particular, a los estudiantes se les cuestionará por medio de los foros de Moodle, la aplicación de la mensajería instantánea WhatsApp y el correo electrónico.

Para analizar la confiabilidad se optó por un test de consistencia interna basado en el coeficiente alfa de Cronbach. Por otra parte, la validez de contenido se empleó mediante un juicio de expertos; mientras que para la validez de constructo se aplicó un análisis factorial mediante un análisis de componentes principales.

3.4. VALIDEZ DE CONTENIDO: JUICIO DE EXPERTOS

Para esta sección se contó con la colaboración de siete profesores de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica con experiencia impartiendo clases, de los cuales cinco se han enfrentado a procesos de elaboración de pruebas estandarizadas en departamentos específicos de la universidad. De esta forma, los jueces evaluaron los ítems bajo siete criterios: redacción, escala, comprensión, orden, pertinencia, congruencia y relación. A cada juez se le entregó una tabla de especificaciones y se elaboró un porcentaje de acuerdo (PA) que permite establecer cuáles opiniones se deben acoger con mayor peso para la mejora de los instrumentos.

Para el primer cuestionario se presentó un acuerdo en la mayoría de las categorías, por lo que se atendieron todas las sugerencias dadas. El PA en los criterios de orden y redacción no fue tan alto; por tanto, para la toma de decisiones se analizaron más profundamente las interacciones de los jueces por pareja, de modo que se atendieron sugerencias de colocación y redacción de ítems particulares.

Para el segundo cuestionario hubo mayores aportaciones de los jueces en la sección relacionada con la frecuencia y beneficios de las TICs.

3.5. VALIDEZ DE CONSTRUCTO: ANÁLISIS EN COMPONENTES PRINCIPALES (ACP)

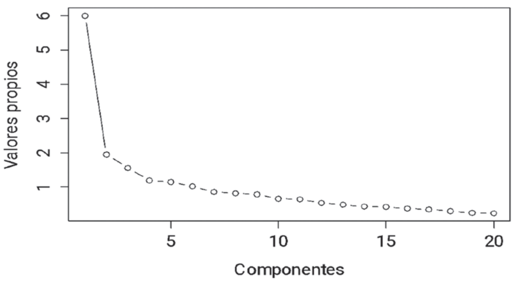
El ACP se realizó a ambos cuestionarios tanto en la prueba piloto como en la versión final, verificando previamente que el determinante de la matriz de correlaciones y el índice KMO en cada instrumento fuesen aceptables (valores cercanos a cero y superiores a 0.7, respectivamente) para proceder con el análisis. La idea de este proceso fue agrupar ítems que compartan características en común en componentes que contengan la mayor información posible de los ítems originales y que no se correlacionen entre sí. Además, buscar la presencia de un constructo principal, que en nuestro caso vendría a representar a la percepción.

Para la prueba piloto del primer cuestionario se pudo notar que las primeras seis componentes principales cumplieron con los criterios establecidos; acumularon un 64.70% de la inercia total y tuvieron cada una de ellas valores propios superiores a la unidad. Para el segundo cuestionario se consideraron cinco componentes principales, las cuales acumularon un 60.16% de inercia total.

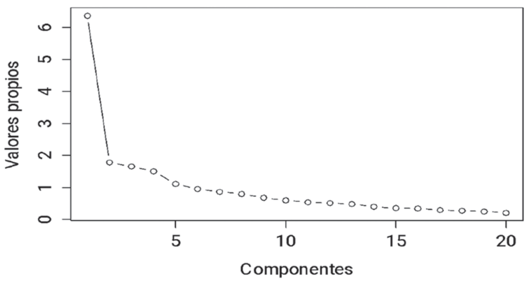
De manera similar, el ACP en las versiones finales de ambos cuestionarios mostró como cinco componentes cargan una cantidad suficiente de inercia acumulada; respectivamente, 59.18% y 62.15% para los cuestionarios 1 y 2.

Figura 1 – Gráficos de sedimentación de los cuestionarios finales.

(a) Para el cuestionario 1



(b) Para el cuestionario 2



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 1 se muestran los gráficos de sedimentación de las versiones finales de los cuestionarios 1 y 2. En cada uno de ellos se identifica la presencia de una componente cuya pendiente está notablemente más inclinada que el resto; esto representa que existe una variable sintética con porcentaje de inercia superior en cada cuestionario. De este modo, se puede dotar de cierto grado de unidimensionalidad a los instrumentos, y se garantiza a su vez una validez aceptable.

3.6. CONFIABILIDAD: ALFA DE CRONBACH

Una consistencia interna adecuada para esta clase de investigaciones viene dada por un coeficiente alfa entre 0.70 y 0.90. En la versión piloto del primer cuestionario se obtuvo un coeficiente de 0.82; mientras que en el piloto del segundo cuestionario se obtuvo un 0.83, lo cual se considera aceptable en ambos casos.

Para las versiones finales se obtuvo un 0.81 y 0.83, respectivamente, siendo así que los instrumentos utilizados se consideran con consistencia interna adecuada.

Las pruebas realizadas en el pilotaje permitieron realizar mejoras considerables a las versiones finales. De manera particular, se resalta que uno de los ítems de la versión piloto fue eliminado; además, los ítems 5, 7 y 21 (20 en la versión final) fueron modificados en aspectos de redacción. El ítem 12 (11 en la versión final) mostró ligeros problemas en la etapa de calibración; no obstante, se conserva sin cambios por la importancia que tiene para la dimensión del ambiente social. Se debe destacar que los ítems 11 y 20 de los instrumentos finales fueron escritos de manera negativa y analizados con las modificaciones del caso.

4. RESULTADOS

4.1. DATOS DE UBICACIÓN

En la investigación participaron 120 personas estudiantes, provenientes de un total de 24 carreras, donde la que tuvo una mayor frecuencia fue Ingeniería Civil con un total de 28 estudiantes, el doble de participantes que la segunda carrera con mayor frecuencia: Ingeniería Química. El resto de las carreras mantuvieron una cantidad de 1 a 8 estudiantes. Se analizaron siete cursos: Cálculo I (MA1001) que contó con 21 estudiantes, Álgebra Lineal (MA1004) con 15 estudiantes, Ecuaciones Diferenciales (MA1005) con 14 estudiantes, Introducción al Análisis Numérico (MA1006) con 23 estudiantes, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas (MA2210) con 11 estudiantes, y Cálculo para Ciencias Económicas I (MA1021) y Cálculo I para Ciencias de la Salud (MA1210), ambos cursos con 18 estudiantes cada uno.

Con respecto al tema de la aprobación, se debe mencionar que, de los 120 estudiantes, 16 no aprobaron, por lo que se tuvo casi un 87% de aprobación.

Uno de los temas de esta sección que más llama la atención es con respecto a los repitentes. En total, 39 estudiantes no estaban cursando la asignatura por primera vez. Este 32.50% de la muestra se clasificó en tres categorías: la primera categoría incluye a los que previamente han matriculado el curso al menos una vez en la modalidad *con uso de computadoras* y nunca en la modalidad tradicional; la segunda a los que han matriculado el curso previamente en la modalidad tradicional, pero nunca en la modalidad con laboratorio; y la tercera a los que han matriculado el curso al menos una vez en cada modalidad. La segunda categoría tuvo un total de 25 estudiantes, la primera 9, y la tercera 5.

De los 39 repitentes se resalta el hecho de que 31 aprobaron el curso, donde se destaca que 18 pertenecen a la segunda categoría, lo cual evidencia como esta modalidad favorece de manera positiva la promoción a la población rezagada.

4.2. PERCEPCIÓN

A cada estudiante se le presentaron 20 ítems tipo escala Likert tanto al principio como al final del ciclo lectivo, relacionados con las dimensiones de percepción presentadas en el marco teórico. En esta sección contrastaremos algunos de los resultados más importantes con respecto a tales ítems, tanto en la primera como en la segunda aplicación. En este punto es importante resaltar que casi el 80% de la muestra matriculó por primera vez un curso en la modalidad *uso de computadoras*, por lo que gran parte de las respuestas en el primer cuestionario es producto de sus experiencias previas, que pueden involucrar el uso de TICs en su aprendizaje matemático en diversos contextos, y no necesariamente en ámbitos de educación superior.

Para cada uno de los ítems de percepción se realizó un porcentaje acumulado de las categorías "de acuerdo" y "muy acuerdo"; a este valor lo denotaremos por comodidad como *porcentaje de aceptación*, ya que representa la cantidad relativa de estudiantes que está al menos de acuerdo con cada afirmación. En la Tabla 1 se muestra el porcentaje de aceptación para cada ítem en ambos cuestionarios.

Tabla 1 – Frecuencia acumulada relativa para las categorías *De Acuerdo* y *Muy De Acuerdo* de la escala de percepción por cuestionario, según ítem.

Ítem	Aplicación		Diferencia
	Cuestionario 1	Cuestionario 2	
1	96,67	94,17	-2,50
2	98,33	96,67	-1,67
3	94,17	92,50	-1,67
4	89,17	82,50	-6,67
5	79,17	75,00	-4,17
6	79,17	65,83	-13,33
7	65,83	60,83	-5,00
8	85,00	81,67	-3,33
9	63,33	69,17	5,83
10	78,33	78,33	0,00
11	69,17	80,83	11,67
12	95,83	93,33	-2,50
13	100,00	97,50	-2,50
14	88,33	82,50	-5,83
15	64,17	49,17	-15,00
16	85,83	80,00	-5,83
17	71,67	69,17	-2,50
18	91,67	80,83	-10,83
19	81,67	70,83	-10,83
20	76,67	62,50	-14,17

Fuente: Elaboración propia.

Hubo once ítems (1, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 16 y 17) en los que su porcentaje de aceptación se mantuvo con un cambio menor a 5 puntos porcentuales de un cuestionario a otro. Solamente dos ítems (9 y 11) aumentaron, uno se mantuvo con el mismo porcentaje (ítem 10) y seis ítems disminuyeron en más de 6 puntos (4, 6, 15, 18, 19 y 20).

De manera particular podemos notar que los ítems 1, 2 y 3 tuvieron una aceptación muy alta, superior a 92% en ambos cuestionarios y con una disminución muy pequeña de una aplicación a otra. Esto indica lo siguiente: casi la totalidad de los estudiantes, tanto al inicio como al final del curso, mantuvieron creencias positivas acerca del uso de las TICs en la enseñanza de la matemática (ítem 3), de que el uso de los recursos tecnológicos les podría traer beneficios a lo largo de su carrera (ítem 2), y de que el uso de la tecnología les facilita la comprensión de los contenidos del curso (ítem 1).

Llama la atención que, al inicio, casi el 90% de los estudiantes estaba de acuerdo con que esta modalidad hace que sea más accesible aprobar el curso, lo cual disminuyó en casi 7 puntos porcentuales. La creencia de que en esta modalidad de curso se utiliza con mucha frecuencia la computadora (ítem 5) tuvo una aceptación del casi 80% en la primera aplicación, y bajó a un 75% en la segunda. Una de las creencias con porcentaje más bajo fue la que indica que los recursos tecnológicos implican un esfuerzo extra en su tiempo de estudio (ítem 7), la cual tuvo un 65% en el primer cuestionario y se redujo a 60%. El comportamiento de dicho ítem se ampliará cuando se estudie el ACP en la siguiente sección.

Un ítem que disminuyó de manera considerable su porcentaje de aceptación fue el 6, el cual en la primera aplicación mostró que un 79% de los estudiantes aceptaba que los recursos tecnológicos promovían la participación del alumno en el aula. En la segunda aplicación, el porcentaje se redujo a 65%, lo cual muestra que esta expectativa no se cumplió para cierta parte del alumnado.

Los ítems 8 y 10 de la dimensión del ambiente social, relacionados con la interacción docente, se mantuvieron cercanos al 80% en ambas aplicaciones; esto muestra que la mayoría de los estudiantes consideran que las TICs permiten interactuar con el docente y la resolución de dudas por parte de este.

Los ítems relacionados con la interacción del estudiante con su grupo de pares (ítems 9 y 11) fueron los únicos que tuvieron un aumento de un cuestionario a otro. Aunque no logró superar el 70% de aceptación, hubo un aumento en la cantidad de estudiantes que consideraron que las TICs mejoran la interacción con los grupos de pares. Por su parte, el ítem 11 deja ver que aumentó a casi 80% la cantidad de estudiantes que consideran que las TICs aumentan la comunicación con sus compañeros.

Los ítems faltantes corresponden a la dimensión de metacognición. Al terminar el curso, hubo acuerdo de un 80% en que las TICs mejoran las habilidades de aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, casi la totalidad de la muestra (97.5%) concuerda en que los recursos tecnológicos les colaboran en la evaluación de los ejercicios (ítem 13). Por otra parte, en un porcentaje ligeramente menor (93%), el estudiantado acuerda que las tecnologías permiten agilizar cálculos al resolver ejercicios relacionados con el curso. Estos resultados llaman la atención al notar que los principales fines para los cuales los estudiantes utilizan la tecnología son muy prácticos: agilización de procedimientos y evaluación de resultados. La interpretación de resultados (ítem 18) o el estudio independiente con ayuda de las TICs (ítem 19) son ámbitos donde los estudiantes no tuvieron un acuerdo muy alto y, de hecho, el porcentaje obtenido disminuyó en más de 10% desde el inicio hasta el final del ciclo lectivo, lo que resultó, respectivamente, en 80% y 70%.

Al terminar el curso, solo un 49% de los estudiantes aceptó utilizar la tecnología cuando estudiaba los contenidos del curso (ítem 15). En un curso con uso de computadoras se esperaría que fuese una cantidad mayor de estudiantes los que utilizan la tecnología cuando estudian. El poco acuerdo en el ítem 15 podría deberse a que, según el ítem 20, aumentó la cantidad de estudiantes que presentan obstáculos al utilizar las TICs al estudiar; al mismo tiempo que disminuyeron los estudiantes que consideran tener habilidad para incorporar la tecnología en sus procesos de estudio (ítem 14), y que no es tan alto el porcentaje (69.17%) de estudiantes que consideran utilizar los recursos tecnológicos con agilidad (ítem 17).

4.2.1. Técnicas de recolección

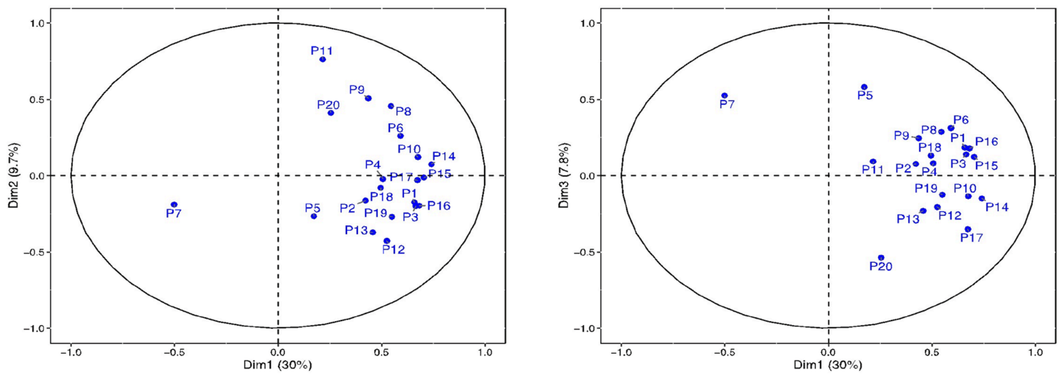
El ACP fue utilizado para verificar la unidimensionalidad y así tener indicios que permitan dotar a los cuestionarios de validez, al mismo tiempo que sirvió como supuesto para el análisis de la confiabilidad. No obstante, a la luz de este primer análisis descriptivo, podemos utilizarlo para poder estudiar más a fondo algunas relaciones entre las dimensiones de percepción. Para esto, se presentan los círculos de correlaciones de la componente 1 con la componente 2 y 3 de cada cuestionario y se mencionan particularidades encontradas.

CUESTIONARIO 1

Según los círculos de correlaciones (Figura 2) podemos apreciar como en la primera componente se agrupan 13 de los 20 ítems, mostrándose como la componente principal del constructo tratado. No obstante, la característica más llamativa que podemos desprender es que la creencia de que la tecnología implica un esfuerzo extra a la hora de estudiar se opone a la percepción general de los estudiantes respecto al uso de las TICs, lo cual se ve reflejado en el hecho de que el ítem 7 es contrario al resto de ítems del cuestionario, tomando como referencia el eje X (Figura 2(a)). La segunda componente principal tiene como rasgo particular que agrupa 3 de los 4 ítems de la dimensión del ambiente social.

Figura 2 – Círculos de correlación para del cuestionario 1
(El porcentaje que acompaña a las dimensiones corresponde a la inercia alcanzada por cada una).

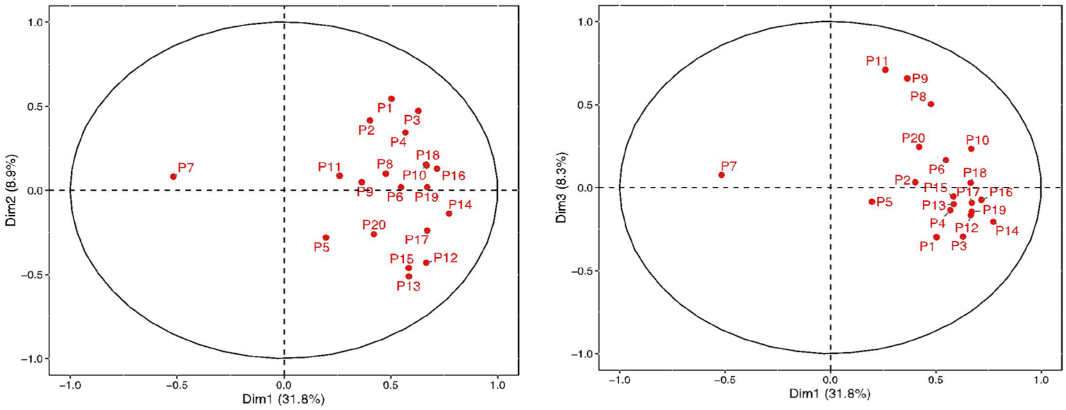
(a) Para las componentes 1 y 2 **(b) Para las componentes 1 y 3**



Fuente: Elaboración propia.

Figura 3 – Círculos de correlación para del cuestionario 2
(El porcentaje que acompaña a las dimensiones corresponde a la inercia alcanzada por cada una).

(a) Para las componentes 1 y 2 **(b) Para las componentes 1 y 3**



Fuente: Elaboración propia.

Un dato interesante se genera al estudiar la tercera componente principal (figura 2(b)), donde se puede apreciar como los ítems 5 y 7 son opuestos al 20. Esta relación parece indicar que los alumnos que creen que se requiere un esfuerzo extra al usar recursos tecnológicos y que en los cursos con laboratorio se usa mucho la computadora presentan obstáculos para utilizar los recursos tecnológicos en sus estudios.

CUESTIONARIO 2

En la segunda aplicación del cuestionario podemos notar que se mantiene la primera componente predominante, esta vez con 14 ítems. Asimismo, el ítem 7 continúa siendo opuesto al resto, manteniéndose dicha creencia opuesta a la percepción general. Por otra parte, los ítems de la dimensión del ambiente social que se agruparon en la segunda componente en el primer cuestionario pasaron a formar parte de la tercera componente (figura 3(b)).

El dato más sobresaliente lo encontramos en la segunda componente principal, donde notamos relaciones interesantes, como que los ítems 1, 2 y 3 se oponen respecto al eje Y a los ítems 12, 13 y 15 (figura 3(a)). Esta es una característica interesante por el hecho de que, aunque los estudiantes tengan creencias positivas acerca del uso de las TICs en sus procesos de aprendizaje, dichas creencias no se ven materializadas con tanta fuerza en acciones concretas. Es decir, los estudiantes tienen creencias positivas de las TICs, pero no las incorporan con mucha frecuencia en sus procesos de estudio.

4.3. COMPORTAMIENTO ENTRE VARIABLES

Una vez analizada la percepción desde el punto de vista de los reactivos utilizados, se procedió a realizar un estudio general desde el estudiantado. Para esto, a cada estudiante se le asignó una puntuación para cada cuestionario, de 25 a 100 puntos; conforme más alta la puntuación del estudiante, mejor fue su valoración respecto a su percepción del uso de las TICs en los cursos bajo la modalidad *con uso de computadoras*. Esto permite analizar qué cambio hubo de un cuestionario a otro.

Si un alumno disminuyó su puntuación fue debido a una rebaja en la valoración de las interpretaciones y significados hechos por la información sensorial percibida en los cursos bajo la modalidad *con uso de computadoras*; en cambio, si aumenta, ocurre lo contrario. No obstante, se debe recalcar que este comportamiento es solo una descripción general de un valor referente a las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en los cuestionarios. En este sentido, algunas de las incidencias más sobresalientes fueron:

- 59 estudiantes disminuyeron su puntuación, 8 se mantuvieron igual, y 53 aumentaron.

- De los 120 estudiantes, 96 mantuvieron su diferencia entre -10 y 10 puntos. Lo que indica que no hubo un cambio considerable en sus valoraciones de percepción.

- Si dividimos las puntuaciones de los estudiantes en cuatro grupos: de 25 a 43.75, de 43.76 a 62.50, de 62.51 a 81.25 y de 81.26 a 100, se puede analizar como los estudiantes se distribuyen según su valoración en la escala de percepción. Con base en ello, podemos decir que en ambos cuestionarios hubo una valoración positiva de la percepción, ya que en la primera aplicación 116 estudiantes estuvieron en los dos últimos cuartiles, y destacaron con 75 en el tercero. Para la segunda aplicación hubo 111 los estudiantes en los dos últimos cuartiles, y nuevamente 75 en el tercero.

- De los 116 estudiantes aprobados, se ve una paridad entre los que aumentaron su puntuación (49) versus los que la disminuyeron (47). Llama la atención que de las 16 personas que no aprobaron el curso, la mayoría (12) disminuyeron su puntuación.

4.4. FRECUENCIA EN EL USO DE SOFTWARE

Analizar diferentes cursos permite tener distintos matices con respecto a las herramientas tecnológicas utilizadas. En términos generales, la herramienta con mayor frecuencia de uso fue WolframAlpha, mientras que el uso de WinPlot fue prácticamente nulo entre los estudiantes.

Por otra parte, se pudo ver como los tres cursos de Cálculo I (MA1001, MA1021 y MA1210) guardan pequeñas semejanzas, al contar con los programas Mathematica, Geogebra y la página web WolframAlpha como los recursos más utilizados. Cursos más elevados como Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones Diferenciales Aplicadas mantuvieron comportamientos similares, solo que se acentuó el énfasis en Mathematica y WolframAlpha, y no tanto así en GeoGebra.

Álgebra Lineal se caracterizó por sus altas frecuencias en Matlab y WolframAlpha, al igual que Introducción al Análisis Numérico. En estos dos cursos no fueron tan predominantes Mathematica y GeoGebra como en los anteriores.

Muchos de los recursos utilizados responden en ocasiones a criterios de evaluación de cada cátedra y docente; no obstante, se notó como factor común la presencia de WolframAlpha en todos los cursos, además de ser la que tuvo una mayor frecuencia de uso en general. Dicha herramienta se utiliza en mayor medida, precisamente, para evaluar resultados y agilizar datos. Lo cual concuerda con lo visto líneas antes en la descripción de la percepción: los estudiantes gustan de la tecnología en mayor frecuencia para evaluar datos y agilizar resultados.

4.5. BENEFICIOS DEL USO DE LAS TICS

A los estudiantes se les cuestionó acerca de los beneficios obtenidos al utilizar los programas antes mencionados. De manera particular se rescata que:

- 88% de los estudiantes que utilizaron WolframAlpha estuvieron de acuerdo en que les ayuda a clarificar dudas de manera satisfactoria.

- 87% de los estudiantes que utilizaron GeoGebra opinaron que dicho software les colabora a mejorar sus habilidades de aprendizaje, lo mismo que opinaron de MATLAB el 85% de los estudiantes que lo utilizaron.

- 82% de los estudiantes que utilizaron Mathematica expresaron que tal software les favorece en su aprendizaje.

Como se pudo apreciar, de manera general el estudiantado tiene una visión positiva respecto al papel de los recursos tecnológicos en sus procesos de aprendizaje. No obstante, un dato interesante es que el rendimiento académico de los estudiantes que no consideraron tener beneficios también fue bastante positivo. De los 10 estudiantes que expresaron no obtener beneficios de WolframAlpha, 8 aprobaron; comportamiento similar se presentó en Mathematica (14 aprobados de 16), MATLAB (5 aprobados de 7) y GeoGebra (8 aprobados de 8). Lo que pareciera indicar que los beneficios obtenidos por las TICs no son una variable que pueda afectar el rendimiento académico.

4.6. COMUNICACIÓN DIGITAL

Con respecto a este último apartado, la investigación reveló que, desde el punto de vista de los estudiantes, el medio más eficiente de comunicación es la aplicación WhatsApp, seguida en un porcentaje menor por el correo electrónico. Por su parte, los foros no son tan gustados por los estudiantes para promover el intercambio de ideas.

5. CONCLUSIONES

La principal conclusión que arroja el trabajo se refiere a la utilización que dan los estudiantes a las TICs durante sus procesos de estudio: aunque se pudo apreciar que los estudiantes tienen creencias positivas muy concretas acerca de las TICs en el aprendizaje de la matemática y sus beneficios, estos no dedican esfuerzo adicional en utilizarlas más allá de tareas simples como la verificación de resultados y agilización de procesos. Por ello, la herramienta tecnológica más utilizada fue WolframAlpha, aplicación enfocada en la resolución de ejercicios, su solución y sus procedimientos.

La aprobación en esta modalidad es alta y parece favorecer a estudiantes que repiten el curso, y se destaca que de los 25 alumnos repitentes que llevaron el curso previamente sin computadoras, 18 lo aprobaron.

La mayoría de los estudiantes consideran que esta modalidad hace más accesible la aprobación del curso, si bien no hay tanto acuerdo en el hecho de que las TICs les implique un esfuerzo extra en sus procesos de estudio. Se notó que apenas la mitad de la muestra utiliza las TICs siempre que estudia, y que aumentó la cantidad de estudiantes que presentaron obstáculos a la hora de utilizar las TICs, lo cual muestra que todavía falta cierta conexión entre las máquinas y el estudio de la matemática por parte del alumnado. Finalmente, se pudo notar una mejora en las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante gracias a las TICs.

Las puntuaciones en los cuestionarios de percepción muestran valoraciones positivas (116 tuvieron puntuaciones superiores a 62 en su escala de percepción) hacia las TICs, y tales puntuaciones no sufrieron en general cambios significativos de un cuestionario a otro. No obstante, más de la mitad disminuyó la puntuación, lo que muestra que en cierto modo no se cumplieron a cabalidad sus expectativas. Por otra parte, se evidenció que tanto en los estudiantes a favor de los beneficios de las TICs como en los que no, la aprobación es alta, por lo que no parece haber una relación entre estas variables.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

BSH, CZR y AAG plantearon la idea desarrollada. CZR y AAG desarrollaron los conceptos teóricos relacionados con percepción y BSH desarrolló los modelos estadísticos utilizados. BSH, CZR y AAG recolectaron datos, hicieron el análisis de estos y redactaron los resultados y conclusiones. JTZ delimitó la idea, recomendó los métodos estadísticos a utilizar, revisó los resultados, el análisis de los datos y la redacción final del trabajo, proponiendo diversas correcciones y recomendaciones.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes BSH y CZR previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica por su colaboración para realizar esta investigación.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, L. (2016). La relación entre los estilos de aprendizaje y el uso de las tecnologías de información y comunicación en educación de personas adultas. *Revista Electrónica Educare*, *20*(3), 1-18. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/1941/194146862010.pdf

Baelo, R., y Cantón, I. (2009). Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior. Estudio descriptivo y de revisión. *Revista Iberoamericana de Educación*, 50(7), 1-12. Recuperado de: https://rieoei.org/RIE/article/view/1965/2984

Botello, H., y López, A. (2014). La influencia de las TIC en el desempeño académico: evidencia de la prueba PIRLS en Colombia 2011. *Revista Academia y Virtualidad*, 7(2), 15-26. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5061044

Buron, J. (1996). Enseñar a Aprender: Introducción a la Metacognición. Bilbao, España: Ediciones Mensajero.

Castro, S., Guzmán, B. y Casado, D. (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Revista de Educación Laurus*, 13(23), 213-234. Recuperado: https://www.redalyc.org/pdf/761/76102311.pdf

Coren, S., Ward, L., y Enns, J. (2001). Sensacion y Percepción, 5ta edición. Ciudad de México, México: McGrawHill.

Cobo, J. (2009). El concepto de tecnologías de la información. Benchmarking sobre las definiciones de las TIC en la sociedad del conocimiento. *ZER-Revista de Estudios de Comunicación,* 14(27), 295-318. Recuperado de: https://ojs.ehu.eus/index.php/zer/article/view/2636

Diez, A. (2017). Más sobre la interpretación. Ideas y creencias. *Revista Asociación Española de Neuropsiquiatría*, 37(131), 127-143. Recuperado de: https://scielo.isciii.es/pdf/neuropsiq/v37n131/08.pdf

Falsetti, M., y Rodríguez, M. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(3), 319-338. Recuperado: https://www.redalyc.org/pdf/335/33508305.pdf

Flavell, J. (1996). El Desarrollo Cognitivo (Pozo y Pozo, trad.). Madrid, España: Visor.

Francica, P. (2016). Una Mirada desde las Diferentes Corrientes Psicológicas. Argentina, EUCASA.

Gamboa, R., y Moreira, T. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Revista Actualidades Investigativas en Educación,* 17(1), 1-45. Recuperado: https://www.scielo.sa.cr/pdf/aie/v17n1/1409-4703-aie-17-01-00514.pdf

Gómez, I. (2000). Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje Matemático. Madrid, España: Narcea S.A. de Ediciones.

Granada, H. (2001). El ambiente social. Revista Investigación y Desarrollo, 9(1), 389--407.

Guardiola, P. (2014). um.es. Recuperado de https://www.um.es/docencia/pguardio/documentos/percepcion.pdf

Hernádez, R. (2017). Impacto de las TICen la educación: Retos y perspectivas. *Propósitos y Representaciones*, 32-347. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5904762

Hernández, R., Fernádez, C., y Baptista, M. (2010). Metodología de la Investigación.Ciudad de México, México: McGraw Hill.

Kelly, W. (1982). Psicología de la Educación . Madrid, España: Ediciones Morata.

Linarez, G., y Guzmán, E. (2014). Metacognición y TIC: alineación binomial. Congreso Interdisciplinario de Cuerpos Académicos. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4861945

Morris, C., y Maisto, A. (2005). Introducción a la Psicología, 12a Edición. Ciudad de México, México: Pearson Educación.

Muller, W. (2009). Metacognición y Tic: una combinación que permite la construcción de mundos posibles. *InteracTIC*, (12), 2-12. Recuperado de: https://cintel.co/wp-content/uploads/2013/05/14.Metacognicion_y_TIC_-_William_Muller.pdf

Navarro, O. (2013). Psicología social y medio ambiente. Reflexiones y perspectivas. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM*, 22(1-2), 177-197. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/654/65452530008.pdf

Pulido, J. (2014). Creencias sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación de los docentes de educación primaria en México. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-29. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/447/44731371017.pdf

Raichman, S., Sabulsky, G., Totter, E., Orta, M., y Verdejo, P. (2011). Estrategias para el desarrollo de innovaciones educativas basadas en la utilización de Tecnologías de Información y Comunicación. *Innova Cesal*, 19-34. Recuperado de: http://www.innovacesal.org/innova_public_docs01_innova/ic_publicaciones_2012/pubs_ic/pub_04_doc03.pdf

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf

Rodríguez, L., Escudero, T. (2000). Interacción entre iguales y aprendizaje de conceptos científicos. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 18(2), 255-274. Recuperado de: https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21667

Ruiz, J., Ruiz, G., y Ruiz, E. (2010). Indicador global de rendimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 52(4), 1-11. Recuperado de: https://rieoei.org/RIE/article/view/1785

Socas, M. (2002). Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática. *Relime*, 5(2), 199-216. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2147125

UNESCO. (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe. ORELAC, Chile.

Vargas. (1994). Sobre el concepto de percepción. *Revista Alteridades*, 47-53. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/747/74711353004.pdf

Vila, A., y Callejo, M. (2005). Matemáticas para aprender a pensar: El Papel de las Creencias en la Resolución de Problemas. Madrid, España: Narcea.

Vilatuña, F., Guajala, D., Pulamarín, J., y Ortiz, W. (2012). Sensación y percepción en la construcción del conocimiento. *Sophia*, 13, 124-148. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846102006.pdf

Villalobos, A., Melo, Y., y Pérez, C. (2010). Percepción y expectativas de los alumnos universitarios frente al profesor. *Estudios Pedagógicos*, 36(2), 241-249. Recuperado de: https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052010000200014

Vigotsky, L. (1995). Pensamiento y lenguaje. Barcelona, España: Paidós.

