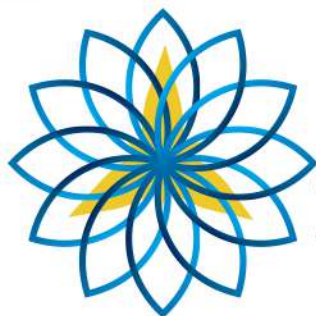


e-ISSN en línea: 2215-5627

Impresa: ISSN 1659-2573



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2025

Vol. 18

Nº. 1

CIMM

Centro de Investigación en
**Matemática y
Meta-Matemática**

**EDITORIAL
UCR**

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA



Contenido del Volumen 18. Número 1. Año 2025

Presentación.....	5-6
Sección 1. Artículos de investigación	
1. Sobre la interacción epistémica y educativa entre tres realidades: geométrica, física y algebraica (GFA)	7-20
<i>Autores: Luis Enrique Moreno-Armella y Guershon Harel</i>	
2. Hábitos de pensamiento matemático y el uso de GeoGebra en la resolución y formulación de problemas de optimización	21-42
<i>Autores: Martha L. García-Rodríguez y Juan Gabriel Herrera-Alva</i>	
3. Sala de aula invertida no ensino de fatoração algébrica: um estudo sobre o pensamento algébrico evidenciado por estudantes brasileiros 8º ANO	43-60
<i>Autores: Vilmar Gomes da Fonseca y Matheus de Carvalho Terra</i>	
4. IA en la resolución de problemas matemáticos.....	61-89
<i>Autor: Alexánder Hernández Hernández</i>	
5. La cultura como operador en las metodologías de la enseñanza de las matemáticas	91-104
<i>Autor: Carlos Mometti</i>	
6. Idoneidad mediacional y ecológica del conocimiento didáctico-matemático y tecnológico del profesorado de educación matemática.....	105-120
<i>Autor: José David Vargas Gamboa</i>	
7. Análisis factorial exploratorio de las expectativas de eficacia y los valores de las tareas en matemática, un análisis realizado en personas estudiantes de ingeniería y ciencias	121-136
<i>Autor: Víctor Adolfo Rojas Cruz</i>	
8. Comprensión del aprendizaje de la aritmética desde la diversidad cognitiva: hacia la accesibilidad.....	137-153
<i>Autora: Elba Azucena Martínez Cárdenas</i>	
9. Aprendizaje basado en proyectos (ABP) para el fortalecimiento de competencias matemáticas en educación secundaria: propuesta y estudio empírico .	155-182
<i>Autores: Laura Yanneth Cañas Mendoza y Emil Hernández Arroyo</i>	
10. Las emociones en los libros de texto de la nueva escuela mexicana	183-200
<i>Autoras: Ana María Martínez Blancarte, Marleny Hernández Escobar y Cinthia Jessica Sánchez Serrano</i>	



- | | |
|--|----------------|
| 11. Conocimiento especializado de una profesora de matemática en la ejemplificación de la descomposición de radicales | 201-215 |
| <i>Autores: Nicolás Sánchez Acevedo, Gonzalo Espinoza Vásquez, Carlos Segura, Luis Carlos Contreras y Leticia Sosa Guerrero</i> | |
| 12. Análisis de la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico..... | 217-233 |
| <i>Autores: Felipe Santoyo Telles, Miguel Ángel Rangel Romero, Adriana Lorena Íñiguez Carrillo y Neiber Maldonado Suárez</i> | |
| 13. Proyectos en matemáticas con atención a las problemáticas escolares | 235-249 |
| <i>Autor: Jesús Antonio Larios Trejo</i> | |
| 14. Diseño de una tarea fenomenológica para la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables | 251-275 |
| <i>Autores: Eduardo Emiliano Muñoz Ortiz, Priscilla M. Angulo Chaves, Carlos Robles Padilla y Axel Picado Piedra</i> | |
| 15. Fracciones en la recta numérica. Un experimento de diseño basado en modelos de longitud..... | 277-290 |
| <i>Autores: Ivette Anel Delgado Valdez, Luis Manuel Aguayo Rendón y Lorena Alejandra Medina Hernández</i> | |
| 16. Análisis de la idoneidad didáctica en situaciones de crecimiento poblacional en la escuela secundaria | 291-313 |
| <i>Autores: Claudio Rodríguez y Ricardo Fabián Espinoza</i> | |

Sección 2. Narraciones: La voz de la persona formadora

- | | |
|---|----------------|
| 1. Matemáticas en Cuba: enseñanza, investigación, avances y retos: una visión en el contexto de América Latina | 315-346 |
| <i>Autores: Lilliam Álvarez Díaz, María Cristina González Dosil, Dunia Reyes Abreu, Rosa Alicia Cárdenas Puig, Oscar Domínguez Escobar y Fatma Vega Jadur</i> | |
| 2. Carrera enseñanza de la matemática, Sede de Occidente: ¿qué ha pasado en los últimos quince años?..... | 347-364 |
| <i>Autores: Norman Noguera Salgado, María Fernanda Vargas González y Ana Patricia Maroto Vargas</i> | |

Sección 3. Mi formación en EducMate

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Experiencia profesional: clases de nivelación en séptimo año basadas en resolución de problemas | 365-370 |
| <i>Autor: Dilan Josué Jiménez Sánchez</i> | |
| 2. Experiencia de formación: estudio sobre la resolución de problemas..... | 371-3746 |
| <i>Autores: David Córdoba Segura, Emmanuel Ramírez Garita y Yendry Quesada Calderón</i> | |



Presentación del Volumen 18. Número 1, Año 2025

La investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la matemática juega un papel fundamental para garantizar una educación de calidad. Las investigaciones que se presentan en este número de Cuadernos identifican estrategias pedagógicas eficaces, enfoques innovadores para la enseñanza y comprensión de obstáculos emocionales y cognitivos que enfrentan los y las estudiantes.

Desde países como: Argentina, Chile, Brasil, Colombia, Costa Rica, México, Cuba y España, las personas investigadoras nos presentan los resultados de su trabajo en aras de contribuir con el público meta a quienes nos debemos: nuestros y nuestras estudiantes. Un total de 16 artículos de investigación componen este número en temas tales como idoneidad mediacional y ecológica del conocimiento didáctico-matemático, aprendizaje basado en proyectos, aula investida, diseño de tareas fenomenológicas, inteligencia artificial, resolución de problemas e interacción epistémica y educativa. Además, se aborda la comprensión del aprendizaje de la aritmética, la cultura como operador en las opciones metodológicas, y propuestas relacionadas con: el análisis factorial, las emociones, la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico, el conocimiento especializado de profesores, experimentos basados en modelos de longitud, entre otros.

La divulgación de las investigaciones tiene un impacto en la formación de profesores de matemática, lo cual mejora la calidad de la educación en sus aulas y contribuye a formar una sociedad crítica, analítica y capaz de tomar decisiones fundamentadas. En la sección de “Narraciones: la voz de la persona formadora”, desde Cuba se narra la experiencia, retos, avances e investigación realizada desde mediados de la mitad del siglo 20 hasta nuestros días, en la formación de profesores de matemática. Desde Costa Rica un grupo de investigadores analizan las conclusiones contenidas en la referencia al Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con salida lateral al profesorado en la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica, exponen su impacto en las instituciones de secundaria en la región de Occidente, así como el estudio de las principales fortalezas y debilidades de la carrera hasta 2008.

En la tercera sección “Mi formación en EducMate”, un egresado de licenciatura en Educación Matemática describe una experiencia profesional en el marco de resolución de problemas y, un grupo de estudiantes en formación narra su experiencia, destacando los aprendizajes obtenidos desde su práctica, en el diseño de una rúbrica para evaluar a estudiantes durante la resolución de problemas.

Agradecemos a todas las personas investigadoras por sus contribuciones y la confianza depositada en nuestra revista y a todos nuestros y nuestras lectoras que hacen posible nuestro objetivo: enriquecer la comunidad de Educación Matemática mediante la provisión de herramientas teóricas y metodológicas, para potenciar los quehaceres dentro de esta gran comunidad, hacia el avance del conocimiento en todos los niveles educativos.

Dr. William Poveda Fernández
Editor en jefe



SOBRE LA INTERACCIÓN EPISTEMICA Y EDUCATIVA ENTRE TRES REALIDADES: GEOMÉTRICA, FÍSICA Y ALGEBRAICA (GFA)

ON THE EPISTEMOLOGICAL INTERPLAY AMONG THREE REALITIES: THE GEOMETRIC, THE PHYSICAL AND THE ALGEBRAIC (GPA)

Luis Enrique Moreno-Armella¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5055-5782>

Guershon Harel²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-3452-2031>

RESUMEN

Nuestro interés por temas sobre la cognición y la epistemología nació de nuestras experiencias vividas en el aula como observadores del encuentro del alumno con las matemáticas. Nos interesa considerar dos categorías esenciales de la realidad: la realidad *matemática*, esta que se supone compartida por la comunidad matemática en general y, por otra parte, las realidades inferidas de las acciones de los estudiantes *por un observador*. Introducimos un modelo teórico, acompañado de episodios ilustrativos de una forma particular de pensar, a saber, la de inclinarse por la elaboración de *tres realidades matemáticas*: la geométrica (G), la física (F) y la algebraica (A). Esta forma de pensar está, en gran medida, ausente del razonamiento de los estudiantes. Aún más compleja es la construcción de una realidad *semántica* que coordine la relación entre las tres realidades previas. Los *entornos* en los que estas realidades pueden desarrollarse y madurar se denominan *organizaciones locales*. Allí, los estudiantes pueden empezar a descubrir el significado matemático de sus tareas y refinar gradualmente su entendimiento. Las organizaciones locales funcionan como versiones tempranas de formas de pensamiento en las que *la deducción* desempeña un papel central. Presentaremos ejemplos del Cálculo, de la cardinalidad de conjuntos infinitos y del álgebra lineal para ilustrar las manifestaciones pedagógicas del modelo GFA.

Palabras clave: realidad matemática, forma de pensar, organización local, deducción, realidad semántica.

ABSTRACT

Our interests in cognitive and epistemological issues were born from our lived experiences in the classroom as observers of the student's encounter with mathematics. We attend to two essential categories of reality: the *mathematical* reality, this assumed-to-be-shared among the mathematics community at large and the realities inferred from the

1 Departamento de Matematica Educativa, 07360 San Pedro Zacatenco, Ciudad de México, Cinvestav-IPN. México. Correo electrónico: lmorenoa@cinvestav.mx

2 University of California San Diego, 9500 California, Estados Unidos de América. Correo electrónico: harel@math.ucsd.edu



students' actions *by an observer*. We offer a theoretical model accompanied with episodic illustrations of a particular way of thinking, that of the habit of constructing the three mathematical realities, the Geometric, the Physical and the Algebraic. This way of thinking is largely absent from students' repertoire of reasoning thus presenting an instructional challenge. Even more challenging is the construction of a suitable *Semantic* reality, that which coordinates the relationship among the three realities. The environments where these experiential realities can develop and mature are called local organizations, where students can begin to unveil the mathematical meaning of their tasks and gradually refine their understanding. Local organizations work as early versions of ways of thinking where deduction play a central role. Before concluding the paper, we offer examples from Calculus, cardinality of infinite sets, and linear algebra of the pedagogical manifestations of the GPA model.

Keywords: mathematical reality, way of thinking, local organization, deduction, semantic reality

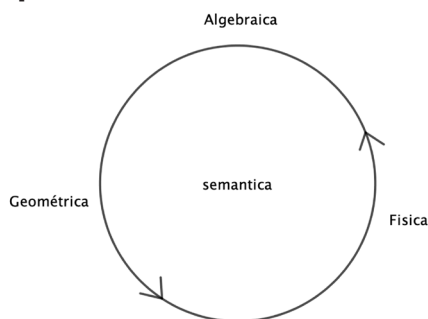
1. INTRODUCCIÓN

1. Introducción

Los educadores matemáticos exploran dos categorías esenciales de realidad: la realidad *matemática*, compartida por la comunidad matemática y las realidades inferidas *por un observador* a partir de las acciones de sus estudiantes. Es decir, una realidad que corresponde a cómo un profesor-investigador está interpretando las acciones matemáticas de los alumnos. Lo que se observa, es lo que Steffe y Thompson (2000, p.267) denominan *matemáticas de los alumnos*, que resultan de lo que dicen y hacen cuando participan en actividades matemáticas. En cierto sentido, estaremos viviendo en medio del pensamiento matemático de los alumnos y su posible formalización. Es decir, entre la cognición y la epistemología. Las matemáticas en general, y las de los alumnos en particular, constan de dos categorías de conocimiento: *Formas de entender y formas de pensar*.