Yangali, J., y Rodríguez, J. (2016). Aplicación del método Pólya para mejorar el rendimiento académico de matemática en los estudiantes de secundaria. *INNOVA Resarch Journal*, 1(10), 12-20. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5920553

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
103-125
Recibido: 03/05/2025
Aprobado: 10/06/2024

Artículos de investigación

AMENAZA CONTEXTUAL MATEMÁTICA, ANSIEDAD MATEMÁTICA Y MEMORIA DE TRABAJO: SU PAPEL EN EL DESEMPEÑO EN PROBLEMAS INTUITIVOS DE UNA TAREA MATEMÁTICA

MATHEMATICAL CONTEXTUAL THREAT, MATH ANXIETY AND WORKING MEMORY: ITS ROLE IN PERFORMANCE IN INSIGHT PROBLEMS OF A MATHEMATICAL TASK

Leiner Víquez-García[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-9911-0691

Vanessa Smith-Castro[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6348-4223

Luis Rojas-Torres[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9085-2703

Odir Rodríguez-Villagra[4]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8545-0857

RESUMEN

Una persona está expuesta a una amenaza contextual matemática si, antes de realizar una tarea, se enfatiza explícitamente el carácter matemático de la misma y se indica que a partir de su desempeño la persona será perfilada en matemática y comparada con otras personas. Se manipula experimentalmente la exposición a la amenaza contextual matemática para explorar el efecto sobre el desempeño en los problemas intuitivos de una tarea, considerando casos en los que un indicador situacional confirma (o no) la amenaza. Se analizan resultados de 111 personas estudiantes universitarias costarricenses (edad promedio *M*=21.04 años, desviación estándar *SD*=3.05, 58 mujeres, 53 varones). Además, se controlan variables de ansiedad matemática y capacidad de memoria de trabajo. Se ajustan modelos lineales de efectos mixtos con los que se obtuvo evidencia del efecto estadísticamente significativo de la ansiedad

1 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, C. P. 11501-2060. Correo electrónico: leiner.viquez@ucr.ac.cr

2 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, C. P. 11501-2060 Correo electrónico: vanessa.smith@ucr.ac.cr

3 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, C. P. 11501-2060 Correo electrónico: luismiguel.rojas@ucr.ac.cr

4 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, C. P. 11501-2060 Correo electrónico: odir.rodriguez@ucr.ac.cr

matemática sobre los dos indicadores de desempeño (precisión y tiempo de respuesta) y de la capacidad de memoria de trabajo sobre la precisión. El análisis de los datos sugiere que la condición de amenaza contextual matemática no influye sobre el desempeño en la resolución de problemas intuitivos.

Palabras clave: amenaza, ansiedad matemática, memoria de trabajo, problemas intuitivos, desempeño matemático.

ABSTRACT

A person is exposed to a mathematical contextual threat if, before performing a task, the mathematical nature of the task is explicitly emphasized, and it is indicated that based on his or her performance the person will be profiled in mathematics and compared with other people. Exposure to mathematical contextual threat is experimentally manipulated to explore the effect on performance on insight problems of a task, considering cases in which a situational indicator confirms (or does not) the threat. Results from 111 Costa Rican university students are analyzed (average age M = 21.04 years, standard deviation SD = 3.05, 58 women, 53 men). In addition, mathematics anxiety and working memory capacity variables are controlled. Linear mixed effects models were fitted with which evidence was obtained of the statistically significant effect of mathematics anxiety on the two performance indicators (accuracy and response time) and of working memory capacity on precision. The analysis of the data suggests that the mathematical contextual threat condition does not influence performance in solving insight problems.

Keywords: threat, math anxiety, working memory, insight problems, math performance.

1. INTRODUCCIÓN

Los denominados *insight problems* en inglés, acá problemas *intuitivos*, son típicamente asociados con la experiencia de percibir su solución después de: (1) efectuar una interpretación y aproximación iniciales de la situación problemática planteada, (2) caer en un impasse y, (3) reconocer la necesidad de replantear de la representación inicial del problema. Este proceso de reestructuración, en caso de ser exitoso, hace que la respuesta surja repentinamente y podría parecer obvia a los ojos de la persona (Chuderski y Jastrzębski, 2017, 2018), al punto de expresar su hallazgo con la interjección *¡Ajá!*, como referencia a una especie iluminación que se da después de cambiar el enfoque de la situación. El éxito al resolver un problema intuitivo depende principalmente de procesos que operan fuera del control de atención consciente, a diferencia del proceso de resolución de otro tipo de problemas (conocidos como *incrementales*) en los que su resolución se basa en métodos analíticos o algoritmos dependientes de procesos de atención controlada y una secuencia estructurada de pasos (Beilock y DeCaro, 2007; DeCaro, Van Stockum et al., 2016).

Se ha documentado que algunos factores afectivos pueden incidir sobre el desempeño en la resolución de problemas matemáticos (intuitivos o no), entre los que destaca la ansiedad matemática. Esta ha sido descrita como un sentimiento de tensión, aprensión o miedo que interfiere con el desempeño matemático (Ashcraft, 2002). Existe evidencia del impacto de la presión y la ansiedad sobre el desempeño en la resolución de problemas, debido a una disminución en la disponibilidad de recursos de la *memoria de trabajo* (DeCaro, Rotar, et al., 2010; DeCaro, Thomas et al., 2011). La memoria de trabajo es el sistema que permite mantener un número limitado de representaciones mentales, mientras que estas (u otro tipo de información) están siendo manipuladas simultáneamente durante la ejecución de tareas cognitivas complejas (Oberauer y Lewandowsky, 2016; Rodríguez-Villagra, 2015). El concepto capacidad de memoria de trabajo hace referencia a la capacidad limitada de memoria de trabajo que tiene una persona, de forma que ante un incremento en la demanda de memoria se da una disminución en su rendimiento. La capacidad de memoria de trabajo puede ser considerada como una variable diferenciadora entre individuos (Beilock y DeCaro, 2007; Oberauer y Kliegl, 2006).

Algunos estudios han explorado el rol de la capacidad de memoria de trabajo en la relación entre ansiedad matemática, desempeño en los problemas matemáticos y la selección de estrategias en su resolución (Chang y Beilock, 2016; Ramirez et al., 2013; Ramirez et al., 2016). De igual forma, se ha explorado la capacidad de memoria de trabajo con el diseño de intervenciones que buscan disminuir los efectos de la ansiedad ante las pruebas sobre el rendimiento (Bellinger et al., 2015; Park et al., 2014). Otros estudios (Beilock y DeCaro, 2007; DeCaro et al., 2010; DeCaro et al., 2016; Gimmig, et al., 2006; Ramirez et al., 2013; Ramirez et al., 2016) han implementado diseños de carácter experimental que involucran la resolución de problemas intuitivos matemáticos en condiciones de alta presión y han encontrado evidencia relacionada con que el incremento de la presión y de los niveles de ansiedad en los individuos con una mayor capacidad de memoria de trabajo se relaciona con un menor desempeño en la resolución de esos problemas. Sin embargo, estudios más recientes (Chuderski y Jastrzębski, 2017, 2018) llegan a implementar condiciones experimentales análogas pero con la conclusión contraria, es decir, una mayor capacidad de memoria de trabajo facilita la resolución de problemas intuitivos cuando se efectúan en condiciones de alta presión. Lo anterior parece sugerir que el efecto de la presión sobre la resolución de problemas intuitivos puede estar modulada por otros factores.

Para el presente estudio se delimitó el concepto de *amenaza contextual matemática* como la indicación explícita hecha a una persona de que una tarea que se encuentra por realizar reviste una naturaleza matemática, y tiene como propósito evaluarla o perfilarla en esa área para comparar su desempeño con el de otras personas. Este constructo no debe confundirse con la denominada *amenaza de estereotipo,* que se da cuando, en una situación en la que una persona está por efectuar una tarea, se destaca un estereotipo (usualmente negativo) que hace generalizaciones sobre el desempeño de los miembros de un grupo de pertenencia de la persona en esa tarea que está a punto de realizar. Se ha documentado que la exposición al estereotipo provoca una disminución en el desempeño de la persona con respecto a lo que dictan sus habilidades (Steele y Aronson, 1995). Por ejemplo, una situación de amenaza de estereotipo en matemáticas se da cuando se hacen afirmaciones relacionadas con el género de una persona, tal como cuando mujeres son expuestas a la afirmación estereotípica "*las mujeres no son tan buenas en matemáticas como los hombres*", justo antes de efectuar una tarea matemática, y esta exposición provoca una disminución en su desempeño en comparación con las mujeres que no tuvieron exposición a esa afirmación (Cadinu et al., 2005; Franceschini et al., 2014; Nguyen y Ryan, 2008).

Por definición, la amenaza contextual matemática no recurre a enunciados estereotipados sobre la identidad social del individuo como miembro de un grupo en particular (por género, etnia, etc.). A pesar de sus diferencias, se vuelve de interés explorar si la amenaza de estereotipo y la amenaza contextual matemática comparten algunos mecanismos subyacentes. Por ejemplo, Murphy y Taylor (2012) señalan que la amenaza de estereotipo es inicializada y mantenida por señales situacionales amenazantes en el entorno, explícitas o sutiles, que pueden ser interpretadas por la persona expuesta previamente al estereotipo como una advertencia de un posible maltrato o devaluación. Particularmente, si las señales indican que la pertenencia a un grupo tiene alguna valencia particular en el ámbito específico al que hace referencia el estereotipo. Al traer este mecanismo de vigilancia aumentada a una situación de amenaza contextual matemática, es válido cuestionarse qué sucede si la amenaza es coherente con un factor situacional que permita suponer que la tarea matemática va a tener un alto nivel de dificultad. Específicamente, surge la interrogante de si una situación de coherencia entre amenaza y señales situacionales provocaría la activación o la intensificación de algún efecto negativo sobre el desempeño en la tarea.

De todo lo anterior se concluye que el desempeño en matemática de las personas puede verse afectado por factores como la amenaza de estereotipo y la ansiedad matemática.

Maloney et al. (2013) han resumido hallazgos de varios estudios en ese sentido y destacan que, a pesar de sus diferentes etiologías, ese efecto de la ansiedad matemática y la amenaza de estereotipo sobre el desempeño está relacionado con la memoria de trabajo, que se ha identificado como un mecanismo común a ambos procesos. De todo lo anterior, se planteó la pregunta de si en una situación de amenaza contextual matemática se darán relaciones similares entre la ansiedad matemática, la capacidad de memoria de trabajo y el desempeño en problemas matemáticos intuitivos. Así, el objetivo para el estudio fue explorar el papel de la amenaza contextual matemática sobre el desempeño de los individuos en problemas matemáticos intuitivos en una tarea matemática, controlando las variables de ansiedad matemática y capacidad de memoria de trabajo. Para el estudio se formularon dos hipótesis que predicen lo siguiente:

1. Un efecto principal de la amenaza contextual matemática sobre el desempeño en la resolución de problemas intuitivos. El efecto esperado evidenciaría lo siguiente: (i) la exposición a la amenaza contextual matemática generaría en las personas participantes un incremento en su consumo del tiempo disponible para resolución de cada problema, así como una disminución en la precisión de las respuestas, en comparación con los participantes que no son expuestos a la amenaza. Y (ii) la exposición consecutiva a una amenaza contextual matemática y a un indicador situacional que muestre coherencia con la amenaza provocaría en las personas participantes un incremento en su consumo del tiempo disponible para la resolución de cada problema, así como una disminución en la precisión de sus respuestas, en comparación con las personas participantes que son expuestas a la amenaza contextual matemática y luego a un indicador situacional que no es coherente con la amenaza.

2. Con respecto a las otras variables de interés, (i) un efecto de la ansiedad matemática sobre ambos indicadores de desempeño, a saber, un mayor nivel de ansiedad matemática se asociará con un aumento en el consumo del tiempo disponible para la resolución de cada problema y con una disminución en la precisión de las respuestas y; (ii) un efecto de la capacidad de memoria de trabajo sobre la precisión, a saber, una mayor capacidad de memoria de trabajo se asociará con una mayor proporción de respuestas correctas.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

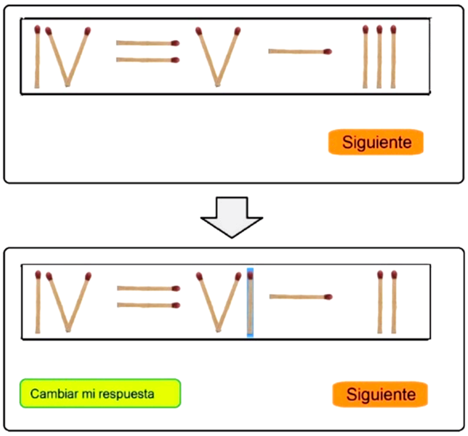
2.1. Participantes

Para el estudio se reclutaron inicialmente 112 personas universitarias. Sin embargo, una participante de la carrera de Psicología fue excluida ya que manifestó haber sido asistente en un proyecto de investigación en el cual había dirigido varias de las tareas utilizadas en el presente estudio y estaba muy familiarizada con ellas. De esta manera, se incluyeron los datos de 111 participantes, con un rango de edad que abarcaba desde los 18 años hasta los 33 años (M = 21.04 años, SD = 3.05). La muestra estuvo conformada por 58 mujeres y 53 varones que participaron voluntariamente, sin recibir gratificación alguna por su participación. Al no haber restricción en cuanto al área de estudio, había participantes de diversas carreras. Todas las personas participantes firmaron un consentimiento informado aprobado por el Comité Ético Científico de la Universidad de Costa Rica.

2.2. Materiales

Tarea de ecuaciones con fósforos (adaptación de Knoblich et al., 1999). Versiones en papel y lápiz de esta tarea han sido aplicadas en estudios que exploran la relación entre capacidad de memoria de trabajo, resolución de problemas intuitivos e inteligencia fluida (Chuderski y Jastrzębski, 2017, 2018; DeCaro et al., 2016). Los problemas de esta tarea son de carácter aritmético en los que se establecen igualdades falsas escritas con números romanos. Cada problema involucra tres números romanos, un operador que puede ser suma o resta y el símbolo de igualdad, presentados en imágenes que los muestran como si hubieran sido construidos con "fósforos". La resolución del problema requiere reescribir el enunciado falso como uno verdadero cambiando de posición únicamente uno de los fósforos que conforman la imagen. Existe una única solución para cada problema y en la versión computarizada diseñada para el estudio la persona participante podía arrastrar un único fósforo con el mouse a una nueva posición en un tiempo máximo de dos minutos (ver Figura 1).

Figura 1 – Ilustración de un problema de ecuaciones con fósforos y su solución.



Se utilizó la categorización de Öllinger et al. (2008), para este tipo de problemas: (i) problemas de tipo estándar (ST por su nombre en inglés: *standard type problemas*) que requieren mover un fósforo en posición vertical de un numeral a otro (por ejemplo, IV=III+III → VI=III+III). (ii) Problemas de relajación de restricciones (CR por su nombre en inglés: *constraint relaxation problems*) que requieren desestimar restricciones que generalmente se asumen pero que no son reglas declaradas, tales como que en cada enunciado aritmético correcto no puede haber más de un signo igual o que los signos de los operadores de suma o resta no se pueden alterar (por ejemplo, II-III=II → II=II=II, o, II=V+IV → II=VI-IV. Finalmente, (iii) problemas de descomposición de trozos (CD por su nombre en inglés: *chunk decomposition problems*) cuya resolución requiere deslizar uno de los dos fósforos de un numeral romano compuesto por una sola figura numérica de dos fósforos que forman una V para reescribirla como X o viceversa (por ejemplo, VI=VIII+III → XI=VIII+III).

Para Knoblich, et al. (2001) los procesos de descomposición de trozos y relajación de restricciones se relacionan con la naturaleza intuitiva (*insight*) de los de los problemas de aritmética con fósforos. En el presente estudio se adoptó la categorización de Öllinger et al. (2008) para clasificar los problemas, identificar los intuitivos y definir la dificultad de cada uno (ver Tabla 1). Así, la versión de la tarea usada en el estudio contó con 24 problemas, de los cuales 7 fueron problemas incrementales (ST) y 17 problemas intuitivos (12 CR + 5 CD); organizados en tres bloques de ocho problemas que fueron mostrados en el mismo orden a todos los participantes, con descansos de 30 segundos entre bloques. En los análisis estadísticos se incluyeron solo los problemas intuitivos CR, ya que en la adaptación computarizada de la tarea para los problemas de tipo CD fue necesario brindar instrucciones muy específicas acerca de cómo convertir la X en V y viceversa, por los que la naturaleza intuitiva de estos problemas se vio comprometida.

La confiabilidad de la tarea se examinó mediante el coeficiente alfa de Cronbach (1951) y se obtuvo α=.75 para 23 reactivos (111 observaciones). Con respecto a la confiabilidad de la subescala conformada únicamente por los ítems intuitivos se obtuvo α=.8 para 12 reactivos (n=111), valor que es considerado aceptable (Kline, 2000).

Tabla 1 – Problemas de ecuaciones con fósforos de la tarea matemática utilizada.

Bloque	Número	Categoría (Incremental / Intuitivo)	Tipo	Problema enunciado	Solución	Precisión
Primero	1	Incremental	ST	IV=III+III	VI=III+III	0.92
	2	Incremental	ST	VI=VII+I	VII=VI+I	0.55
	3	Intuitivo	CR2	IV=III-I	IV-III=I	0.45
	4	Intuitivo	CD	VI=VIII+III	XI=VIII+III	0.91
	5	Incremental	ST	II=III+I	III=II+I	0.77
	6	Intuitivo	CR1	IV=VI+I	IV=VI-II	0.74
	7	Intuitivo	CR3	II-III=II	II=II=II	0.16
	8	Intuitivo	CR2	VIII=VI-II	VIII-VI=II	0.51
Segundo	9	Incremental	ST	IX=VIII+III	XI=VIII+III	0.92
	10	Intuitivo	CR2	III-VIII=V	III=VIII-V	0.53
	11	Intuitivo	CR3	VI=VI+VI	VI=VI=VI	0.31
	12	Intuitivo	CD	IV=V+IV	IX=V+IV	0.88
	13	Intuitivo	CR1	II=V+IV	II=VI-IV	0.77
	14	Incremental	ST	III=IV-III	III=VI-III	0.83
	15	Intuitivo	CD	I+III=IX	I+III=IV	1.00
	16	Intuitivo	CR2	V=III-II	V-III=II	0.69
Tercero	17	Incremental	ST	XI=I+XII	XII=I+XI	0.52
	18	Incremental	ST	IV=II+IV	VI=II+IV	0.93
	19	Intuitivo	CR2	I-IV=III	I=IV-III	0.57
	20	Intuitivo	CR1	I=II+II	I=III-II	0.80

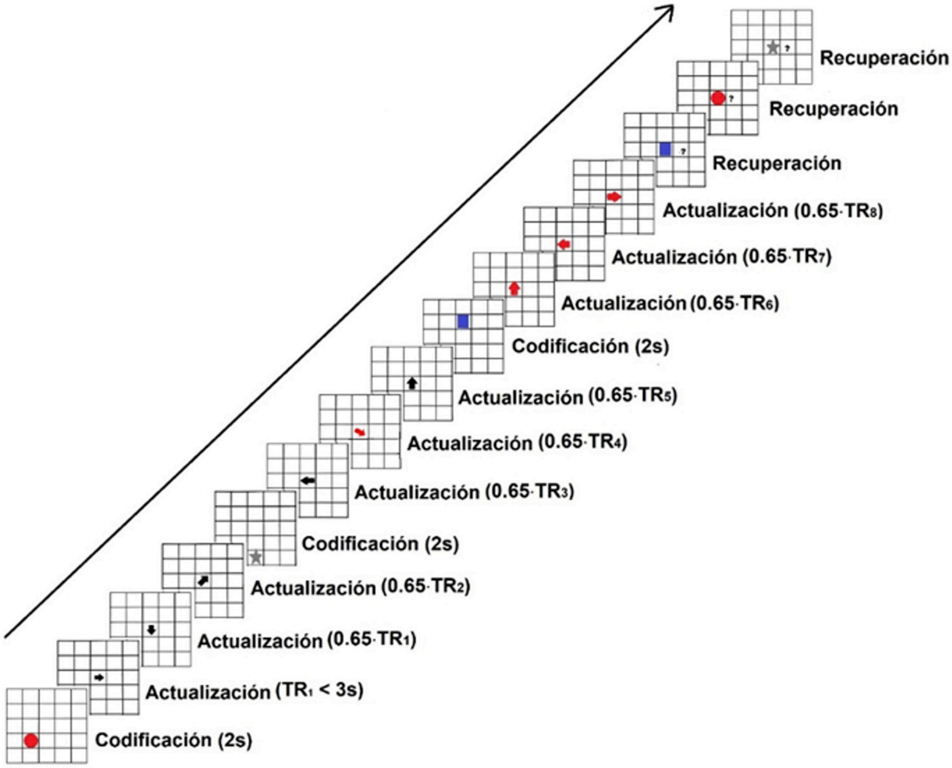
Bloque	Número	Categoría (Incremental / Intuitivo)	Tipo	Problema enunciado	Solución	Precisión
	21	Intuitivo	CD	XI=III+III	VI=III+III	0.97
	22	Intuitivo	CR3	XI-XII=XI	XI=XI=XI	0.24
	23	Intuitivo	CD	IV=III+VI	IX=III+VI	0.80
	24	Intuitivo	CR2	VII-X=III	VII=X-III	0.51

Nota. Para la clasificación de los problemas de aritmética con fósforos se utilizó la propuesta por Öllinger et al. (2008). La cuarta columna asigna abreviaturas para cada tipo de problema. ST: tipo estándar, CD: descomposición de trozos, CR1, CR2, CR3: tipo de relajación de la restricción, CR1 si se requiere relajar la restricción asumida de que un operador no varía, CR2 si se requiere relajar la restricción asumida de que ambos operadores no varían y CR3 si se requiere relajar la restricción de que los operadores no varían y que, además, deben ser distintos.

Escala de ansiedad matemática (Fennema y Sherman, 1976). Está compuesta por doce ítems tipo Likert (1=totalmente en desacuerdo, 5=totalmente de acuerdo) como "*estaría dispuesto a llevar cursos de matemáticas*", "*casi nunca me pongo nervioso durante un examen de matemáticas*" o "*las matemáticas me hacen sentir preocupado o confundido*". Para el estudio se implementó una adaptación de una versión en español de la escala diseñada por Pérez-Tyteca (2012) y posteriormente ajustada por Meza et al.(2014). A esta última se le incorporaron sugerencias obtenidas mediante entrevistas cognitivas que se realizaron a doce personas con el perfil de la población meta durante el segundo semestre de 2017 y, posteriormente, la escala modificada fue aplicada durante el segundo semestre del 2018 a una muestra de 400 estudiantes universitarios en un estudio piloto. La confiabilidad de la escala adaptada se examinó mediante el coeficiente alfa de Cronbach (1951) y se obtuvo α=.84 en el estudio piloto, y en la implementación final del diseño se obtuvo α=.9 para los doce reactivos (n=111).

Tarea de actualización de memoria de trabajo (Rodríguez-Villagra, 2015). Oberauer y Kliegl (2006) señalan que una tarea de actualización de la memoria de trabajo es considerada como una medida válida para la medición de la capacidad de memoria de trabajo de una persona. De hecho, esos autores exploran los límites de dicha capacidad mediante una tarea de actualización que diseñaron para tal efecto. Versiones de esa tarea fueron implementadas por Rodríguez-Villagra et al.(2013) y Rodríguez-Villagra (2015) con el mismo propósito. Una adaptación de esta última se implementó en el presente estudio. En ella las personas participantes debían codificar la ubicación de un estímulo en una celda de una cuadrícula de 5 x 5 celdas en un tiempo máximo de 2 segundos. Pasado ese lapso el estímulo desaparecía y se sucedían tres etapas de actualización, una a una, mediante la presentación simultánea de la cuadrícula de 5 x 5 celdas y una flecha (negra o roja) ubicada en el cuadro central. Cada participante debía actualizar mentalmente la ubicación del estímulo (en la dirección señalada por la flecha si era de color negro o en la dirección opuesta si la flecha era de color rojo) y reportarla sucesivamente haciendo un clic con el mouse del ordenador sobre el recuadro que, de acuerdo con la última flecha, correspondería a la nueva ubicación del estímulo. Después de tres actualizaciones cada participante debía mantener en la memoria de trabajo la última localización del estímulo y al concluir cada una de las tres actualizaciones debía recuperar las posiciones finales de las tres figuras (ver Figura 2). La tarea estaba constituida por 35 ensayos en los que debían realizar el proceso de actualización mencionado con tres figuras distintas. La confiabilidad de la escala con los 35 reactivos se estableció mediante el coeficiente alfa de Cronbach (1951), para el que se obtuvo α=.94 (n=105).

Figura 2 – Ilustración de un ensayo impar de la tarea de actualización de memoria de trabajo.



Nota. TR_i es el tiempo de respuesta para la actualización *i* de un ensayo, con *i* =1, 2, ..., 8. La duración máxima para cada actualización no es constante y su valor se calculó tomando en cuenta si el ensayo era par o impar, así como el tiempo que le haya tomado efectuar la actualización anterior. Si el ensayo es impar el tiempo máximo para reportar la respuesta de la próxima actualización es $Máx_{i+1} = 0.65 \cdot TR_i$ milisegundos. Si se trata de un ensayo par, el tiempo máximo de actualización para el siguiente ensayo será de $Máx_{i+1}=1.7 \cdot TR_i$ milisegundos. Para la primer actualización el tiempo máximo es de 3 segundos.

Inventario de ansiedad estado-rasgo STAI (Spielberger et al., 1970, 1982). La escala tiene como propósito medir características que evidencian la presencia habitual de ansiedad en una persona. La ansiedad general (rasgo) fue incorporada como variable controlada para tener una referencia que permitiera determinar si un efecto por ansiedad sobre el desempeño es atribuible a la ansiedad matemática o a un rasgo estable de ansiedad de cada participante. De esta manera, el Inventario de ansiedad estado-rasgo (STAI por sus siglas en inglés) corresponde a una escala que mide de ansiedad en las dimensiones de estado y rasgo (Spielberger et al., 1970, 1982). No obstante, en la investigación se utilizó solo la subescala de rasgo formada por 20 ítems tipo Likert (0=casi nunca hasta 3=casi siempre). Las personas participantes reportaron la frecuencia con la que se identifican generalmente a los enunciados de los reactivos, como por ejemplo "*suelo tomar las cosas demasiado en serio*", "*me surgen y molestan pensamientos sin importancia*" y "*Soy feliz*". La adaptación del instrumento se efectuó mediante entrevistas cognitivas realizadas durante el segundo semestre de 2017 a doce personas con el perfil de la población meta y, además, la escala modificada se aplicó el segundo semestre del 2018 a una muestra de 400 estudiantes universitarios en un estudio piloto. La confiabilidad de la escala se determinó mediante el coeficiente alfa de Cronbach (1951), que alcanzó un valor α=.91 en el estudio piloto y para la ejecución del proyecto obtuvo α=.88 (n=111).

2.3. Diseño

Una vez que la persona participante ingresaba a la versión computarizada de la tarea aparecían las indicaciones generales de la misma y, una vez leídas, al oprimir el botón de "*continuar*", el programa lo asignaba aleatoriamente en una de las tres condiciones experimentales, por lo que las pantallas siguientes diferían dependiendo de en cuál de estas quedó asignada cada persona, así:

1. *Amenaza coherente*. En esta condición, se daba la exposición de los participantes a la amenaza contextual matemática, ya que se les instruía para que leyeran cuidadosamente el siguiente texto en pantalla:

   "*Antes de continuar con algunos ejemplos prácticos, recuerde que la tarea que está a punto de realizar medirá su velocidad y eficiencia en el razonamiento matemático, para compararlo con los demás participantes*"

   Una vez concluido lo anterior, en la siguiente pantalla se presentaba el indicador situacional coherente con la amenaza, que consistía en la presentación de tres problemas que debían resolver (denominados de acá en adelante como la *práctica difícil*), seleccionados con un nivel de dificultad alto según el criterio dado por Öllinger et al. (2008).

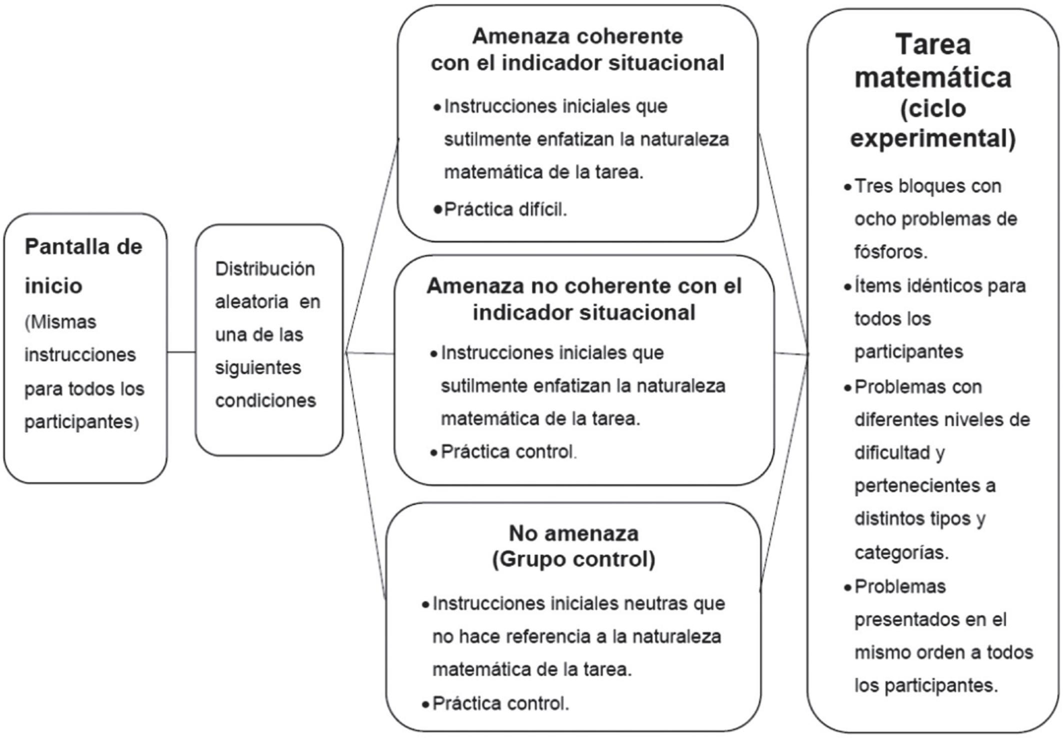
2. *Amenaza no coherente*. Las personas asignadas en esta condición eran expuestas a la misma amenaza contextual descrita anteriormente, pero con un indicador situacional inconsistente con esa amenaza; a saber, tres problemas que debían resolver (denominados en adelante la *práctica control*) con nivel de dificultad moderado/bajo, según el criterio de Öllinger et al. (2008).

3. *No amenaza*. Los participantes en esta condición no fueron expuestos a la amenaza contextual matemática. En su lugar, el programa desplegaba en la pantalla el siguiente enunciado neutro:

   "*Antes de continuar con algunos ejemplos prácticos, recuerde que la tarea que está a punto de realizar es una excelente manera de ejercitar su velocidad y agilidad mental*"

   Una vez leído el texto, los participantes asignados en esta condición, procedían a resolver la práctica control (ver la Figura 3).

Figura 3 – Resumen esquemático del diseño y las condiciones experimentales.



2.4. Procedimiento

Cada participante asistió a dos sesiones de trabajo en las que se atendió de manera simultánea dos personas a lo sumo. En la primera de las sesiones cada participante firmó el consentimiento informado y completó un cuestionario concerniente a su información demográfica. Una vez efectuado lo anterior, completó (en orden contrabalanceado) los instrumentos ya descritos para la medición de la ansiedad matemática y de la ansiedad general, así como la tarea matemática. En la segunda sesión, cada participante observó en la computadora una serie de diapositivas interactivas mediante las cuales se explicaba la tarea de actualización de memoria de trabajo, luego resolvió algunos ensayos de práctica y, para concluir, resolvió los 35 ítems de la tarea.

2.5. Análisis estadísticos

Para el procesamiento y análisis de los datos se utilizó el software R en Rstudio (R Core Team, 2021; RStudio Team, 2020) ejecutando comandos provistos por los siguientes paquetes: tidyverse (Wickham et al., 2019), lme4 (Bates et al., 2015), MuMIn (Barton, 2016) y Lattice (Sarkar, 2008). Se implementaron modelos lineales de efectos mixtos, fijos y aleatorios, (LMMs por sus siglas en inglés) diseñados para evaluar el efecto del factor entre sujetos (condiciones de amenaza), de la ansiedad matemática, de la ansiedad general rasgo y de la capacidad de memoria de trabajo, sobre el primer indicador de desempeño en la resolución de problemas intuitivos (tiempo consumido para obtener la respuesta). También se estimaron modelos lineales de efectos mixtos generalizados, fijos y aleatorios, (GLMMs por sus siglas en inglés) para evaluar el efecto del factor entre los sujetos (tres condiciones de amenaza contextual matemática) y las mismas tres variables continuas incorporadas sobre el segundo indicador de desempeño (precisión en la respuesta obtenida, codificada como 0 si es incorrecta y como 1 si la es correcta). Debido a que la precisión es una variable dicotómica el análisis de la precisión se basa en la generalización de los LMMs: a saber, los GLMMs, ya que estos sí admiten el análisis para una variable dependiente discreta.

En los modelos se codificaron contrastes ortogonales a partir de comparaciones definidas por el usuario para evaluar las hipótesis. Los efectos fijos posibilitaron la estimación de las diferencias entre las condiciones, mientras que el intercepto corresponde a la gran media de las variables dependientes. Se incluyeron como efectos aleatorios el intercepto de los participantes y de los ítems considerados como intuitivos. Se utilizó la estimación por máxima verosimilitud para ajustar los modelos y determinar de sus parámetros.

Para el primer modelo, se definió como variable dependiente el indicador de desempeño de la tarea asociado al porcentaje de tiempo consumido con respecto a los 2 minutos disponibles para que cada participante diera la respuesta al ítem. De esta forma, se tiene que $(RT_c)_i = \frac{RT_i}{120\,000}$ en la cual RT_i es el tiempo de respuesta (en ms) registrado en el ítem i =1, 2, 3, …, 24. Este tiempo va desde el momento en que se despliega el problema en pantalla, hasta el instante en que el participante oprime el botón “siguiente” después de arrastrar el fósforo correspondiente para completar su respuesta. Si para el ítem i pasan los 2 minutos disponibles y el participante no llega a oprimir ese botón, entonces RT_i = 120 000 y $(RT_c)_i$=1.

Para el segundo modelo, se definió como variable dependiente el indicador de desempeño la precisión en las respuestas $(ACC)_i$ en el ítem i =1, 2, 3, …, 24. Como ya se indicó anteriormente, $(ACC)_i$ = 1 si la respuesta del ítem i es correcta y $(ACC)_i$ = 0 si la respuesta del ítem i es incorrecta.

Los dos indicadores de desempeño se calcularon y se incluyeron en las bases de datos para todos los ítems de la tarea de aritmética con fósforos; sin embargo, en la implementación de los modelos lineales de efectos mixtos y en los análisis correlacionales se tomaron en cuenta únicamente la medición de los doce ítems tipo CR como los representantes de los problemas intuitivos.

3. RESULTADOS

3.1. Análisis correlacional

En la Tabla 2 se aprecia la matriz de correlaciones entre las variables incluidas en los modelos. Entre las correlaciones determinadas, destaca una fuerte correlación negativa que se da entre los dos indicadores de desempeño en la resolución de problemas intuitivos (*RTc* y *ACC*). Con respecto a la ansiedad matemática se observa que tiene correlaciones altas y significativas con todas las demás variables (positivas con el consumo de tiempo y la ansiedad general rasgo, negativas con la precisión y la capacidad de memoria de trabajo).

En este punto, en importante resaltar que a pesar de que ambos tipos de ansiedad (matemática y rasgo) muestran una alta correlación positiva entre ellas, solamente la ansiedad matemática tuvo una correlación alta y significativa con las demás variables incluidas, al tiempo que la ansiedad general rasgo no correlacionó de forma significativa con ninguna de ellas. Este resultado es coherente con lo señalado por Dowker et al. (2016) de que a pesar de existir una correlación alta y positiva entre ambos tipos de ansiedad no pueden ser equiparadas. Además, el resultado sugiera que ambos tipos de ansiedad no se relacionan de igual manera con el desempeño en la resolución de problemas intuitivos ni con la capacidad de memoria de trabajo.

Por otra parte, para la capacidad de memoria de trabajo se dio una correlación positiva y estadísticamente muy significativa es con la precisión en las respuestas, mientras que mostró correlaciones, también significativas, pero negativas con el consumo de tiempo y ansiedad matemática.

Tabla 2 – Matriz de correlaciones entre las variables.

Variables	RT_c	*ACC*	Ansiedad matemática	Ansiedad general rasgo	Capacidad de memoria de trabajo
RT_c	-				
ACC	-.55 ***	-			
Ansiedad matemática	.29 **	-.40 ***	-		
Ansiedad general rasgo	.13	-.18	.35 ***	-	
Capacidad de memoria de trabajo	-.28 **	.36 ***	-.32 ***	.05	-

Nota. RT_c = Porcentaje de tiempo consumido, *ACC* = Precisión (cantidad de respuestas correctas). Códigos de significancia estadística: * $p < .05$, ** $p < .01$, ***$p< .001$. En todas las correlaciones n=111 excepto para las que involucran la capacidad de memoria de trabajo (para estas n=105).

3.2. Modelos lineales de efectos mixtos (LMMs y GLMMs)

El proceso de ajustar los dos modelos finales que permitieran predecir, respectivamente, *RTc* y *ACC* en términos del factor generado por las condiciones experimentales de amenaza contextual matemática y las demás variables de interés, requirió la comparación entre diferentes modelos preliminares que se iban definiendo sucesivamente mediante la incorporación sistemática de variables independientes al modelo anterior. Tanto en la sucesión generada de modelos para predecir RT_c como en la sucesión de modelos para predecir *ACC*, la comparación entre ellos se llevó a cabo mediante el logaritmo de la verosimilitud. Además, para la selección se utilizó el Criterio de Información Bayesiana (BIC), pues permite la comparación entre modelos con complejidad distinta, con la ventaja adicional de favorecer al modelo más parsimonioso. De acuerdo con lo establecido para este criterio, se seleccionó en cada caso el modelo con BIC menor. Finalmente, en la comparación entre cada par de modelos, también se efectuó el cálculo de la diferencia de BIC entre ambos (ΔBIC), lo que constituyó una medida de desambiguación al seleccionar uno de los modelos (Burnham y Anderson, 2004;

Wasserman, 2000), puesto que los valores obtenidos para ese parámetro sugirieron poco apoyo al modelo con mayor BIC.

Para ilustrar ese proceso, en la Tabla 3 se aprecian los parámetros para los dos últimos modelos competidores para predecir RTc (M.1.1 y M.1.2. ajustados mediante LMMs) y los dos últimos modelos para predecir ACC (M.2.1. y M.2.2. ajustados mediante GLMMs). Para la predicción de consumo de tiempo (*RTc*) el modelo ganador fue el M.1.1. (de acá en adelante simplemente modelo 1) y para la predicción de precisión (*ACC*) el modelo ganador fue el M.2.1. (de acá en adelante simplemente modelo 2). La utilización del BIC y el ΔBIC favoreció en ambos casos la parsimonia del modelo, es decir, dio preferencia el modelo con menor cantidad de parámetros.

Tabla 3 – Últimos dos modelos competidores para los indicadores de desempeño en los problemas intuitivos de la tarea (variable dependiente).

Modelo (V.D.)	**Efectos fijos**	**Efectos aleatorios**	**GL**	**BIC**	**ΔBIC**	**Log-Lik**
M.1.1. (RT_c)	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$, $ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$, AM, CMT.	ID($_{(int)}$, $Item_{(int)}$.	7	546.1	0	-244.50
M.1.2. (RT_c)	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$, $ACM^{(NoC\text{-}Coh)}$, AM, CMT, AGR.	$ID_{(int)}$, $Item_{(int)}$.	8	553.2	7.1054	-244.48
Modelo	Efectos fijos	Efectos aleatorios	GL	BIC	ΔBIC	Log-Lik
M.2.1. (*ACC*)	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$, $ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$, AM, CMT.	$ID_{(int)}$, $Item_{(int)}$.	7	1415.8	0	-682.92
M.2.2. (*ACC*)	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$, $ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$, AM, CMT, AGR.	ID(int), Itemi(int).	8	1422.8	6.9578	-682.83

Nota: V.D.=Indicador del desempeño (variable dependiente); RTc=porcentaje de tiempo consumido, ACC=Precisión (cantidad de respuestas correctas); GL= Grados de libertad; BIC=Criterio de Información Bayesiana; ΔBIC=Diferencia entre el modelo con el BIC más bajo y el modelo restante; Log-Lik=Logaritmo de la verosimilitud; ACM=Amenaza contextual matemática, AM = ansiedad matemática; AGR= ansiedad general rasgo; CMT=Capacidad de memoria de trabajo; ID = número identificador de cada participante; Item = número identificador del problema en la tarea. Los subíndices señalados entre paréntesis corresponden a: (Int)=Intercepto para las variables agrupadoras ID e Item; (NoAm–Am)=diferencia de los estimados en la condición de amenaza menos los estimados en la condición control; (NoCCoh)=diferencia de los estimados en condición de amenaza no coherente menos los estimados en condición de amenaza coherente.

Una vez efectuada la selección de los modelos ganadores, se efectuó el análisis correspondiente de los efectos mixtos. En la Tabla 4 se exponen los parámetros obtenidos para los efectos fijos de los modelos 1 y 2.

Tabla 4 – Parámetros estimados para los efectos fijos.

Modelo 1 (indicador *RT*c de la variable dependiente desempeño)

Efecto fijo	Parámetro	Valor estimado	IC (95%)	Error estándar	T (*valor- p*)
Diferencias	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$	0.003	[-0.014, 0.020]	0.009	0.366 (.715)
Diferencias	$ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$	0.032	[0.002, 0.061]	0.015	2.123 (.036) *
Pendiente (*Slope*)	AM	0.167	[0.017, 0.317]	0.076	2.206 (.030) *
Pendiente (*Slope*)	CMT	-0.124	[-0.255, 0.006]	0.066	-1.883 (.063) **.**

Modelo 2 (indicador *ACC* de la variable dependiente desempeño)

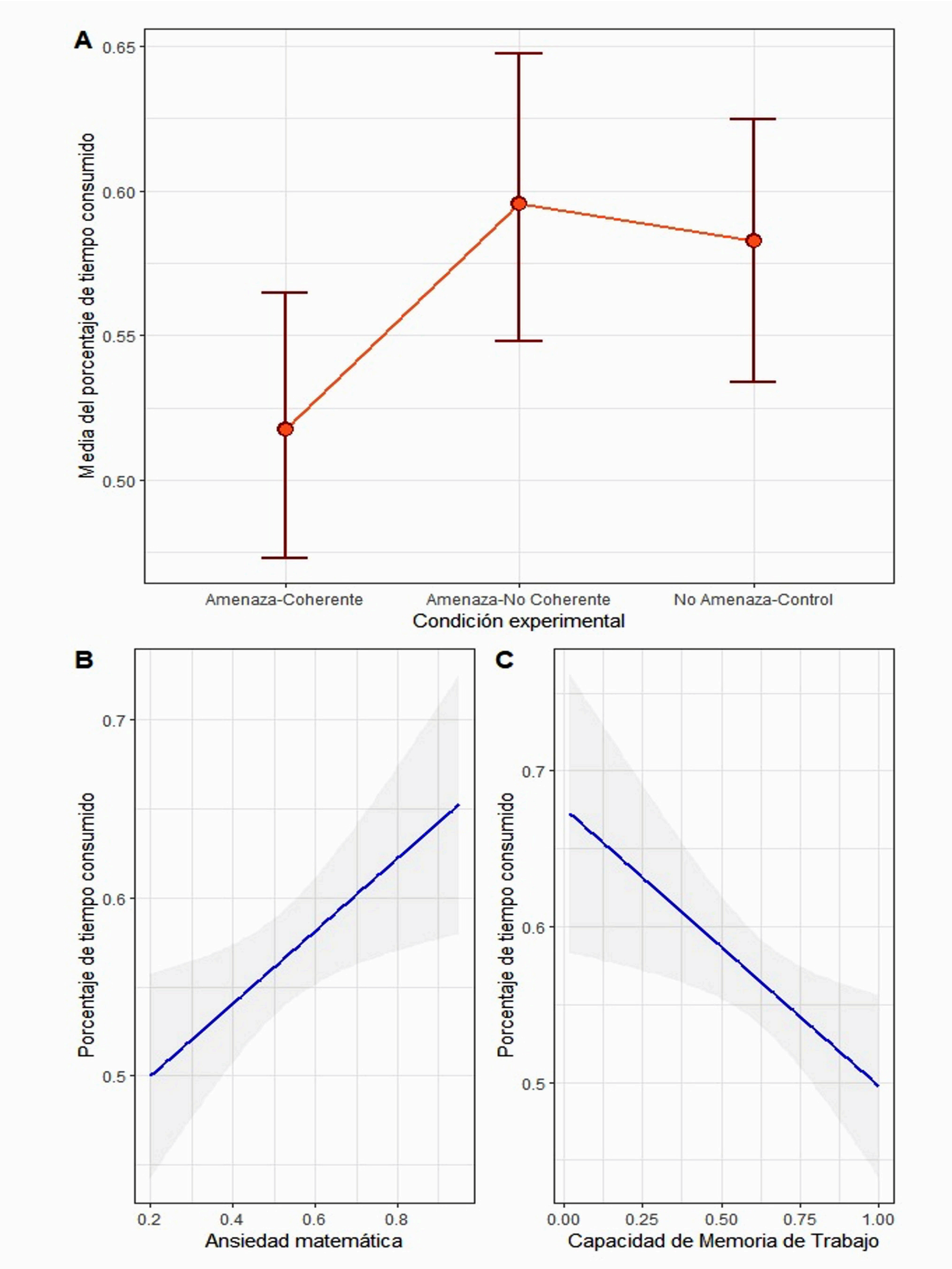
Efecto fijo	Parámetro	Valor estimado	IC (95%)	Error estándar	Z (*valor- p*)
Diferencias	$ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$	0.014	[-0.185, 0.212]	0.099	0.143 (.866)
Diferencias	$ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$	-0.230	[-0.572, 0.109]	0.170	-1.352 (.177)
Pendiente (*Slope*)	AM	-2.730	[-4.497, -1.027]	0.867	-3.150 (.002) **
Pendiente (*Slope*)	CMT	2.036	[0.550, 3.561]	0.753	2.705 (.007) **

Fuente: Elaboración propia.

Nota. RTc=porcentaje de tiempo consumido, ACC=Precisión (cantidad de respuestas correctas). $ACM_{(NoAm\text{-}Am)}$=diferencia de los estimados en la condición de amenaza menos los estimados en la condición de control; $ACM_{(NoC\text{-}Coh)}$=diferencia de los estimados en la condición amenaza no coherente menos los estimados en condición amenaza coherente. Códigos para la significancia estadística: **.** $p < 0.1$, *$p < 0.05$, **$p < 0.01$, ***$p < 0.001$.

De los parámetros obtenidos para el modelo 1 se evidenció lo siguiente: (i) No hay diferencias estadísticamente significativas de consumo de tiempo para dar respuesta entre las personas en condición de amenaza contextual matemática y las personas en condición de no amenaza. (ii) El consumo del tiempo disponible entre personas expuestas a la amenaza contextual matemática con un indicador situacional coherente con la amenaza (práctica difícil) en comparación con las personas expuestas a la amenaza contextual matemática con un indicador situacional no coherente con la amenaza (práctica control) mostraron diferencias que sí alcanzaron significancia estadística. No obstante, debido a los contrastes definidos al elaborar los modelos, el signo positivo de las diferencias indica que las personas con la práctica control consumieron más tiempo para llegar a la respuesta que los que resolvieron la práctica difícil, circunstancia que es opuesta a lo que se había predicho en la hipótesis 1 (ver Figura 4A). (iii) La ansiedad matemática tuvo un efecto sobre el indicador de tiempo consumido en la resolución de problemas intuitivos y el signo positivo del valor estimado confirmó el sentido de la predicción realizada en la hipótesis 2, es decir, que el aumento en los niveles de ansiedad matemática generó un aumento en el tiempo requerido para dar respuesta al problema (ver Figura 4B). (iv) Un efecto (no predicho) de la capacidad de memoria de trabajo sobre el consumo de tiempo llegó a ser marginalmente significativo. Además, el signo negativo del valor estimado correspondiente a esa variable sugiere que personas con mayor capacidad de memoria de trabajo consumieron menos tiempo para llegar a la respuesta de los problemas intuitivos (ver Figura 4C).

Figura 4 – Inspección visual de los datos del modelo 1.

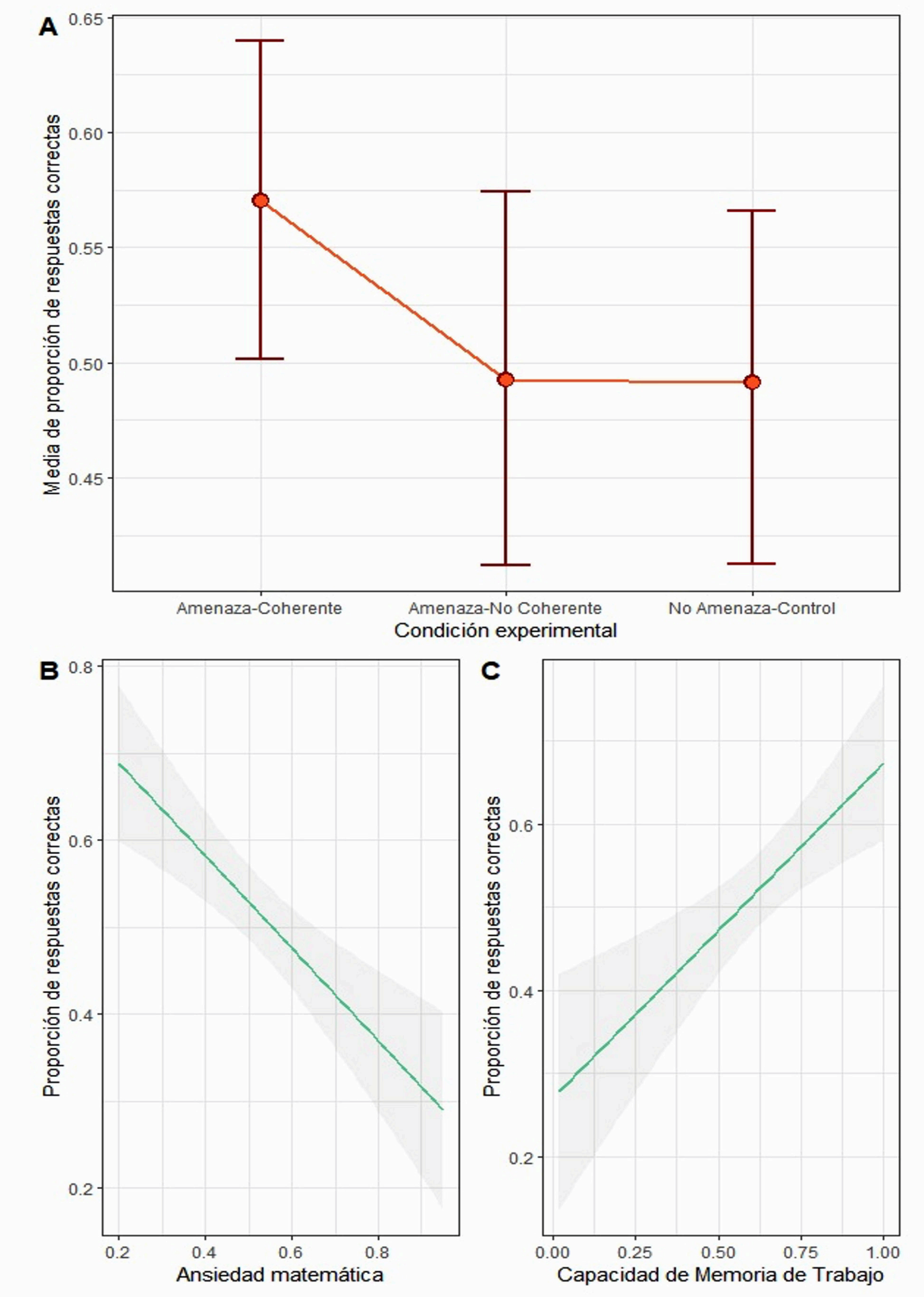


Nota. A: Comparación de las medias de la variable de consumo de tiempo para dar respuesta en cada condición experimental (las barras corresponden al error estándar); B: línea de regresión para la relación de ansiedad matemática con el indicador RT_c; y C: línea de regresión para la relación de capacidad de memoria de trabajo con el indicador RT_c. La zona sombreada en B y C corresponde al intervalo de confianza de 95% alrededor de cada línea.

De los parámetros obtenidos para el modelo 2 (ver Tabla 4) se concluyó lo siguiente: (i) En lo que se refiere a un efecto sobre la precisión en las respuestas a los problemas intuitivos para las condiciones de amenaza contextual matemática, ninguna de las diferencias modeladas llegó a ser estadísticamente significativas. La falta de evidencia de un efecto sobre el indicador de desempeño, situación que también se dio con el indicador de consumo de tiempo, significa que los datos no respaldan la hipótesis 1 del estudio (ver Figura 5A). (ii) La ansiedad matemática sí evidenció un efecto estadísticamente significativo sobre la cantidad de respuestas correctas de cada participante. Además, dado que el valor estimado para dicho efecto tiene un signo negativo, se respalda lo señalado en la hipótesis 2, esto es, mayores niveles de ansiedad matemática en las personas participantes generan una menor proporción de respuestas correctas (ver Figura 5B). (iii) Se dio un efecto estadísticamente significativo de la capacidad de memoria de trabajo sobre la precisión en las respuestas. El signo positivo del valor estimado para este efecto confirma lo predicho en la hipótesis 2, a saber, una mayor capacidad de memoria de trabajo se relaciona con un incremento en la proporción de respuestas correctas en los problemas intuitivos de la tarea (ver figura 5C). Este resultado respalda los estudios que encontraron evidencias de un efecto potenciador de la capacidad de memoria de trabajo sobre la precisión en la resolución de problemas intuitivos (Chuderski y Jastrzębski, 2017, 2018).

Es importante resaltar que los componentes de la varianza, tanto para la ansiedad matemática (modelos 1 y 2) como para la capacidad de memoria de trabajo (modelo 2), no incluyen el cero en los intervalos de confianza, lo que constituye evidencia de que diferencias individuales el tiempo consumido y también en la cantidad de respuestas correctas se deben al nivel de ansiedad matemática, mientras que diferencias individuales en el indicador de precisión en las respuestas que se deben a la capacidad de memoria de trabajo.

Figura 5 – Inspección visual de datos del modelo 2.



Nota. A: Comparación de las medias de la variable de precisión para cada condición experimental (las barras corresponden al error estándar); B: línea de regresión para la relación de capacidad de memoria de trabajo con el indicador *ACC*; y C: línea de regresión para la relación capacidad de memoria de trabajo con el indicador *ACC*. La zona sombreada en B y C corresponde al intervalo de confianza de 95% alrededor de cada línea.

4. DISCUSIÓN

El objetivo general del estudio consistió en explorar el rol de la amenaza contextual matemática sobre el desempeño en problemas intuitivos de una tarea matemática por parte de personas estudiantes universitarias, controlando las variables de ansiedad matemática, ansiedad general rasgo y capacidad de memoria de trabajo.

Después de efectuar el análisis de los datos, se concluye que la amenaza contextual matemática no mostró un efecto sobre el desempeño en la resolución de los problemas intuitivos. Esto significa que los datos no respaldaron en ninguna de sus partes lo predicho en la primera hipótesis. Sin embargo, esto no significa que se debe desechar completamente la posibilidad de que la señalización explícita de la naturaleza matemática de una tarea genere un efecto negativo sobre el desempeño. Anderson (2008) afirma que no es conveniente descartar hipótesis complejas evaluadas sobre un conjunto pequeño de datos. Bajo esa premisa, la hipótesis no comprobada en el estudio podría ser retomada o replanteada para volver a ser evaluada en otro contexto, sobre un conjunto nuevo de datos, con tareas matemáticas que podrían ser de diferente naturaleza (visoespacial, verbal o mixta) o controlando otras variables adicionales que no fueron consideradas.

Es posible establecer conjeturas de por qué la amenaza contextual matemática no produjo efectos significativos sobre el desempeño en los problemas intuitivos de la tarea matemática utilizada. Una posibilidad es que un cierto número de personas participantes, no percibieran amenazante la naturaleza matemática de la tarea, ni el hecho de que la tarea tuviera como propósito compararlos con otros. En otras palabras, la amenaza contextual planteada no logró que las personas alcanzaran el umbral de presión necesario para que se produjera un efecto negativo en la resolución exitosa de los problemas. Esta situación ya se ha reportado en estudios de amenaza de estereotipo, en las cuales se reportó que la manipulación experimental de una amenaza no afectó de igual manera a todas las personas y que la manipulación no siempre logra activar un efecto negativo sobre el desempeño (Agnoli et al., 2021; Ganley et al., 2013).

Por otra parte, el efecto contrario al esperado para las personas expuestas a la práctica difícil con respecto a las personas que realizaron la práctica control permite hacer otras especulaciones. Se ha considerado que existe la posibilidad de que las instrucciones generales previas a la tarea, el enunciado que debía activar la amenaza y la práctica ejecutada antes de la tarea hayan activado (por separado o en su conjunto) un rasgo que no estaba siendo controlado en el estudio: la *autoeficacia*. Esta se conceptualiza como la certeza que tiene una persona de ser capaz de ejecutar tareas requeridas exitosamente, ya sea porque tenga la convicción de poder lograr ciertos resultados o de ser capaz de lidiar con situaciones amenazantes mediante un esfuerzo persistente (Bandura, 1977). Así, puede ser que las personas participantes en lugar de sentirse amenazados hayan tenido una sensación de reto o competencia y la práctica previa a la tarea pudo haber reforzado su convicción de ser capaces de resolver la tarea con éxito. De esta manera, una cantidad de participantes puede haber llevado a cabo una movilización eficiente de su recurso cognitivo con la consecuente anulación del efecto negativo que pudiera haber tenido la amenaza sobre el desempeño. Esta suposición está teóricamente respaldada pues la autoeficacia ha sido documentada como un buen predictor del desempeño en pruebas estandarizadas y de altas consecuencias (Montero-Rojas et al., 2021), en el rendimiento académico en general (Honicke y Broadbent, 2016) y también en el área específica de matemática (Zamora-Araya, 2020). Además, estudios empíricos han reportado que la activación de la autoeficacia antes de la ejecución de una tarea se ha relacionado con un incremento en la motivación, el aprendizaje, la autorregulación y el logro (Schunk y DiBenedetto, 2016).

Más allá de las razones por las cuales no se evidenció una afectación negativa sobre los indicadores de desempeño en la resolución de problemas intuitivos, el hecho de generar y delimitar un nuevo constructo llamado la amenaza contextual matemática, así como demarcar una nueva manera de aproximarse a fenómenos relacionados con los escenarios en los que se da una interacción entre las personas y los objetos matemáticos, constituye por sí mismo un aporte importante del estudio.

Finalmente, un aspecto que reviste una particular importancia es el respaldo de los datos a la segunda hipótesis, a partir de un enfoque que tomó en cuenta las variables de ansiedad matemática y de capacidad de memoria de trabajo como elementos fundamentales en un contexto matemático que propone la resolución de problemas intuitivos. A pesar de que la manipulación sobre la amenaza contextual matemática constituyó el interés primordial de la investigación, la evidencia del efecto de la ansiedad matemática y de la capacidad de memoria de trabajo sobre el desempeño constituye un valioso aporte. En el caso de la ansiedad matemática, los datos sustentaron sobradamente la hipótesis de su efecto sobre el tiempo de respuesta y sobre la precisión. Por su parte, la predicción de que efecto de la capacidad de memoria de trabajo se daría sobre el indicador de precisión también quedó debidamente sustentada. De esta forma, los resultados de esta investigación llegan a incrementar el conjunto de evidencias que apuntan a efectos estadísticamente significativos de estas dos variables sobre distintos indicadores del desempeño matemático en la resolución de problemas intuitivos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

LVG concibió la idea del proyecto de investigación, desarrolló su fundamentación teórica, diseñó la metodología y sus actividades, implementó los modelos, recopiló y analizó los datos. Los otros autores (ORV, VSC y LRT) constituían el Comité Asesor del Trabajo Final de Graduación de LVG (sustentado en el presente estudio), por lo que participaron activamente mediante observaciones a la propuesta inicial del proyecto, la discusión de los resultados, así como con la revisión y aprobación la versión final de esta publicación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor de contacto, (LVG) previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnoli, F., Melchiorre, F., Zandonella Callegher, C., & Altoè, G. (2021). Stereotype threat effects on Italian girls' mathematics performance: A failure to replicate. *Developmental Psychology*, *57*(6), 940-950. https://doi.org/10.1037/dev0001186

Anderson, D. R. (2008). *Model based inference in the life sciences: A primer on evidence*. Springer.

Ashcraft, M. H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current directions in psychological science*, *11*(5), 181-185. https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psychological Review*, *84*(2), 191-215.

Barton, K. (2016). *MuMIn: Multi-model inference*. *R package version 1.15.6.1* (1,18) [Software]. https://cran.r-project.org/web/packages/ MuMIn/MuMIn.pdf

Bates, D., Mächler, M., Bolker, B., & Walker, S. (2015). Fitting Linear Mixed-Effects Models Using **lme4**. *Journal of Statistical Software*, *67*(1). https://doi.org/10.18637/jss.v067.i01

Beilock, S. L., & DeCaro, M. S. (2007). From Poor Performance to Success Under Stress: Working Memory, Strategy Selection, and Mathematical Problem Solving Under Pressure. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *33*(6), 983-998. https://doi.org/10.1037/0278-7393.33.6.983

Bellinger, D. B., DeCaro, M. S., & Ralston, P. A. S. (2015). Mindfulness, anxiety, and high-stakes mathematics performance in the laboratory and classroom. *Consciousness and Cognition*, *37*, 123-132. https://doi.org/10.1016/j.concog.2015.09.001

Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (Eds.). (2004). *Model Selection and Multimodel Inference*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/b97636

Cadinu, M., Maass, A., Rosabianca, A., & Kiesner, J. (2005). Why Do Women Underperform Under Stereotype Threat?: Evidence for the Role of Negative Thinking. *Psychological Science*, *16*(7), 572-578. https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2005.01577.x

Chang, H., & Beilock, S. L. (2016). The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: A review of current behavioral and psychophysiological research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10*, 33-38. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.011

Chuderski, A., & Jastrzębski, J. (2017). Working memory facilitates insight instead of hindering it: Comment on DeCaro, Van Stockum, and Wieth (2016). *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *43*(12), 1993-2004. https://doi.org/10.1037/xlm0000409

Chuderski, A., & Jastrzębski, J. (2018). Much ado about aha!: Insight problem solving is strongly related to working memory capacity and reasoning ability. *Journal of Experimental Psychology: General*, *147*(2), 257-281. https://doi.org/10.1037/xge0000378

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297-334. https://doi.org/10.1007/BF02310555

DeCaro, M. S., Rotar, K. E., Kendra, M. S., & Beilock, S. L. (2010). Diagnosing and alleviating the impact of performance pressure on mathematical problem solving. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *63*(8), 1619-1630. https://doi.org/10.1080/17470210903474286

DeCaro, M. S., Thomas, R. D., Albert, N. B., & Beilock, S. L. (2011). Choking under pressure: Multiple routes to skill failure. *Journal of Experimental Psychology: General*, *140*(3), 390-406. https://doi.org/10.1037/a0023466

DeCaro, M. S., Van Stockum, C. A., & Wieth, M. B. (2016). When Higher Working Memory Capacity Hinders Insight. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *42*(1), 39-49. https://doi.org/10.1037/xlm0000152

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, *7*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(5), 324. https://doi.org/10.2307/748467

Franceschini, G., Galli, S., Chiesi, F., & Primi, C. (2014). Implicit gender–math stereotype and women's susceptibility to stereotype threat and stereotype lift. *Learning and Individual Differences*, *32*, 273-277. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2014.03.020

Ganley, C. M., Mingle, L. A., Ryan, A. M., Ryan, K., Vasilyeva, M., & Perry, M. (2013). An examination of stereotype threat effects on girls' mathematics performance. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1886-1897. https://doi.org/10.1037/a0031412

Gimmig, D., Hugget, P., Caverni, J.-P., & Cury, F. (2006). Choking under pressure and working memory capacity: When performance pressure reduces fluid intelligence. *Psychonomic Bulletin & Review*, *13*(6), 1005-1010. https://doi.org/10.3758/BF03213916

Honicke, T., & Broadbent, J. (2016). The influence of academic self-efficacy on academic performance: A systematic review. *Educational Research Review*, *17*, 63-84. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.11.002

Kline, P. (2000). *The handbook of psychological testing* (2nd ed). Routledge.

Knoblich, G., Ohlsson, S., Haider, H., & Rhenius, D. (1999). Constraint relaxation and chunk decomposition in insight problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *25*(6), 1534-1555. https://doi.org/10.1037/0278-7393.25.6.1534

Knoblich, G., Ohlsson, S., & Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving. *Memory & Cognition*, *29*(7), 1000-1009. https://doi.org/10.3758/BF03195762

Maloney, E. A., Schaeffe, M. W., & Beilock, S. L. (2013). Mathematics anxiety and stereotype threat: Shared mechanisms, negative consequences and promising interventions. *Research in Mathematics Education, 15*(2), 115-128. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797744

Meza, L. G., Agüero, E., & Suárez, Z. (2014). Elementos de análisis factorial aplicados al estudio de cualidades psicométricas de la escala de “ansiedad matemática” de Fennema-Sherman. En *Memorias IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* (pp. 208-210). Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Montero-Rojas, E., Moreira-Mora, T. E., Zamora-Araya, J. A., & Smith-Castro, V. (2021). Una nueva mirada teórica y metodológica a diferencias de género en pruebas de matemática: Razonamiento, actitudes psicosociales y modelos multinivel. *Revista Electrónica Educare*, *25*(1), 1-21. https://doi.org/10.15359/ree.25-1.8

Murphy, M. C., & Taylor, V. J. (2012). The Role of Situational Cues in Signaling and Maintaining Stereotype Threat. En *Stereotype threat: Theory, process, and application* (pp. 17-33). Oxford University Press, Inc.