Una forma de entender se refiere, por ejemplo, a cómo una persona *interpreta* una definición o el enunciado de un teorema. También a cómo *responde* a un problema planteado. Una forma de pensar, por su parte, se refiere a cómo una persona aborda la resolución de un problema interpretándolo desde un punto de vista *general* (por ejemplo, como un caso particular) o cómo un profesor toma decisiones sobre las matemáticas, en general, basadas en sus creencias sobre las matemáticas. Esto desde luego, podría afectar en consecuencia, su manera de enseñar y evaluar el rendimiento de sus alumnos. Las formas de pensar implican formas de razonamiento que *no son específicos* de una situación o contexto concretos, sino que son *trans-contextuales*.

En este trabajo ofrecemos un modelo de una forma particular de pensar que conduce a la construcción (y consideración simultánea) de tres realidades matemáticas: la realidad Geométrica, la realidad Física y la realidad Algebraica, asociadas a una idea matemática. Lo denominamos modelo GFA. Esta forma de pensar está, en gran medida, ausente de las formas de razonamiento de los alumnos, y supone un reto para la instrucción. Aún más compleja es la construcción de una *realidad semántica* que pueda coordinar las relaciones entre las tres realidades declaradas anteriormente. Elaboraremos este punto más adelante.

Figura 1. Descripción esquemática del modelo GFA.

Fuente: Elaboración propia.

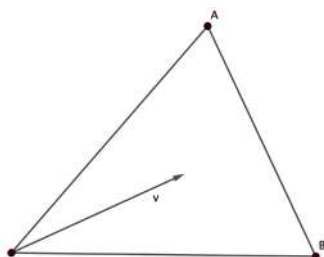
2. LAS REALIDADES DEL MODELO GFA

En términos generales, estas realidades pueden describirse someramente del siguiente modo: *Realidad geométrica*: representaciones gráficas y esquemáticas. *Realidad física*: fenómenos cuantitativos, por ejemplo, el movimiento, la variación y la acumulación. *Realidad algebraica*: representación algebraica, definición de límite, aproximación lineal, desarrollos de Taylor.

Explicaremos estas denominaciones mediante la discusión detallada de ejemplos en los contextos de la geometría axiomática, el cálculo, la cardinalidad y el álgebra lineal. Los *entornos* donde estas realidades pueden desarrollarse y madurar se denominan *organizaciones locales*. Es allí donde los estudiantes pueden empezar a descubrir el significado matemático de sus tareas y refinar gradualmente su comprensión. En cierto sentido, estas organizaciones locales funcionan como versiones tempranas de formas de pensamiento en las que *la deducción* desempeña un papel central.

2.1 Realidad geométrica

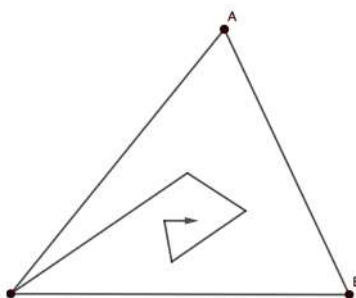
Se trata de saber *leer* las representaciones geométricas. Es fundamental que los alumnos puedan distinguir claramente entre el dibujo de un objeto geométrico y el objeto geométrico en sí. Es decir, entre la representación y la estructura. En general, ésta no es una tarea sencilla para los alumnos. Vamos a ilustrarlo con un ejemplo relevante.

Figura 2. Descubrimiento de Pasch.

Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos *comprenden* que, si prolongamos el segmento v , éste acabará intersectando al lado opuesto AB . Esta certeza tiene su origen en nuestra experiencia en el mundo material. Las figuras de la geometría elemental constituyen encarnaciones de actividades que se han llevado a cabo midiendo o cortando objetos materiales, por ejemplo. Las experiencias que vivimos en el mundo material tienen una importancia considerable sobre nuestras maneras de entender las propiedades de los dibujos sobre papel o pantalla. En verdad, los dibujos *heredan* el comportamiento de las experiencias corporales que representan. En otras palabras, del objeto matemático incrustado en el dibujo se *describe* su comportamiento. Pero esto no implica una *definición* de la *naturaleza* matemática del objeto. En la mente de los alumnos, empero, el dibujo y el objeto geométrico se identifican entre sí. Por eso nadie espera un comportamiento como el siguiente para la línea recta v :

Figura 3. Comportamiento Imposible.



Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, en un momento dado queremos que el conocimiento de los alumnos vaya más allá, de modo que el valor epistémico, arraigado en juicios basados en la percepción, evolucione hacia el valor lógico arraigado en esquemas de demostración deductivos y axiomáticos.

Lograrlo implica cruzar el puente que va de la comprensión sensorial-cognitiva a las formas matemáticas de pensar. Esto no se queda en un obstáculo *didáctico*, sino que apunta a la propia naturaleza de las matemáticas. La geometría euclidiana *supone* que el comportamiento de la recta v es éste: *al prolongar la recta, cortará al lado opuesto*. Pero este comportamiento que *no es un teorema euclidiano*, sino una suposición que se aceptaba sin mayor problema. Sin embargo, en 1882, Moritz Pasch descubrió que este hecho *no se deducía* de la axiomática euclidiana, cuyos objetos estaban siendo descritos de acuerdo a la experiencia sensorial. Es como si existiera una especie de *inconsciente cognitivo* que nos lleva a ocultar la diferencia necesaria entre describir y definir. Este inconsciente nos impide ver la *naturaleza epistémica* del caso. Ahí radica, nos parece, una raíz (hay otras) de un *obstáculo epistemológico*. La geometría de Euclides resulta únicamente de abstracciones empíricas y por eso sus objetos se describen a partir de este tipo de experiencia. Sin embargo, la axiomática moderna *define* los objetos matemáticos y, su comportamiento, se desprende de la estructura axiomática y no de los objetos materiales externos. Esta es una diferencia profunda con respecto a Euclides. Superar un obstáculo epistemológico no significa descartar lo construido, sino llevar las matemáticas a un nivel de abstracción y generalización que no era posible mientras se concebían como una reproducción simbólica del mundo de las experiencias externas. Ahora, las matemáticas han superado este *obstáculo euclidiano* ampliando y profundizando su realidad. Esta realidad ya no se limita a modelar el mundo exterior, sino a

crear un sistema de orden superior que, a la vez que representa el mundo exterior, proporciona un medio para representar nuestras acciones en el mundo de lo abstracto. Los alumnos, por su parte, aceptan la proposición (la recta v intersecará al lado AB) de acuerdo con la perspectiva euclidiana. La experiencia nos ha demostrado que los alumnos suelen preguntar *por qué tenemos que demostrar o justificar algo que es tan obvio*. A los alumnos *no les gusta que se les obligue a demostrar proposiciones (especialmente obvias) mediante una cadena de pasos formales que recorren casi a ciegas*. Debemos reconocer que se trata de un problema ineludible en la enseñanza de las matemáticas, que requiere el desarrollo de una forma de pensar denominada esquema de demostración axiomática (Harel, G. & Sowder, L., 1998).

Veamos ahora un ejemplo en el que explicitamos el papel de las *organizaciones locales*.

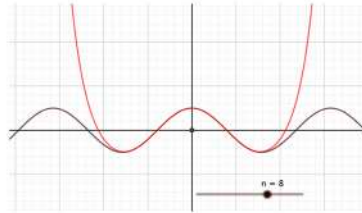
Pensemos en cómo convencer a alguien de que la distancia de la Tierra (E) al Sol (S) es mayor que la distancia de la Tierra a la Luna (M). Una respuesta plausible podría ser: espera a una noche en la que veas precisamente la mitad de la Luna iluminada. Esto significa que el triángulo EMS tiene un ángulo recto en el vértice M. Como el lado ES corresponde a la hipotenusa, debe ser mayor que el cateto EM. Es un razonamiento muy sencillo que se basa en que la hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos. Una propiedad discutida previamente en el aula. Después, los alumnos pueden aceptar las afirmaciones sobre las distancias entre la Tierra y la Luna y entre el Sol y la Tierra, basándose en experiencias corporales. Proponer este tipo de ejemplos ayuda a entender que *aceptar una proposición como válida* es un instrumento para afirmar la validez de sus consecuencias. Es decir, se va formando un hábito deductivo coherente con el pensamiento euclidiano. Paso a paso se va creando un puente que conduce a las formas de pensar propias de la comunidad matemática.

Basándonos en nuestra experiencia, podemos sugerir el uso sistemático de organizaciones locales como medio para acercar el pensamiento de los alumnos al pensamiento matemático. Queremos hacer hincapié en que se puede recurrir a las organizaciones locales como artefacto de prueba. La geometría euclidiana implica tres de las cuatro realidades representadas en la figura 1: la realidad física tal y como se percibe a través de los sentidos -visual y táctil-; la realidad geométrica que se manifiesta en la idealización de esa realidad (por ejemplo, que un punto no tiene dimensión, que una línea solo tiene longitud, etc.) y la realidad semántica cuya tarea es coordinar entre estas realidades los procesos fundamentados en deducciones basadas en reglas lógicas predeterminadas. La coordinación por parte de la realidad semántica se manifiesta en la comprensión de que las figuras esbozadas en un papel son representaciones externas de una realidad física idealizada, no meras copias de percepciones visuales, y que el papel de tales esbozos se limita a mantener un flujo de pensamientos lógicos y, en caso necesario, ayudar a comunicar estos pensamientos a los demás. Los alumnos rara vez desarrollan la capacidad de razonar en términos de la trilogía de realidades. Consideramos que lograrlo es un imperativo educativo.

2.2 Realidad física

Representar funciones mediante polinomios de Taylor es un objetivo importante en Cálculo. De hecho, haciendo esto podemos calcular y representar gráficamente una aproximación de la función original. En cierto sentido, esto introduce una vía computacional especialmente cuando la función no es fácilmente manejable por los métodos habituales. Los polinomios de Taylor son, en el ámbito de las funciones, lo que las aproximaciones decimales son a los números reales. Para ayudar a los alumnos a comprender esta idea, podemos exponer casos que la hagan tangible. Consideremos, por ejemplo, la siguiente gráfica.

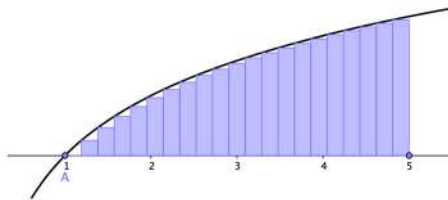
Figura 4. Aproximación de Taylor.



Fuente: Elaboración propia.

En esta gráfica los alumnos pueden observar y eventualmente *comprender*, la aproximación a $f(x)=\cos(x)$ mediante un polinomio. A medida que aumentamos el grado del polinomio podemos obtener mejores aproximaciones. Es posible adoptar una estrategia didáctica para estudiar la similitud entre las aproximaciones decimales y las aproximaciones de Taylor. Eventualmente, esto puede hacer tangible para los estudiantes que los procesos de aproximación con los que han trabajado en el pasado (incluyendo los actuales) son ejemplos de un proceso más general que los engloba como casos particulares. El concepto de límite surge a partir de estos ejemplos. Añadamos un ejemplo para estudiar el proceso de aproximación: la integración.

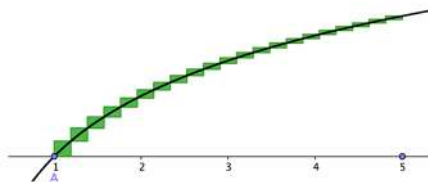
Figura 5. Aproximación por defecto.



Fuente: Elaboración propia.

Esta figura ilustra el proceso de aproximación del área bajo la curva. Se trata de una aproximación por *defecto*. Del mismo modo, tenemos una aproximación por exceso. Ambas pueden generar la aproximación con el grado de precisión deseado. La figura 6 ilustra una posible diferencia entre estas dos aproximaciones.

Figura 6. Diferencia entre aproximaciones.



Fuente: Elaboración propia.

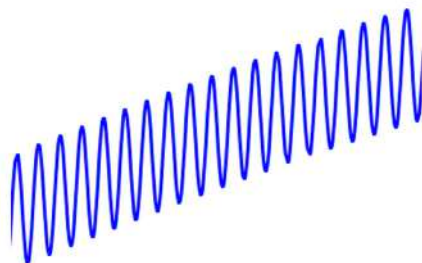
Muestra una característica importante: el gráfico puede ser cubierto por una familia de rectángulos *cuya suma de áreas puede hacerse tan pequeña como se desee*.

Esta última frase es el núcleo de la formalización de la idea de límite. Los estudiantes necesitan trabajar en una diversidad de contextos para adquirir una visión significativa de los límites, ya que se trata de un concepto con múltiples estratos (Moreno-Armella, 2021).

Existe un nivel de intuición que resulta de un esfuerzo sostenible de reflexión sobre una idea. Por ejemplo, el jugador de ajedrez desarrolla con el tiempo y esfuerzos sostenidos, una intuición del juego. El jugador observa una partida en curso y puede predecir el resultado. Tiene una forma de entender el ajedrez que es el resultado de mezclar su inteligencia analítica y su intuición. Podemos decir que, en consecuencia, el jugador tiene una profunda intuición para el ajedrez. Esto es posible para los estudiantes, pero a costa de un gran esfuerzo. La *repetición* es necesaria.