Nguyen, H.-H. D., & Ryan, A. M. (2008). Does stereotype threat affect test performance of minorities and women? A meta-analysis of experimental evidence. *Journal of Applied Psychology*, *93*(6), 1314-1334. https://doi.org/10.1037/a0012702

Oberauer, K., & Kliegl, R. (2006). A formal model of capacity limits in working memory. *Journal of Memory and Language*, *55*, 601-626. https://doi.org/10.1016/j.jml.2006.08.009

Oberauer, K., & Lewandowsky, S. (2016). Control of information in working memory: Encoding and removal of distractors in the complex-span paradigm. *Cognition*, *156*, 106-128. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2016.08.007

Öllinger, M., Jones, G., & Knoblich, G. (2008). Investigating the Effect of Mental Set on Insight Problem Solving. *Experimental Psychology*, *55*(4), 269-282. https://doi.org/10.1027/1618-3169.55.4.269

Park, D., Ramirez, G., & Beilock, S. L. (2014). The role of expressive writing in math anxiety. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *20*(2), 103-111. https://doi.org/10.1037/xap0000013

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de elección de carreras* [Tesis para optar al grado de Doctora en Matemática con énfasis en Didáctica de la Matemática., Universidad de Granada]. https://hera.ugr.es/tesisugr/2108144x.pdf

R Core Team. (2021). *R: A language and environment for statistical computing* [Software]. R Foundation for Statistical Computing. URL: https://www.R-project.org/

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, *141*, 83-100. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014

Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2013). Math Anxiety, Working Memory, and Math Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development*, *14*(2), 187-202. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.664593

Rodríguez-Villagra, O. A. (2015). Modelos de variable latente, modelación cognitiva y memoria de trabajo: Un punto de encuentro. *Actualidades de Psicología*, *29*(119), 43-62. https://doi.org/10.15517/ap.v29i119.18850

Rodríguez-Villagra, O. A., Göthe, K., Oberauer, K., & Kliegl, R. (2013). Working memory capacity in a go/no-go task: Age differences in interference, processing speed, and attentional control. *Developmental Psychology*, *49*(9), 1683-1696. https://doi.org/10.1037/a0030883

RStudio Team. (2020). *RStudio: Integrated Development for R* [Software]. RStudio, PBC. http://www.rstudio.com/

Sarkar, D. (2008). *Lattice: Multivariate data visualization with R*. Springer.

Schunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2016). Self-Efficacy Theory in Education. En *Handbook of Motivation at School Routledge*.

https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315773384.ch3

Spielberger, C. D., Gorsuch, R. L., & Lushene, R. (1970). *State–Trait Anxiety Inventory*. Consulting Psychology Press.

Spielberger, C. D., Gorsuch, R. L., & Lushene, R. (1982). *Cuestionario de Ansiedad Estado/Rasgo*. TEA.

Steele, C. M., & Aronson, J. (1995). Stereotype Threat and the Intellectual Test Performance of African Americans. *Journal of Personality and Social Psychology*, *69*(5), 797-811. https://doi.org/10.1037/0022-3514.69.5.797

Wasserman, L. (2000). Bayesian Model Selection and Model Averaging. *Journal of Mathematical Psychology*, *44*(1), 92-107. https://doi.org/10.1006/jmps.1999.1278

Wickham, H., Averick, M., Bryan, J., Chang, W., McGowan, L., François, R., Grolemund, G., Hayes, A., Henry, L., Hester, J., Kuhn, M., Pedersen, T., Miller, E., Bache, S., Müller, K., Ooms, J., Robinson, D., Seidel, D., Spinu, V., … Yutani, H. (2019). Welcome to the Tidyverse. *Journal of Open-Source Software*, *4*(43), 1686. https://doi.org/10.21105/joss.01686

Zamora-Araya, J. A. (2020). Las actitudes hacia la matemática, el desarrollo social, el nivel educativo de la madre y la autoeficacia como factores asociados al rendimiento académico en la matemática. *Uniciencia*, *34*(1), 74-87. https://doi.org/10.15359/ru.34-1.5

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
127-150
Recibido: 17/04/2024
Aprobado: 06/06/2024

Artículos de investigación

LINGÜÍSTICA SISTÉMICO-FUNCIONAL EN EL ESTUDIO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO. APORTACIONES DESDE EL ANÁLISIS DE ALGUNOS TEXTOS ALGEBRAICOS Y DEL CÁLCULO

SYSTEMIC-FUNCTIONAL LINGUISTICS IN THE STUDY OF MATHEMATICAL LANGUAGE. CONTRIBUTIONS FROM THE ANALYSIS OF SOME TEXTS FROM ALGEBRA AND CALCULUS.

Luis Alberto López-Acosta[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2903-5413

RESUMEN

En este trabajo se muestran algunas de las posibilidades que tiene emplear la Lingüística Sistémico-Funcional para el análisis del lenguaje matemático. Estas posibilidades son retomadas de tres investigaciones que buscaron comprender las características gramaticales y multisemióticas de distintos discursos algebraicos de traducciones de textos originales en la historia del desarrollo del álgebra, así como textos de estudiantes al resolver problemas relacionados con el álgebra desarrollada por Viète y Descartes. Los resultados de estos estudios han dado muestra de las características gramaticales y semánticas que diferencian distintos tipos de textos algebraicos y otros pertenecientes a estudiantes. También, se aborda el uso de mecanismos de intersemiosis entre los distintos recursos semióticos del lenguaje matemático: lenguaje natural, simbolismo e imágenes. Principalmente, se busca dar una muestra sobre cómo los métodos de análisis desde este enfoque teórico pueden visualizar elementos ocultos para personas investigadoras en Educación Matemática.

Palabras clave: Lenguaje Matemático, Semiótica Social, Lingüística Sistémico-Funcional, Multisemiosis, Educación Matemática.

ABSTRACT

This paper shows some of the possibilities of using Systemic-Functional Linguistics for the analysis of mathematical language. These possibilities are taken from three investigations that aimed to understand the grammatical and multisemiotic characteristics of different algebraic discourses based on translations of original texts in the history of the development of algebra, as well as student texts when solving problems related to the algebra developed by Viète and Descartes. The results of these studies have shown the grammatical and semantic characteristics that differentiate different types of algebraic texts and others belonging to students. The use of certain mechanisms of intersemiosis

1 Departamento de Educación Secundaria, Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, San Pedro Montes de Oca, Costa Rica, C. P. 03330. Correo electrónico: luis.lopezacosta@ucr.ac.cr

between the different semiotic resources of mathematical language: natural language, symbolism and images is also addressed. The main objective is to show how the methods of analysis from this theoretical approach can visualize hidden elements for researchers in Mathematics Education.

Keywords: Mathematical Language, Social semiotics, Systemic Functional Linguistics, Multisemiosis, Mathematics Education.

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre el lenguaje matemático en la disciplina han mostrado sus distintas características y, naturalmente, se ha recurrido a marcos de referencia que articulan construcciones propias de la Educación Matemática con disciplinas como la Lingüística y la Semiótica para comprender los fenómenos asociados. Principalmente, los estudios han dado cuenta de elementos como los que se desarrollan a continuación.

Relaciones entre pensamiento y lenguaje: algunas posturas relacionan el pensamiento matemático con la comunicación interna, de ahí que se hable de la *comognición* (traducción del término original *commognition*) (Sfard, 2008). De acuerdo con esta autora,

> El proceso de objetivación implica […] dos movimientos discursivos […] la *cosificación*, que consiste en sustituir el discurso sobre las acciones por el discurso sobre los objetos, y la *alienación*, que consiste en presentar los fenómenos de manera impersonal, como si ocurrieran por sí mismos, sin la participación de los seres humanos (Sfard, 2008, p. 44, énfasis propio).

Otras posturas que vinculan el pensamiento con la corporalidad y conjuntos semióticos establecen la importancia que tiene el uso de recursos semióticos como los gestos y la conjunción de más de un recurso como el habla y los gestos para el desarrollo del pensamiento matemático. Algunas otras se refieren, también, al aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista discursivo, estableciendo relaciones entre el pensamiento y el lenguaje. Estas últimas están inspiradas, principalmente, en los planteamientos de Vigotsky y Wittgenstein (Kieran et al., 2003; Sfard, 2003, 2008).

El registro matemático: a decir de McGregor y Price (1999), los estudios relativos al aprendizaje del lenguaje y las matemáticas en un principio estuvieron centrados en estudiar los significados matemáticos desde su componente del lenguaje natural, lo que en el campo ha sido denominado registro matemático de acuerdo con los trabajos de Halliday (1982). Se han identificado las características de su vocabulario específico que hace uso de términos que son empleados en el lenguaje natural; así como la forma en la que se interpretan las regularidades discursivas de enunciados matemáticos; y la capacidad para la traducción y comprensión de problemas verbales. De este tipo de estudios se ha determinado que los discursos[2] matemáticos son altamente *objetivados* (Schleppegrell, 2007; Sfard, 2003, 2008), puesto que hay una tendencia a convertir *procesos* en *objetos* mediante construcciones metafóricas (Pimm, 1987; Sfard, 2003, 2008; O'Halloran, 2005, 2007; Morgan, 2014). Además, este discurso hace uso de un vocabulario especializado que incluye palabras únicas y otras palabras provenientes del lenguaje cotidiano que adquieren ciertas restricciones. Este último tipo de palabras constituyen una de las fuentes más comunes de dificultades en su aprendizaje (Halliday, 1975; Pimm, 1987; Morgan, 2014). También, se recurre al uso de grupos densos de palabras que resumen

2 Desde la postura de M. A. K. Halliday, el discurso es considerado como una instanciación del lenguaje. Esto es, el lenguaje como sistema semiótico complejo, junto con todas sus opciones de significado, determina conjuntos de discursos que dependen del contexto de la situación.

grandes cantidades de información como *máximo común divisor*, *mínimo común múltiplo*, entre otros (Schleppegrell, 2004; Morgan, 2014).

Competencia comunicativa en matemáticas: se ha propuesto que el aprendizaje del lenguaje matemático debe pensarse como el aprendizaje de una segunda lengua (Pimm, 1987; Kirshner, 2001; Moschkovich, 2018). Sin embargo, esta propuesta implicaría promover una *competencia comunicativa* que, de acuerdo con Pimm (1987, p. 4) "implica saber cómo usar y comprender estilos de lenguaje apropiados para circunstancias sociales particulares". Destaca que este uso depende del entendimiento profundo sobre las reglas y estructuraciones de este lenguaje, las cuales en el contexto escolar no son del todo explícitas (Drouhard y Teppo, 2004; Halliday, 1993; Morgan, 2006, 2014; O'Halloran, 2005, 2007; Schleppegrell, 2004, 2007; Pimm, 1987). Estudios en el campo de la lingüística señalan que esta habilidad va desde el uso inconsciente e implícito de los componentes de la lengua hasta una reflexión sistemática sobre la lengua como objeto (Camps et al., 2007; Fontich, 2010; Pascual, 2013)Esta reflexión solo puede abordarse en procesos de aprendizaje (Pascual, 2013) y requiere un conocimiento robusto sobre la lengua.

Simbolismo matemático: se han reportado grandes dificultades respecto a la manipulación de los símbolos algebraicos (Bednarz et al., 1996; Harel, 2007; Harel et al., 2008; Mason, 1996; McGregor y Stacey, 1997; Stacey y Chick, 2004), que suelen extenderse incluso hasta los niveles superiores de educación (Thompson, 2017). Estas dificultades se han atribuido a que la manipulación del simbolismo matemático no requiere de una referencia a su semántica (Pimm, 1987). Otros trabajos han demostrado que el simbolismo matemático puede ser considerado un lenguaje en sí mismo desde la gramática generativa de Noam Chomsky (Drouhard, 1992; Kirshner, 1987, 2001) exponiendo las *estructuras profundas* y *superficiales* de las expresiones algebraicas y mostrando las reglas sintácticas para realizar transformaciones de expresiones. Por otro lado, para el componente semántico se ha empleado en distintos trabajos el marco de Gottlob Fredge, en el que se recurre a las nociones de la *denotación* y *sentido* (Arzarello, 2006; Drouhard, 1992; Rojano, 1996).

Multimodalidad: actualmente existe un creciente interés en estudios de carácter multimodal de los discursos matemáticos, los cuales establecen que la producción de significados matemáticos conlleva una articulación de, al menos, tres recursos semióticos: *el lenguaje natural*, *el simbolismo* y *las imágenes* (Drouhard y Teppo, 2004; Morgan et al., 2014; Moschkovich et al., 2018; Morgan, 2014; O'Halloran, 2005; Schleppegrell, 2007). Actualmente existen muchos enfoques multimodales en el campo de la Educación Matemática que abordan, naturalmente, aspectos que intentan relacionar el uso de distintos recursos semióticos para significar y mejorar la comprensión de los objetos matemáticos (ver p. ej. Alfaro y Joutsenlahti, 2020; Arzarello, 2006; Radford, 2007). Sin embargo, no profundizan en las características semióticas de los textos desde posturas lingüísticas multimodales o multisemióticas para analizar el fenómeno de intersemiosis.

Habilidades y competencias lingüísticas matemáticas: este último aspecto ha sido destacado como una necesidad en las discusiones temáticas respecto a los estudios del lenguaje matemático en general (Morgan et al., 2005; Morgan, 2016; Morgan et al., 2014), lo cual requiere esencialmente que la investigación tome como objeto al lenguaje en sí mismo y las habilidades lingüísticas asociadas (Pimm, 2018). Según Morgan et al (2014):

> Otra esfera de preocupación que todavía no ha recibido una atención sustancial en el marco de las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de las competencias y los conocimientos lingüísticos necesarios para la participación en las prácticas matemáticas (p. 843).

Si bien la intención es identificar estas competencias y habilidades para mejorar el rendimiento en las prácticas matemáticas, no hay una claridad respecto a qué tipo de habilidades lingüísticas son necesarias.

Todas las contribuciones antes mencionadas han aportado de manera significativa a algunos entendimientos respecto a la naturaleza gramatical, sintáctica, semántica y pragmática del simbolismo y el registro matemático. No obstante, se considera que es fundamental para desarrollar una competencia comunicativa y habilidades metalingüísticas que existan descripciones lingüísticas, lo más profundas posibles sobre esas características gramaticales, multimodales y multisemióticas de los distintos tipos de textos matemáticos. Por lo tanto, la postura en este trabajo consiste en considerar que las habilidades metalingüísticas que se espera que las personas estudiantes obtengan podrán ser promovidas en la didáctica siempre y cuando se tengan descripciones profundas sobre las estructuras lingüísticas del lenguaje matemático (Doran, 2018; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021). Este tipo de investigación es la que se propone en este trabajo y para lograr este cometido, se requieren métodos de análisis del discurso más robustos.

Con base en lo anterior, en este trabajo se narran algunos ejemplos del uso de marcos de referencia sustentados en el uso de la teoría Lingüística-Sistémico Funcional (LSF de aquí en adelante), también conocida en el mundo anglosajón como Semiótica Social, para el análisis de textos matemáticos. El uso de esta teoría ha sido común en la Educación Matemática en trabajos seminales como el de Pimm (1987), Morgan (1996, 2006) y, otros contemporáneos como el de Planas (2018), Smith et al. (2016), Thrinick et al. (2014), entre otros. Sin embargo, a diferencia de los de Morgan, la mayoría de estos trabajos no han profundizado en las herramientas del análisis gramatical que propone esta teoría, o bien, sus derivaciones hacia métodos de análisis del discurso multimodal.

Con base en estas consideraciones, las investigaciones que se referencian incorporaron marcos y herramientas analíticas para ampliar las caracterizaciones actuales respecto al lenguaje matemático, para entender qué aspectos lo caracterizan y, por tanto, lo diferencian de otros lenguajes, intentando profundizar en su gramática funcional más allá de su simbolismo (ver López-Acosta, 2023). Así, el objetivo de este trabajo es proporcionar, con base en ejemplos concretos y particulares, elementos que muestren el potencial que esta teoría tiene para los análisis gramaticales y multisemióticos de distintos discursos matemáticos.

2. LINGÜÍSTICA SISTÉMICO-FUNCIONAL

La LSF es una teoría situada en las corrientes sociolingüísticas, la cual considera un criterio funcional de la lengua (Halliday, 1982). Esto significa que tiene especial interés en determinar la función del lenguaje para las personas. Es decir, busca entender las estructuración del lenguaje con base en el uso y cómo sirve a las personas para cumplir con ciertas finalidades (Halliday, 1982).

De acuerdo con Halliday (1982)

> una teoría funcional no es una teoría sobre los procesos mentales que concurren en el aprendizaje de la lengua materna; es una teoría acerca de los procesos sociales que confluyen en él. Está vinculado con el lenguaje entre personas (inter-organismos) y, por tanto, aprender a hablar se interpreta como el dominio de un potencial de comportamiento por parte del individuo. Desde esa perspectiva, la lengua es una forma de interacción, y se aprende mediante ella; en lo esencial eso es lo que hace posible que una cultura se transmita de una generación a otra (p. 29).

Para la LSF el lenguaje es un sistema semiótico que permite construir y expresar la realidad de las personas, por lo cual el lenguaje es visto por Halliday como un potencial de significado, puesto que está determinado por condiciones socioculturales que lo organizan. Independientemente de las culturas y los medios en los que se desenvuelve el lenguaje, las funciones que debe cumplir de acuerdo con Halliday (1982) son:

1. Interpretar toda nuestra experiencia externa e interna y codificarla en clases de fenómenos como procesos, acontecimientos y acciones, clases de objetos, de gente y de instituciones, etc.

2. Expresar relaciones lógicas que den sentido de concatenación o no sobre aquello que se expresa.

3. Expresar cómo participamos en las situaciones del discurso, los roles que asumimos y que imponemos a los otros; además de los deseos, sentimientos, actitudes y juicios.

4. Organizar todo lo anterior como un discurso pertinente; es decir, estructurar el discurso para que los interlocutores reciban el mensaje.

Estas cuatro funciones que Halliday reconoce en el lenguaje son las que definen los constructos analíticos que son empleados para estudiar y analizar los textos. Estos constructos son denominados *metafunciones* del lenguaje (véaseTabla 1).

Tabla 1 – Metafunciones en la LSF.

Metafunción	Descripción
Ideacional	Función del lenguaje para codificar la experiencia cultural e individual de las personas como miembros de esa cultura. Expresa los fenómenos del entorno. Se compone a su vez de dos metafunciones: la *metafunción experiencial*—la cual refiere a cómo el lenguaje representa la experiencia de la realidad en la cláusula— y la *metafunción lógica*—refiere a la capacidad del lenguaje de crear un todo coherente mediante conexiones lógicas entre varios elementos de un texto a través de relaciones entre cláusulas.
Interpersonal	Función del lenguaje que representa cómo el hablante se inmiscuye en el contexto de situación, tanto al expresar sus propias actitudes, juicios y propios juicios como al tratar de influir en las actitudes y en el comportamiento de otros.
Textual	Función del lenguaje para dar textura al mensaje. Expresa la relación del lenguaje con su entorno, incluso el entorno verbal y el entorno no verbal; el entorno situacional.

Fuente: Elaboración basada en López-Acosta (2023).

2.1. LA MULTIMODALIDAD Y LA MULTISEMIOSIS

Desde el área de la lingüística, la multimodalidad o el estudio de discursos multimodales es un campo de investigación emergente (O'Halloran, 2005) y surge al reconocer que el estudio del lenguaje, centrado exclusivamente en la oralidad y la escritura, representa limitaciones para comprender el fenómeno de la comunicación desde una perspectiva más amplia (Crawford et al., 2015). Esto se debe a que el lenguaje es un recurso que funciona de manera conjunta con otros recursos semióticos (O'Halloran, 2004, 2005). Cabe aclarar que, en este planteamiento, se refieren al lenguaje como el lenguaje natural; es decir, lo que Halliday denomina el registro matemático. Por ello se especifica que este lenguaje natural funciona junto con otros recursos semióticos como las imágenes y el simbolismo matemático.

Respecto a las matemáticas, O'Halloran (2005) señala que

> las matemáticas y las ciencias se consideran construcciones "multisemióticas"; es decir, discursos formados a través de elecciones de los sistemas de signos funcionales de lenguaje, simbolismo matemático y visualización. Estos discursos son comúnmente constituidos como textos escritos, aunque las matemáticas y las ciencias no se limitan a estas formas de actividad semiótica. Allí son muchos géneros 'multimodales' diferentes que constituyen las matemáticas y las prácticas científicas; por ejemplo, conferencias, documentos de conferencias, software programas e investigaciones de laboratorio (p. 10, traducción propia).

El modelo del Análisis Sistémico Funcional del Discurso Multimodal (ASFDM) desarrollado por Kay O'Halloran (O'Halloran, 2005, 2007, 2011, 2012, 2014, 2015), representa una ampliación de la perspectiva de la LSF hacia el estudio de los discursos multimodales y multisemióticos con los que se estudia la *intersemiosis*, fenómeno característico de los discursos multimodales y multisemióticos que se caracteriza por la producción de significado articulado entre los distintos recursos semióticos, toda vez que cada recurso semiótico, aisladamente, tiene un potencial de significado limitado; razón por la cual recurre a otros recursos para construir y expandir su límite de significado.

> El potencial de significado resultante de las matemáticas se extiende más allá de lo posible a través de la suma de los tres recursos (…). El éxito de las matemáticas como discurso se deriva del hecho de que se basa en los potenciales de significado del lenguaje, las imágenes visuales y el simbolismo de maneras muy específicas. Es decir, los sistemas de discurso, gramática y presentación para cada recurso han evolucionado para funcionar como redes de sistemas interconectados en lugar de fenómenos aislados (O'Halloran, 2005, p. 159, traducción propia).

A partir de estas consideraciones, O'Halloran ha propuesto los siguientes mecanismos de intersemiosis:

1. *Cohesión semiótica*. Se produce una organización compleja de los sistemas de opción del lenguaje para estructurar textos cohesivos al interior y a través de *Mini-géneros* (aquellos recursos prefabricados en los discursos que definen los textos y sus propósitos), *Ítems* (aquellos elementos que determinan unidades distinguibles mediante opciones sistemáticas de las gramáticas del lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales) y, finalmente, los *Componentes* (aquellas partes que constituyen los distintos recursos semióticos y que estructuran y dan sentido a los significados en cada Ítem).

2. *Adopción semiótica*. La organización de las opciones provenientes de un recurso semiótico es incorporada como organización de opciones al interior de otro recurso semiótico.

3. *Mezcla semiótica*. Consiste en Ítems que contienen de manera sistemática la organización de opciones provenientes de diferentes recursos semióticos.

4. *Yuxtaposición y espacialidad*. Los Mini-géneros, Ítems, Componentes y elementos constitutivos se organizan de manera composicional para facilitar la intersemiosis.

5. *Transición semiótica*. La organización de opciones produce transiciones discursivas, las cuales producen cambios en el discurso de un Mini-género, Ítem y Componente hacia otro.

6. *Metáfora semiótica*. Se recurre a incongruencias en el estatus funcional de cada elemento entre los diversos recursos semióticos a nivel semántico y léxico-gramatical (ver Halliday, 1998).

Estos mecanismos de intersemiosis permiten ver cómo los textos construyen cohesión intersemiótica entre los distintos recursos semióticos que emplean para producir significados robustos.

3. EJEMPLOS DE ANÁLISIS SISTÉMICO-FUNCIONALES DE LA GRAMÁTICA Y DE LA INTERSEMIOSIS

Los elementos que se muestran en este trabajo forman parte de distintas investigaciones (ver López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021), cuya intención fue profundizar en las características gramaticales y multisemióticas del "análisis algebraico" de Viète y Descartes en el Renacimiento, así como de estudiantes de bachillerato mexicano al resolver problemas de análisis algebraico. Solo se hará referencia a fragmentos de análisis con el fin de mostrar el funcionamiento de estos métodos de análisis y las posibles implicaciones en el entendimiento de los discursos matemáticos. Por limitaciones de espacio algunos de los constructos de las teorías serán mencionados de manera limitada. Las descripciones completas pueden revisarse en López-Acosta (2023).

El método de la LSF para estudiar la gramática se basa en el análisis cada una de las Metafunciones, lo cual consiste en determinar las categorías funcionales que los elementos gramaticales manifiestan en el texto. Esto se logra a partir de la segmentación de los textos en cláusulas, las cuales son consideradas como la unidad mínima de significado para la LSF. Una cláusula queda determinada por al menos un grupo verbal.

3.1. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN EXPERIENCIAL

Se analiza a partir del sistema de *Transitividad*, aquel en el que se manifiesta la configuración de las categorías semánticas *Participantes*, *Procesos* y *Circunstancias*. Su realización en la gramática se da a partir de *grupos nominales*, *grupos verbales* y *grupos adverbiales* o *frases prepositivas*, respectivamente. A cada uno de los Participantes, Procesos y Circunstancias se les asigna una función predeterminada en la LSF. A partir de la identificación del rol funcional del Proceso se definen las funciones específicas para los Participantes y Circunstancias.

Por ejemplo, en el caso de la cláusula "He dividido diez en dos partes", se tiene la configuración:

He dividido	diez	en dos partes;
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Producto

"He dividido" es un Proceso Material, que se relaciona con el hacer. El Participante "diez" es el Alcance, categoría que se refiere a aquello sobre lo que se está actuando. En este caso, al ser un proceso abstracto, el alcance no se ve afectado, sino que es aludido. La Circunstancia "en dos partes" señala la condición o producto de la acción; en este caso, el Producto.

Otro ejemplo sería la cláusula: "por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2$".

Por lo tanto	$x^3 + x$	$=$	$x^2 + 2.$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

El Proceso "=" se cataloga como un Proceso Relacional. Estos se relacionan con el establecer correspondencias en términos de atributos, o bien, de identificadores; como en este caso, entre Participantes. Para ver una clasificación más precisa de los roles funcionales en las cláusulas, consultar López-Acosta (2023).

Como se muestra en la Tabla 2, este tipo de análisis ha permitido identificar las diferencias entre los elementos que caracterizan distintos discursos algebraicos en épocas clave del desarrollo del álgebra (ver López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021). Los textos algebraicos más cercanos a la fase simbólica presentan mayormente Procesos Relacionales, lo cual es acorde con el establecimiento de equivalencias, a diferencia de los textos previos que se centraban en especificar los pasos para resolver problemas, o bien, a la explicación de los métodos para la resolución de ecuaciones (consultar López-Acosta, 2023 para una explicación más amplia).

Tabla 2 – Frecuencia de Procesos en el corpus algebraico.

Texto	Existenciales	Materiales	Mentales	Rel. Atrib.	Rel. Ident.	Verbales
Babilonio	22%	**56%**	0%	0%	22%	0%
Diofanto	0%	**30%**	10%	**30%**	20%	10%
Al-khwârizmî	32%	**47%**	0%	6%	15%	0%
Cardano	6%	17%	6%	28%	**39%**	6%
Bombelli	**29%**	24%	0%	19%	**29%**	0%
Buteo	11%	29%	5%	13%	**39%**	3%
Vieta	7%	5%	5%	**49%**	33%	2%
Descartes	9%	**36%**	11%	31%	7%	7%
Total	**13%**	**26%**	**5%**	**27%**	**25%**	**3%**

Fuente: López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021).

Nota: En negrita se resaltan los procesos predominantes.

3.2. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN LÓGICA

El análisis de la Metafunción Lógica involucra el análisis de los sistemas de TAXIS y RELACIONES LÓGICO SEMÁNTICAS. Estas se estudian en los complejos clausulares, puesto que los significados lógicos desde la LSF involucran la forma en la que el significado se organiza entre cláusulas. Por limitaciones de espacio solo se mostrará un ejemplo del análisis del sistema de TAXIS. Convencionalmente, en la LSF los signos "//" representan los límites entre una cláusula y otra. Asimismo, siempre se procede a recuperar a los participantes que son omitidos y especificarlos con el signo "^" y escritos en mayúsculas, como es el caso de "^NOSOTROS".

Para el sistema de TAXIS, se sigue la convención en LSF para designar las relaciones paratácticas por medio de los números 1, 2, 3, 4…, mientras que para las relaciones hipotácticas se emplean las letras griegas α, β, γ, … y se han organizado estas relaciones de manera visual por medio de una estructuración escalonada para identificar las dependencias.

Por ejemplo, de un texto de Diofanto, el complejo clausular "*encontramos que 5δυ es igual a* 16ς *y* 16ς=16/5 *Si sumamos los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales*.", quedaría separado por cláusulas de la siguiente manera: "// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales, // ^NOSOTROS encontramos // que 5δυ es igual a 16ς // y ς=16/5"//."(véase Figura 1).

Figura 1 – Visualización del análisis de TAXIS y LOGICO SEMÁNTICA

β ˜1	Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados
2	y si restamos iguales de iguales,
α ˜α	^NOSOTROS encontramos
β ˜1	que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς
2	y $\varsigma = \frac{16}{5}$.

Fuente: López-Acosta (2023, p. 66).

Con este análisis es posible determinar una lectura lógica del complejo. Por ejemplo, en la Tabla 3 se muestra cómo el mismo complejo clausular puede ser reescrito de la siguiente manera: "//^NOSOTROS encontramos // que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // y ς=16/5"// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales//".

Tabla 3 – Reescritura de un complejo clausular con base en el análisis lógico.

Redacción original	Esclarecimiento de las relaciones tácticas entre las cláusulas mediante el análisis de la metafunción lógica.
Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales, ^NOSOTROS encontramos que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς y =16/5.	^NOSOTROS encontramos que 5δ es igual a 16ς y ς=16/5 Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales.

Nótese cómo la redacción resultante de la cláusula en la Tabla 3, posterior al análisis lógico, provee una lectura en voz activa. El estilo de las matemáticas y los discursos científicos recurren al uso de la voz pasiva para enfatizar como nueva información los resultados matemáticos (Halliday, 1993; Pimm, 1987; Lee, 2002); sin embargo, esta estructura sintáctica dificulta la lectura por parte de las personas estudiantes, puesto que les resulta complejo identificar las relaciones de dependencia entre cláusulas.

3.3. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN TEXTUAL

Para la Metafunción Textual se analiza el sistema de TEMA y REMA. El Tema en una cláusula incluye todo el contenido inicial de la cláusula hasta el primer elemento Experiencial, sea este un Proceso, Participante o Circunstancia. Este análisis permite identificar sobre lo que trata el mensaje, es decir, si los Temas principalmente son Procesos, Participantes o Circunstancias. Por ejemplo, si consideráramos un extracto de un texto de al-Khwârizmî, la estructura de los Temas coincide con la de una receta de cocina, tal y como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4 – Estructura temática entre los textos de al-Khwârizmî, una receta de cocina y un texto de Descartes.

Texto de una receta	Texto de al-Khwârizmî	Texto de Descartes
Freír ajo, cebolla, jitomate // **cortado** en trozos uniformes y chiles por 10 minutos. // **Incorporar** fondo de pollo y // **cocinar** por 25 minutos a fuego lento. // **Licuar** con el fondo de pollo y de tortilla frita. // **Colar y aromatizar** con el epazote. // **Rectificar** sazón // **El caldillo** debe de quedar ligero. // **Cortar** la tortilla en juliana, // **freírla** // y **escurrir** muy bien. // **Cortar** el chile pasilla en tiras delgadas // y **freírlo** ligeramente // sin **quemarlo**.	**He** dividido diez en dos partes; // luego **he** multiplicado cada parte por sí misma // y **sumadas** resultan cincuenta y ocho dirhams. // **Haces** de una de las partes cosa // y **^HACES** la otra diez menos la cosa. // **Multiplica** luego diez menos cosa por sí mismo, // **resulta** cien y un tesoro menos veinte cosas. // **Multiplica** luego cosa por cosa, // **resulta** tesoro. // **Suma** luego ambos, // **resulta** la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams. // **Restaura** luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas // y **súmalas** a los cincuenta y ocho, // (…)	Como si **quisiera saber** // de qué género es la línea // que **imagino** descrita por la intersección de la regla y la pieza , // cuyo **lado** está prolongado indefinidamente hacia , // y que **moviéndose ^KN** sobre el plano, en línea recta // –es decir de tal manera que **su lado** se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea // **prolongada** de uno y otro lado– // **hace mover** circularmente la regla alrededor del punto , // **por estar** ella vinculada // de tal manera que **^LA REGLA** pasa siempre por el punto . // **Elijo** una línea recta como // para **referir** a sus diversos puntos todos los de la línea curva ; // y en **esta línea** elijo un punto, como el , // para **empezar** por él el cálculo. // **Digo** // que **elijo éste o aquella** // (…)

Nota: En negritas se resaltan los Temas experienciales de cada cláusula.

Esta identificación de los temas experienciales ayuda a comprender cómo se estructura el mensaje del texto y, por ende, los elementos que se priorizan en este al iniciar cada cláusula. En el caso del texto de al-Khwârizmî, al igual que en una receta de cocina, los Temas experienciales son Procesos; es decir, verbos que aluden al hacer. De manera que el texto de este matemático busca, desde la interpretación LSF, dar a conocer cómo llevar a cabo un procedimiento para obtener un resultado.

Nótese que el texto de Descartes es sustancialmente diferente al de al-Khwârizmî en cuanto a las características de sus Temas experienciales. Por ejemplo, lo encontrado tanto en López-Acosta (2023) como López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021) destaca que el significado textual en Descartes es combinado, en el sentido de que se emplean en una proporción similar Participantes y Procesos como Temas Experienciales, en algunos de los cuales él mismo se incluye como Participante. Esto indica que dicho significado se refiere más hacia la explicación de su pensamiento, en mostrar cómo él resuelve el problema; dicho de otra forma, su método de resolución. De hecho, a diferencia del texto de al-Khwârizmî, el de Descartes coincide con los patrones Textuales y Lógicos de un discurso hablado (López-Acosta, 2023; y López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021).

3.4. ANÁLISIS DE LA INTERSEMIOSIS

Para el Análisis Sistémico-Funcional de los Discursos Multimodales se requieren distintas etapas de análisis, de las cuales solo se mostrará la relativa a los mecanismos de intersemiosis. Como se ha mencionado, la importancia de estos mecanismos reside en el potencial del lenguaje para articular los distintos recursos semióticos y crear un todo coherente que produzca significados complejos.

La Figura 2 corresponde a un extracto de una actividad de un libro de texto que trata sobre la definición del límite de una función. El uso de este texto es con fines de ejemplificación, puesto que podría utilizarse otro texto de cualquier área de las matemáticas.

Figura 2 – Ejemplo de un texto matemático en el que se identifican los mecanismos de intersemiosis.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

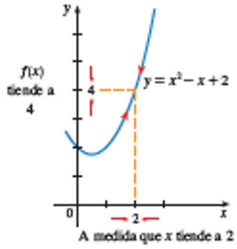


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\quad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Steward (2008, p. 88).

Este texto se compone de dos Mini-Géneros (véase la Figura 3): el primero de estos presenta la estructura discursiva del planteamiento de un problema, mientras que el segundo presenta la estructura discursiva de una definición. Como Ítems se identifican el Problema, cuyos Componentes son: la contextualización del problema por medio del enunciado, la imagen de la Figura 1, la tabla, y el análisis de lo representado en la tabla y la figura. Respecto a la Definición del concepto matemático se identifican los Componentes: definición de la notación del concepto matemático y explicación del concepto matemático en términos de la nueva notación (como se muestra en la Figura 4).

Figura 3 – Ejemplo de la división del texto en dos mini-géneros.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Mini-Género: Planteamiento del problema

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

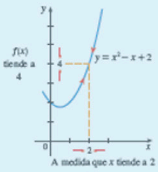


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Mini-Género: Definición matemática

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

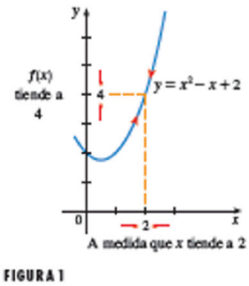
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Figura 4 – Ejemplo de los componentes del texto al interior del mini-género de planteamiento del problema.



2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Componente: Contextualización a partir del enunciado

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

Componente: Imagen

Componente: Tabla

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Componente: Análisis y resolución

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Existe *cohesión semiótica* en el texto puesto que, a través de los componentes de cada Ítem, se emplea la referencia. Esto significa que se recurre a una repetición sistemática de los componentes. Por ejemplo, en el Componente de análisis del problema se hace referencia a la *figura 1* y *la tabla* para referenciar el comportamiento que se desea significar (véase Figura 5), en este caso es el del límite. También, se identifica al repetir en el segundo Ítem el Elemento de la *expresión simbólica* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en ambos Componentes de la *definición* y la *explicación*.

Figura 5 – Ejemplos de referenciación de los componentes para la cohesión semiótica.

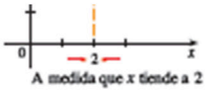


FIGURA 1

1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Componente: Análisis y resolución

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

Componente: Definición

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

Componente: Explicación

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

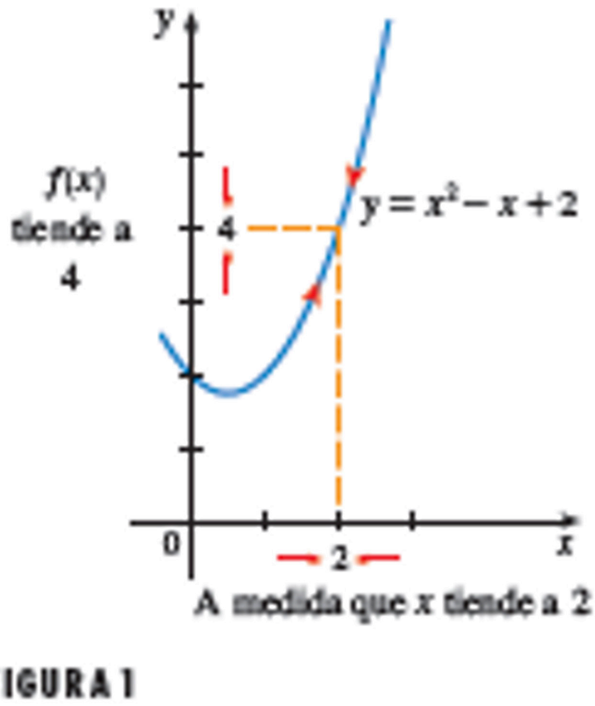
que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

La *adopción semiótica* es más evidente en el texto puesto que se recurre a cláusulas que combinan sistemáticamente elementos del lenguaje natural y del simbolismo. Por ejemplo, las cláusulas: "Investigue el comportamiento de la función $\boldsymbol{f}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 2}$ para valores cercanos a **2**"; "El límite de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 2}$, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a **2**, es igual a **4**". Cabe destacar que este mecanismo intersemiótico está presente en los textos algebraicos que incluso se catalogan desde el modelo de Nesselman (1842) como parte del álgebra simbólica, (veáse López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021). Es decir, el simbolismo matemático en los discursos matemáticos requiere de la adopción semiótica para poder contextualizar el significado de las expresiones.

La *mezcla semiótica* se caracteriza por incorporar elementos de los componentes del lenguaje natural y del simbolismo como elementos constituyentes de las imágenes. Por ejemplo, en la Figura 6 se identifica que en el componente de la *figura 1* se recurre al uso de elementos del lenguaje natural y simbolismo para proveer una descripción de lo que representa la imagen. "***f*** **(*x*)** tiende a **4**" y "a medida que tiende a **2**".

Figura 6– Ejemplo de mezcla semiótica.

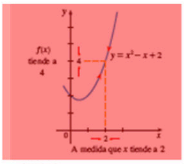


Fuente: Tomada de Steward (2008, p. 88).

El mecanismo de *yuxtaposición y espacialidad* puede identificarse por la forma en la que se estructura la composición total de todos los Componentes de cada Mini-género. Nótese que en la Figura 7, estratégicamente, la imagen de la gráfica de la función se encuentra aislada del cuerpo del texto. Esto produce que, en el espacio del texto, la imagen pueda visualizarse como un todo sin la distracción de otros elementos; dicho de otra forma, requiere de un proceso de abstracción que implica un análisis minucioso sin que otros elementos puedan perjudicar ese proceso. La imagen condensa el proceso de análisis que se pretende significar en el resto del texto; por lo tanto, es la contextualización del análisis que se hace en el texto.

También puede notarse la importancia que se le asigna a algunas expresiones simbólicas y a la tabla al centrarlas y presentarlas en líneas separadas del texto. Esto busca enfatizar a la persona lectora los aspectos que se consideran más relevantes por aprender.

Figura 7 – Ejemplos de los mecanismos de yuxtaposición y espacialidad en el texto.



2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

FIGURA 1

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Cuando los sistemas de opción implican movimientos discursivos que cambian el discurso de un Mini-Género, Ítem, y Componente hacia otro se llevan a cabo las *transiciones semióticas*. En el caso de este texto, se identifica cómo del componente de la contextualización del problema con base en la explicación detallada se induce a transitar hacia la tabla. La descripción previa a la tabla se simplifica en esta última. Posteriormente, la tabla tiene como objetivo explicar numéricamente lo que se representa en la figura 1; por consiguiente, se induce otra transición entre la tabla y la imagen para articular lo que sucede a nivel numérico y visual. En términos sintéticos se produce la siguiente transición entre los recursos semióticos:

Enunciado del problema en
lenguaje natural → Tabla → Gráfica → Expresión algebraica

En cuanto a las *metáforas semióticas*, estas se refieren a incongruencias en las funciones de los elementos a nivel semántico y gramatical. En la Tabla 5 se muestra la escala de rango de las funciones de los elementos gramaticales entre el recurso semiótico del lenguaje natural y el recurso semiótico del simbolismo matemático. Una relación congruente en la gramática significa que se respeta el mismo rango de la función entre un recurso semiótico y otro al ser empleado uno al interior del otro. Por ejemplo, una relación congruente en una cláusula en el lenguaje natural en la que se adopta el simbolismo sería "la solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación es **5**". En esta construcción, la función de los elementos simbólicos coincide con el rango funcional esperado; en otras palabras, en el grupo nominal "la solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación", el elemento "$\boldsymbol{x}$" del simbolismo funciona de manera congruente con una palabra en el lenguaje natural. Por el contrario, la siguiente cláusula implica una incongruencia: "La solución del problema es $\boldsymbol{x = 5}$". En este caso, la expresión "$\boldsymbol{x = 5}$", que en el simbolismo funciona como una cláusula, se emplea como una palabra al adoptarse en el lenguaje natural. Este tipo de construcciones en el lenguaje son las que dan muestra de un pensamiento que cambia la perspectiva de una ecuación como proceso a una ecuación como objeto. Es decir, puede dar muestra del cambio de un pensamiento operacional a uno estructural (Sfard, 1995).

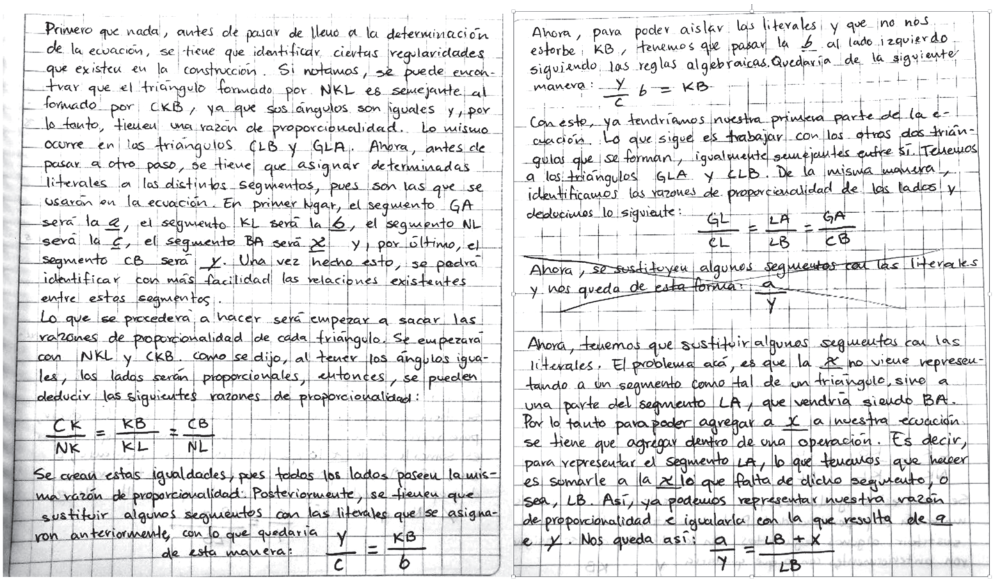
Tabla 5 – Escala de rango entre los elementos gramaticales del lenguaje natural y simbolismo.

Lenguaje Natural	Simbolismo Matemático
Complejos clausulares	Enunciados
Cláusulas	Cláusulas
Grupos	Expresiones
Palabras	Elemento

En el caso de la Figura 4 pueden identificarse las siguientes construcciones metafóricas entre los recursos semióticos. Por ejemplo: el grupo nominal "los valores de *f(x)* para valores de *x* cercanos a 2, pero no iguales a 2" se transforma en enunciaciones simbólicas del tipo $x \leftrightarrow f(x)$, $1.0 \leftrightarrow 2.000000$, $1.5 \leftrightarrow 2.750000$, etc. En este sentido hay un cambio en el estatus funcional, dado que, en la escala de rango, en el lenguaje natural se pasa de un Grupo hacia una Cláusula simbólica.

Este tipo de comprensión respecto a las características semióticas de los textos matemáticos permiten conocer el grado de conciencia y de solidez que una persona estudiante posee al momento de escribir textos matemáticos. Recientemente, en el trabajo de López-Acosta (2023) se solicitó a estudiantes que redactaran textos matemáticos en los que explicaran sus procesos de resolución de problemas. Entre las respuestas un estudiante escribió el texto que se muestra en la Figura 8. Nótese cómo el texto carece de algunos de estos mecanismos de intersemiosis que son clave actualmente para la comprensión de los textos matemáticos. Por ejemplo, puede notarse que no se recurre a la *mezcla semiótica*, puesto que no se incluyen imágenes en el texto. Este hecho dificulta la *transición semiótica* al no tener otros elementos que permitan una lectura más integral sobre los procesos matemáticos subyacentes.

Figura 8– Ejemplos de los mecanismos de yuxtaposición y espacialidad en el texto.



Primero que nada, antes de pasar de lleno a la determinación de la ecuación, se tiene que identificar ciertas regularidades que existen en la construcción. Si notamos, se puede encontrar que el triángulo formado por NKL es semejante al formado por CKB, ya que sus ángulos son iguales y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad. Lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA. Ahora, antes de pasar a otro paso, se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos, pues son las que se usarán en la ecuación. En primer lugar, el segmento GA será la a, el segmento KL será la b, el segmento NL será la c, el segmento BA será x y, por último, el segmento CB será y. Una vez hecho esto, se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

Lo que se procederá a hacer será empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triángulo. Se empezará con NKL y CKB. Como se dijo, al tener los ángulos iguales, los lados serán proporcionales, entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:

$$\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$$

Se crean estas igualdades, pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad. Posteriormente, se tienen que sustituir algunos segmentos con las literales que se asignaron anteriormente, con lo que quedaría de esta manera: $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$

Ahora, para poder aislar las literales y que no nos estorbe KB, tenemos que pasar la b al lado izquierdo siguiendo las reglas algebraicas. Quedaría de la siguiente manera: $\frac{y}{c} b = KB$

Con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación. Lo que sigue es trabajar con los otros dos triángulos que se forman, igualmente semejantes entre sí. Tenemos a los triángulos GLA y CLB. De la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados y deducimos lo siguiente: $\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$

~~Ahora, se sustituyen algunos segmentos con las literales y nos queda de esta forma:~~ $\cancel{\frac{a}{y}}$

Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales. El problema acá, es que la x no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, que vendría siendo BA. Por lo tanto para poder agregar a x a nuestra ecuación se tiene que agregar dentro de una operación. Es decir, para representar el segmento LA, lo que tenemos que hacer es sumarle a la x lo que falta de dicho segmento, o sea, LB. Así, ya podemos representar nuestra razón de proporcionalidad e igualarla con la que resulta de a e y. Nos queda así: $\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$

Fuente: López-Acosta (2023).

4. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

El cúmulo de las investigaciones sobre el lenguaje matemático en la disciplina han aportado elementos significativos para entender algunos de sus aspectos constitutivos y su relación con el aprendizaje de las matemáticas. Como se argumentó en la introducción, muchas de estas aproximaciones han centrado, inherentemente, la mirada en explicar cómo los procesos de pensamiento se ven mejorados o influenciados por el uso del lenguaje, las dificultades relativas al uso del lenguaje matemático, o bien las características del simbolismo matemático y del registro matemático de manera separada. Además, el uso de los métodos de la LSF ha sido limitado en las investigaciones, lo cual ha dificultado la posibilidad de otras indagaciones sobre las estructuras gramaticales y multimodales del lenguaje matemático desde esta perspectiva.

En este sentido, se considera que aún hay muchos elementos que la LSF puede aportar para robustecer nuestra comprensión en el campo respecto al lenguaje matemático y los diversos discursos que se desprenden de este. Como se menciona en distintos estudios, la única manera de promover una enseñanza y un aprendizaje efectivos del lenguaje requiere una comprensión profunda sobre las características del lenguaje (Camps et al., 2007; Fontich, 2010; Pascual, 2013); es decir, sobre la gramática, sintaxis, semántica y pragmática del lenguaje.

En López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021), por ejemplo, se argumenta una mirada desde la LSF en la que el lenguaje matemático puede entenderse como un macrolenguaje integrado por diversos sublenguajes vinculados a sus distintas áreas como la geometría, algebra y trigonometría, entre otras. Esto bajo la consideración de que, desde este enfoque teórico, una de las funciones del lenguaje es codificar la experiencia al interior de un contexto de situación. Por lo tanto, bajo esta premisa, los distintos sublenguajes de las matemáticas deben mostrar diferencias sustanciales en sus funciones (experienciales, lógicas, interpersonales, textuales), puesto que cada área contempla situaciones, problemas, razonamientos y objetos matemáticos muy diversos. Por esta razón es importante continuar con las exploraciones en cada uno de estos contextos, dado que, como se argumentó al inicio, una didáctica de las matemáticas que contemple la complejidad que caracteriza al lenguaje matemático tiene que sustentarse en un dominio robusto sobre la estructura gramatical y multimodal sobre este. Resultaría complejo proponer formas de acercamiento al desarrollo de las habilidades lingüísticas y metalingüísticas en estudiantes si de entrada no se posee una didáctica que contemple estos elementos. La postura que se mantiene en este trabajo es que aún hace falta indagar en estos elementos del lenguaje matemático y, también, en cómo establecer puentes didácticos que permitan usar estos entendimientos para beneficiar el aprendizaje y el desarrollo de estas habilidades.

Asimismo, con base en las herramientas de análisis que aquí presentamos sobre los mecanismos de intersemiosis, en la investigación de López-Acosta (2023) se encontró que las características gramaticales de los textos de Viète, Descartes y de estudiantes son diferentes a la mayoría de los textos algebraicos originales de paradigmas históricos previos al analítico algebraico. Por ejemplo, en contraposición con las caracterizaciones típicamente escolares sobre el lenguaje matemático con relación a su carácter de discurso primordialmente simbólico, se identificó que textos como los de Viète y Descartes, delimitados en la etapa del álgebra simbólica, no emplearon el simbolismo como un recurso semiótico autónomo (López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021). Esta afirmación concuerda con estudios en los que se establece que no es necesario el simbolismo para dar muestra de pensamiento algebraico (Rojano, 1996; Radford, 2001). No obstante, es importante destacar que el tipo de estudios previos sobre el estudio del desarrollo del álgebra en nuestra disciplina tenían como principal objetivo una comprensión sobre la relación entre el uso del simbolismo y su influencia en el desarrollo de ideas, nociones y métodos algebraicos de resolución de problemas.

Por otra parte, los resultados con base en la LSF abordan la semiótica de los textos matemáticos, es decir, una *instancia del lenguaje* (Halliday y Mathiessen, 2014), puesto que se profundiza en las características del texto y no en un intercambio comunicativo, como sucede en muchos otros estudios. De esta manera, se ha demostrado que la autonomía del discurso matemático respecto al simbolismo no solo se identifica a nivel conceptual, sino también a nivel del texto; incluso, como se ha mencionado, en textos considerados típicamente como parte de la fase simbólica del desarrollo del álgebra.

De este modo, estos estudios han reafirmado la importancia de considerar que el simbolismo no es por sí mismo el lenguaje de las matemáticas, sino un recurso semiótico al que este lenguaje le ha designado funciones específicas para contribuir a la intersemiosis. O'Halloran (2005), por ejemplo, señala las siguientes funciones para cada recurso semiótico:

> El *lenguaje* [natural] es típicamente usado para contextualizar el problema matemático; *las imágenes visuales* muestran las relaciones y proveen medios para el razonamiento visual espacio temporal; y el *simbolismo* es usado para resolver el problema. Los usos integrados de estos tres recursos semióticos expanden el poder semántico de las matemáticas en donde el todo es mayor que la suma de sus partes (p. 84, énfasis propio).

Con base en toda esta argumentación, este trabajo considera que el uso de la LSF puede producir aportaciones significativas para el análisis de las competencias lingüísticas que son requeridas para construir e interpretar textos matemáticos; aspecto que no se aborda explícitamente en el aula de la clase de matemáticas. Es decir, la escuela no suele abordar de manera concreta formas para comprender las estructuras de los textos y las variaciones en género que estos pueden presentar. Incluso, más allá de los aspectos de género de los textos matemáticos, se considera también que dentro de las competencias lingüísticas señaladas en algunos trabajos (veáse Morgan, et. al. 2005; Morgan, et al., 2014) deben tomarse en cuenta el uso y el desarrollo de los sistemas y mecanismos de intersemiosis. Esto es, la habilidad de construir textos matemáticos que muestren un uso eficaz y sistemático de los recursos semióticos para robustecer la producción de significados y la cohesión de los textos matemáticos.

En Alfaro y Joutsenlahti (2020), por ejemplo, se muestra cómo el uso de los distintos modos en el lenguaje (pictóricos, lingüísticos y simbólicos) apoyan esta construcción de significados y la comprensión matemática de los estudiantes. En complemento de este tipo de estudios, es necesario abordar a nivel de la construcción e interpretación de los textos estudiantiles cómo se manifiesta la intersemiosis entre los distintos modos y recursos semióticos, ya que estos aspectos aún no han sido abordados en nuestro campo. Si bien Duval (1999) tiempo atrás hizo explícita la importancia que tienen los distintos registros de representación[3] para el aprendizaje matemático, no se establece qué aspectos son los que se transforman o convierten entre un registro y otro. En otras palabras, se atribuye que el aprendizaje matemático se da en la medida en que se coordinen más de un registro semiótico, y esto sucede cuando se establece una congruencia semántica entre ambos registros; sin embargo, no se presentan herramientas teóricas para hacer este rastreo intersemiótico. Se considera que esta congruencia semántica puede ser analizada a partir de las categorías gramaticales descritas por la LSF, lo

3 La noción de *registro de representación* de Duval y la de *recursos semióticos* de O'Halloran pudieran considerarse como análogas, sin embargo, es necesario una reflexión teórica más profunda sobre esta relación que se escapa de los objetivos de este trabajo.

que quiere decir, el estudio de cómo los Participantes, Procesos y Circunstancias cambian de un recurso semiótico a otro vía la intersemiosis y sus mecanismos.

En este sentido, se considera que el estudio de la intersemiosis es de vital importancia para comprender con mayor claridad cómo es que las personas estudiantes pueden transitar entre los distintos registros de representación. En términos de la teoría de Duval, esto permitiría orientar la didáctica hacia el desarrollo de estas habilidades multimodales y multisemióticas en las personas estudiantes. Es justamente esta dirección en la que actualmente se está profundizando.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, LALA previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro Viquez, H., & Joutsenlahti, J. (2020). Promoting learning with understanding: Introducing languaging exercises in calculus course for engineering students at the university level. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 8*(1), 229–251. https://doi.org/10.31129/LUMAT.8.1.1412

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (número especial), 267-299.

Austin, J., & Howson, A. (1979). Language and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161–197. https://doi.org/10.1007/BF00230986

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research*. Kluwer.

Butt, D., Fahey, R., Feez, S., & Spinks, S. (2012). *Using functional grammar: An explorer's guide* (3rd ed.). Palgrave Macmillan.

Camps, A., Guasch, O., Milian, M., & Ribas, T. (2007). El escrito en la oralidad: el texto intentado. *Archivos De Ciencias De La Educación*, *1*(1), 1-19.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.243

Crawford, C., & Fortanet-Gómez, I. (2015). *Multimodal Analysis in Academic Settings*. Routledge.

Doran, Y. (2018). *The Discourse of Physics: Building Knowledge through Language, Mathematics and Image*. Routledge.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire*. París: Universite Denis Diderot Paris 7.

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The future of the teaching and learning of Algebra* (págs. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

Duval (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. *Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Artes Gráficas Univalle.

Fontich, X. (2010). *La construcción del saber metalingüístic*. *Estudi sobre l'aprenentatge de la gramática d'escolars de secundària en el marc d'una seqüència didáctica*. [Tesis de doctorado]. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica.

Halliday, M. (1998). Language and knowledge: the unpacking of text. En J. Webster (Ed.), *The Collected Works of M. A. K. Halliday* (págs. 24-48). Continuum.

Halliday, M. A. (1982). *El Lenguaje como semiotica social: La interpretación social del lenguaje y el significado*. Fondo de Cultura Económica.

Halliday, M. A. (1993a). On the language of physical science. En M. Halliday, & J. Martin, *Writing Science: Literacy And Discursive Power* (págs. 59-75). Routledge.

Halliday, M. A. (1993b). Some Grammatical Problems in Scientific English. In M. A. Halliday, & J. R. Martin, *Writing Science: Literacy and Discursive Power* (pp. 69-85). Routledge.

Halliday, M. A., & Matthiessen, C. (2014). *An Introduction to Functional Grammar* (4th ed.). Routledge.

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction. In R. Lesh, J. Kaput, & E. Hamilton, *Foundations for the Future in Mathematics Education* (pp. 263-280). Lawrence Elbaum Associates.

Harel, G., Fuller, E., & Rabin, J. M. (2008). Attention to meaning by algebra teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(2), 116-127. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.08.002

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2003). *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education*. Kluwer Academic Press. https://doi.org/10.1007/0-306-48085-9

Kirshner, D. (1987). *The Grammar of Symbolic Algebra*. The University of British Columbia.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83–98). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_5

López-Acosta, L. A. (2023). *Análisis algebraico de Viète y Descartes: la ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico* [Tesis doctoral, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN]. Repositorio Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4291

López-Acosta, L. A., & Montiel Espinosa, G. (2021). Lenguaje algebraico y multisemiosis. Hacia una reflexión más allá del simbolismo. En L. A. Hernández Rebollar, E. Juárez Ruiz y H. Ruíz Estrada (Eds.), *Tendencias en la educación matemática 2021* (pp. 79-99). Comunicación Científica. http://doi.org/10.52501/cc.019

López-Acosta, L. A., & Rodríguez-Vergara, D. (2021). Análisis sistémico-funcional de textos algebraicos: hacia un entendimiento de su naturaleza discursiva en la historia y algunas implicaciones en su enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 12*, 1-23.

Mason, J. (1996). Expressing generalityand roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra* (págs. 65-86). Kluwer.

McGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

Morgan, C. (1996).”The Language of Mathematics”: Towards a Critical Analysis of Mathematics Texts. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), p. 2-10

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 219–245.

Morgan, C., Ferrari, P. L., Duval, R., & Hoines, M. J. (2005). Language and mathematics, CERME 4 (Vol. Working Group 8, pp. 789-798). Sant Feliu de Guixols, Spain

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education, 46*, 843-853.

Moschkovich, J. (2018). Recommendations for Research on Languaje and Learning Mathematics. In J. W. Moschkovich, *Language and Comunication in Mathematics Eduaction* (pp. 37-47). Springer.

Moschkovich, J., Wagner, D., Bose, A., Rodrigues Mendes, J., & Schütte, M. (2018). *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives*. Springer.

Nesselman, G. (1842). *Die Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeitet*. G. Reimer.

O'Halloran, K. (2007b). Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) Approach to Mathematics, Grammar and Literacy. En A. McCabe, M. O'Donnell, & R. Whittaker, *Advances in Language and Education* (págs. 75-100). Continuum.

O'Halloran, K. (2012). Análisis del discurso multimodal. *ALED, 12*(1), 75-97.

O'Halloran, K. (2014). Systemic functional multimodal discourse analysis. En S. Norris, & C. Maier (Edits.), *Interactions, Images and Text: A Reader in Multimodality* (págs. 137-154). De Gruyter Mouton.

O'Halloran, K. L. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. Continuum.

O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour, 40*, 63–74.

O'Halloran, K., & Smith, B. (2011). *Multimodal Studies: Exploring Issues and Domains*. Routledge.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (2018). Sixty Years (or so) of Language Data in Mathematics Education. En J.N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues Mendes, M. Schütte (Eds.) *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives* (pp. 11-24). Springer

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 215- 229.

Radford, L. (2002). The historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (págs. 13-63). Kluwer.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General. The Multi-Semiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 507-530

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 12(1), 45-56

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednardz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra* (págs. 137-146). Kluwer.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writting Quarterly, 23*, 139-159.

Sfard, A. (1995). The development of algebra Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (2003). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. En C. Kieran, E. Forman y A. Sfard (eds.), *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 13-57). Kluwer Academic Press

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Smit, J., Bakker, A., van Eerde, D. & Kuijpers, M. (2016) . Using genre pedagogy to promote student proficiency in the language required for interpreting line graphs. *Math Ed Res J* **28**, 457–478. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0174-2

Stedall, J. (2007). Symbolism, combinations, and visual imagery in the mathematics of Thomas Harriot. *Historia Mathematica, 34*, 380-401.

Steward, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Thompson, P. (2017). Foreword. En S. Steward (Ed.), *And the rest is just algebra* (págs. v-vi). Kluwer.

Trinick, T., Meaney, T. & Fairhall, U. (2014). Teachers learning the registers of mathematics and mathematics education in another language: an exploratory study. *ZDM Mathematics Education 46*, 953–965. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0618-7

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
151-171
Recibido: 03/05/2025
Aprobado: 10/06/2024

Artículos de investigación

ENFOQUES VARIACIONALES EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE CÁLCULO: UNA REVISIÓN NARRATIVA

VARIATIONAL APPROACHES ON CALCULUS RESEARCH: A NARRATIVE REVIEW

Selvin Nodier Galo Alvarenga[1]
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3290-0743

Diana del Carmen Torres-Corrales[2]
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0057-5336

Gisela Montiel-Espinosa[3]
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

RESUMEN

Inicialmente la investigación sobre Cálculo se abordó desde una perspectiva cognitiva, como en la mayoría de las áreas en Educación Matemática. Con el avance de las investigaciones se conformaron diferentes aproximaciones, algunas desde marcos generales en Educación Matemática y otras se centraron en ideas variacionales o dinámicas que son propias del Cálculo. Presentamos un revisión de tipo narrativa sobre la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación en las matemáticas del cambio y la variación, el marco del razonamiento covariacional y la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como resultado de esta revisión describimos los diferentes momentos por los que atravesaron cada uno de estos a lo largo de su evolución hasta su momento de consolidación. Concluimos con los aspectos más relevantes en los que se centraron las investigaciones bajo estos enfoques, el momento actual en el que se encuentran sus desarrollos y ligeramente algunas áreas de oportunidad para la investigación en el futuro.

Palabras clave: Cálculo, Enfoques variacionales, Razonamiento covariacional, Pensamiento y Lenguaje Variacional.

1 Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, C. P. 07360. Correo electrónico: selvin.galo@cinvestav.mx

2 Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico de Sonora, Ciudad Obregón, Sonora, México, C. P. 85130. Correo electrónico: diana.torres@itson.edu.mx

3 Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, C. P. 07360. Correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx

ABSTRACT

Initially, research on Calculus was carried out from a cognitive perspective, like in most areas of Mathematics Education. With the progress of research, different approaches were formed, some from general frameworks in Mathematics Education and others focused on variational or dynamic ideas that typical of Calculus. We present a narrative review of the evolution of two variational approaches in research in the mathematics of change and variation, the Covariational Reasoning Framework and the line of Variational Thinking and Language. As a result of this review, we describe different stages that each of these approaches went through throughout their evolution until their moment of consolidation. We conclude with the most relevant aspects on which the research under these approach focused, the current moment in which their developments are found and briefly some areas of opportunity for research in the future.

Keywords: Calculus, Variational approaches, Covariational reasoning, Variational Thinking and Language.

1. INTRODUCCIÓN

La literatura reporta amplitud de investigaciones sobre Cálculo o Análisis Elemental, dan cuenta de ello las diferentes revisiones llevadas a cabo (véanse los trabajos de Bressoud et al., 2016; Larsen et al., 2017; Rasmussen et al., 2014; Robert y Speer, 2001; P. W. Thompson y Harel, 2021).

Dos de estas revisiones son estudios ICMI, el primero es *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* en donde encontramos el capítulo "Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis". En su estudio, Robert y Speer (2001) agruparon las investigaciones sobre Cálculo en dos tradiciones: una orientada por la teoría y otra orientada por la práctica. Respecto de la segunda las autoras describen algunas investigaciones llevadas a cabo en Estados Unidos que fueron motivadas por la reforma del Cálculo. En cuanto a la primera, organizan los trabajos en tres dimensiones. En la dimensión epistemológica destacan los trabajos centrados en obstáculos y los que incluyen análisis históricos como los llevados a cabo bajo la perspectiva Socioepistemológica. En la dimensión cognitiva resaltan los trabajos que involucran las nociones de imagen del concepto y definición del concepto y los llevados a cabo bajo perspectivas como la teoría APOE o los registros de representación. En cuanto a la dimensión didáctica, destacan los trabajos que incluyen ingeniería didáctica. Otra de las categorías incluye el papel de la tecnología basada en computadoras.