Las funciones pueden tener comportamientos inesperados. Introdujimos actividades para explorarlas con un microscopio, es decir, con la facilidad de Zoom de la geometría dinámica. Por ejemplo, se estudió la gráfica de $g(x) = \sin(x) + 0.2 \sin(100x)$. La frecuencia de $\sin(100x)$ es alta. Sólo haciendo zoom en la gráfica pudieron los alumnos descubrir lo que estaba oculto:

Figura 7. Comportamiento oculto.

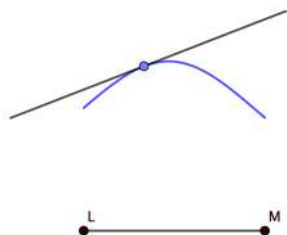


Fuente: Elaboración propia.

2.3 La realidad algebraica

El objeto matemático no está disociado de las intervenciones operativas que son posibles con y sobre él. Inicialmente, los objetos, o más bien los objetos en construcción, y las situaciones en las que aparecen, no están claramente identificados: el *objeto-fragmento* aparece dentro de una red conceptual que posee un campo operativo con el que podemos operar sobre él e iniciar así su exploración. A medida que los alumnos progresan podemos ver cómo su comprensión se traduce en la formación de núcleos conceptuales y cómo su actividad se desarrolla en torno a estos núcleos a través de sus campos operatorios.

Figura 8. Recta Tangente.



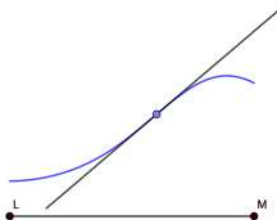
Fuente: Elaboración propia.

Cuando trazamos rectas tangentes para funciones convexas, el campo operativo (con un cierto nivel de formalización) nos permite escribir como hemos aprendido en estos casos:

$$(f(a+h)-f(a))/h.$$

No hay dificultades en estos casos. Sin embargo, surge un problema cuando intentamos trazar la tangente en un punto de inflexión.

Figura 9. Punto de inflexión.



Fuente: Elaboración propia.

Allí, el campo operativo indica que la tangente es una recta que *cruza* la curva, pero el concepto de recta tangente, derivado de las tangentes para curvas convexas, como es la experiencia de la mayoría de los estudiantes, se opone a tal generalización.

Entonces, nos vemos obligados a modificar nuestra idea de la noción de recta tangente para hacerla encajar en las nuevas situaciones reveladas por el campo operacional. El concepto original adquiere un nivel superior de organización y generalización, y amplía el contexto anterior del que surgió. El concepto se construye cristalizando las acciones reveladas por el campo operativo.

Desde un punto de vista didáctico, es revelador el momento en que un *concepto intuitivo* (que previamente ha servido de motivación para la comprensión), se convierte en un concepto *definido* por un nuevo conjunto de actividades. En estos momentos, observamos que la intuición se va a poner al servicio de una formalización incipiente. Aprender implica conectar ideas -sinapsis de ideas- y descubrir las estructuras ocultas que, a distintos niveles, sustentan esas ideas. Esto es crucial para una enseñanza con sentido, es decir, cómo se puede explicar un concepto matemático desde distintos niveles de complejidad sin olvidar que el oyente es un alumno. Para enseñar matemáticas hay que entender a *quién* se va a enseñar. En efecto, no podemos dejar toda la complejidad conceptual en manos de los alumnos. Enseñamos para el futuro (véase Moreno-Armella, 2021).

El primer conocimiento es el conocimiento contextual. Se pueden esgrimir razones para permanecer en este nivel pero, inevitablemente, tendremos que conquistar el conocimiento estructural. El conocimiento estructural contempla simultáneamente una gran diversidad de contextos. Encontramos una similitud con el lenguaje cuando decimos que las palabras no pueden quedar aprisionadas por un único significado. La savia del conocimiento es el sentido. Esto explica por qué los modos de comprensión se subsumen en la realidad semántica. El paso de los modos de comprensión a los modos de pensar no es unidireccional. Los conceptos emergen como cristalizaciones de la diversidad de acciones realizadas y realizables en cada versión contextualizada del concepto en formación. Existe una riqueza de significados que orientan el campo operativo formal del concepto y despiertan formas de comprensión en un nivel superior.

2.4 Realidad semántica: una introducción

El mundo humano no está hecho sólo de objetos materiales. En ese mundo existe la amistad, la educación, el tribunal supremo de justicia. Y ninguna de estas «cosas» tiene peso, volumen o temperatura. Están hechas de *sustancia simbólica*. Un símbolo, es cualquier cosa que ocupa el lugar de otra que (posiblemente) está ausente. Por ejemplo, una incisión en un hueso no es un conejo, pero puede ocupar el lugar del conejo para el cazador. La capacidad simbólica tiene una larga y fascinante historia (Donald, M. 2001; Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2016). El propio cuerpo ha sido nuestro espacio de representación primigenio. Gestos faciales, miradas, sonidos guturales y finalmente la lengua en todo su esplendor.

El impacto de la escritura ha sido enorme. Primero proporcionó un soporte externo a la memoria y pronto se convirtió en un espacio cognitivo. Cada vez que leemos nuestros propios escritos, reorganizamos nuestras ideas y las refinamos: es un proceso que recuerda al trabajo de un escultor. La irrupción de la escritura en el universo griego, por ejemplo, transformó su cultura de raíz.

Nuestra capacidad de predicción tiene su origen y necesidad en el movimiento (R. Llinás, 2001, MIT). Eso explicaría la sensibilidad a todo lo que se mueve. Un depredador en estado de absoluta quietud está alerta a cualquier movimiento que pueda percibir en su entorno. Las consecuencias de la consciencia del movimiento en los seres humanos han sido tan profundas, que gran parte de los esfuerzos matemáticos durante siglos han consistido en redescubrir el movimiento y el cambio en términos simbólicos. Uno de los resultados más profundos ha sido el desarrollo de las matemáticas de la variación y la acumulación cuya versión clásica, el cálculo infinitesimal, se convirtió en uno de los recursos predictivos centrales de las ciencias físicas.

3. MANIFESTACIONES PEDAGÓGICAS DEL MODELO GFA

La actividad *El infinito en el espejo* (véase Tabares, L. & Moreno-Armella, L. & Miranda, I., 2023) forma parte de una secuencia de actividades cuyo propósito es hacer conscientes a los estudiantes de la tensión existente entre la concepción intuitiva del infinito y su formalización matemática. Esta actividad se desarrolló con estudiantes de primer año de matemáticas aplicadas en una universidad mexicana. El dispositivo diseñado para la actividad consistió en dos espejos del mismo tamaño, colocados uno frente al otro. Primero se colocó una pelota entre los espejos. Los alumnos podían ver los reflejos de la pelota en los espejos. Después, colocamos tres pelotas (los alumnos no veían mientras colocábamos las pelotas). Los alumnos

tenían que mirar los reflejos en ambos espejos y determinar cuántas bolas podían contar. Al cabo de un rato, el profesor preguntaba a los alumnos el número de bolas que habían visto. Las respuestas debían pronunciarse en voz alta y con el objetivo de que todos los alumnos pudieran reflexionar sobre lo que contestaban sus compañeros. Uno de ellos, Omar, reflexionando sobre los reflejos de las bolas, dijo finalmente: *“los infinitos tienen diferentes tamaños; y eso depende, si es uno [se refiere a una bola] entonces será más pequeño que un infinito de tres [bolas], pero al mismo tiempo no puede ser más grande, porque podemos contar ambos conjuntos de reflejos (los de una y tres pelotas) con los números naturales así que siguen perteneciendo al mismo infinito”*. En esta afirmación, Omar especifica claramente que su intuición le hace pensar que habría dos infinitos de distinto tamaño: el que se forma con los reflejos de una sola bola y el del reflejo de tres bolas. Para Omar, el primer infinito está formado por múltiplos de uno; el segundo, por múltiplos de tres. Le parece que estos infinitos tienen tamaños diferentes. Reconociendo que en ambos casos el número de bolas se cuenta con los números naturales, su intuición se ve frenada por sus conocimientos matemáticos formales. Esto le lleva a concluir que deben ser infinitos del mismo tamaño. Continúa con su reflexión en voz alta, estableciendo así una diferencia entre conocimiento intuitivo y conocimiento formal; entre formas de entender y formas de pensar. Omar expresó: *«pero si le metemos matemáticas»*, recurriendo a su educación matemática, *es el mismo infinito*.

Esto dejó claro que su razonamiento le llevaba a concluir la igualdad de los dos infinitos. Más adelante en la sesión, dijo que hay infinitos más grandes, como el infinito de los números reales. Cuando le preguntamos por qué, respondió: *porque hay números irracionales como π y fracciones como $1/4$ que se «disparan al infinito»*. *Por eso es un infinito mayor. Porque son como muchos infinitos combinados en uno; entonces es más grande que un solo infinito de una sola cosa: los números naturales*. Omar explicó que *el infinito está incrustado en cada número real*. Pero no acabó aquí. Afirmó que como cada número irracional tiene su propio infinito, el conjunto de los números irracionales tiene un infinito mayor que el infinito de los números naturales. Su razonamiento se basa en que entiende que *la parte fraccionaria no periódica de un número irracional lo hace inidentificable*, al contrario de lo que ocurre con los números naturales. De este modo, las formas de entender de Alfredo implican que los números naturales están *asociados a un único infinito*, más pequeño que el infinito de los números irracionales. *Son como muchos infinitos combinados en uno solo*, decía. Omar obtiene la certeza a partir de su educación matemática formal. Su argumento, se basa en la intuición y también en el conocimiento formal.

El punto intermedio entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento formal se desarrolla durante su reflexión: *si pones más bolas, el infinito es mayor, pero si metes matemáticas, pues no*.

De hecho, no es un término medio, sino una espiral. O una *cognición de Moebius*... Pero Omar no estaba contento con el resultado: *Sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar*. Su comprensión, a pesar de todo, está en desacuerdo con la conclusión forzada por el pensamiento formal... *una tensión viva entre formas de comprender y formas de pensar*.

Álgebra lineal.

Se ha comprobado que los estudiantes se benefician de las ilustraciones geométricas de los conceptos de álgebra lineal recién introducidos. En términos del modelo GFA, estos resultados sugieren que invocar las realidades geométricas de los estudiantes junto con las realidades algebraicas recién aprendidas puede promover la comprensión. Sin embargo, también se

ha demostrado que los estudiantes tienden a fusionar estas dos realidades en una realidad híbrida que restringe su capacidad para seguir desarrollando ideas abstractas de álgebra lineal. Consideremos la siguiente observación realizada en clases de álgebra lineal. Las dos figuras de la izquierda se introducen para ilustrar el concepto de dependencia lineal e independencia lineal (en y). La figura de la derecha se introduce para ilustrar el concepto de proyección ortogonal sobre un subespacio. En general, los paralelogramos se introducen como esbozos metafóricos de subespacios.

Figura 10. Independencia lineal y subespacios.



Fuente: Elaboración propia.

Mientras que las dos figuras de la izquierda pueden considerarse representaciones de objetos geométricos -segmentos de línea dirigidos-, la figura de la derecha no es más que un esbozo metafórico, ya que un paralelogramo no es un subespacio. Se observó que la comprensión de los alumnos de la dependencia y la independencia lineales quedaba confinada dentro de las imágenes asociadas a estas figuras. En términos de Vinner, la definición conceptual de los alumnos se hace congruente con su imagen conceptual basada en la figuración. Del mismo modo, aunque la tercera figura pretende ilustrar la definición conceptual de proyección ortogonal, los alumnos entienden que la figura *es* la definición conceptual. En una reciente discusión en clase sobre un problema de proyección ortogonal sobre un plano dado (como en la figura), el profesor marcó una base, en (que aparece como flechas en la esquina inferior izquierda del paralelogramo), a lo que un alumno comentó «... pero no es un subespacio, ya que negativo no está en V », una respuesta que demuestra la dificultad de este alumno para ver los bocetos metafóricos como se pretendía.

Cálculo.

La enseñanza del cálculo es un caso destacado que ilustra la falta de atención a las tres modalidades del GFA. Normalmente, la presentación de contenidos en las clases de cálculo se organiza en torno a tres fases -una fase de exposición *preformal*, una *fase de exposición formal* y una *fase de exposición postformal* -en las que las dos primeras fases suelen ser breves, mientras que la tercera fase, que consiste principalmente en ejemplos que ilustran el concepto y los procedimientos para su aplicación, ocupa la mayor parte de la clase. Las observaciones realizadas en clase revelan que la fase de exposición preformal suele estar desprovista de un intento aparente de exigir intelectualmente que el concepto se aprenda a través de situaciones problemáticas basadas en una de las realidades del GFA. Más bien, el concepto suele presentarse como un producto prefabricado. Cuando se menciona la covariación cuantitativa, se hace como una ocurrencia tardía al final de la *presentación postformal*, después de los tratamientos algebraicos. Del mismo modo, rara vez los libros de texto incluyen en la fase preformal problemas físicos que impliquen la covariación cuantitativa para suscitar la necesidad

de aprender los conceptos. Tales problemas suelen aparecer en la última parte de la fase de enunciado postformal. En total, las tres fases no atienden a realidades físicas, abordando el contexto de las cantidades covariantes, la tasa de cambio, la acumulación, etc. Más bien, sus se centran casi exclusivamente en la realidad algebraica, acompañada ocasionalmente de ilustraciones gráficas que manifiestan la modalidad geométrica. Aunque los libros de texto prestan atención a las tres modalidades de *representación*-algebraica, *gráfica* y *física*-, prestan mucha más atención a las dos primeras que a la tercera.