El otro, más reciente, es el ICME-13 Topical Survey *Teaching and learning of Calculus*, en donde Bressoud et al. (2016) reseñan los principales marcos teóricos empleados. Incluyen los que asumen una perspectiva cognitiva (que coinciden con los descritos por Robert y Speer (2001)), tal es el caso del marco del *Concept Image* y *Concept Definition*, la teoría de Registros de representación semiótica, teoría APOE o los tres mundos de las matemáticas. También, los que se desarrollan desde una perspectiva sociocultural, como la Teoría de Situaciones Didácticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico o el Marco Comognitivo. Además, describen la evolución de las principales tendencias de investigación sobre los conceptos de límite, derivada e integral. Adicionalmente, analizan el currículum de cálculo a través de materiales y textos en diferentes regiones: Francia, Alemania, Estados Unidos, Uruguay, Singapur, Corea del Sur, Hong Kong; dedican un apartado para la investigación con profesores y las prácticas en el aula y proporcionan una descripción sobre las herramientas actuales para el diseño de tareas, el uso de tecnología como medio de visualización y un breve resumen del progreso de la investigación.

De igual manera, en la *ZDM Mathematics Education* encontramos dos números especiales sobre Cálculo que se introducen con o incluyen un artículo de revisión. En el primero de estos números, “The teaching and learning of Calculus”, se introduce con el artículo de Rasmussen et al. (2014) en donde identifican cuatro tendencias en la investigación sobre cálculo: la primera sobre conceptos erróneos, una segunda sobre los procesos de aprendizaje de conceptos particulares, una tercera sobre estudios en el aula y, una última sobre el conocimiento, creencias y prácticas de los docentes. Recientemente, en el número “Calculus in high school and college around the world” también se introduce con un artículo de revisión, en el que P. W. Thompson y Harel (2021) ofrecen un análisis de cómo las dificultades de los estudiantes se originan en los significados matemáticos y las formas de pensar (sobre la variable, la función y la tasa de cambio) que los estudiantes desarrollan en la escuela primaria y secundaria. A su vez, resaltan la naturaleza de la experiencia de los estudiantes de “cálculo” y la relación de estas matemáticas con las formas en que se desarrollan las ideas fundamentales a lo largo de una trayectoria escolar. A manera de cierre, esbozan las preguntas que emergen para futuras investigaciones.

Otras dos trabajos en los cuales se da un espacio para revisar la investigación didáctica relativa al Cálculo es el capítulo “Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research” que aparece en el *Compendium for research in Mathematics Education* del NCTM a cargo de Larsen et al. (2017) –que, por cuestiones de acceso no incluimos acá– y la entrada “Calculus teaching and learning” de la *Encyclopedia of Mathematics Education*, en la que Kidron (2020) agrupa la investigación en enseñanza y aprendizaje del Cálculo en: la investigación inicial centrada en dificultades cognitivas, el rol de la tecnología, el rol de las perspectivas históricas y otros enfoques, el rol del profesor, la transición entre la educación secundaria y la terciaria, y finalmente, las nuevas direcciones de investigación.

Estas revisiones han sido materializaciones de los esfuerzos por sintetizar la gran cantidad de investigación que se ha desarrollado sobre Cálculo. Como es natural, la investigación en esta área ha seguido –y quizás marcado– las tendencias de la investigación en Educación Matemática. Como dan cuenta dichas revisiones, los inicios de la investigación relativa al Cálculo estuvieron marcados por el predominio de una perspectiva cognitiva, empleando constructos como conflictos cognitivos (Schwarzenberger y Tall, 1978); errores y concepciones erróneas (Davis y Vinner, 1986; Furinghetti y Paola, 1991; Morgan y Warnock, 1978; Orton, 1983a, 1983b, 1984); la imagen del concepto y la definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989); obstáculos cognitivos (Cornu, 2002) o epistemológicos (Sierpinska, 1985, 1987); actos de comprensión (Sierpinska, 1990); o las nociones de acciones, procesos, objetos y esquemas (Asiala et al., 1997; Dubinsky, 2002).

Con el avance de la investigación y el cambio de paradigmas, se conformaron diferentes aproximaciones. Como puede identificarse de estas síntesis, mucha de la investigación realizada empleó teorías o constructos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas en general para estudiar tópicos específicos del Cálculo. Sin embargo, algunas de estas aproximaciones emergen específicamente en y para el Cálculo, enfocándose en aspectos propios de esta área como las ideas variacionales o dinámicas (Buendía y Cordero, 2005; Cantoral, 2013; Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral Uriza, 1990; Cantoral Uriza y Mirón Shac, 2000; M. Carlson et al., 2002; Clement, 1989; Confrey y Smith, 1994, 1995; Cordero Osorio, 2001; Cottrill et al., 1996; Freudenthal, 1983; Grabovskij y Kotel’Nikov, 1971; Kaput, 1994; McDermott et al., 1987; Nemirovsky y Rubin, 1992; Saldanha y Thompson, 1998; A. G. Thompson y Thompson, 1996; P. W. Thompson y Carlson, 2017; P. W. Thompson y Thompson, 1994).

Este interés condujo hacia una denominación alternativa de “matemáticas del cambio y la variación” para la conjunción del Cálculo con otras áreas como Ecuaciones Diferenciales, Álgebra, Métodos Numéricos e incluso Sistemas Dinámicos (para visión más amplia al respecto véanse Cantoral Uriza, 1990; Kaput, 1994; Roschelle y Hegedus, 2013). Esta denominación está íntimamente vinculada con el surgimiento histórico de las áreas matemáticas asociadas al estudio de fenómenos de movimiento (como se puede ver en Cantoral Uriza, 1990; Kaput, 1994; Roschelle y Hegedus, 2013; P. W. Thompson y Carlson, 2017). Este conjunto de áreas es un componente sustancial de diferentes planes de estudio a nivel universitario, incluyendo la mayoría de ingenierías y de variedad de disciplinas como química, economía y ciencias biológicas, como argumenta (Kwon, 2020).

A su vez, este interés por aspectos variacionales se reflejó en la conformación de al menos dos líneas de investigación en Educación Matemática: el Marco de Razonamiento Covariacional que adoptó una perspectiva cognitiva y la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) arropada en una teoría de carácter social; la primera con sus raíces en trabajos desarrollados en Estados Unidos, la segunda en los llevados a cabo en México. Ambos enfoques cuentan con una larga tradición y han atravesado por varios momentos de construcción (como se puede ver en P. W. Thompson y Carlson (2017) para el marco de razonamiento covariacional y en Caballero Pérez (2018), para el caso del PyLV).

De esta manera, consideramos pertinente realizar una revisión sobre dos enfoques que son propiamente para las matemáticas del cambio y la variación. Entonces, para este escrito planteamos como objetivo: describir de forma sintética la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación sobre las matemáticas del cambio y la variación.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

Como argumentan Kaiser y Schukajlow (2024) las revisiones de la literatura proporcionan una visión general sobre ciertas temáticas, sintetizan investigación previa y señalan las posibles direcciones para continuar investigando. Particularmente, las revisiones narrativas “brindan una descripción general de un amplio espectro de investigación en un formato de fácil lectura” (Murphy, 2012, p. 89) y “tienen como objetivo identificar y resumir lo publicado anteriormente, evitar duplicidades y buscar nuevas áreas de estudio aún no abordadas” (R. Ferrari, 2015, p. 230).

Según Murphy (2012) algunos temas se acomodan mejor a una revisión narrativa, como las revisiones históricas o las revisiones que se basan en gran medida en información y estudios históricos que no encajan bien en los formatos de revisión sistemática. Además, sugiere que, para robustecer las revisiones narrativas con elementos de las revisiones sistemáticas se debe proporcionar una descripción completa de los métodos de búsqueda utilizados para permitir una mayor transparencia y reproducibilidad.

Con estas precisiones, planteamos una revisión narrativa con la que pretendemos dar cuenta de la evolución de dos enfoques variacionales hasta su momento de consolidación en la investigación didáctica en las matemáticas del cambio y la variación. La decisión de una revisión narrativa se justifica en: la especificidad de la temática que nos interesa; las diversas formas de aludir a las ideas variacionales (por ejemplo, variación, covariación, situaciones dinámicas, razonamiento covariacional, razonamiento variacional, pensamiento variacional) que dificultan especificar criterios de búsqueda en las bases de datos; más que ser exhaustivos como puede ser una revisión sistemática o de alcance, buscamos presentar una visión de la evolución de los dos enfoques. Aunado a ello, reconocemos que el grueso de los aportes de la línea del PyLV están reportados en tesis de posgrado y artículos de congreso, ambos en la región Latinoamericana, que aún no se encuentran en las principales bases de datos y repositorios que suelen consultarse en las revisiones sistemáticas de literatura.

Por la particularidad de la revisión que proponemos, delimitamos la investigación sobre ideas variacionales en Educación Matemática al Marco de Razonamiento Covariacional con una perspectiva cognitiva y a la línea de investigación PyLV desde una postura social. Para la primera, tomamos como punto de partida dos artículos clave para el enfoque del razonamiento covariacional, el de Carlson et al. (2002) en donde se presenta por primera vez de manera explícita dicho marco y el de P. W. Thompson y Carlson (2017) en donde se revisa el marco con base en los avances de investigaciones posteriores. A partir del primer escrito, seleccionamos las fuentes a las que los autores aluden explícitamente como base para construir el marco de razonamiento covariacional. De estas elegimos las que son accesibles mediante las bases de datos proporcionadas por nuestra institución y les sumamos otras que encontramos en sus listas de referencias. Mientras que para el enfoque del PyLV, consideramos como artículo base el escrito de Cantoral y Farfán (1998) en donde aparece conformada de manera explícita como línea de investigación. De este tomamos las referencias clave, principalmente artículos y tesis en español. Para ubicar los escritos que nos hablan de la evolución de la línea en los años posteriores nos apoyamos en la tesis de Caballero Pérez (2018), incluyendo principalmente artículos.

3. RESULTADOS/DISCUSIONES

3.1. EL MARCO DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, UN ACERCAMIENTO COGNITIVO

En su propuesta del marco covariacional, Carlson et al. (2002) reconocen explícitamente que usan como base los trabajos de Confrey y Smith (1994, 1995), Monk (1992), Nemirovsky (1996), Piaget et al. (1977), Saldanha y P. W. Thompson (1998), P. W. Thompson (1994a, 1994b). De estas referencias no incluimos a Monk (1992) por cuestiones de acceso, sin embargo, pudimos reconocer que los autores consideran principalmente sus problemas sobre graficas de eventos dinámicos. Respecto del trabajo sobre funciones de Piaget et al. (1977) los autores retoman principalmente el carácter evolutivo del razonamiento sobre funciones.

De los trabajos de Confrey y Smith comparten el enfoque de covariación (que tiene raíces históricas) para el concepto de función como una alternativa al enfoque de correspondencia (Confrey y Smith, 1994; Nemirovsky, 1996). Este enfoque involucra la coordinación de la variación en dos o más columnas en ciertas tablas, haciendo más visible el concepto de razón de cambio y se concibe a la función como “una relación entre dos cantidades que varían” (Confrey et al., 1991, p. 3). Este mismo enfoque se retoma en un trabajo posterior (Confrey y Smith, 1995) para la construcción de la función exponencial.

Por su parte, de los trabajos de P. W. Thompson retoman ideas relacionadas con el razonamiento cuantitativo: cantidad, operación cuantitativa y razón de cambio. La cantidad se concibe como entidad conceptual esquemática compuesta por “un objeto, una cualidad del objeto, una unidad apropiada o dimensión y un proceso para asignar un valor numérico a la cualidad” (P. W. Thompson, 1994a, pp. 187–188) –a este último le denomina cuantificación y puede ser un proceso de medición directo o indirecto. La operación cuantitativa, en contraposición a la operación numérica, es una operación mental por medio de la cual uno concibe una nueva cantidad en relación con una o más cantidades ya concebidas. En cuanto a la idea de razón, P. W. Thompson (1994a) diferencia entre ratio y rate aludiendo a que ratio es el resultado de comparar dos cantidades multiplicativamente y rate es una ratio constante abstraída reflexivamente. Siguiendo las ideas del razonamiento cuantitativo, distingue entre movimiento como fenómeno y velocidad como cuantificación del movimiento.

Otra de las ideas que aporta al marco de razonamiento covariacional es la idea de imagen, en general, y más particularmente la de imagen de razón que propone P. W. Thompson (1994b) –que concuerda estrechamente con las imágenes del marco de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002). P. W. Thompson emplea esta idea de imagen de razón para estudiar las imágenes del Teorema Fundamental de Cálculo. Concibe que este teorema involucra la comprensión de que la acumulación de una cantidad y la razón de cambio de su acumulación están estrechamente relacionadas. Con esto analiza el uso que hace Newton del Teorema y propone un experimento de enseñanza con estudiantes de matemáticas de último año y graduados, de donde reporta que las dificultades con el teorema provienen de un concepto frágil de razón de cambio y de imágenes poco desarrolladas y coordinadas de covariación funcional y cantidades construidas multiplicativamente.

Estas ideas aparecen posteriormente en un estudio con un profesor al enseñar el concepto de velocidad (P. W. Thompson y Thompson, 1994). En este experimento se buscan desarrollar cuatro aspectos relativos a la velocidad (con base en trabajos de Piaget): primero, la velocidad como cuantificación del movimiento; segundo, el movimiento completo involucra dos cantidades completas (la distancia recorrida y la cantidad de tiempo requerido para recorrer esa distancia); tercero, la velocidad como una cuantificación del movimiento completo se hace comparando multiplicativamente la distancia recorrida y la cantidad de tiempo requerido para recorrer esa distancia; y cuarto, existe una relación directamente proporcional entre la distancia recorrida y la cantidad de tiempo necesario para recorrer esa distancia.

En otro de los trabajos base, Carlson (1998) investiga cómo los estudiantes desarrollan el concepto de función a medida avanzan en las matemáticas universitarias –publicación proveniente de la tesis doctoral de Carlson (1995). Para ello, construye y aplica un examen y realiza entrevistas de seguimiento a tres grupos de estudiantes universitarios (basado en algunas de las investigaciones antes mencionadas y con un marcado énfasis en gráficas de situaciones dinámicas): los que obtuvieron la mayor calificación en algebra, los que completaron cálculo con la mayor calificación y estudiantes de posgrado que completaron su primer semestre con la mayor calificación en análisis complejo o algebra abstracta. Como resultados menciona que el primer grupo de estudiantes creen que toda función puede definirse por una sola fórmula algebraica y no están preparados para interpretar información gráfica dinámica, además, no saben cómo emplear la notación funcional para representar relaciones del mundo real; los del segundo grupo interpretan información gráfica dinámica, pero tienen dificultad para interpretar y representar aspectos covariantes de una situación funcional; mientras que los del tercer grupo comprendieron la mayoría de los aspectos del concepto de función y tienen habilidad para representar aspectos covariantes en una situación funcional.

Con base en el trabajo anteriormente descrito, Carlson et al. (2001) proponen un primer modelo teórico como marco para describir las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes, entendiendo a este último como la "coordinación de imágenes de dos cantidades que varían atendiendo las formas en que estas cambian en relación mutua" (Carlson et al., 2001, p. 145). Este marco se compone de cinco categorías de acciones mentales que los autores han observado cuando los estudiantes se enfrentan a representar e interpretar un modelo gráfico de un evento de función dinámico (ver Figura 1). En el escrito emplean el marco para analizar las acciones mentales de los estudiantes en tareas, tanto de covariación como relacionadas con límite y acumulación.

Figura 1 – Marco de covariación.

MA1) An image of two variables changing simultaneously;
MA2) A loosely coordinated image of how the variables are changing with respect to each other (e.g., increasing, decreasing);
MA3) An image of an amount of change of one variable while considering changes in discrete amounts of the other variable;
MA4) An image of rate/slope for contiguous intervals of the function's domain;
MA5) An image of continuously changing rate over the entire domain

Fuente: Carlson et al. (2001, p. 125).

Con base en estos dos últimos trabajos, Carlson et al. (2002, p. 354) definen el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, prestando atención a las formas en que cambian entre sí”. De este modo, asumen el razonamiento covariacional como evolutivo –siguiendo las ideas de Piaget–, por lo que optan por definirlo en niveles ordenados de acuerdo con acciones mentales a las que se les asocia un comportamiento de los estudiantes en tareas de covariación. De acuerdo con estas acciones puede asignarse un nivel de clasificación a los estudiantes, dependiendo de la imagen general que soporte las diversas acciones mentales que exhiben en el contexto de un problema o tarea (ver Figura 2).

Figura 2 - Acciones mentales y niveles del marco de razonamiento covariacional.

Mental action	Description of mental action	Behaviors
Mental Action 1 (MA1)	Coordinating the value of one variable with changes in the other	• Labeling the axes with verbal indications of coordinating the two variables (e.g., y changes with changes in x)
Mental Action 2 (MA2)	Coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable	• Constructing an increasing straight line • Verbalizing an awareness of the direction of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 3 (MA3)	Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable	• Plotting points/constructing secant lines • Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 4 (MA4)	Coordinating the average rate-of-change of the function with uniform increments of change in the input variable.	• Constructing contiguous secant lines for the domain • Verbalizing an awareness of the rate of change of the output (with respect to the input) while considering uniform increments of the input
Mental Action 5 (MA5)	Coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the independent variable for the entire domain of the function	• Constructing a smooth curve with clear indications of concavity changes • Verbalizing an awareness of the instantaneous changes in the rate of change for the entire domain of the function (direction of concavities and inflection points are correct)

Level 1 (L1). ***Coordination***
At the coordination level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1).

Level 2 (L2). ***Direction***
At the direction level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1 and MA2 are *both* supported by L2 images.

Level 3 (L3). ***Quantitative Coordination***
At the quantitative coordination level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1, MA2 and MA3 are supported by L3 images.

Level 4 (L4). ***Average Rate***
At the average rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the average rate of change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate of change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. The mental actions identified as MA1 through MA4 are supported by L4 images.

Level 5 (L5). ***Instantaneous Rate***
At the instantaneous rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the input variable. This level includes an awareness that the instantaneous rate of change resulted from smaller and smaller refinements of the average rate of change. It also includes awareness that the inflection point is where the rate of change changes from increasing to decreasing, or decreasing to increasing. The mental actions identified as MA1 through MA5 are supported by L5 images.

Fuente: Carlson et al. (2002, pp. 357-358).

Este marco de razonamiento covariacional es retomado en Castillo-Garsow (2010) quien identifica dos formas diferentes de pensar el cambio, cambio grueso (discreto, *chunky*) y cambio suave (dinámico, *smooth*). Estas formas de variación gruesa y suave, junto con la investigación sobre las concepciones de los estudiantes acerca del tiempo como cantidad y una nueva concepción de los objetos multiplicativos (Castillo-Garsow, 2010; Castillo-Garsow et al., 2013) son utilizadas por P. W. Thompson y Carlson (2017) para plantear el marco de razonamiento covariacional revisado. En este atienden separadamente el razonamiento variacional del razonamiento covariacional. El razonamiento variacional se compone de seis niveles principales: variable como símbolo, sin variación, variación discreta, variación gruesa, variación continua gruesa, variación continua suave. Acompañando estos niveles proponen los niveles principales de razonamiento covariacional: sin coordinación, pre-coordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, covariación continua gruesa, covariación suave. Los autores advierten que estos niveles pueden ser usados de dos maneras: para describir una clase de comportamiento o como una característica, la capacidad de una persona para razonar de manera variacional o covariacional (P. W. Thompson y Carlson, 2017).

Para postular este marco revisado, los autores se apoyan en escritos históricos para identificar cuatro eras en el desarrollo de la concepción de función: la era de la proporción caracterizada por la naciente atención al movimiento representando geométricamente la relación entre cantidades; la era de la ecuación, posible mediante el desarrollo de notación algebraica; la era caracterizada por la representación explícita de una relación entre valores de dos cantidades, valores que varían continuamente y cuya relación es definida mediante una fórmula o una gráfica; y finalmente la cuarta era, donde los valores de una variable son determinados de manera única por los valores de otra con "una ley de correspondencia precisa entre e que puede ser claramente establecida" (P. W. Thompson y Carlson, 2017, p. 422). Para estos autores, la covariación se convirtió en una forma explícita de razonamiento en matemáticas a partir de alrededor del año 1000 de nuestra era; aunque como forma de pensamiento nunca se definió, siempre fue tácito y aparece como constructo teórico a fines de los 1980's y principios de los 1990's en los trabajos de Confrey y Thompson.

3.2. EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, UN ACERCAMIENTO SOCIAL

Este enfoque inicia con los estudios precursores de Cantoral Uriza (1990), Farfán Márquez (1993) y Cordero Osorio (1994) dedicados a estudiar la construcción social de conocimiento matemático, principalmente en obras originales. En estos tres trabajos se inicia reconociendo que, en los procesos de transformación del saber matemático, para llevarlo a la escuela, se conforma un discurso que se apoya principalmente en la matemática formal, despojando a los conceptos de las prácticas que permiten darles significado.

En el caso de Cantoral Uriza (1990) estudia el proceso de evolución de las matemáticas del cambio y la variación, poniendo énfasis en el Cálculo como una matemática íntimamente vinculada con la Física, a propósito de su emergencia asociada al estudio de fenómenos de movimiento. Esto se ve reforzado por los trabajos de Farfán Márquez (1993) y Cordero Osorio (1994) en donde aparecen el fenómeno de propagación de calor en los sólidos asociado a la convergencia de series y el estudio mismo del movimiento asociado a la integral, respectivamente. En estos estudios, los autores reconocen una forma particular de proceder en el estudio de fenómenos, primero se toma un elemento o partícula en un momento dado y se identifican las variables esenciales relacionadas, para luego considerar ese mismo elemento o una partícula cercana después de un tiempo y estudiar las variaciones de esas variables involucradas durante ese tiempo; pasando por ciertos niveles de constantificación se encuentra la expresión matemática asociada al fenómeno.

Algunas ideas de estos tres primeros trabajos fueron condensadas en Cantoral y Farfán (1998), en donde se presenta explícitamente la línea de investigación PyLV. Ahí proponen un acercamiento didáctico para contribuir a la significación de conceptos del Cálculo, asumiendo como hipótesis que, para favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional son necesarios dos aspectos: por un lado, desarrollar la noción de predicción en fenómenos de flujo; y por otro lado, la adquisición de un lenguaje gráfico que permita operar gráficas análogamente a los números o variables y con esto poder construir un universo amplio de funciones a partir de operar tres funciones primitivas: la identidad, la exponencial y la trigonométrica (Farfán Márquez, 1997).

Con estas ideas, las investigaciones posteriores se dedicaron al desarrollo e implementación de secuencias didácticas. Por ejemplo, usando calculadoras gráficas para la resolver de desigualdades algebraicas, partiendo del contexto gráfico y luego trasladarse al contexto algebraico (Farfán-Márquez y Albert, 1995); para estudiar la relación entre una función y su derivada o una función y su primitiva (Cantoral Uriza y Mirón Shac, 2000); para bosquejar gráficas de funciones haciendo uso de herramientas analíticas y numéricas –sumar, multiplicar y dividir gráficas– (Cantoral y Montiel, 2001); para construir el polinomio de interpolación de Lagrange a partir de la visualización con actividades que involucran estrategias dinámicas (Cantoral y Montiel, 2003). Es así como la visualización a partir de gráficas se va consolidando como un aspecto fundamental en los trabajos de esta línea de investigación. Siguiendo esa idea se propone rever la regla de los signos de Descartes vinculada con la noción de predicción desde su visualización (Cantoral y Ferrari, 2009b, 2009a).

Además, se han realizado investigaciones sobre la noción misma de variación, por ejemplo, el papel que juega esta noción en las explicaciones de los profesores durante el tratamiento de los temas función y derivada (Cantoral y Reséndiz, 2003), destacando el papel de la variación: al emplear la variación numérica –relación entre conjuntos, la aproximación, el crecimiento o decrecimiento–, variación respecto a un punto de referencia, al usar expresiones verbales relativas a situaciones cotidianas, al emplear parámetros como variables principales y al hablar de la derivada como covariación o comparación $\frac{a}{b}$.

Otros estudios se enfocaron en analizar las practicas asociadas a diferentes formas de variación. Por ejemplo, la variación periódica se asume relacionada con la práctica de predicción en ámbitos dinámicos y más que centrarse en la definición misma de periodicidad, se propone enfocarse en el comportamiento periódico y las prácticas de los individuos al tratar con comportamientos repetitivos en gráficas que representan movimientos (Buendía, 2006; Buendía y Cordero, 2005).

En un trabajo posterior, se reconoce a la matematización de la astronomía, de la física y de la transferencia de calor como prácticas de referencia asociadas a la construcción social de la variación trigonométrica (Montiel Espinosa, 2005). A su vez, la matematización de la astronomía se asocia con la práctica social de anticipación e involucra actividades como medir, comparar, aproximar, en un contexto estático-proporcional. Mientras que, la matematización de la física se asocia a la predicción (como se argumenta en Cantoral Uriza, 1990) con actividades como medir, modelar, calcular en un contexto dinámico-periódico. Finalmente, vincula la matematización de la transferencia de calor con la formalización, con actividades como medir, modelar, comprobar, en un contexto estacionario-analítico.

En cuanto a la variación exponencial, Lezama Andalón (1999, 2003) la asocia con construcción geométrica de raíces y productos. Estas formas de construcción geométrica son utilizadas también para las funciones cuadrática y logarítmica en un ambiente de geometría dinámica (M. Ferrari y Farfán, 2008). Específicamente, se reconocen el facilitar cálculos y la modelación como prácticas asociadas a la conformación de los logaritmos (Ferrari Escolá, 2001), de donde emerge la hipótesis de que “lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición” (Ferrari Escolá y Farfán Márquez, 2010, p. 55).

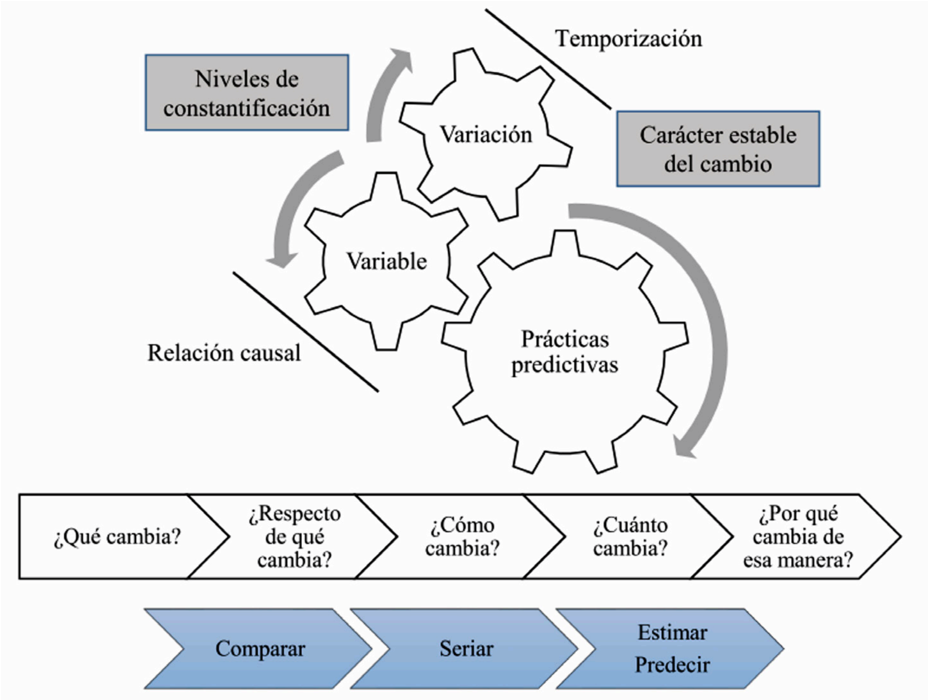
Adelante, otros trabajos buscaron analizar estrategias específicas para tratar con situaciones variacionales (Cabrera Chim, 2009; Salinas López, 2003) denominadas estrategias variacionales. Particularmente, Salinas López (2003) se enfoca en el aprendizaje de los conceptos de máximo y mínimo bajo la consideración de que los procesos están ligados a la variación de diversos órdenes y al estudio de la evolución del comportamiento cambiante. En este trabajo aparecen por vez primera estrategias variacionales, como comparación, predicción, seriación, estimación; y muestra como la noción de máximo y mínimo puede ser desarrollada mediante el uso y evolución de la estrategia de comparación, iniciando con comparaciones de números y segmentos verticales.

Por su parte, Cabrera Chim (2009) le da el estatus de práctica a las estrategias descritas por Salinas López (2003) y proporciona una acepción para el pensamiento variacional –forma de pensamiento a la que se dedica la línea de investigación PyLV– como “aquellas estrategias, formas de razonamientos, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación”(Cabrera Chim, 2009, p. 55). Decidimos emplear nada más el término pensamiento variacional en consonancia con (Caballero Pérez, 2012, p. 12). Este último autor, vincula el pensamiento variacional con el razonamiento causal propuesto en los trabajos de Piaget (Piaget, 1930, 1954; Piaget y García, 1973).

Además, Caballero Pérez (2012) lleva a cabo una revisión de trabajos en la línea del PyLV, después de la cual propone una caracterización de algunos elementos como, situación variacional, argumentos variacionales, códigos variacionales, tareas variacionales, entre otros. Con estas caracterizaciones propone una tipificación de diferentes tipos de variación que se pueden observar mediante gráficas, como la variación cero, crecimientos y decrecimientos de tres tipos. En su trabajo posterior, considera que “el cambio alude a una cualidad que experimenta una transformación, en tanto que la variación consiste en una abstracción de las propiedades y características del cambio que se percibe” (Caballero Pérez, 2018, p. 16). A su vez, asume que este término variación ya incluye la idea de covariación, pues no se puede percibir, ni abstraer el cambio de una cantidad sin considerar otra cantidad de referencia; de esta manera la variación involucra mínimamente dos variables, aunque no sean implícitas.

En este trabajo, Caballero Pérez (2018) articula teóricamente algunos de los resultados anteriores en la línea del PyLV con la conjunción de causalidad y temporización (de los trabajos de Piaget) de donde emerge el sistema de referencia como mecanismo para explicar cómo se construye la idea de variación. Por un lado, la causalidad alude a la cuantificación del cambio en las variables relacionadas causalmente; mientras que la temporización refiere a la construcción de estados intermedios en la evolución del fenómeno que den cuenta del comportamiento del fenómeno en diversos estados, que permita la de un estado desconocido del fenómeno. De los trabajos previos del PyLV, Caballero Pérez (2018), retoma ideas como, orden de variación superior, que alude al reconocimiento de más de un orden de variación en el mismo fenómeno, que al articularlos conforman la variación sucesiva. Con estos elementos, este autor propone que la noción de variación debe ser construida mediante: medir el cambio, analizar cómo evoluciona esa medida y reconocer el por qué cambia de esa forma. La medición puede consistir en la asignación numérica o en una valoración de la cantidad modificada.

Figura 3 – Modelo para el análisis de situaciones de cambio.



Fuente: Caballero Pérez (2018, p. 156).

Para atender estos elementos se deben poner en juego prácticas variacionales, como formas de razonar o actuar en situaciones variacionales. Dentro de estas prácticas variacionales, el autor incluye las ya descritas por Salinas López (2003) robusteciéndolas con base en los elementos anteriores. A estas prácticas suma algunos cuestionamientos asociados al reconocimiento y cuantificación de la variación: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? –propuestas en las investigaciones de Dolores y Cuevas, 2007; Vrancken y Engler, 2014– y les añade otras dos ¿por qué cambia de esa manera? (esta y las anteriores ya se articulaban en el trabajo de Moreno Durazo, 2018) y ¿respecto de qué cambia? (esta última alude al sistema de referencia variacional). Estos elementos se esquematizan en una propuesta de modelo para analizar situaciones de cambio, como se muestra en la Figura 3.

Un modelo alternativo aparece en el trabajo de Moreno Durazo (2018) para investigar las prácticas de los médicos al analizar electrocardiogramas –una situación variacional– y una versión posterior se muestra en Hernández Zavaleta (2019) para investigar fenómenos relativos al movimiento caótico.

3.3. ALGUNOS TRABAJOS PREVIOS CON ALUSIÓN A IDEAS VARIACIONALES

Previo a los trabajos aludidos en los dos apartados anteriores, encontramos otros que ya iniciaban a enfocarse en aspectos variacionales y dinámicos, por lo que consideramos relevante incluirlos. Por ejemplo, en Freudenthal (1983) refiriendo a la fenomenología de las funciones desde un acercamiento histórico se reconoce a la variable como "algo que varía". Además, considera la idea de dependencia o conexión entre las variables, ejemplificando con fenómenos como la caída libre, movimiento, crecimiento, decrecimiento, en los cuales el tiempo es una de esas variables. Posteriormente, agrega que la función es un tipo especial de dependencia, una dependencia entre variables distinguidas como dependiente e independiente.

Estas ideas de Freudenthal (1983), las retoman Schoenfeld y Arcavi (1988) para enfatizar el "sentido cinemático original de noción de variable" (p. 424) y sugieren que en la enseñanza del concepto de variable de deben promover sus aspectos dinámicos, considerando relaciones dinámicas como fenómenos que dependen del tiempo, por ejemplo, la temperatura en una habitación en un tiempo *t* o la distancia a la que cae un objeto en *t* segundos.