Para ilustrar un enfoque didáctico alternativo, en el que intervienen las tres realidades del GFA coordinadas por la realidad semántica, consideremos la estructura de una lección sobre *la derivada direccional* y su relación con *el gradiente*, tal como se implementó en una clase de cálculo multivariable de licenciatura. La lección se organizó en cuatro fases:

Fase 1. En esta fase, los estudiantes repiten su experiencia sobre el movimiento de un objeto en una dirección determinada, representada gráfica y literalmente por un vector unitario. El movimiento en un punto implica una sensación física, expresada simultáneamente a través de su representación algebraica (posición frente a tiempo) y gráfica como una curva marcada en el plano que pasa por y ortogonal al plano

Fase 2. La sensación física invoca necesariamente la tasa de cambio (es decir, la velocidad). Como tal, tiene tanto una representación gráfica, como la pendiente de la recta tangente a la curva en y una expresión algebraica de la pendiente como *límite de un cociente de diferencias*, indicado como.

Fase 3. A través del cálculo de mediante el límite de su correspondiente cociente de diferencias, surge la necesidad de saber si se puede desarrollar una fórmula para el valor de. Con la ayuda del profesor la clase obtiene la fórmula, y con ella nace el concepto de *pendiente*.

Fase 4. La fórmula recién obtenida conduce a la producción de una nueva relación, que a su vez plantea preguntas sobre sus implicaciones físicas. La discusión de esta cuestión conduce a un nuevo conocimiento significativo; a saber, la maximización/minimización de la tasa de cambio.

Vemos aquí cómo cada fase implica simultáneamente las tres realidades: la realidad geométrica, la realidad física y la realidad algebraica. La invocación de las tres realidades y especialmente sus interrelaciones están coordinadas y controladas por la realidad semántica instanciada a través del bagaje matemático de los alumnos, las sensaciones físicas corporales, la idealización de estas experiencias y la necesidad intelectual. Las más destacadas de estas necesidades en esta lección son dos: (a) la necesidad de cálculo, expresada a través de la necesidad de obtener una forma fácilmente computable para y la necesidad de obtener las direcciones que maximizan o minimizan la tasa de cambio; (b) la necesidad de certeza, por ejemplo, la necesidad de dar cuenta de la validez de la forma fácilmente computable. Estas necesidades, cabe destacar, provienen de primitivas cognitivas y sociales (véase Harel, 2013). Por ejemplo, implican la necesidad de utilidad de las causas sociales (por ejemplo, minimizar el esfuerzo y el coste y maximizar el beneficio).

4. REFLEXIONES FINALES

La tensión entre el razonamiento intuitivo e informal y el llamado razonamiento riguroso y formal plantea enormes desafíos a la educación matemática. Uno de los retos más persistentes consiste en clasificar el razonamiento intuitivo como provisional, carente de validez,

y tomar partido por el razonamiento lógico como vía de acceso al *auténtico* conocimiento matemático. Esta postura no es la mejor desde el punto de vista educativo.

En la raíz de este movimiento percibimos las concepciones holística y analítica del pensamiento humano. Esto nos llevará a una consideración fundamental: las profundas relaciones entre cognición y epistemología, entre semántica y sintaxis, ya que transformamos nuestras experiencias en modelos simbólicos y conservamos algo más que matices de significado de estas experiencias encarnadas.

Vemos diversidad y respondemos con números; vemos formas y respondemos con geometría. Vemos variación y acumulación y respondemos con cálculo. Somos como un *organismo de Moebius: Aprendemos con el cuerpo. Y aprendemos con los símbolos*. Es decir, aprendemos con nuestro organismo cognitivo híbrido. Los niños pueden distinguir cuatro caramelos de siete, aunque todavía no sepan contar. Años más tarde, sin embargo, pueden factorizar números de tres cifras y, finalmente, demostrar el teorema fundamental de la aritmética.

En el aula, el alumno se enfrenta a fragmentos de conocimiento que debe decodificar. Esto implica la elaboración de significados. Ahora bien, el conocimiento matemático lleva consigo un campo semántico y una intencionalidad que han ido evolucionando con su propia historia. Al principio, esto no es visible a los ojos de los alumnos. Observamos con ilusión cómo los alumnos despliegan sus capacidades cognitivas para comprender, para interpretar una pregunta y responderla. Este es un camino hacia una forma matemática de pensar. La cultura matemática otorga niveles de valor epistemológico a estas actividades. A través del razonamiento repetido, estas formas de comprensión conducen a formas de pensamiento que cohesionan con el conocimiento matemático establecido. Se trata de un puente entre la cognición y la epistemología.

En la misma línea, H. Weyl (1932) explica que: «No nos sentimos muy satisfechos cuando nos vemos obligados a aceptar una verdad matemática en virtud de una complicada cadena de conclusiones y cálculos formales, que recorremos a ciegas, eslabón a eslabón, tanteando el camino con el tacto. Queremos primero una visión general del objetivo y del camino; queremos entender la idea de la prueba, el contexto más profundo».

Educación en matemáticas resulta de la articulación entre formas de entender y formas de pensar. Intuición y rigor en un viaje interminable.

5. REFERENCIAS

- Donald, M. (2001). *A Mind so Rare: The evolution of human consciousness*. New York, Norton.
- Harel, G. 2013. Intellectual Need. In *Vital Direction for Mathematics Education Research*, Leatham, K. Ed. (pp 119-151). Springer.
- Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education* 40, 893-907.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues in Mathematics Education* 7, 234-283.
- Llinás, R. (2001). *I of the Vortex*, Cambridge, MIT Press.
- Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM-Mathematics Education* 53, 621-633.
- Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2016). The Use of Digital Technology in Mathematical Practices: Reconciling Traditional and Emerging Approaches. *Handbook of International Research in Mathematics Education* (L. D. English and D. Kirshner, eds), 595-616.



- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Tabares, L. & Moreno-Armella, L. & Miranda, I. (2023). El infinito en el espejo. *Conference on Innovation, Documentation, Education and Teaching Technologies*: Innodoct.
- Weyl, H. (1932). *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 38, 177-188 (1932). (Translation by Abe Shenitzer in *The American Mathematical Monthly*, v. 102, no. 7 (August-September 1995), p. 646.



HÁBITOS DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y EL USO DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

MATHEMATICAL THINKING HABITS AND THE USE OF GEOGEBRA IN SOLVING AND FORMULATING OPTIMISATION PROBLEMS

Martha L. García-Rodríguez¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2435-1334>

Juan Gabriel Herrera-Alva²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1916-0587>

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como objetivo analizar los hábitos de pensamiento matemático que los estudiantes desarrollan cuando trabajan en la resolución y propuesta de problemas de optimización en un entorno de geometría dinámica. Se asume la resolución y formulación de problemas matemáticos como una ruta de pensamiento en la que el estudiante muestra hábitos, recursos, estrategias y una disposición para comprender ideas y conceptos. Actualmente, la investigación sobre los procesos de resolución y formulación de problemas incorpora el uso de tecnologías digitales; por ello, es interesante conocer las actividades matemáticas derivadas del uso de dichas tecnologías. Se analizó el proceso de resolución y formulación de problemas llevado a cabo por seis estudiantes inscritos en un curso de cálculo en el primer semestre de una carrera de ciencias, considerando cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. Los datos mostraron los hábitos de pensamiento matemático que emergieron durante la resolución y formulación de problemas. El principio de problematización contribuyó al desarrollo de hábitos como analizar un problema desde diferentes enfoques y formular conjeturas. Las evidencias recabadas mediante los protocolos de construcción en GeoGebra permitieron identificar actividades matemáticas relacionadas con el uso de la tecnología, como descubrir relaciones, probar y verificar conjeturas, reemplazar cálculos extensos por otros realizados con tecnologías digitales y confirmar resultados obtenidos analíticamente.

Palabras clave: Tecnologías digitales, recursos matemáticos, trayectorias de aprendizaje.

ABSTRACT

The objective of this work was to analyze the mathematical thinking habits that students develop when they work on solving and proposing optimization problems in a dynamic geometry environment. The resolution and formulation of mathematical problems is assumed as a route of thought in which the student shows habits, resources, strategies and a disposition to understand ideas and concepts. Currently, research on problem solving and formulation processes

1 CICATA Legaria, Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: mlgarcia@ipn.mx.

2 Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correo electrónico: gabalva@ciencias.unam.mx.

es incorporates the use of digital technologies; therefore, it is interesting to know the mathematical activities derived from the use of these technologies. The process of problem solving and formulation carried out by six students enrolled in a calculus course in the first semester of a science degree program was analyzed, considering four phases: orientation, connection, generation and reflection. The data showed the mathematical thinking habits that emerged during problem solving and formulation. The principle of problematization contributed to the development of habits such as analyzing a problem from different approaches and formulating conjectures. The evidence collected through the construction protocols in GeoGebra made it possible to identify mathematical activities related to the use of technology, such as discovering relationships, testing and verifying conjectures, replacing extensive calculations with others performed with digital technologies, and confirming results obtained analytically.

Keywords: Digital technologies, mathematical resources, learning trajectories.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en resolución de problemas ha tenido diferentes orientaciones, como se puede constatar en revisiones sobre este tema publicadas desde hace décadas.

Schoenfeld (1992) identifica un consenso sobre la importancia del método de indagación para el pensamiento matemático y la resolución de problemas, así como un acuerdo en cinco aspectos de la cognición que influyen en la resolución de problemas: el conocimiento base, las heurísticas, el monitoreo y control, las creencias y afectos, y las prácticas. Lester (1994) encontró en la década de los ochenta un interés por los problemas variables: en contenido y contexto, en estructura, en sintaxis y en heurísticas para resolver los problemas; distinciones entre resolutores expertos y novatos, diseño de instrucción vía la resolución de problemas y el estudio de la metacognición. Koichu (2014) señala que la resolución y formulación de problemas, que incluyen la conjetura y la prueba, son actividades esenciales en la matemática, por lo que se espera que también lo sean en la educación matemática. Afirma que, a partir de secuencias de preguntas en las clases de matemáticas, es posible brindar experiencias de resolución de problemas similares a las de los matemáticos, y estas experiencias benefician y promueven la comprensión de conceptos en los estudiantes. Sidenvall (2019) realizó una revisión de literatura en siete revistas indexadas publicadas entre 2000 y 2016 para caracterizar los diseños de enseñanza orientados para favorecer habilidades de resolución de problemas y razonamiento en los estudiantes. El autor identificó cuatro herramientas teóricas utilizadas para este fin: trayectorias hipotéticas de aprendizaje, educación matemática realista, teoría de situaciones didácticas y zona de desarrollo próximo. Por su parte, Santos-Trigo (2024) llevó a cabo una revisión de artículos publicados en revistas indexadas y libros recientes sobre resolución de problemas matemáticos, así como de publicaciones de investigadores reconocidos en el campo, su objetivo fue identificar las tendencias y direcciones de la investigación reciente en resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Reconoce a la formulación de problemas matemáticos y su resolución como actividades que organizan las propuestas curriculares y los entornos de aprendizaje de las matemáticas, en donde el uso de tecnologías digitales tiene un papel principal en las formas de plantear y abordar los problemas debido al tipo de representaciones, la exploración y el razonamiento que con ellas logran los estudiantes durante los procesos de resolución.

Santos-Trigo (2024) menciona que cuando se asume un entorno de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en la resolución de problemas, implícitamente se considera que la disciplina contribuye al desarrollo de las prácticas matemáticas en los estudiantes o hábitos de razonamiento matemático. En este enfoque, los estudiantes deben conceptualizar y percibir su propio aprendizaje como un conjunto de dilemas que son representados,

explorados y resueltos a partir de recursos matemáticos y de estrategias, esto se conoce como principio de problematización. Las experiencias de los estudiantes durante la resolución de los problemas reflejan una forma de pensar que se manifiesta en las actividades que realizan a lo largo de todas las fases de resolución de los problemas. El mismo autor señala que, de esta forma es posible desarrollar hábitos matemáticos como buscar diferentes maneras de modelar y explorar los problemas, formular conjeturas, buscar argumentos para sustentarlas, compartir soluciones, defender sus ideas y desarrollar un lenguaje adecuado para comunicar sus resultados.

Recientemente Santos-Trigo (2023) menciona que el uso de tecnologías digitales en el aula de matemáticas ha abierto nuevas líneas de investigación en las que se analiza, entre otros temas, sobre el razonamiento y procesos de resolución de problemas. Autores como Koichu (2014) y Santos-Trigo, (2023) señalan que la investigación en resolución de problemas ha entrado en un nuevo ciclo de desarrollo, para dar respuestas nuevas a viejos problemas, sobre todo cuando se utilizan tecnologías digitales, que a decir de Santos-Trigo, brindan nuevas formas de trabajar en la resolución de problemas matemáticos y de recopilar y analizar información durante los procesos de resolución.

De las investigaciones revisadas, se desprenden algunas preguntas: ¿Cómo caracterizar e identificar las prácticas matemáticas que los estudiantes ponen en juego cuando usan tecnologías digitales al resolver problemas? ¿De qué dependen que existan diferentes formas de explorar y resolver un problema? ¿Cómo se conceptualiza el aprendizaje de la matemática?

El conocimiento de los estudiantes se identifica como un elemento importante a considerar, también lo es el principio de problematización que contribuye para que los estudiantes se involucren en actividades de resolución de problemas matemáticos. Este como se ha mencionado, sigue un método de indagación o inquisitivo que se expresa mediante preguntas que los estudiantes plantean y persiguen para profundizar en el significado de los conceptos, representaciones, exploraciones, operaciones, y para trabajar en tareas matemáticas (Santos-Trigo, 2020). Es en esta dirección que se desarrolla la investigación que aquí se reporta y que tuvo como objetivo analizar prácticas matemáticas que los estudiantes desarrollan cuando trabajan en la resolución y propuesta de problemas de optimización en un ambiente de geometría dinámica.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La resolución de problemas ha sido una parte importante del currículum en matemáticas y también un enfoque de enseñanza y aprendizaje en diferentes partes mundo (Toh et al., 2023). De acuerdo con investigadores como Santos-Trigo (2024) en este subyacen principios comunes, uno de ellos es una conceptualización del aprendizaje de las matemáticas como una disciplina que privilegia el desarrollo de prácticas matemáticas o hábitos de pensamiento matemático; dentro de ellas se reconoce buscar formas distintas de modelar y explorar los problemas, formular conjeturas y argumentos que las respalden, defender las ideas y desarrollar un lenguaje adecuado para comunicar los resultados. Así mismo, concibe la resolución de problemas matemáticos como una ruta de pensamiento en la que el estudiante exhibe hábitos, valores, recursos, estrategias, y una disposición consistente con la práctica matemática orientada a la comprensión de ideas y conceptos (Santos-Trigo, 2020). El autor asume que hay varias rutas para que el estudiante desarrolle pensamiento matemático, pero establece como una característica esencial de todas ellas, el brindar oportunidades para que los estudiantes

reflexionen sobre los problemas, situaciones, contenidos, y conocimiento en términos de preguntas que necesitan respuesta.

Un método con las características anteriores fue propuesto por Pólya (1945) quien realizó un extenso estudio de métodos de solución de problemas, de este estableció cuatro etapas por la que transita un resolutor de problemas: entender el problema, idear un plan de solución, llevar a cabo el plan y realizar una retrospectiva. Toh et al. (2023) relacionan la etapa de retrospectiva del modelo de resolución de problemas de Pólya con la formulación de problemas. Enfatizan la importancia que la formulación tiene en las prácticas de los matemáticos, esta es una razón por la que también la tiene en la educación matemática.

La formulación de problemas, de acuerdo con Cai y Rott (2023) puede verse como un tipo de resolución de problemas, en el sentido de que a los estudiantes se les proporciona información y el objetivo es que formulen y resuelvan problemas. Cai y Rott (2023) proponen un modelo del proceso de formulación de problemas, semejante al proceso de resolución de problemas de Pólya (1945). Cuenta también con cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. La orientación corresponde a la comprensión de la situación; entender los datos involucrados y los requerimientos que se solicitan. La segunda fase es la conexión; en ella se identifican posibles conexiones, se proponen conjeturas y se desarrollan ideas para proponer nuevos problemas. En la fase de generación se realiza una representación externa de las conexiones llevadas a cabo en la fase de conexión, mismas que pudieron ser mentales. En la fase de reflexión es posible reformular un problema, esto implica monitorear y evaluar lo que se realizó durante la formulación.

Hoy en día, la investigación sobre los procesos de resolución y formulación de problemas ha considerado el uso de tecnologías digitales, dado el conjunto de herramientas que brindan para que los estudiantes realicen modelos dinámicos y utilicen estrategias como el arrastre de objetos de manera intencional, la cuantificación de atributos, el trazo de lugares geométricos, el uso de deslizadores, etc.. para explorar y resolver los problemas (Santos-Trigo, 2023).

Zbiek, et al. (2007) distinguen dos dimensiones de las tecnologías digitales relacionadas con la actividad matemática que se realiza con ellas, una técnica y otra conceptual; la primera se refiere a las acciones que se realizan mediante las herramientas de las tecnologías digitales sobre los objetos matemáticos como medir, calcular una integral, o sobre las representaciones de esos objetos, como las construcciones geométricas. La segunda involucra comprensión, comunicación, el reconocimiento de conexiones matemáticas, estructuras y relaciones; como encontrar y describir patrones, conjeturar, generalizar, abstraer y conectar representaciones. Los autores advierten del riesgo de ver a la actividad técnica como mecánica o carente de significado, y en contraste, a la actividad conceptual como generadora de aprendizaje significativo. Al respecto mencionan que la actividad técnica puede implicar una combinación de acciones mecánicas rutinarias guiadas por el razonamiento conceptual y que esto impide trazar una línea clara entre la actividad técnica y la conceptual que diferencie cuál de ellas tiene más significado matemático.

Los autores identifican en el trabajo de Borwein y Bailey (2008) actividades matemáticas que se derivan de formas de uso de las tecnologías, como: a) obtener ideas; b) descubrir patrones y relaciones; c) graficar para identificar principios matemáticos; d) probar y verificar conjeturas; e) explorar un posible resultado y reconocer si requiere una prueba formal; f) sugerir enfoques para la prueba formal; g) reemplazar cálculos extensos por otros realizados con las tecnologías digitales; y h) confirmar resultados obtenidos analíticamente.

3. METODOLOGÍA

La investigación se ubica en una perspectiva cualitativa, mediante un estudio de caso en donde participaron seis estudiantes que llamaremos D, F, I, J, M y S, de 18 y 19 años, inscritos en un curso de cálculo en el primer semestre de una carrera de ciencias.

Se reporta el trabajo realizado en dos sesiones de dos horas cada una, los datos fueron analizados de acuerdo con las fases propuestas en el modelo de Cai y Rott (2023). El análisis de la primera sesión corresponde a la fase 1 de orientación; el análisis de la segunda sesión a las fases 2, 3 y 4, de conexión, generación y reflexión, respectivamente.

Primera sesión.

Fase 1. Orientación.

Se llevó a cabo en forma presencial y de trabajo individual, se pidió a los estudiantes que resolvieran un problema de optimización, que llamaremos problema inicial (Figura 1).

Figura 1. Problema inicial.

Construir una caja de base rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de $6 \times 10 \text{ cm}$ recortando un cuadrado en cada esquina y doblando sus lados. Determinar la longitud del lado del cuadrado de corte para el cual la caja formada tiene un volumen máximo

Fuente: Elaboración adaptada de Stewart (2008, p. 328).

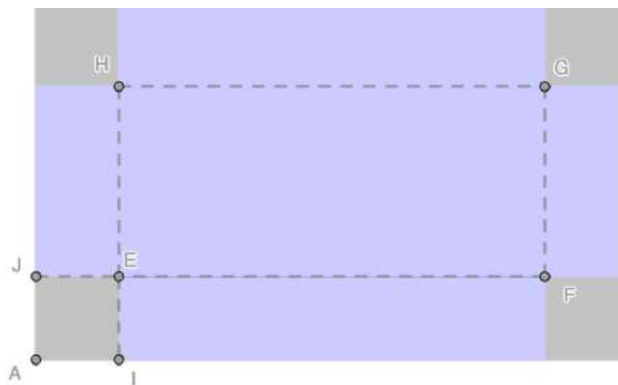
También se solicitó realizar la Tarea 1 (T1) que consistió en construir una animación en GeoGebra que simulara el problema inicial, con una vista gráfica en la que se visualizara la construcción de la base rectangular y los cuadrados de corte en las esquinas y con una vista 3D en la que se visualizara la simulación de la caja.

Se proporcionaron seis instrucciones esenciales y dos opcionales para realizar la simulación, estas últimas con la finalidad de detallar más la simulación resultante. Las instrucciones se presentan en la Tabla 1 y hacen referencia a la Figura 2.

Tabla 1. Instrucciones para construir la caja.

Esenciales	Opcionales
Construcción de un rectángulo fijo de valores en el primer cuadrante del plano cartesiano.	Intersección de los vértices del cuadrado de corte con los lados del rectángulo inicial, puntos I y J.
Relación de una variable con la longitud del corte y especificación de su rango.	Trazo discontinuo de los segmentos \overline{JE} y \overline{EI} que forman el cuadrado de corte.
Ubicación de coordenadas E, F, G, H de los vértices de un rectángulo dinámico.	Repetición de los puntos anteriores para las tres esquinas restantes.
Localización de al menos una coordenada en la vista 3D (esquinas de la caja que formarán su altura).	
Construcción de la caja vinculada al deslizador.	
Generación de un texto dinámico que muestre el volumen en tiempo real de la caja.	

Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Base de la caja rectangular indicando los cuadrados de corte y las pestañas de doblar.

Fuente: Elaboración propia.

Para analizar el trabajo de los estudiantes en esta fase de orientación, se elaboró un instrumento de recolección de evidencias que identifica la relación del concepto matemático con la herramienta de GeoGebra utilizada y su objetivo de uso (Tabla 2). En el caso de que el estudiante logre de manera autónoma o con alguna explicación breve del profesor, la

identificación y relación de cada concepto matemático con alguna herramienta de GeoGebra que lo represente, se dirá que el estudiante desarrolló una comprensión del problema inicial. En caso contrario, se dirá que el estudiante no logró una comprensión de la situación inicial. El instrumento toma en cuenta sólo los pasos esenciales para la construcción de la caja.

Tabla 2. Instrumento de recolección de evidencias para la fase de orientación.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Objetivo de su uso representado mediante una construcción en GeoGebra	Concepto matemático
1	Herramienta de polígono.	Construcción del rectángulo fijo.	Rectángulo de 10x6 unidades.
2	Deslizador definido en un intervalo.	Determinar la longitud de los lados del cuadrado de corte.	Variable y su dominio.
3	Punto, vista 2D generado desde la barra de entrada y vinculado al deslizador.	Generación de coordenadas dinámicas de las esquinas del rectángulo dinámico en \mathbb{R}^2 .	Coordenadas en \mathbb{R}^2 .
4	Punto, vista 3D generado desde la barra de entrada y vinculado al deslizador.	Construcción de coordenadas dinámicas en \mathbb{R}^3 .	Coordenadas en \mathbb{R}^3 .
5	Herramienta polígono o herramienta prisma.	Construcción de las paredes para formar la caja en \mathbb{R}^3 . Generación directa del prisma.	Prisma rectangular
6	Variable y un texto vinculado a esta.	La variable guarda el valor del volumen y el texto vinculado a la variable lo muestra.	Fórmula del volumen de un prisma rectangular.

Fuente: Elaboración propia.

Segunda sesión

Fase 2. Conexión.

Los estudiantes trabajaron en dos equipos de forma remota vía Zoom. En esta sesión se les solicitó compartir sus soluciones al problema inicial, Tarea 2 (T2), y formular por equipo al menos dos conjeturas a partir del problema inicial, Tarea 3 (T3).

Aunque se dio seguimiento a los seis estudiantes, el foco de esta investigación está en el trabajo del equipo P integrado por los estudiantes D, F y J, cuyos procesos para llegar a la solución del problema inicial, a diferencia del resto del grupo, presentaron variantes en sus desarrollos algebraicos y en sus construcciones en GeoGebra.

Se diseñó un instrumento (Tabla 3) para documentar los conceptos matemáticos identificados en el problema inicial, los que relacionan con su actividad, las conexiones que identifican con otros temas para la formulación de un nuevo problema a partir del problema inicial y las conjeturas generadas en este nuevo contexto.

Tabla 3. Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas para nuevos problemas.

Identificación de conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos y reformulación de problemas	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas

Fuente: Elaboración propia.

Esta fase de conexión se considera exitosa si el equipo presenta al menos dos esbozos de nuevos problemas relacionados con el inicial, y conjeturas sobre estos. En caso contrario, se dirá que los estudiantes no tuvieron éxito en esta fase. La razón de pedir al menos dos problemas se debe a que es probable que en uno de ellos cambien las dimensiones del rectángulo, lo cual no da evidencia de nuevas conexiones o relaciones con otros conceptos matemáticos, por lo que se espera que en el segundo se cuente con más información.

Fase 3. Generación.