Por otra parte, aunque en Orton (1984) se reporta las dificultades de los estudiantes en tareas relacionadas con la razón de cambio, se entrevé cierto interés en discutir esta idea desde fenómenos de movimiento. Ejemplo de ello son las tareas que propone: en una primera, pregunta sobre la velocidad por hora a la que viaja un auto, dada la distancia que recorre en cierto tiempo (sin mencionar que la velocidad es constante); en otra pregunta sobre un cuadrado creciendo con una razón constante; una tercera involucra agua fluyendo en un tanque a una razón constante; un cuarta sobre a una bola rodando cuesta abajo desde el reposo; una quinta trata la tangente como límite de una secante en un círculo; finalmente, cierra con una última tarea sobre la razón de cambio promedio. En resumen, con esta secuencia de tareas Orton (1984) pretende una discusión sobre la razón de cambio promedio e instantánea.

Aunque en la investigación de Clement (1989) se reporta de manera general dos concepciones erróneas sobre las gráficas –la vinculación con una característica gráfica incorrecta y el tratamiento de la gráfica como una imagen, por ejemplo, la forma de la gráfica vinculada con la forma de la colina–; también se proponen "algunos elementos básicos de un modelo de estructuras de conocimiento usado en la comprensión y generación de gráficas, con énfasis en el concepto de covariación y el carácter analógico de la representación gráfica" (Clement, 1989, p. 78). Para el trabajo con gráficas desde el punto de vista de la covariación, Clement (1989) pregunta a los estudiantes sobre la relación entre una situación cotidiana y su gráfica cualitativa, considerando la manera en cómo son representados los conceptos de variación y covariación. Para ello considera dos modelos, uno estático (Clement, 1986) y uno dinámico. En este segundo modelo se busca concebir cada punto de la gráfica como una representación de la correspondencia entre los cambios en las variables.

Por otro lado, Nemirovsky y Rubin (1992), interesados también en las habilidades y dificultades de los estudiantes al articular la relación entre función y derivada, proponen problemas en tres contextos: movimiento, fluidos e integración numérica. Los autores, además, describen que a lo largo de los episodios de aprendizaje los estudiantes usan enfoques alternativos para comprender la relación entre una función y su derivada, a los que denominan enfoques variacionales. Uno de ellos es la inclinación de la gráfica, haciendo comparaciones cualitativas entre puntos de la misma curva; otro es la pendiente de una curva y un tercer enfoque es la acumulación cualitativa local (describen también que otro puede ser el área bajo la curva). Para los autores, un enfoque variacional involucra dos aspectos clave: primero, cómo construir una forma global a partir de muchas instancias de variación local; segundo, cómo centrarse en la relación entre la función y su derivada, en lugar de cada una de ellas por separado. Finalmente, argumentan que construir un enfoque variacional es un proceso complejo.

4. DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

Para esta revisión partimos con el objetivo de sintetizar la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación didáctica relativa a las matemáticas del cambio y la variación: el Marco de Razonamiento Covariacional y la línea PyLV. Por la naturaleza del objetivo que planteamos optamos por una revisión narrativa, en la cual, si bien no se utiliza un instrumento de investigación empírica, el criterio de selección y síntesis de la literatura especifíca elementos de rigor metodológico que pueden permitir su replicabilidad. Sin embargo, no descartamos el hecho de haber pasado por alto alguna referencia que pueda ser relevante en lo que consideramos como el proceso de desarrollo y teorización de cada enfoque.

A partir de dos escritos clave por cada enfoque seleccionamos las referencias fundamentales y también incluimos la discusión de trabajos previos a la conformación de los enfoques variacionales. Desde estos trabajos se enfatizaba el carácter dinámico en las variables, su sentido original, lo mismo para la idea de función. En cuanto al trabajo con gráficas, que ha tenido también un papel central para los enfoques variacionales, se resalta la importancia de vincular una situación de movimiento y su gráfica, más que la relación entre una ecuación algebraica y su gráfica (como aparece en (Clement, 1989; McDermott et al., 1987), ideas que encontramos incluso antes, en los trabajos de Janvier (Bell y Janvier, 1981; Janvier, 1981). Al respecto nos llama particularmente la atención, la visión que propone Clement (1989) sobre la gráfica como "un modelo de una relación entre variables basada en una representación metafórica de valores de variables como longitudes de segmentos de recta" (p. 4). Las variables o magnitudes variables refieren a una situación o fenómeno, los segmentos son una representación de las magnitudes involucradas en dicha situación. Esto también permite ver que estos trabajos iniciales también recalcaban el empleo de problemas, tareas o contextos que involucran eventos o situaciones dinámicas, ya sea con materiales manipulables, representados en gráficas o en escenarios digitales.

Respecto al surgimiento y evolución del marco de razonamiento covariacional, de la síntesis reconocemos que emerge desde una postura cognitiva con investigaciones enfocadas principalmente en el concepto de función, proponiendo un enfoque covariacional como alternativa al enfoque de correspondencia. Los principales fundamentos se encuentran en la propuesta de razonamiento cuantitativo, en las imágenes de razón, así como de razón de cambio y en el carácter evolutivo de las ideas; adicionalmente, este marco está fuertemente sostenido en la tarea sobre llenado de una botella. El razonamiento cuantitativo ofrece un enfoque centrado en cantidades entendidas como cualidades medible de los objetos y operaciones con dichas cantidades en contraste con el enfoque centrado en números y operaciones numéricas. En estos trabajos también juegan un papel relevante las situaciones dinámicas y contextos gráficos.

Aunque desde sus inicios, el enfoque del razonamiento covariacional busca dar una aproximación variacional al concepto general de función como alternativa al enfoque de correspondencia, la misma idea de covariación hace ver que aún existe un apego a la idea de dos conjuntos, ahora vistos como cantidades. De esta manera, la investigación en este enfoque parece permanecer apegada a la definición formal de función y la fortaleza de significados que aportan los contextos o fenómenos es orientada hacia la identificación de esas cantidades que covarían.

Por otra parte, el enfoque del PyLV, como pilar de una postura social en la investigación en Educación Matemática, desde sus primeros trabajos reconoce la importancia de los fenómenos de variación para la construcción de ideas en Cálculo, de manera general, amparados en estudios históricos que sustentan la esencia variacional de estas ideas. En un momento posterior se reconoce la importancia del trabajo con gráficas y se propone un enfoque de operatividad con gráficas de funciones que apoya a la significación de operaciones con funciones en el contexto analítico mediante la visualización; es de esta aproximación de donde se toma la idea de lenguaje gráfico y que aporta el término lenguaje a la línea de investigación. En otro momento de su evolución, los trabajos se enfocan en formas específicas de variación, entre ellas la lineal, cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, dejando ver la naturaleza diferente de cada tipo de función. Posteriormente, los trabajos se enfocaron en estudiar las formas de hacer específicas (prácticas matemáticas) de los individuos cuando se enfrentan a una situación variacional. Esto permitió conformar un marco para el análisis del hacer de los individuos cuando se enfrentan a situaciones variacionales, con la inclusión de ideas como el sistema de referencia para explicar la evolución de la variación y el porqué de dicha evolución.

De esta manera, en esta línea se han estudiado diferentes tipos de fenómenos como los cíclicos que involucran la variación trigonométrica y periódica, la caída libre o movimiento parabólico, el movimiento caótico en un péndulo doble, entre otros. Para investigaciones futuras, queda abierta la posibilidad de continuar estudiando escenarios de movimiento donde la noción de variación es inherente y con ello promover el desarrollo del pensamiento variacional (o razonamiento covariacional, según la línea que se adopte) y con ello, continuar aportando a la significación de conceptos de las matemáticas del cambio y la variación.

En cuanto a la nociones de variación y covariación, Caballero Pérez (2018) explica que la variación ya incluye la covariación, debido a que la imposibilidad de percibir variación en una cantidad sino se toma otra cantidad como referencia; generalmente esta magnitud de referencia es el tiempo. En otras palabras, este enfoque decide analizar la variación de una magnitud siempre en estricta conexión con otra magnitud; no se puede observar o percibir el cambio o permanencia si no se considera que el fenómeno evoluciona o permanece en el tiempo.

También identificamos que los niveles del Marco de Razonamiento Covariacional se pueden emplear en dos sentidos: para describir lo que una persona requiere al enfrentar una situación dinámica específica o para caracterizar el nivel máximo que una persona domina (Thompson y Carlson, 2017); así, este marco también ha sido utilizado para diseñar secuencias de tareas que buscan promover el razonamiento covariacional (por ejemplo, Johnson et al., 2017); sin embargo, a pesar de que varias investigaciones han realizado esbozado formas en cómo desarrollar este tipo de razonamiento, consideramos que es necesario seguir ejemplificando y teorizando sobre cómo lograr la evolución de un nivel a otro, hasta lograr el nivel máximo, covariación continua suave. En esa línea de ideas, investigaciones dentro del enfoque PyLV han propuesto que el desarrollo del pensamiento variacional puede lograrse mediante el ejercicio de prácticas variacionales específicas para los diferentes tipos de variación, en contraste con el enfoque generalista sobre función que se entrevé al menos en los trabajos principales del marco de razonamiento covariacional.

Por último, planteamos que la revisión narrativa presentada puede seguir robusteciéndose con elementos de las revisiones sistemáticas –siguiendo las sugerencias de Murphy (2012); y que los resultados dan una base sólida para futuras investigaciones y prácticas educativas en el Cálculo, pues proporcionamos una visión cohesiva de cómo dos enfoques variacionales han evolucionado y se han manifestado en la investigación didáctica, esto es particularmente útil para investigadores y educadores que buscan entender o aplicar estos enfoques en contextos educativos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

SNGA, DCTC y GME concibieron la idea presentada. SNGA, DCTC y GME adaptaron la metodología a este contexto y recopilaron los datos. SNGA analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, SNGA, DCTC y GME previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, *2*(1), 34–42. https://flm-journal.org/Articles/342368A19260FACE7BC364ED38AD7.pdf

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of Calculus*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(2), 227–251.

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 299–333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5

Caballero Pérez, M. A. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/277666881

Caballero Pérez, M. A. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/331563013

Cabrera Chim, L. M. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de competencias . Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/275641327

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(3), 353–372.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2009a). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Primera parte: argumentos y demostraciones. *Premisa*, *11*(41), 3–20.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2009b). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Segunda parte: visualizando la regla. *Premisa*, *11*(42), 3–21.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. Prentice-Hall.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números*, *55*, 3–22. https://drive.google.com/file/d/14LL1-ZM0DnLcz2A3CtysjuUr6eBm57T8/view

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(2), 133–154. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560203

Cantoral Uriza, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de funciones analíticas*. [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/261831299

Cantoral Uriza, R., & Mirón Shac, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265–292. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503302%0ACómo

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Carlson, M. P. (1995). *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. University of Kansas.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, & J. Dick (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*. *III* (pp. 114–162). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/007/04

Carlson, M. P., Larsen, S., & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En R. Speiser, C. A. Maher, & C. N. Walter (Eds.), *23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145–453).

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst Model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. Arizona State University.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31–37. https://www.jstor.org/stable/43894859

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*(1–2), 77–87.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.1.0066

Confrey, J., Smith, E., Piliero, S., & Rizzuti, J. (1991). *The use of contextual problems and multi-representational software to teach the concept of function*. https://eric.ed.gov/?id=ED348229

Cordero Osorio, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del discurso Matemático Escolar*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cordero Osorio, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103–128. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540201

Cornu, B. (2002). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*(3), 281–303.

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 69–96. http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a4.pdf

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Farfán-Márquez, R. M., & Albert, A. (1995). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades: con el uso de claculadoras TI-81 y TI-85*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán Márquez, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica : un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari Escolá, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Ferrari Escolá, M., & Farfán Márquez, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4–I), 53–68.

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309–354.

Ferrari, R. (2015). Writing narrative style literature reviews. *Medical Writing*, *24*(4), 230–235. https://doi.org/10.1179/2047480615Z.000000000329

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16–19). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *22*(5), 719–729. https://doi.org/10.1080/0020739910220503

Grabovskij, M. A., & Kotel'Nikov, P. M. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(2), 147–160. https://doi.org/10.1007/BF00305443

Hernández Zavaleta, J. E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/337013206

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 113–122. https://doi.org/10.1007/BF00386049

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM*, *49*(6), 851–864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Kaiser, G., & Schukajlow, S. (2024). Literature reviews in mathematics education and their significance to the field. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 1–3. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01541-z

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: new routes to old roots. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (Primera, pp. 77–156). Taylor & Francis. https://www.taylorfrancis.com/books/9781135440862

Kidron, I. (2020). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 87–94). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_18

Kwon, O. N. (2020). Differential equations teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 220–223). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100023

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 526–550). National Council of Teachers of Mathematics.

Lezama Andalón, F. J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: el caso de la función exponencial*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Lezama Andalón, F. J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503–513. https://doi.org/10.1119/1.15104

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175–193). Mathematical Association of America.

Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* [Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/275155006

Moreno Durazo, G. A. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/327571578

Morgan, R. V., & Warnock, T. T. (1978). Derivatives on the han-held calculator. *The Mathematics Teacher*, *71*(6), 532–537. https://www.jstor.org/stable/27961333

Murphy, C. M. (2012). Writing an effective review article. *Journal of Medical Toxicology*, *8*(2), 89–90. https://doi.org/10.1007/s13181-012-0234-2

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: two issues that emerge. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 295–313). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_20

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative* (Vols. 2–92). http://repositorio.unan.edu.ni/2986/1/5624.pdf

Orton, A. (1983a). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1–18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Orton, A. (1983b). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, *13*(5), 23–26. http://www.jstor.org/stable/30216279

Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality*. Routledge. https://www.taylorfrancis.com/books/9781136316388

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. Routledge. https://www.taylorfrancis.com/books/9781136316944

Piaget, J., & García, R. (1973). *Las explicaciones causales* (E. R. Póliza (trad.)). Barral.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions* (Vol. 83). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-9321-7

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on Calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 3, Número 1, pp. 283–299). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_26

Roschelle, J., & Hegedus, S. (2013). Introduction: major themes, technologies, and timeline. En S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions. Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 5–11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_1

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the Internationa Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 298–304). https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.563.7089

Salinas López, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher*, *81*(6), 420–427. http://www.jstor.org/stable/27965869

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*, 44–49.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *6*(1), 5–67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371–397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on undestanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, A. G., & Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 2–24. https://doi.org/10.2307/749194

Thompson, P. W. (1994a). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181–234). SUNY Press.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 229–274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: foundational ways of mathematical thinking. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education/

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 507–519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: a teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 279–303. https://doi.org/10.2307/749339

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.4.0356

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449–468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
171-184
Recibido: 30/04/2024
Aprobado: 09/06/2024

Artículos de investigación

PITÁGORAS: UN POCO MÁS ALLÁ DEL NOMBRE DE UN TEOREMA

PITÁGORAS: A BIT BEYOND THE NAME TO A THEOREM

Jorge Luis Chinchilla Valverde[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-7512-6511

RESUMEN

Más allá del conocimiento limitado del teorema que lleva el nombre de Pitágoras, este artículo tiene como objetivo proporcionar una visión global de la vida y la filosofía de Pitágoras. Presentará reseñas concisas que fusionan realidad y ficción, en las que se destacan sus primeros años de educación y sus viajes a Egipto y Mesopotamia en busca de conocimientos. Se enfatizará su desarrollo intelectual, moldeado por las profundas influencias de distinguidos mentores como Ferécides, Anaximandro y Tales de Mileto. Pitágoras tenía profundas creencias en el cosmos y la inmortalidad del alma, reflejadas en sus mitos y enseñanzas, son creencias que llevaron al establecimiento de escuelas que defendieron la armonía y la filosofía. Estas escuelas atrajeron seguidores conocidos como pitagóricos, quienes profundizaron en áreas como la música, las matemáticas y la ética. Actualmente, su influencia sigue siendo significativa en los anales de la filosofía y las matemáticas.

Palabras clave: Pitágoras, Matemática, Filosofía, Inmortalidad, Escuela.

ABSTRACT

Beyond the limited knowledge of the theorem that bears the name of Pythagoras, this article aims to provide a comprehensive overview of the life and philosophy of Pythagoras. It will present concise reviews that fuse fact and fiction, highlighting his early years of education and his travels to Egypt and Mesopotamia in search of knowledge. Emphasis will be placed on his intellectual development, shaped by the profound influences of distinguished mentors such as Pherecydes, Anaximander, and Thales of Miletus. Pythagoras had deep beliefs in the cosmos and the immortality of the soul, reflected in his myths and teachings, beliefs that led to the establishment of schools that defended harmony and philosophy. These schools attracted followers known as Pythagoreans, who delved into areas such as music, mathematics, and ethics. Today, his influence remains significant in the annals of philosophy and mathematics.

Keywords: Pythagoras, Mathematics, Philosophy, Immortality, School.

1 Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, código postal 30101. Correo electrónico: jochinchilla@itcr.ac.cr

1. INTRODUCCIÓN

Si efectuáramos una pequeña encuesta entre diversas personas que hayan realizado cursos tanto de secundaria como de educación superior, sobre qué piensan o recuerdan al escuchar el nombre Pitágoras, con seguridad la mayoría respondería con el teorema que lleva su nombre. Inclusive, es muy probable que recuerden de memoria el enunciado, dado que constituye un componente obligatorio del aprendizaje geométrico escolar. Se sabe que dicho teorema tiene un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. No obstante, con sus numerosas demostraciones y usos, actualmente su empleo es mecánico, y la figura de Pitágoras ha sido reducida a una fórmula meramente algorítmica, de frío interés, despojada de su encantadora historia y grandiosidad, siendo el ingenio de la mencionada herramienta de la matemática; no se le suele prestar interés a su historia e importancia para la filosofía —tanto antigua como moderna— pese a haber desarrollado dicha herramienta matemática. Al respecto, González (2012) afirma:

> "El Teorema de Pitágoras es la relación matemática que ocupa el primer lugar en el recuerdo de los tiempos escolares. Es, sin duda alguna, la más importante, conocida, útil y popular en casi todas las civilizaciones; la que más nombres, atención, curiosidad y pruebas ha recibido a lo largo de los siglos" (p.1).

Dicho teorema brota por doquier en la matemática. Constituye la base de diversos teoremas geométricos, investigaciones sobre polígonos y poliedros, en geometría analítica, así como trigonometría y álgebra, por citar algunas. Incluso, en la raíz histórica del Análisis de Diofanto y Fermat. Cabe destacar que este trabajo no se tratará sobre el famoso teorema, sino que nos enfocaremos en conocer un poco más del hombre a quien se le atribuye el nombre de este teorema: Pitágoras. Se pretende abordar elementos de ese "hombre divino" en la historia cultural y política de la antigua Grecia. Además, se expondrá muy brevemente algunas características particulares de la llamada *Escuela Pitagórica* y su misteriosa orden de discípulos, así como su impacto en la filosofía antigua y moderna.

Estos pequeños conocimientos históricos, a modo personal, forman parte del bagaje cultural que todo docente e investigador de matemática debería tener en su formación académica y profesional. Como se verá más adelante, la figura de Pitágoras va más allá de darle nombre a un teorema. Al respecto Ratner (2009) señala que Pitágoras está asociado inmortalmente con el descubrimiento y la demostración del teorema que lleva su nombre, aunque no hay evidencia de que haya descubierto o demostrado dicho teorema. De hecho, existen pruebas concretas de que el teorema de Pitágoras fue descubierto y demostrado por matemáticos babilónicos 1.000 años antes del nacimiento de propio Pitágoras.

2. EXPLORANDO LA VIDA DE PITÁGORAS

Como se afirmó anteriormente, el lector está al corriente de que la mayoría de las personas relacionan el nombre de Pitágoras con un teorema. De hecho, podría afirmarse que quizás sea el nombre más famoso de la historia de la filosofía previo a los aportes de Sócrates y Platón, además de ser una de las figuras que envuelven fascinantes y misteriosos relatos de su vida, escritos por varios biógrafos de la antigüedad.

Para Singh (2015) el nombre de Pitágoras está rodeado de mitos y leyendas, lo cual dificulta a los historiadores distinguir entre verdad y ficción. No obstante, este autor destaca el hecho de que sí parece innegable que Pitágoras desarrollara la idea de la lógica numérica y fuese el responsable de la primera edad de oro de las matemáticas. Además, también afirma que Pitágoras de Samos fue uno de los protagonistas más famosos y a la vez de los más misteriosos de las matemáticas. No existen referencias directas sobre su vida y su obra, sólo fuentes antiguas.

En este mismo sentido, Peraigo (1987) en su introducción a *Vida de Pitágoras, Argonáuticas órficas, Himnos órficos,* de Porfirio, señala que hasta el momento hay tres obras bibliográficas sobre Pitágoras: las de Diógenes Laercio (180 d. C.- 240 d. C.), Porfirio (233-306 d. C.), y Jámblico (280-333 d.C.). Debe aclararse que las obras de estos autores no corresponden al producto de una elaboración propia, en el sentido actual, ni pertenecen al resultado de una investigación seria y minuciosa o un análisis detallado de fuentes y datos. En realidad, son el armado y fusión de recortes o pasajes tomados de diversos autores con evidentes alteraciones, derivadas en ocasiones de relatos o cortes de la historia narrada de generaciones pasadas. De acuerdo con Porfirio Aristóteles es el autor que ha provisto más información sobre la doctrina pitagórica, principalmente en su Metafísica. Paradójicamente, resulta muy interesante destacar que Pitágoras no dejó ningún escrito suyo, y los códigos de la secta, transmitidos de padres a hijos, de generación en generación, se disolvieron en su totalidad. Gorman (1988) señala que autores clásicos como Empédocles, Heráclito, Isócrates y Platón mostraron a Pitágoras como figura carismática con los típicos rasgos de un gurú. Además, es necesario señalar que a pesar de que los relatos antiguos estén llenos de polémica y fantasía, las biografías antiguas son una fuente invaluable de información, pese a su exageración en lo místico y milagroso. Al respecto, Gorman (1988) señala que aquellos escritores que han representado a Pitágoras como filósofo puro, con un sistema racional, han obviado el hecho de que la filosofía de Pitágoras es fundamentalmente mítica e intuitiva más que científica y racionalista.

2.1. PITÁGORAS DE SAMOS: EL ORIGEN

Samos es una amplia y ondulada isla del Mar Egeo ubicada frente a las costas de Asia Menor, a pocos kilómetros del continente asiático. En la antigüedad, Asia Menor, o Jonia, como la llamaban los griegos, era el emplazamiento de una gran cantidad de ciudades prósperas helénicas, como Éfeso y Mileto. Se sabe que, en el tiempo del nacimiento de Pitágoras, siglo VI a.C., estas ciudades jonias, junto con las islas de Samos y Lesbos gozaban de cierta libertad y lujo, lo cual permitió un renacimiento cultural y científico que prosperó durante poco tiempo antes de ser destruido por la tiranía de los persas.

Pitágoras nació alrededor del año 570 a. C en la isla de Samos, como hijo de una familia de comerciantes. Su padre Mnesarco era un rico comerciante fenicio. Se cree que era joyero de profesión, aunque esta idea parece no concordar con la vida de Pitágoras y puede haber surgido debido a la imaginación de un escritor satírico como Hermipo, quien deliberadamente trataba de desacreditar la leyenda del Pitágoras. Mnesarco llegó a Tiro alrededor del 569 a.C. en uno de sus viajes, acompañado de su esposa Pythais. En este lugar nació Pitágoras.

Jámblico (2003) presenta una narración sobre Pitágoras de manera fantasiosa y detallada, en la que adorna los hechos históricos con elementos míticos. Así, indica que el nacimiento de Pitágoras fue anticipado por el oráculo de Delfos, el más importante de la antigüedad, el cual comunicó a Mnemarco de Samos, quien se encontraba comerciando en Delfos en compañía de su esposa Pitaide, cuando su embarazo todavía no era visible. Se dice que el oráculo le vaticinó, mediante una consulta sobre un viaje por mar a Siria, que dicho trayecto sería extraordinariamente grato y provechoso; que su mujer ya estaba embarazada y que daría a luz un niño el cual se diferenciaría de los demás por su belleza y sabiduría, y que el mundo obtendría grandes beneficios de su genio. Así, el Oráculo de Delfo les anunció: “os nacerá un ser de naturaleza divina", y que desde joven muchos exclamaban al verle pasar que era un ser divino, hijo de un dios, una manifestación de Apolo. Por ello, Mnesarco cambió el nombre de su esposa a Pythais. Cuando dio a luz a su hijo en Sidón de Fenicia, lo llamo Pitágoras, porque había sido profetizado por Apolo Pitio.

2.2. SUS PRIMEROS APRENDIZAJES

Los historiadores narran que después de la muerte de su padre, quien le procuró los mejores estudios y maestros, Pitágoras se formó como un hombre que poseía un aspecto altamente venerable, con hábitos muy templados. Esto le permitió ser honrado e incluso reverenciado por hombres de mayor edad, y se dice que esta es la razón por la cual muchos afirmaban creíblemente que Pitágoras era en verdad un hijo de la divinidad. Según narra la leyenda, todas sus palabras y acciones fueron marcadas por inimitable silencio y serenidad, predominando sobre toda risa, rivalidad, disputa o cualquier otra irregularidad o excentricidad.

Jámblico (2003) al respecto narra que Pitágoras,

> Ordenaba su existencia por medio de prácticas religiosas, por las ciencias, por selectas normas de vida, por la firmeza de su alma, por la continencia corpórea, por la serenidad de sus palabras y actos, por una inimitable calma, sin verse jamás poseído por la colera, la risa, la envidia, la pendencia ni por ninguna otra perturbación o arrebato, como si se tratara de una divinidad buena que se hubiera aposentado en Samos. (p.32)

Por su parte, Gorman (1988) indica que la mayoría de los relatores reseñan que Pitágoras tuvo al menos otros dos hermanos. Porfirio los llama Eunosto y Tirreno. No obstante, Diógenes Laercio le asigna tres hermanos: Eunosto, Tirreno y Zalmoxis, aunque es indiscutible que se equivoca respecto al tercero, Zalmoxis. De acuerdo con los rumores descritos en esa época, él había sido el esclavo de Pitágoras, y posteriormente dado en libertad y convertido en amigo suyo.

En otro aspecto, Gorman (1988) afirma, citando a Porfirio que "Androcles adoptó a Pitágoras como hijo, de modo que una autoridad clásica creía que los padres de Pitágoras habían muerto cuando era todavía un niño" (p.28). Sin embargo, tal aseveración no se encuentra expuesta en ningún lugar, pues después de una breve revista a los ascendientes de Pitágoras, los biógrafos continúan con una relación de los primeros años de su educación.

Se sabe que participó a los 18 años participó en los Juegos Olímpicos y ganó todas las competiciones de lucha. No obstante, decide abandonar Samos secretamente y se dirige a la isla de Lesbos donde su tío le da acogida. La razón de esta decisión se debió a que ya no podía tolerar por más tiempo la brutalidad de su gobernante Polícrates "El Tirano". En Lesbos, Pitágoras recibió una maravillosa enseñanza de grandes maestros: Ferécides de Siria, Tales de Mileto (que ya contaba en el año 549 a.C., con noventa años de edad), y de Anaximandro de Mileto, con quienes estudió fundamentalmente astronomía, física y matemáticas durante dos años.

Gorman (1988) afirma que Ferécides fue el que más influencia tuvo sobre Pitágoras. Se cree que este maestro había estudiado los libros secretos de los fenicios y que había sido el primero en admitir en su época de la inmortalidad del alma y en ahondar la idea de la reencarnación. Asimismo, se cree que el punto más significativo de la influencia de Ferécides en Pitágoras es su teoría según la cual Ethalides era realmente Pitágoras. Ethalides era un personaje de la mitología griega que se destacaba por ser un mensajero astuto y habilidoso, al que le atribuyeron la invención del alfabeto griego. Era hijo de Hermes, el dios mensajero, y una ninfa. Ethalides era conocido por su habilidad para recordar y comunicar mensajes con precisión. Además, se le permitió residir alternativamente en el mundo superior e inferior. Se cree que Ferécides iluminó a Pitágoras en este aspecto y fue la causa de que recordara sus vidas anteriores. Como la teoría de la reencarnación es el aspecto más documentado de las enseñanzas de Pitágoras, esta influencia de Ferécides es de gran importancia histórica.

Heráclides Póntico es reconocido como la autoridad principal en la descripción de estas experiencias anteriores de Pitágoras. Según Diógenes Laercio, citado en Gorman (1988), Póntico destaca la profundidad de los recuerdos pasados de Pitágoras:

> Heráclides Póntico dice que Pitágoras tenía esto que decir acerca de sí mismo: había nacido en forma de Ethalides y era considerado hijo de Hermes. Hermes le dijo que escogiera lo que quisiera excepto la inmortalidad. Así pues, Ethalides [Pitágoras] pidió que, ya estuviera vivo o muerto, pudiera recordar todo lo que le había pasado. Cuando estuviera vivo recordaría todo, y cuando muriera conservaría los mismos recuerdos. (Gorman, 1988 p. 33)

En otro atrayente relato relacionado con las encarnaciones de Pitágoras se menciona el número exacto de años que pasaron entre cada reencarnación: 216. Cabe destacar que este es un número místico. Al respecto los pitagóricos creían que estaba relacionado con el ciclo del nacimiento y con la revolución del cambio en la totalidad del cosmos. Al analizar este número se observa que el mismo es el producto del cubo del seis y, además, el seis se denomina número circular, es decir, un número cuyas potencias siempre terminan en seis. También es un número tridimensional, que simboliza la creación numérica de lo sólido, objetos de tres dimensiones, por eso se suponía que un feto estaba formado al cabo de 216 días.

Sobre lo anterior, resulta atractivo saber que esa gran *iluminación* inicial transmitida a Pitágoras por Ferécides forjó el inicio de un movimiento en el pensamiento que, con el tiempo, intentó dar significado al proceso de cambio que tiene lugar en el universo. Esto conlleva a la persistencia de Pitágoras en que el número era sagrado, consecuencia de una búsqueda de regularidad y permanencia dentro del cosmos, visto como aquello que no tiene principio ni fin. Debido a su asociación con lo divino, se puede deducir que el número es omnipotente, mientras que la materia, que está en constante cambio, es mortal y perecedera. Por ende, en sus adeptos se forja la imagen de la reencarnación y del eterno retorno, lo cual les da las bases para justificar su creencia de que el alma es inmortal. Para Gorman (1988), estos dos argumentos fueron adoptados por Platón para crear una prueba de la inmortalidad, la cual tiene lugar alternativamente sobre la tierra y bajo ella, tal como Ferécides afirmaba del alma de Ethalides. Esto cimentó el hecho de que Pitágoras no pudiera haber creído en una liberación definitiva del ciclo del nacimiento. Se debe tenerse claro que Pitágoras era aún muy joven cuando recibió las enseñanzas de Ferécides y ya creía firmemente en la inmortalidad del alma y en la doctrina de la reencarnación.

Otro filósofo que tuvo gran influencia en la juventud de Pitágoras fue Anaximandro (610 a.C. - 546 a.C.), el cual fue discípulo de Tales. Diversos biógrafos de la antigüedad comentan superficialmente sobre lo que Anaximandro concebía de la idea del infinito, que él le llamaba *apeiron,* y sobre cómo esto logró influir en las ideas del propio Pitágoras acerca del vacío infinito, o espacio que existe fuera del universo.

Así pues, se cree que Pitágoras, incluso antes de viajar a Siria y a Babilonia, debió de aprender astrología de Anaximandro, quien, al igual que su maestro Tales, escribió también sobre geometría, otra de sus influencias sobre el joven Pitágoras. Es interesante el hecho de que, al igual que Pitágoras, Anaximandro abrazaba la idea del eterno retomo, y afirmaba que existía un número infinito de mundos que eran creados y destruidos según ciclos fijos. Además, desarrolló una sugestiva teoría de la evolución, en la cual el hombre en otros tiempos había sido pez. Pitágoras indudablemente tomó esta idea para justificar su propia creencia en la reencarnación, la cual establece que el hombre pasa por una serie de formas de plantas y animales antes de tomar forma humana. Para Anaximandro las estrellas y los sistemas solares o *kosmoi*, como los llamaban los antiguos griegos, eran entes divinos, creencia que compartía el mismo Pitágoras y sus seguidores.

Fue Pitágoras, quien asignó a los movimientos cósmicos del alma un papel importante en la creación del cosmos. Creía que el movimiento tenía una explicación de su ser y esta era el alma. De esta manera, el "poder creador" que idealizaba Anaximandro, Pitágoras lo imagina como una fuerza impersonal; a la cual dio carácter humano, y concibió como un fenómeno psíquico. Así, Pitágoras creyó que el universo estaba lleno de inteligencia y de vida, mientras que para Anaximandro estaba muerto y era ciego. Pitágoras, en efecto, mitifica la física y la cosmología de Anaximandro de un modo totalmente relacionado con su propio mito personal.

El tercer filósofo jonio que tuvo una temprana influencia sobre Pitágoras fue Tales. Sánchez (2011) explica que Pitágoras toma de Tales varios conocimientos, entre ellos el año solar egipcio. Es así como Pitágoras supo pronosticar eclipses solares y lunares, y establecer la altura de una pirámide a partir de la sombra arrojada por esta.