Esta fase implica que los estudiantes externalizan las conexiones potenciales realizadas (conscientes o inconscientes) en la fase anterior. Es decir, la generación es un proceso cognitivo que implica creatividad y el surgimiento de ideas para la creación de nuevos problemas. Aquí pueden realizar variaciones del problema inicial o proponer nuevos problemas vagamente relacionados con este; también, se pueden probar las conjeturas de la fase anterior para ver si se cumplen o no, aunque el modelo no exige que se resuelvan los problemas formulados. Para fines de esta investigación, se acordó que el equipo tendría que resolver los problemas que formulara. De modo que, esta fase se considera exitosa si el equipo formula y resuelve al menos dos problemas a partir del problema inicial. El análisis de esta fase se realizó a partir de los protocolos de construcción de GeoGebra.

Fase 4. Reflexión.

En esta fase se revisa y evalúa el proceso de formulación de nuevos problemas a partir del problema inicial, se reflexiona sobre lo que se ha aprendido, mediante un proceso metacognitivo que incluye el monitoreo de lo que se hizo durante el proceso de

formulación del problema (Erkan y Kar, 2022). Para el análisis de esta fase se elaboró un instrumento (Tabla 4).

Tabla 4. Instrumento de análisis.

Estrategias en la formulación y la resolución de problemas	Conceptos identificados en la formulación de problemas	Refinamiento de los problemas y conjeturas

Fuente: Elaboración propia.

Instrumentos de recolección de datos

- Instrumento de recolección de evidencias (Tabla 2).
- Preguntas y notas realizadas por los investigadores.
- Protocolos de construcción de GeoGebra sobre el problema inicial y los nuevos problemas.
- Archivo digital de la grabación de la segunda sesión.
- Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas en nuevos problemas (Tabla 3).
- Instrumento de análisis (Tabla 4).
- Entrevistas semiestructuradas a los participantes.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Fase 1. Orientación

Los participantes contaban con poca o nula experiencia en el uso de GeoGebra, por lo que se les proporcionó un vídeo (J.G. Herrera, comunicación personal, 17 de septiembre de 2024) en donde se les mostró cómo utilizar algunas herramientas básicas: crear puntos, deslizadores, polígonos, acceder a propiedades de los objetos, entre otras, que se consideraron necesarias para simular la situación inicial.

Aunque el video les ayudó a familiarizarse con el ambiente de GeoGebra, esto no fue suficiente para que los participantes logran establecer la relación de una variable con un deslizador (Paso 2 de la Tabla 2); tampoco lograron vincular el deslizador con las coordenadas del rectángulo dinámico (Paso 3 de la Tabla 2), por lo que, el profesor intervino para apoyarlos como se muestra en las siguientes interacciones:

- Profesor:** ¿Les costó trabajo pasar de lo matemático al ambiente de GeoGebra? O sea, ¿cómo identificar los elementos matemáticos en GeoGebra? Por ejemplo, la variable... ¿cómo se interpretó eso?
- Estudiante S:** ¿Esa asociación? A mí sí, un poco. No supe como relacionar el deslizador.
- Estudiante F:** No me hacía sentido la relación del deslizador y la variable y las coordenadas. No estamos familiarizados con el sistema.
- Estudiante J:** Sí, no se me ocurrió cómo.

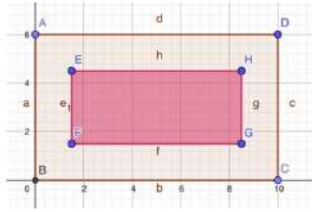
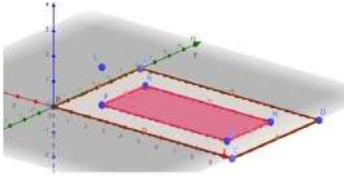
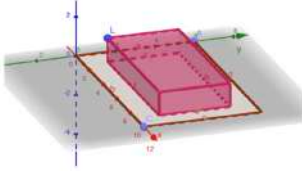
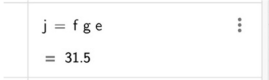
Después de la intervención del profesor, los seis estudiantes lograron realizar los pasos para llegar a la solución del problema inicial. En los protocolos de construcción de cada estudiante fue posible identificar conceptos matemáticos aludidos y las herramientas de GeoGebra utilizadas para llegar al resultado solicitado.

A continuación, se muestra parte de los protocolos de los estudiantes D, F y de la estudiante J, cuyos procesos, como se mencionó previamente, presentaron variantes en sus desarrollos algebraicos y en sus construcciones.

Estudiante D:

El protocolo de construcción del estudiante D cumplió todos los pasos del instrumento de recolección de evidencias (Tabla 2), se muestran los más importantes (Tabla 5).

Tabla 5. Protocolo de construcción del estudiante D.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
3	Creación de puntos dinámicos: $H = (d-e, c-e)$, $E = (e, a-e)$ $G = (b-e, e)$ $F = (e, e)$ Generación de polígono dinámico ` E, F, G, H		Coordenadas en 2D y rectángulo inscrito en rectángulo inicial
4	Generación del punto dinámico en vista 3D $L = (e, e, e)$		Coordenada en 3D
5	Creación de prisma dinámico (F, G, H, E, L)		Prisma rectangular
6	Generación de la variable j que guarda el valor del volumen en un texto dinámico		Volumen del prisma: $j = f \cdot g \cdot e$

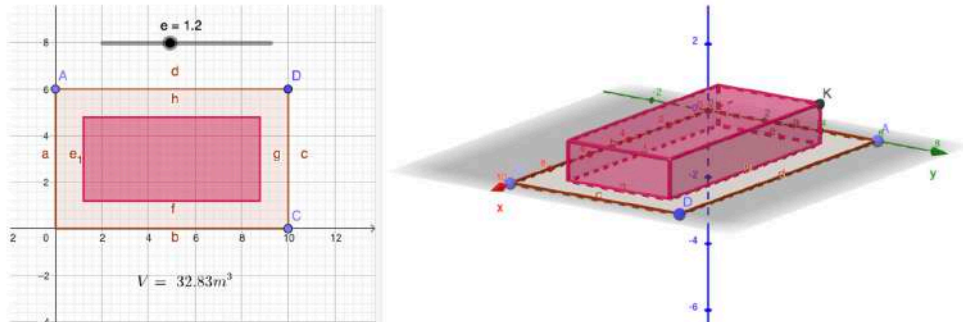
Fuente: Elaboración propia.

El estudiante D se centró más en las herramientas de GeoGebra que en los elementos matemáticos involucrados. Por ejemplo, para calcular la coordenada dinámica H (Paso 3), utilizó los segmentos d y c cuya longitud es asignada de manera automática por el sistema, a diferencia de sus compañeros que escribieron las coordenadas en términos de la medida de los lados del rectángulo inicial y el valor del deslizador. De forma similar, utilizó los valores de los segmentos f , g y e para calcular el volumen del prisma (Paso 6) como el producto $f \cdot$

$g \cdot e$, en lugar de buscar la representación algebraica $v = (10-2e)(6-2e)e$ como otros de sus compañeros.

Para generar la caja, el estudiante D sólo calculó las coordenadas del vértice principal (e,e,e) en \mathbb{R}^3 y utilizó la herramienta prisma para generar el prisma rectangular, esto es, no calculó las cuatro coordenadas que formarían la altura de la caja y las paredes correspondientes. El volumen máximo de la caja obtenido fue $v = 32.83 \text{ cm}^3$, con cortes de 1.2 cm (Figura 3).

Figura 3. Construcción final del estudiante D.

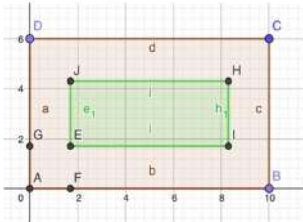
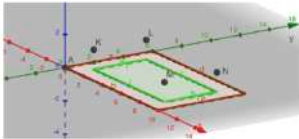
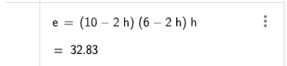


Fuente: Elaboración propia.

Estudiante F:

El estudiante F (Tabla 6), dio prioridad a las relaciones y cálculos algebraicos para determinar las coordenadas 2D, 3D y el volumen del prisma rectangular (pasos 3, 4, 5 y 6). Esto es, tomando como variable al deslizador h , calculó la longitud de los lados del rectángulo dinámico (verde), determinó las coordenadas de los puntos del rectángulo dinámico y el volumen de la caja. Las herramientas de GeoGebra ayudaron para que visualizaran la construcción de la caja y verificaran que los cálculos realizados con lápiz y papel fueran correctos.

Tabla 6. Protocolo de construcción del estudiante F.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
3	Creación de puntos dinámicos: $H = (10 - h, 6 - h)$ $I = (10 - h, h)$ $J = (h, 6 - h)$ Generación de polígono dinámico J, H, I, E		Coordenadas en 2D y rectángulo inscrito en rectángulo inicial
4	Generación de los puntos dinámicos en vista 3D: $K = (h, h, h)$ $L = (h, 6 - h, h)$ $M = (10 - h, h, h)$ $N = (10 - h, 6 - h, h)$		Coordenadas en 3D
6	Generación de la variable e para guardar el valor del volumen		Volumen del prisma

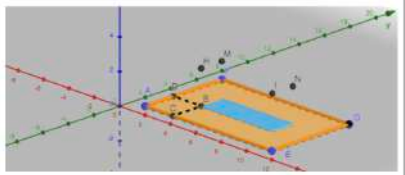
Fuente: Elaboración propia.

En el paso 3, el estudiante F realizó los pasos opcionales de creación de los puntos dinámicos del cuadrado de corte de la esquina inferior izquierda, puntos $F = (h, 0)$ y $G = (0, h)$.

Estudiante J:

La estudiante J (Tabla 7), a diferencia de D y F, ubicó un rectángulo base (amarillo) en el primer cuadrante del plano y con todos sus vértices fuera del origen.

Tabla 7. Protocolo de construcción de la estudiante J.

Paso	Protocolo de construcción	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
4	Generación de los puntos dinámicos en la vista 3D: $H = (1 + b, 1 + b, b)$ $I = (11 - b, 1 + b, b)$ $M = (1 + b, 7 - b, b)$ $N = (11 - b, 7 - b, b)$		Coordenadas en 3D

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que el estudiante F, la estudiante J se centró más en las relaciones o cálculos matemáticos; sus protocolos fueron idénticos. Sin embargo, mover la ubicación del rectángulo base del origen le generó una dificultad mayor, esto no fue obstáculo para que la estudiante lograra llegar al resultado solicitado.

Fase 2. Conexión

En esta fase comenzó el trabajo en equipo de las tareas T2 y T3. Mediante un análisis retrospectivo el equipo P formado por los estudiantes D, F y J, identificaron los conceptos matemáticos que intervinieron en la resolución del problema inicial y que se relacionaban con los contenidos del curso de cálculo. Además identificaron conceptos como el de ecuación cuadrática y cúbica en sus cálculos algebraicos, o conceptos como el de dominio, variable y rango al modelar la función a optimizar, entre otros. Formularon un par de conjeturas y esbozaron dos nuevos problemas a partir de la inicial. Posteriormente, discutieron posibles relaciones y conexiones de los conceptos identificados con los problemas formulados en T3, y en algunos casos evidenciaron la necesidad de integrar conceptos no considerados hasta el momento, a saber, las fórmulas del área del círculo y del volumen del cilindro, como se presenta en la Tabla 8.

Tabla 8. Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas para nuevos problemas.

Conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas
Dominio de la variable	Dominios de las nuevas variables	Si el rectángulo inicial se cambia a un cuadrado entonces el volumen máximo del prisma generado será el del cubo
Rango de una función	Rango de una función	Si metemos un cilindro en el prisma, el volumen máximo del cilindro se alcanza en el momento en el que el prisma alcanza su volumen máximo. En este caso el prisma será un cubo

Conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas
Área de un rectángulo y volumen de un prisma rectangular	Área de un cuadrado, de un círculo, volumen de un cilindro y de un cubo	
Concepto de función	Optimización de funciones	
Máximos y mínimos de funciones	Valores máximos y mínimos de las nuevas funciones	
Números positivos	Nuevos cálculos algebraicos	
Derivadas y ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas		

Fuente: Elaboración propia.

En la primera conjetura, consideraron que las dimensiones del cuadrado base serían de 8×8 , y que la función a optimizar era $v(e) = (8 - 2e)^3$, donde, “ e ” representa el deslizador o variable de corte. En la segunda, dedujeron que las dimensiones del cilindro requerido contenido en el prisma serían heredadas del cubo de volumen máximo, esto es, el radio del cilindro sería la mitad del lado del cuadrado base que generará el prisma de volumen máximo.

Fase de generación

Esta fase implica la externalización de nuevos problemas que son compartidos entre los equipos (Figura 4).

Figura 4. Primer problema del equipo P.

Construir una caja de base cuadrada sin tapa a partir de una lámina de cartón de 8×8 cm recortando un cuadrado en cada esquina y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado de corte para que la caja formada tenga un volumen máximo?

Fuente: Elaboración propia.

En esta fase las ideas que no han sido expresadas de manera consciente pueden revelarse como ocurrió con el equipo P en el segundo problema, en donde se propusieron investigar sobre el espacio libre contenido entre el prisma y el cilindro (Figura 5).

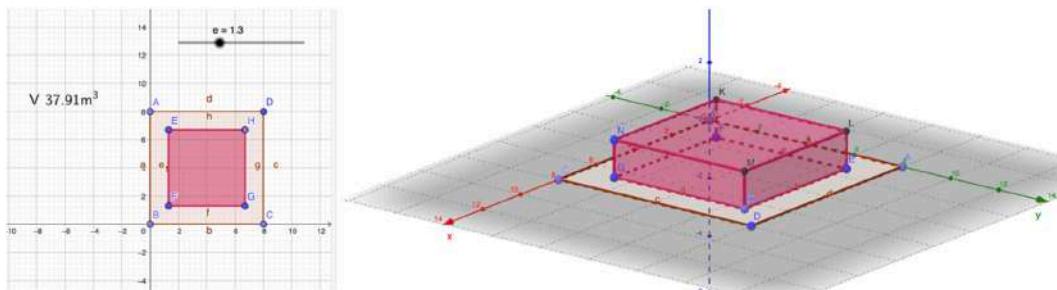
Figura 5. Segundo problema del equipo P.

Calcular es el volumen máximo posible del cilindro, estando este contenido dentro del prisma del problema anterior [el de volumen máximo], de tal manera que queremos obtener el mínimo volumen libre que queda o que sobra dentro de la caja.

Fuente: Elaboración propia.

Para analizar la resolución de los problemas formulados, se revisaron los protocolos de construcción. El equipo P realizó una distribución de tareas, dos de los integrantes realizaron los cálculos algebraicos en papel, mientras que el otro integrante la simulación en GeoGebra. La formulación del primer problema y su conjetura los condujo a la optimización de la función $v(e) = (8 - 2e)^3$. Al usar derivadas, llegaron a la solución única de $e = 4$, al relacionar que e representaba el valor de corte, identificaron que con ese resultado el volumen generado era 0, y el cubo desaparecía en el sistema de geometría dinámica. Esto los llevó a reconocer que la función $v(e) = (8 - 2e)^3$ no era la que debían optimizar, sino $v(e) = (8 - 2e)^2 (e)$. Al usar derivadas obtuvieron que el volumen máximo se obtendría con un valor de $e = 4$ o $e = 4/3 \approx 1.3$, seleccionaron el valor $e \approx 1.3$, y con este obtuvieron un volumen máximo de 37.9 u^3 (Figura 6).

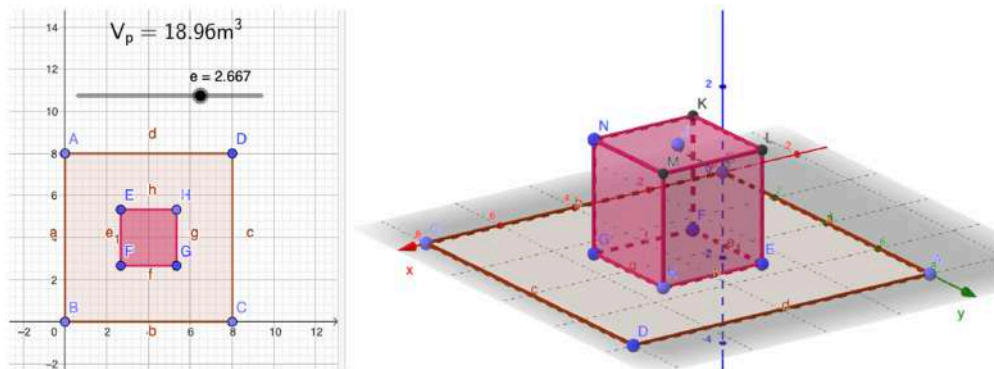
Figura 6. Resultado del primer problema formulado del equipo P.



Fuente: Elaboración propia.

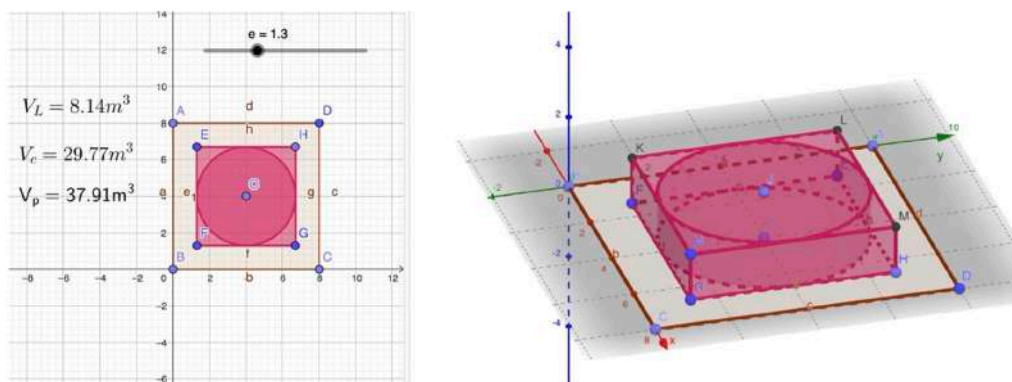
El problema que propusieron está dado en centímetros (cm) en su animación escribieron metros (m). Por lo que se consideró hacer referencia a este dato simplemente como unidades cúbicas.

En seguida regresaron a la simulación y movieron el deslizador hasta generar un cubo (Figura 7), al lograrlo se percataron de que el volumen de esta figura era de 18.96 u^3 , y que este correspondía a un corte de $e = 2.66$, de esta forma rechazaron la conjetura que habían realizado.

Figura 7. Resultado del primer problema formulado del equipo P.

Fuente: Elaboración propia.

Respecto al segundo problema formulado, la construcción del equipo P incorporó dos conceptos matemáticos adicionales, el de área del círculo y volumen del cilindro. El equipo se dio cuenta de que ya no era necesario optimizar una nueva función, ocuparon la información del primer problema formulado, esto es, calcularon el volumen máximo del cilindro contenido del prisma de volumen máximo. De esta manera, como el corte encontrado fue de $1.3 u$, el radio del círculo correspondió a $4 - 1.3 = 2.7 u$. Por lo tanto, el área del círculo obtenido fue de $22.9 u^2$ y el volumen del cilindro de $29.77 u^3$. Los espacios vacíos fueron calculados al restar ambos volúmenes máximos. El equipo elaboró la construcción del cilindro en GeoGebra, comparó y verificó los cálculos anteriores. En la Figura 8 se muestra el resultado final del problema del cilindro, en donde V_p representa el volumen máximo del prisma de base cuadrada, V_c el del cilindro máximo y V_L la solución del problema, es decir, los espacios vacíos entre el prisma y el cilindro.

Figura 8. Cilindro de volumen máximo inscrito en el prisma de volumen máximo.

Fuente: Elaboración propia.

Fase de reflexión

En esta fase, se revisa y se evalúa el proceso de formulación de los problemas. Para analizar esta fase, se llevó a cabo un análisis general sobre el trabajo de los estudiantes cuando transitan por las fases previas. Adicionalmente, se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con el equipo P para complementar la información obtenida en las fases anteriores y triangularla con la de esta fase. El profesor inició con una pregunta para conocer sobre la motivación de los estudiantes.

Profesor: ¿Qué les pareció esta experiencia? ¿Cómo se sintieron?

Estudiante F: A mí me pareció muy interesante y me gustó mucho porque, los problemas de optimización me llaman mucho la atención. La sinergia que hicimos en las llamadas estuvo muy bien porque D estaba compartiendo la pantalla y haciendo los procesos en GeoGebra, y J y yo estábamos revisando las cuentas [...] y al final pudimos ver que sí el resultado nos daba conforme D iba haciéndolo en GeoGebra.

Posteriormente los estudiantes mencionaron los conceptos evocados durante el proceso de resolución. También se identificó que el estudiante F inició su trabajo con lápiz y papel a diferencia de D, quién desde un inicio trabajó en GeoGebra y exploró las herramientas que le brindaba.

Profesor: ¿Qué sabían? ¿Qué aprendieron?

Estudiante J: Yo sabía un poco. Cosas con derivadas y eso.

Estudiante F: Bueno, yo de GeoGebra, como tal, no tenía mucho conocimiento, pero de lo que sí tenía idea es de cómo hacer los problemas de optimización en papel. En este caso teníamos que dar la fórmula del volumen, y ya con esa fórmula derivarla, y obtener la x . Y bueno [...] pues ya nos pusimos a pensar cómo podríamos expresar el lado, y bueno, es el lado menos dos equis, que serían los dobleces, ¿no? Y ya con eso, entonces, fue aplicar la fórmula y ponerla con la altura.

Profesor: ¿Les pareció complicado el problema inicial?

Estudiante D: Más que complicado, interesante por el cambio, porque mientras F iba trabajando más la parte de papel junto con J, yo me concentré más en aprender cómo era la construcción y cómo variaba la figura según la coordenada que le pusieras a los puntos en función del deslizador. Y sí, me pareció interesante.

Respecto a la formulación del primer problema los estudiantes decidieron modificar la forma de la base de la caja, cambiaron de un prisma de base rectangular a uno de base cuadrada. Esto los llevó a plantear una conjetura: que el volumen máximo se obtenía al formar un cubo, esta conjetura fue desechada a partir del proceso algebraico realizado y de las exploraciones realizadas en GeoGebra.

Profesor: ¿Cómo se les ocurrió formular los problemas? ¿Qué sucedió con sus conjeturas?

- Estudiante F:** Bueno, para el primero, tal cual dijimos, si tenemos una base rectangular, pensamos en si se podía escalar el problema hacia otras formas, y dijimos, ah, bueno, pues mira, intentémoslo con el cuadrado, a ver cómo resulta eso. Y luego probamos con otra forma, que ya fue el cilindro, y entonces dijimos, ah, bueno, si quisiera yo meter este cilindro en el prisma de base cuadrada, ¿qué medida tendría que tener? Y, pues, ¿cuál sería el volumen de los espacios que me van a quedar libres, no? Y pues fue así.
- Profesor:** Platíqueme sobre sus conjeturas que formularon.
- Estudiante J:** Bueno, el primer problema lo hicimos con base cuadrada y, entonces, pues habíamos pensado que la solución era un cubo, pero, nos dimos cuenta de que no, de que en realidad no sino que tenía que ser un prisma rectangular para poder ser optimizado de la manera que lo buscábamos.
- Profesor:** ¿Cómo se dieron cuenta de que un cubo no era la solución?
- Estudiante F:** Al variar la altura, como tal, porque si le dejamos la misma altura para hacer el cubo, pues, no quedaba. O sea, si pones los lados y la altura igual $(8 - 2e)(8 - 2e)(8 - 2e)$, como que no te va a dar, la figura desaparece.
- Profesor:** ¿Entonces les ayudó la visualización del problema en GeoGebra?
- Estudiante D:** Sí, la verdad es que sí bastante, porque estábamos viendo, pero no salía, se desaparece la figura, [...] entonces ya vimos, pero claro porque tiene que variar la altura que es justamente la variable del deslizador y entonces pues no es el lado $(8 - 2e)^3$, sino que es $(8 - 2e)^2$ por la e que es el deslizador, ya para así obtener la figura a optimizar.

Respecto a la formulación del segundo problema los estudiantes pensaron en un cilindro. Sus reformulaciones fueron evolucionando de la siguiente manera: “meter un cilindro en el prisma de base cuadrada” → “calcular el volumen máximo del cilindro contenido en la caja de base cuadrada” → “obtener el mínimo volumen libre que queda entre la caja y el cilindro de volumen máximo”. Esto los llevó a conjeturar lo siguiente: el diámetro del cilindro de volumen máximo es la longitud del lado de la base cuadrada del prisma de volumen máximo. Su conjetura fue verificada y validada satisfactoriamente.

- Profesor:** Y sobre el segundo problema ¿qué conjeturaron?
- Estudiante F:** ¿Cómo sabemos cuál es el radio del cilindro? Es simple, nuestro radio será la mitad del diámetro y nuestro diámetro, como está contenido en el prisma, debe ser el lado que tenemos de nuestro prisma, esto es $8 - 2e$, de manera que la mitad de ello sería $4 - e$, este será nuestro radio. Sabemos que e , en la forma máxima de corte, es de 1.3, con lo que obtuvimos el volumen máximo de la caja.
- Profesor:** Sobre los conceptos que manejaron ¿qué relaciones y conexiones hicieron? ¿Qué información o conceptos necesitaron?
- Estudiante F:** Siempre había un dominio donde tenía sentido el problema, ¿no? porque si nos extendíamos del dominio, tal cual desaparecía la caja, dependiendo del problema, vamos a tener un dominio, ¿cómo decirlo? restringido, ¿no?
- Estudiante D:** Pues los dominios y rangos también. Valores máximos, y máximo de un dominio, fórmulas de áreas y volúmenes, ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

- Profesor:** ¿Con qué otros conceptos?
- Estudiante J:** Pues yo pensé en las funciones, respecto a cómo varían y de cómo podemos restringir unas funciones o tomar solo los valores tales que nos funcionen, como en este caso, los números positivos.