Para Gorman (1988) lo más significativo acerca de Tales, y que logró fascinar a Pitágoras, era la certeza del erudito de que todo el universo era animado, inclusive las piedras y la materia; las cuales, aunque visiblemente inertes, estaban llenas de vida. Se cree que otra posible influencia pudo haber sido el hecho de que Tales sostuviera que el universo comenzó a partir del agua, idea tomada de Egipto probablemente, allí observó como el río Nilo inundaba grandes tierras anualmente, y se percató de que el barro dejado por la crecida permitía florecer toda clase de vida naciente. A partir de esto y de los mitos sagrados egipcios sobre la creación del mundo, forjó su idea del que el cosmos se origina del agua primigenia. Para Tales el agua era el elemento hacedor del cual comenzó toda la vida que existe en el mundo. Jámblico (2003) afirma que Pitágoras visitó a Tales en Mileto cuando tendría entre dieciocho y veinte años. Cuenta además que Tales se quejaba de que era demasiado viejo para enseñar muchas cosas a Pitágoras. Así pues, es muy probable que no le haya enseñado muchas matemáticas, pero le recomendó que fuera a Egipto con el fin de aprender los secretos de los sacerdotes, como él mismo hizo en otro tiempo.

Se evidencia la gran influencia de estos tres pensadores en la educación temprana de Pitágoras y cómo forjaron en él su naciente filosofía. En este sentido, es importante destacar que la reputación de Pitágoras es de gran importancia en la historia de la filosofía. Pitágoras fue el creador de este concepto, al que llamó amor a la sabiduría. Sus contemporáneos fueron conocidos como hombres sabios, pero no filósofos. Llama poderosamente la afirmación de González (2012) quien señala a Pitágoras como el primer filósofo en personificar un sentimiento de necesidad de desarrollo integral del ser humano, tanto a nivel interior como exterior. Es decir, tanto en el conocimiento de sí mismo como de lo que le rodea y del cosmos, hoy día esto lo conocemos como estudio del pensamiento, de la ciencia y de la filosofía, estudio que, al ubicarlo en el espacio de la historia, abarca los últimos tres mil años.

Por estas razones, Pitágoras atesoró grandes motivos para estudiar las propiedades de cada número, las relaciones entre ellos y las figuras que forman. Logró descubrir qué números acontecen con independencia del mundo visible y, por tanto, su conocimiento no está viciado por la vaguedad de los sentidos. De esta forma, logra exponer verdades alejadas de la opinión o del prejuicio de muchos pensadores de su época; estas verdades fueron catalogadas por muchos como más absolutas que cualquier conocimiento preliminar hasta ese entonces.

Como se indicó previamente, Sánchez (2011) afirma que Tales influyó al joven Pitágoras para que viajara a Tebas, en Egipto, donde podría satisfacer su sed de conocimiento. Primeramente, Pitágoras se pasó un año preparándose para este viaje en el colegio sacerdotal fenicio de Sidón. Tras ese año de preparación, llegó a Egipto en el 547 a.C.

En Menfis pasó 21 años dedicados totalmente al estudio, pues buscaba adquirir todos los conocimientos posibles, y llegó a finalizar sus saberes con los más altos honores en la escuela sacerdotal. De lo anteriormente expuesto, se infiere, en lo referente a su educación, que Pitágoras aprendió de los egipcios, caldeos y fenicios las enseñanzas de las llamadas ciencias matemáticas. Desde épocas antiguas los egipcios ya habían estudiado la geometría, los fenicios de la aritmética y el cálculo, y los caldeos la indagación del firmamento. Cabe destacar que, en cuanto al culto a los dioses y al resto de las actividades relacionadas con la vida, Pitágoras fue discípulo de los sacerdotes egipcios, y asimiló sus enseñanzas.

Sánchez (2011) narra que para el año 526 a.C. con la muerte del rey egipcio Amasis, queda como heredero su hijo Psammenit, pero su reinado solo duró un año pues el rey persa Kambis invadió Egipto en el 525 a.C ,y decidió descargar toda su ira contra la escuela sacerdotal en particular, lo que conllevó al aprisionamiento de sus miembros, entre ellos el propio Pitágoras. Fueron llevados a Babilonia, que en esa época era el eje del comercio del mundo conocido, es decir, en el Asia Menor. No obstante, esta situación le trajo réditos a Pitágoras para entrar en relación con diferentes culturas como los bactrianos (pobladores de Bactria, hoy Afganistán), chinos, indios y judíos, lo que le facilitó adquirir una enorme cantidad de conocimientos, durante los 12 años que estuvo en Babilonia. Por su parte Jámblico (2003) afirma que Pitágoras fue iniciado en los ritos religiosos de los persas. Además, señala que en Babilonia se relacionó con los magos, y llegó a la cumbre de la aritmética, la música y las demás disciplinas.

Se dice que Pitágoras adquirió sus habilidades matemáticas viajando a lo largo y ancho del viejo mundo. Algunas crónicas especulan que llegó hasta la India e Inglaterra, pero lo más factible, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, es que Pitágoras haya adquirido sus grandes conocimientos en Egipto y Babilonia.

Jámblico (2003) sostiene que Pitágoras fue liberado de los babilonios y que regresó a su ciudad natal Samos con la edad de 56 años, esto tras una breve estancia en la isla de Delos, donde se encontró con su maestro Ferécides. Aunado a esto, afirma que se estableció allí por un año con el propósito de habituarse nuevamente con la religión, la ciencia y las costumbres sociales de la época. Otras narraciones señalan que Pitágoras profesó una vida de conducta tan pura, de aversión a los sacrificios y a los que los practicaban, que no solo se abstenía de los seres animados, sino que jamás se relacionaba con carniceros ni con cazadores. Fue un vegetariano estricto.

2.3. PITÁGORAS… EL MAESTRO DIVINO

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, existen diversos relatos sobre los lugares y pueblos donde Pitágoras tuvo contacto en su período de inicio del proceso de adquisición de una amplia gama de saberes propios de la época de una armonía helénica. Estas historias crecieron y se llegó a afirmar que entre sus maestros había sabios judíos, brahmanes indios y druidas celtas e iberos. De hecho, las fuentes hablan además de una larga estancia en Creta para aprender el arte de la legislación. Así pues, se deduce que Pitágoras recorrió vastamente el antiguo mundo. Prestó atención al hecho de que los egipcios y los babilonios traducían cada cálculo a la forma de una receta que luego podían seguir a ciegas. Singh (2015) señala al respecto que dichas recetas, eran transmitidas de generación en generación, y que sus respuestas siempre eran acertadas, razón por la cual no eran argumentadas y que las ecuaciones que la constituían carecían de algún tipo de cuestionamiento. Lo significativo para estos pueblos era que un cómputo funcionara; el porqué no era relevante. Luego de viajar durante más de veinte años, como se expuso en párrafos preliminares, Pitágoras se había apropiado de gran parte de los principios matemáticos del mundo conocido hasta entonces.

Volviendo a lo aseverado previamente por González (2012), Pitágoras fue el primero en utilizar el término filósofo (amante de la sabiduría) y con ello marcó la pauta en aritmética y geometría al explorar los teoremas de forma inmaterial y abstracta. Esto quiere decir, sin utilizar instrumentos materiales ni aparatos de medida, solo por medio de la percepción de ideas, lo que da lugar al comienzo de las matemáticas como ciencia especulativa y deductiva, más allá de la práctica meramente empírica e inductiva. Además, estableció la matemática como ciencia racional a través de la práctica de la demostración. Para él, los números eran entes o símbolos por medio de los cuales definía todas las ideas referentes a la verdadera naturaleza de las cosas.

Hernández (2014) nos dice que, al hablar de la vida de Pitágoras, sus historias descritas poseen todos los atributos que identifican al hombre divino. Como se expuso en otro apartado, la vida o, mejor dicho, las *vidas* pasadas, ficticias y legendarias que se dicen de Pitágoras están llenas de elementos que caracterizan a esos filósofos chamanes, que abundaron en la Grecia arcaica en un momento de construcción para el pensamiento en Occidente.

Se suma a esto las diversas historias legendarias sobre su vida caracterizadas por la polémica y ficción de sus hechos, algunas de las cuales son presentadas a menudo como las de un ser casi mitológico, y por el hecho de, a pesar de no haber dejado algún escrito o al menos no se conocen alguno de su autoría, es visto como un sabio perteneciente al mundo de la oralidad. De esta forma, la popularidad de Pitágoras en la Antigüedad correspondía esencialmente a ciertas doctrinas de tipo religioso y filosófico que están lejos de la matemática. De acuerdo con Hernández (2014), estas doctrinas se pueden resumir en cuatro grupos conceptuales: la fundación de rituales asociados a sectas mistéricas que prometían un destino agradable después de la muerte; la concepción del alma como ente inmortal que vuelve a través de una serie de reencarnaciones, sus actuaciones milagrosas en el campo de las curaciones; la adivinación, la retórica encantadora de almas, como representante de un saber divino y la invención de un régimen de vida estricto y de férrea autodisciplina con implicaciones éticas y también políticas. Lo anterior es parte de los principios particulares llevados a cabo por una secta formada por seguidores de las doctrinas de Pitágoras, que son conocidos como los Pitagóricos.

Al respecto Broncano y Hernández (2012) señalan que a Pitágoras se le atribuyen conquistas en todos los campos del saber:

> Como un auténtico descubridor (*protos heuretes*) de la sabiduría humana, Pitágoras parece ubicado entre los hombres y los dioses, un Prometeo que acerca a los mortales en el fuego del progreso. La matemática, la astronomía, la filosofía, la retórica, la política, la adivinación, la medicina, la religión. Nada escapa a este sabio primordial al que la opinión común atribuye un famoso teorema matemático, las escalas musicales y algunas ideas astronómicas. (p. 21)

No menos interesante, es lo escrito por Gorman (1988) quien narra la ficticia deformidad de Pitágoras: un capricho dorado en un muslo. Se dice que posiblemente esta fue la razón de que desistiera a aceptar el culto a la belleza del cuerpo, tan característico de los griegos. Además, el autor afirma que Pitágoras también utilizó de manera efectiva su deformidad, difundiendo la creencia de que tener un muslo de oro indicaba que era descendiente de Apolo.

Por su parte, Jámblico (2003) se refiere a esto de la siguiente forma:

> Y también el hecho de que mostró su muslo de oro a Abaris el Hiperbóreo, que le comparó a Apolo entre los Hiperbóreos, del que el propio Abaris era sacerdote, lo que hizo que para constatar que esto (su carácter divino) era verdad, que no se engañaba y que estaba totalmente en lo cierto. Multitud de otros hechos más divinos y admirables que estos se cuentan de forma unánime y uniforme sobre aquel hombre, como sus vaticinios infalibles de terremotos, sus veloces curaciones de pestes, su dominio de huracanes violentos y tormentas, su apaciguamiento de tempestades en los ríos y en el mar para que sus compañeros pudieran atravesarlos con seguridad. También compartían estas capacidades Empédocles de Agrigento, Epiménides de Creta y Abaris el Hiperbóreo, y llevaban a cabo estos milagros. (p.78)

2.4. PITÁGORAS Y SU PROPÓSITO

Pitágoras había aprovechado muchos de los principios matemáticos del mundo conocido, por lo que, luego de viajar durante tantos años y ser liberado de los babilonios, decide enrumbarse a su isla natal de Samos, con el propósito de establecer una escuela destinada al estudio de la filosofía y, en especial, a la investigación de los principios matemáticos recién adquiridos. Según González (2012) en los escritos de Porfirio y Jámblico, Pitágoras fundó una escuela conocida con el nombre de Hemiciclo, en la que los samios acudían a deliberar sobre los asuntos públicos. No obstante, Polícrates había transformado la Samos liberal de otro tiempo en una sociedad intolerante y conservadora. Se dice que Polícrates invitó a Pitágoras a que fuera parte de su corte, pero este sospechó que se trataba de una estrategia para silenciarlo, por lo que rechazó la oferta. Decide alejarse de la ciudad y trasladarse a una cueva remota de la isla donde poder meditar sin temor a ser perseguido.

Al respecto, Hernández (2014) indica que, después de abandonar Samos, y apartartase de la tiranía de Polícrates, Pitágoras llega a la ciudad griega de Crotona, en el sur de Italia, hacia el año 530 a.C. En dicha ciudad, Pitágoras se caracterizó por la aplicación de variados y amenos razonamientos, conducidos a los gobernantes, a las mujeres, a los jóvenes y a los niños, y todos quedaron tan impresionados que le dieron una acogida triunfal. Allí llamó rápidamente la atención y creó su propia escuela, la cual atrajo a mucha gente y se convirtió en un grupo influyente, tanto política como socialmente. Pitágoras puso de manifiesto la excelencia de su método pedagógico, al instruir una selección (hecha por él mismo) de jóvenes de la zona, con el objetivo de lograr transformar la sociedad de su tiempo. Las asignaturas básicas de la escuela consistían en aritmética, geometría, música y astronomía. También combinaba la ciencia con la espiritualidad, y, haciendo uso de las catarsis o purificaciones y un modo de vida especial, los discípulos se orientaban a alcanzar lo que hoy se denomina estados superiores de conciencia.

Singh (2015) manifiesta que Pitágoras debido a sentirse seguro y acogido en esta ciudad fundó lo que se conoce como la Hermandad Pitagórica (Escuela) la cual estaba conformada por un grupo de seiscientos discípulos llenos de deseos de no solo percibir sus enseñanzas, sino también por extenderlas con ideas e instrumentos nuevos de aprendizaje. Es interesante señalar que, al ingresar a la hermandad, cada miembro se comprometía a donar todas sus pertenencias materiales a un fondo común, y en el caso de que alguien la abandonara percibía el doble de lo donado en un principio y se erigía una lápida en su memoria. Dicha hermandad era una escuela igualitaria que admitía a varias mujeres entre sus miembros. De hecho, la estudiante preferida de Pitágoras era la propia hija de Milón, Teano, y, a pesar de la diferencia de edad que los distanciaba, con el tiempo se casaron.

Además de esto, González (2012) manifiesta que, durante aproximadamente dos décadas, la escuela famosa de Crotona se destacó en las ciencias y la espiritualidad y, debido a su prestigio, se extendió por otras ciudades de la Magna Grecia. Incluso tuvo un impacto político en la región, ya que varios alumnos de Pitágoras estuvieron entre los gobernantes y otros personajes importantes. Además de dirigir la escuela, sus biógrafos cuentan que Pitágoras practicaba a menudo la terapéutica musical que hoy llamaríamos musicoterapia. Tenía fama de sanador y a veces, acompañado de alguno de sus discípulos y de su fiel servidor Eumolpo, realizaba largos recorridos para devolver la salud, que es armonía, a algún paciente. Solo se valía de la terapéutica natural y de ciertos recitados entonados musicalmente, adecuados a la índole de la enfermedad. Finalmente, esto dio lugar a las escuelas pitagóricas en varias ciudades del Mediterráneo.

Tal fue el grado del impacto de dicha escuela que Porfirio (1987) afirma:

> [...] con una sola exposición cautivó a más de dos mil con sus palabras, hasta el punto de que ya no regresaron a casa, sino que en compañía de sus hijos y mujeres construyeron una gran sala para reuniones comunes… recibiendo de aquél leyes y normas para no realizar ni un solo acto al margen de ellas, como si de preceptos divinos se tratase. Consideraron estos también comunes sus propiedades y a Pitágoras lo incluyeron entre los dioses… Y a las ciudades de Italia y Sicilia, que durante sus viajes encontró sometidas entre sí, las liberó infundiéndoles un espíritu de libertad a través de los oyentes que en cada una de ellas tuvo… e hizo desaparecer completamente las desavenencias…, pues para todos tenía esta aguda sentencia: hay que desterrar la enfermedad de nuestro cuerpo con todo nuestro ingenio y hay que cercenarla con el fuego, con el hierro y con toda clase de medios, pero igualmente también la ignorancia del espíritu, el derroche gastronómico, la rivalidad ciudadana, la discordia en el hogar y la falta de moderación en todo. (p 36)

De acuerdo con Zubkova et al. (2009) la meta de la Hermandad era la renovación ética de la sociedad, la purificación de las ideas religiosas y también la entrega de los métodos secretos del autodesarrollo espiritual a los estudiantes dignos. La Hermandad era una comunidad monástica y como se indicó anteriormente, consistía en hombres y mujeres que consideraban a Pitágoras como una encarnación de Dios. La actividad de esa gran Escuela se acabó debido a la represión salvaje de las personas primitivas. Las fuentes de los biógrafos, Aristóxeno y Dicearco, apuntan que en torno a 510 a.C. se produjo una violenta revuelta contra Pitágoras y sus seguidores en Crotona. El maestro huyó a otra ciudad vecina, Metaponto, donde habría muerto alrededor de 490 a.C.

3. REFLEXIONES

Este trabajo es un esfuerzo por recorrer brevemente el nombre de Pitágoras de Samos, un nombre que resuena a través de los siglos, el cual ha dejado un legado duradero en los campos de la filosofía y las matemáticas que aún influye en nuestra comprensión del mundo en la actualidad. Nacido alrededor del siglo VI a.C., Pitágoras se convirtió en uno de los pensadores más influyentes de la Antigua Grecia y fundador de la escuela pitagórica, cuyas enseñanzas y descubrimientos han perdurado a lo largo del tiempo.

El legado de Pitágoras es incuestionable en el ámbito de las matemáticas, no obstante, es más conocido en el ámbito escolar por su teorema, el cual establece que: “en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados”. Un teorema que, paradójicamente, no fue descubierto por él, un teorema ya conocido por otras culturas cientos de años antes de su nacimiento y que hoy lleva su nombre, además de ser fundamental en geometría y trigonometría.

La influencia de Pitágoras se extiende más allá de las matemáticas y abarca también en la filosofía. Su escuela, descrita muy brevemente por su estilo de vida comunitario y sus creencias en la importancia de la armonía y la búsqueda del conocimiento, tuvo una profunda influencia en la filosofía griega y occidental en general. Los pitagóricos creían en la existencia de un orden subyacente en el universo, expresado a través de las relaciones numéricas y geométricas, y buscaban entender este orden para alcanzar la armonía y la perfección.

Además, Pitágoras fue pionero en la idea de que las matemáticas no solo eran una herramienta para resolver problemas prácticos, sino también una forma de comprender la estructura fundamental del universo y la realidad misma. Teorías como la física cuántica, que exploran las conexiones profundas entre las matemáticas y la naturaleza del cosmos, se han desarrollado como resultado de esta visión, que todavía está presente en la ciencia moderna.

En pocas palabras, la vida y el trabajo de Pitágoras en el campo de la filosofía y las matemáticas han dejado una marca indeleble en la historia del pensamiento humano. Generaciones de pensadores, matemáticos y científicos han sido inspirados por su búsqueda de la verdad, su pasión por la armonía y su profunda comprensión de las relaciones numéricas y geométricas.

Por ello, y reforzando las primeras ideas expuestas en este trabajo, conocer la historia de Pitágoras y su enseñanza es de suma importancia para los docentes de matemáticas, ya que proporciona un contexto histórico y filosófico fundamental para comprender la evolución y los fundamentos de esta disciplina. Pitágoras no solo fue un matemático destacado, sino también un filósofo cuyas ideas influenciaron profundamente el desarrollo del pensamiento occidental. Al familiarizarse con su vida y sus enseñanzas, los docentes pueden transmitir a sus estudiantes no solo la importancia de los conceptos matemáticos que llevan su nombre, sino también ese ideal de búsqueda del conocimiento. En resumen, conocer la historia de Pitágoras y su legado ofrece a los docentes de matemáticas una valiosa oportunidad para enriquecer su enseñanza y motivar a sus estudiantes a profundizar en el fascinante mundo de las matemáticas.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Broncano, F. y Hernández, D. (2012). De Prometeo a Frankenstein: autómatas, ciborgs y otras creaciones más que humanas (1.a ed.). Ediciones Evohé.

González, R. (2012). Pitágoras y la Nueva conciencia. CreateSpace.

Gorman, P. (1988). Pitágoras (1.ª ed.). Editorial Crítica.

Hernández, D. (2014). Vidas de Pitágoras. Ediciones Atalanta.

Jámblico. (2003). Vida Pitagórica. Protréptico. (M. Periago, Trad.). Editorial Gredos.

Porfirio. (1987). Vida de Pitágoras, Argonáuticas e Himnos. (M. Periago, Trad.). Editorial Gredos. https://josefranciscoescribanomaenza.files.wordpress.com/2018/05/porfirio-vida-de-pitagoras-argonauticas-orficas-himnos-orficos.pdf

Ratner, B. (2009). Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. Journal Of Targeting, Measurement And Analysis For Marketing, 17(3), 229-242. https://doi.org/10.1057/jt.2009.16

Sánchez, J. (2011). Historias de Matemáticas: Las Escuelas Jónica y Pitagórica. Pensamiento Matemático. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3744293

Singh, S. (2015). El enigma de Fermat: la historia de un teorema que intrigó durante más de trescientos años a los mejores cerebros del mundo. Grupo Planeta (GBS).

Zubkova, A., Nikolenko, M., Shtil, M., Vavulina, L. y Antonov, V. (2009). Pitágoras y su escuela. https://swami-center.org/es/text/Pitagoras-y-Su-Escuela.pdf

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática
e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
185-188
Recibido: 25/04/2024
Aprobado: 15/05/2024
Mi formación en EducMate

EXPERIENCIA DE FORMACIÓN: DESARROLLO DE ESTUDIO SOBRE EDUCACIÓN REMOTA DE EMERGENCIA

Karla Contreras Monge[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6775-5035

La asistencia en investigación es una de las aristas laborales de la carrera Educación Matemática de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR). Para desarrollar conocimientos y habilidades que permitan el desempeño en dicha arista, es necesaria la incorporación de tareas investigativas en diferentes cursos a lo largo de la carrera; uno de ellos es Métodos y Diseños de Investigación (PS-1080), el cual se encuentra en el V de los VIII ciclos de su plan de estudios para optar por el título de Bachillerato. Particularmente en este aprendí las bases teóricas sobre diseños de investigación, y puse algunas de ellas en práctica al llevar a cabo, durante el 2021, una investigación cuantitativa titulada *Recursos, estrategias y dificultades de estudiantes de Precálculo de la Universidad de Costa Rica durante la educación remota de emergencia*.

El presente escrito tiene como objetivo compartir mi experiencia al realizar la investigación mencionada, ya que esta constituyó una oportunidad trascendental en mi formación profesional como educadora matemática. Para ello, contextualizo el escenario en el cual se desarrolló el estudio, describo a grandes rasgos en qué consistió y abordo los más relevantes aprendizajes que desarrollé y fortalecí durante dicho proceso.

La pandemia ocasionada por la COVID-19 puso bajo amenaza los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que comenzó a implementarse una educación remota de emergencia (ERE) que intentó responder temporalmente, con los recursos disponibles, a la crisis existente (Hodges et al., 2020). Debido a lo urgente que resultó la situación, no se contó con registros sobre los recursos, las estrategias y las dificultades que enfrentaban las personas estudiantes; elementos importantes para comprender la coyuntura que vivieron y desarrollar los medios necesarios para la toma de decisiones en pro de la educación.

En vista de lo expuesto y considerando que esta investigación se desarrolla en un entorno virtual, se tomó la decisión de investigar los elementos mencionados en un proceso que se prolongó durante un año aproximadamente. Es importante destacar que esto se llevó a cabo con el estudiantado de Precálculo, curso de servicio ofrecido por la Escuela de Matemática de la UCR a estudiantes de diferentes carreras con el objetivo de proporcionarles herramientas necesarias sobre álgebra, funciones y trigonometría que les permitan superar

1 Bachiller en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica. Estudiante de Licenciatura de Educación Matemática. Correo electrónico karla.contrerasmonge@ucr.ac.cr

satisfactoriamente los cursos posteriores, como Cálculo I. Dicho estudiantado estaba en su primer año universitario y, según autores como Giannini (2020), en el contexto de la ERE, desde el punto de vista académico, quienes más sufrieron el impacto de la pandemia fueron estudiantes que estaban finalizando la educación secundaria y aspiraban a ingresar a la educación superior. Así, para el 2021 parte de esa población afectada se encontraba llevando tal curso.

La investigación se llevó a cabo bajo un enfoque cuantitativo, utilizando un diseño no experimental transeccional o transversal de alcance descriptivo, donde las unidades de análisis fueron estudiantes pertenecientes a 7 de los 31 grupos de Precálculo ofrecidos durante el primer ciclo 2021 en la UCR que cumplieron determinados criterios. La delimitación del tipo de estudio en un inicio consideró un estudio de caso, pero a medida que se avanzó con la investigación, gracias a la orientación y retroalimentación de referentes teóricos y del profesor de PS-1080, se reconoció la pertinencia de un estudio no experimental transeccional o transversal.

Para recolectar los datos se construyó un cuestionario (disponible en https: //forms.gle/aKEkt6pGs4V3nd3n6) estructurado en cinco categorías: (I) datos sociodemográficos; (II) acceso a las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs); (III) recursos tecnológicos utilizados por estudiantes en el estudio de contenidos matemáticos de Precálculo; (IV) estrategias utilizadas por estudiantes en el estudio de contenidos matemáticos de Precálculo; y (V) dificultades del estudiantado de Precálculo. El cuestionario combinó preguntas de respuesta corta y larga, escalas Likert, opciones dicotómicas y opciones de una o más respuestas (múltiples), que se construyeron tras la consulta de referentes bibliográficos y se validaron con una persona experta en investigación cuantitativa y mediante tres entrevistas cognitivas. Los resultados se registraron en un formulario en línea y luego se analizaron estadísticamente en un software de hojas de cálculo haciendo uso de técnicas de estadística descriptiva, las cuales fueron estudiadas tanto en PS-1080 como en el curso Estadística y Probabilidad I (MA0016) que se lleva en el V ciclo de la carrera.

Los resultados de la investigación revelaron que el acceso a las TICs por parte de las personas estudiantes de Precálculo durante el primer ciclo 2021 fue generalmente bueno en cuanto a conexión a Internet, recursos y conocimientos; los recursos empleados con mayor frecuencia fueron aquellos de fácil acceso para el estudiantado; y las dificultades presentadas se asociaron tanto a metodologías promovidas por el profesorado, así como a aspectos personales y socioeconómicos. Estos hallazgos permitieron concluir que, efectivamente, se aplicó una ERE, y no una educación a distancia, e-learning o cualquiera de los otros términos que, aunque se emplearon con frecuencia, no englobaron por completo el contexto de aquel entonces. Cabe destacar que esta distinción entre términos y la identificación precisa de la situación habría sido fundamental para evitar que errores teóricos condujeran a errores prácticos (Bozkurt et al., 2020).

A partir de los resultados obtenidos, se consideró pertinente explorar posibles medidas que se pudieran adoptar y adaptar para afrontar la ERE de manera efectiva. Se propuso la incorporación de la pedagogía del cuidado, la cual implica el desarrollo de estrategias que reconozcan y atiendan la diversidad de experiencias y vulnerabilidades de cada estudiante, considerándole como un ser integral (Bozkurt et al., 2020). Asimismo, se sugirió la creación de comunidades de aprendizaje, entendidas como “una estrategia de producción de contenidos académicos en una plataforma no convencional, más cercana al consumo y producción mediática cotidiana del estudiantado, y que a la vez permita expandir dichos contenidos” (Pardo y Cobo, 2020, p. 24). Adicionalmente, Ibarra et al. (2020) recomendaron abordar la brecha digital desde una perspectiva multifactorial, considerando las inequidades existentes en el acceso, las habilidades de uso y los resultados o beneficios de las TICs.

Por otra parte, resulta oportuno hacer referencia a algunos de los aprendizajes desarrollados y fortalecidos en relación con la experiencia de investigar. En primer lugar, si bien el estudio realizado siguió una secuencia (identificación del problema, delimitación del diseño, definición de variables, selección de la muestra, diseño del cuestionario, trabajo de campo, obtención y tratamiento de datos, análisis de datos e interpretación de resultados), es importante destacar que los procesos investigativos no son rígidamente lineales. En ocasiones se requiere retroceder, modificar o reforzar aspectos del estudio para continuar su desarrollo, lo cual demanda paciencia y compromiso con la construcción y articulación de conocimiento veraz.

En segundo lugar, este tipo de experiencias pueden constituir una actividad trascendental en el proceso de formación de personas educadoras matemáticas, ya que participar en investigaciones les puede motivar a ir más allá de lo que dicta la teoría, y a asumir un rol como agentes capaces de identificar problemáticas y planificar propuestas para abordarlas a través de la articulación de teoría y práctica. Es importante destacar que, para lograr este objetivo, es fundamental contar con docentes que orienten al estudiantado de manera oportuna en el proceso de investigación y que confíen en sus capacidades. Por ejemplo, en el caso del estudio desarrollado se contó con la colaboración de una persona experta en investigación que retroalimentó, a través de una educación a distancia, el trabajo y que contribuyó a que dicha experiencia fuera clave para aumentar mi confianza como educadora matemática en este ámbito.

En tercer lugar, la participación en actividades investigativas facilita la integración y aplicación de conocimientos y habilidades adquiridas en diferentes cursos de la carrera. Esta integración se observa tanto en el área de matemática como de la didáctica de la matemática, pues evita la fragmentación del conocimiento y promueve su articulación en un todo con sentido y significado. Asimismo, permite fortalecer competencias relacionadas a la búsqueda de información, pensamiento crítico, planificación, trabajo en equipo y comunicación efectiva.

En cuarto lugar, la investigación sobre la ERE permitió documentar de manera detallada los recursos, estrategias y dificultades del estudiantado de Precálculo, donde se evidenció el impacto de la pandemia de COVID-19 en la educación. Además, el estudio recopiló información con probable impacto en el presente académico del estudiantado y que, más aún, puede ser utilizada para comprender algunas de sus necesidades y desarrollar estrategias de apoyo para su éxito académico y profesional. Sin embargo, reconozco que una oportunidad de mejora para futuros estudios consiste en compartir los resultados y recomendaciones con las personas coordinadoras de los cursos de Precálculo y Cálculo, con el propósito de que sean valoradas y consideradas en el diseño de propuestas didácticas.

Por último, el estudio presentado no estuvo exento de limitaciones, las cuales se debieron al contexto pandémico en el que este se desarrolló. En este sentido, se vivenció lo siguiente: baja tasa de respuestas por parte de personas docentes de Precálculo que autorizaron el ingreso a una de las clases virtuales para solicitarles a sus estudiantes que completaran el cuestionario, así como baja tasa de respuesta por parte de estudiantes a quienes se les invitó a participar.

Ante esto último, extiendo la más cordial invitación a las personas educadoras matemáticas en formación o en ejercicio a contribuir, desde sus posibilidades, a este tipo de estudios, ya que su participación es fundamental para conformar tamaños de muestra apropiados que permitan la mejor comprensión de los fenómenos que se investigan. También, invito a las personas estudiantes que han desarrollado investigaciones o indagaciones a compartir sus hallazgos en los diferentes espacios disponibles. Estas acciones permiten fomentar el aprendizaje mutuo y la construcción colectiva de conocimiento en el campo de la educación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bozkurt, A., Jung, I., Xiao, J., Vladimirschi, V., Schuwer, R., Egorov, G., Lambert, S. R., Al-Freih, M., Pete, J., Olcott, Jr., D. Rodes, V., Aranciaga, I., Bali, M., Alvarez, Jr., A. V., Roberts, J., Pazurek, A., Raffaghelli, J. E., Panagiotou, N., de Coëtlogon, P., Shahadu, S., Brown, M., Asino, T. I. Tumwesige, J., Ramírez Reyes, T., Barrios Ipenza, E., Ossiannilsson, E., Bond, M., Belhamel, K., Irvine, V., Sharma, R. C., Adam, T., Janssen, B., Sklyarova, T., Olcott, N. Ambrosino, A., Lazou, C., Mocquet, B., Mano, M., y Paskevicius, M. (2020). A global outlook to the interruption of education due to COVID-19 pandemic: Navigating in a time of uncertainty and crisis [Una perspectiva global de la interrupción de la educación debido a la pandemia de COVID-19: Navegando en un momento de incertidumbre y crisis]. *Asian Journal of Distance Education, 15*(1), 1-126. https://doi.org/10.5281/zenodo.3778083

Giannini, S. (2020). COVID-19 y educación superior: de los efectos inmediatos al día después. Análisis de impactos, respuestas políticas y recomendaciones. *Revista Latinoamericana de Educación Comparada, 11*(17), 1-57. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7502929.pdf

Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T. y Bon, A. (27 de marzo de 2020). The difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. EDUCAUSE Review. https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning

Ibarra, F., Opazo, K., y Zamora, M. (2020). La EPJA en tiempos de coronavirus: reflexiones en torno a la Educación Remota de Emergencia. *Revista de Educación de Adultos y Procesos Formativos, 10,* 3-33. https://doi.org/10.29156/INTER.8.1.6

Pardo, H., y Cobo, C. (2020). Expandir la universidad más allá de la enseñanza remota de Emergencia: ideas hacia un modelo híbrido post pandemia. Barcelona, España: Outliers School.

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2024 Vol. 17 N°. 2

EDITORIAL UCR

17224
9 772215 562000