De la entrevista y de los protocolos de construcción de los estudiantes se infieren las relaciones y conexiones de conceptos con los problemas formulados y el inicial, sus conjeturas, cómo fueron refinando sus formulaciones y sus reflexiones. Asimismo, se pueden inferir las estrategias que utilizaron para la formulación y resolución de problemas, por ejemplo, en la formulación: escalar el problema inicial hacia otras formas (cuadrado, círculo, cubo y cilindro), y en la resolución: aplicación de derivadas y teoría de máximos y mínimos, o la comparación de cálculos algebraicos en papel con los cálculos de GeoGebra, o la comparación de los volúmenes generados por la animación en GeoGebra para determinar el volumen máximo.

El equipo P logró transitar por cada una de las cuatro fases del modelo de Cai y Rott (2023) de manera exitosa, logró formular al menos dos problemas a partir del problema inicial y encontrar las soluciones correctas.

DISCUSIÓN

Esta investigación se centró en los hábitos de pensamiento matemático que desarrollan los estudiantes al resolver problemas de optimización utilizando GeoGebra. Aunque al principio los estudiantes enfrentaron dificultades iniciales con GeoGebra, lograron formular y resolver nuevos problemas a partir del problema inicial de optimización. Algunas de las dificultades encontradas fueron: poca o nula familiaridad con el uso de GeoGebra, lo que les dificultó el poder relacionar sus herramientas con elementos matemáticos, como la asociación de una variable con un deslizador, y la vinculación de un deslizador con una coordenada dinámica. La intervención del profesor permitió superar las dificultades.

Los datos mostraron que, los hábitos de pensamiento matemático emergen durante la resolución y la formulación de problemas. El principio de problematización contribuyó para desarrollar hábitos como analizar un problema con diferentes enfoques y formular conjeturas; actividades centrales en el aprendizaje de las matemáticas que actuaron como catalizadores para el desarrollo de hábitos de pensamiento matemático.

Los resultados también muestran la importancia de las tecnologías digitales en el desarrollo de hábitos de pensamiento matemático. La experiencia con la implementación de la tecnología digital fomentó un aprendizaje activo, que se observó cuando los estudiantes buscaron diversas maneras de abordar un problema, modificarlo y encontrar los argumentos que sustentaban sus soluciones de manera analítica y en GeoGebra, mediante la comparación y verificación con simulaciones en tiempo real, éste puede considerarse también un hábito de pensamiento.

Por otra parte, respecto a la comprensión de los procesos de formulación de problemas, si bien Cai y Rott (2023) señalan que, la comprensión de los procesos de formulación de problemas se encuentra en una etapa temprana, es decir, se está lejos de comprender los procesos de formulación de problemas, en esta investigación se contribuye proporcionando algunas estrategias que pudieran ser útiles para fomentar la formulación de nuevos problemas, por ejemplo:

- 1) Incorporación de herramientas tecnológicas.
- 2) Intervenciones del profesor con preguntas orientadoras que ayuden a los estudiantes a reflexionar sobre las relaciones entre conceptos matemáticos y la tecnología digital elegida.
- 3) Utilizar el modelo del proceso de formulación de problemas de Cai y Rott (2008) para el diseño de actividades.
- 4) Análisis de protocolos de construcción del sistema de geometría dinámica para observar y analizar la evolución del pensamiento matemático del estudiante.
- 5) Tareas o actividades matemáticas como lo sugieren Borwein y Bailey (2008), esto es, diseñadas para ser trabajadas en un sistema de geometría dinámica, que involucren la exploración con deslizadores, descubrimiento de relaciones matemáticas, comprobación y refutación de conjeturas, comparación entre los cálculos en lápiz y papel con los realizados con una tecnología digital.

Dentro de las limitaciones de este estudio se puede decir que, aplicar estas estrategias a grupos numerosos puede resultar complicado, pues los estudiantes requieren apoyo adicional para el uso de herramientas tecnológicas, y el profesor o investigador interesado requerirá de tiempo suficiente para la revisión de protocolos de construcción o para analizar las diversas conjeturas que elaboren los estudiantes, por ejemplo, en nuestro caso, el estudiante D relacionó la solución del problema del cilindro inscrito en el prisma de volumen máximo con un problema de composición de funciones, el cual ya no fue analizado.

En investigaciones futuras, se podrían seguir este tipo de estrategias para la formulación y resolución de problemas en temas complejos como las parametrizaciones en 3D, y comparar el modelo de Cai y Rott (2023) con otros modelos disponibles.

CONCLUSIONES

El modelo del proceso de formulación de problemas propuesto por Cai y Rott (2023) permitió identificar hábitos de pensamiento matemático en los estudiantes participantes; 1) buscar formas distintas de modelar y explorar los problemas, como se evidencia en las Tablas 5, 6 y 7; 2) formular conjeturas y buscar argumentos que las respalden o refuten (Tabla 8 y desarrollo de la fase de generación); 3) la defensa de ideas que se manifiesta en las entrevistas; y 4) el desarrollo de un lenguaje adecuado para comunicar los resultados, que se observa en las entrevistas y en las simulaciones de los problemas formulados por los estudiantes.

Por otra parte, las evidencias recabadas de los protocolos de construcción en GeoGebra, permiten también identificar actividades matemáticas propuestas por Borwein y Bailey (2003) que se derivan de formas de uso de las tecnologías, como: a) obtener ideas como cuando exploraron con el deslizador nuevas formas para el prisma generado en el problema inicial que pudo motivar el considerar un cubo o un cilindro; b) descubrir relaciones como el valor del radio del cilindro en términos de la medida del lado del prisma de base cuadrada; c) probar y verificar conjeturas como cuando refutaron que el volumen máximo se obtenía al formar un cubo; d) reemplazar cálculos extensos por otros realizados con las tecnologías digitales como se evidencia en la Figura 7, cuando mediante el deslizador refutaron su conjetura, o bien cuando obtienen el volumen del cilindro aludiendo a los valores

obtenidos en las variables previamente (Figura 8); y h) confirmar resultados obtenidos analíticamente, como cuando compararon los resultados obtenidos mediante un procedimiento analítico y la exploración en GeoGebra.

REFERENCIAS

- Borwein, J. y Bailey, D. (2008). *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st Century*. AK Peters/CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b10704>
- Cai, J. y Rott, B. (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 61–71. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- Erkan, B. y Kar, T. (2022). Pre-service mathematics teachers' problem-formulation processes: Development of the revised active learning framework. *The journal of mathematical behavior*, 65. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100918>
- Koichu, B. (2014). Reflections on Problem-solving. Problem Solving in Mathematics and in Mathematics Education. En M. N. Fried y T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp: 113–135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_8
- Lester, F. K. Jr. (1994). Musing about mathematical problem-solving research: 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660–675.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>.
- Santos-Trigo, M. (2023). Trends and developments of mathematical problem-solving research to update and support the use of digital technologies in post-confinement learning spaces. En T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 7–32). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 211–222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Sidenvall, J. (2019). Literature review of mathematics teaching design for problem solving and reasoning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24 (1), 51–74.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Cengage Learning Editores.
- Toh, T. L., Santos-Trigo, M., Chua, P. H., Abdullah, N. A., y Zhang, D. (2023). Problem posing and problem solving in mathematics education: International research and practice trends. En T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 1–5). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). NC: Infoage.



SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE FATORAÇÃO ALGÉBRICA: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADO POR ESTUDANTES BRASILEIROS DO 8º ANO

FLIPPED CLASSROOM EN LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA: UN ESTUDIO SOBRE EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EVIDENCIADO POR ESTUDIANTES BRASILEÑOS DE 8º GRADO

Vilmar Gomes da Fonseca¹

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3313-9485>

Matheus de Carvalho Terra²

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-7214-7124>

RESUMO

O desenvolvimento do pensamento algébrico é um dos principais objetivos do ensino da álgebra. Este artigo busca compreender o pensamento algébrico evidenciado por estudantes brasileiros do 8º ano do Ensino Fundamental, sobre a fatoração algébrica. O estudo teve por base uma experiência de ensino híbrido, utilizando a metodologia de sala de aula invertida, composta por um processo cíclico de atividades instrucionais, exploratórias e avaliativas, integrando tecnologias digitais e um jogo didático. Busca-se, ainda, compreender o impacto da sala de aula invertida no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. A coleta de dados incluiu a gravação em áudio das aulas e as produções escritas e digitais dos estudantes na resolução das tarefas, sendo analisados qualitativamente, considerando dois elementos, referidos na literatura, como vertentes do pensamento algébrico: representar e raciocinar. De modo geral, os estudantes foram capazes de interpretar expressões fatoradas, destacando os fatores comuns ou representando o valor algébrico das raízes quadradas dos termos quadráticos. Além disso, demonstraram a habilidade de mobilizar adequadamente processos de raciocínio matemático, como classificação, comparação e justificação, ao aplicarem as técnicas de fatoração por agrupamento e por diferença de quadrados. Evidenciam-se algumas dificuldades, especialmente na generalização da técnica de fatoração por agrupamento. Ao final, retiramos algumas implicações educacionais desses resultados.

1 Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PROPEC), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 26530-060. vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

2 Pós-graduação Lato Sensu (Especialização) em Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 26530-060. matheuscterra@gmail.com



Palabras clave: Pensamento algébrico, Fatoração algébrica, Sala de aula invertida, Raciocínio matemático.

RESUMEN

El desarrollo del pensamiento algebraico es uno de los principales objetivos de la enseñanza del álgebra. Este artículo busca comprender el pensamiento algebraico evidenciado por estudiantes brasileños de 8° grado de la Educación Básica, sobre la factorización algebraica. El estudio se basó en una experiencia de enseñanza híbrida utilizando la metodología flipped classroom, consistente en un proceso cíclico de actividades instructivas, exploratorias y evaluativas, integrando tecnologías digitales y juego didáctico. El objetivo es también comprender el impacto de la flipped classroom en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. La recolección de datos incluyó grabaciones de audio de las clases y las producciones escritas y digitales de los estudiantes al resolver las tareas, que fueron analizadas cualitativamente, considerando dos elementos referidos en la literatura como aspectos del pensamiento algebraico: representar y razonar. En general, los alumnos fueron capaces de interpretar expresiones factorizadas, destacando factores comunes o representando el valor algebraico de las raíces cuadradas de términos cuadráticos. Además, demostraron ser capaces de movilizar adecuadamente procesos de razonamiento matemático, como la clasificación, la comparación y la justificación, al aplicar las técnicas de factorización por agrupamiento o por diferencia de cuadrados. Hubo algunas dificultades, especialmente en la generalización de la técnica de factorización por agrupamiento. Por último, extraemos algunas implicaciones educativas de estos resultados.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Factorización algebraica, Flipped classroom, Razonamiento matemático.

1. INTRODUÇÃO

A Álgebra é um dos principais ramos da Matemática e essencial para a compreensão de diversos conceitos matemáticos (NCTM, 2000). No ensino da Álgebra escolar, a literatura salienta a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, o qual é caracterizado por um conjunto de processos cognitivos que suportam a compreensão dos conceitos algébricos (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Chimoni et al., 2020; Godino et al., 2012; Ponte et al., 2009). Esses estudos sugerem que o pensamento algébrico seja estimulado através da interpretação e representação de registros algébricos e da exploração de processos de raciocínio matemático, como classificar, generalizar e justificar, para descrever situações e resolver problemas.

No entanto, pesquisas recentes indicam que os estudantes enfrentam dificuldades na aprendizagem da Álgebra na educação básica devido à natureza epistemológica abstrata dos conceitos algébricos e ao desenvolvimento inadequado do pensamento algébrico (e.g. Bianchini & Lima, 2021; Chimoni et al., 2020; Guadagnini et al., 2021). Esses estudos apontam que essa dificuldade é agravada pelo ensino inadequado, que se limita à exposição de conteúdos sem a interação dos estudantes e à repetição mecânica de procedimentos sem construção de significado e conexão com representações subjacentes. Há, por isso, uma necessidade urgente de investigar como melhorar as práticas didáticas no ensino da Álgebra e encontrar soluções para ajudar os estudantes a superar essas dificuldades.

Nesse contexto, Ponte et al., (2009) propõem que o ensino de conceitos algébricos deve focar em práticas didáticas que promovam a aprendizagem ativa e experiências significativas, desenvolvendo o pensamento algébrico. Estudos mostram que o ensino híbrido, com o uso da metodologia de sala de aula invertida, que combina atividades presenciais com uso de jogos e/ou tecnologias digitais é reconhecido por criar ambientes de aprendizagem inovadores e eficazes, potencializando o aprendizado dos estudantes sobre conceitos de álgebra (Bacich et al., 2015; Fonseca et al., 2023a).

Considerando que a metodologia de sala de aula invertida (termo em inglês: *flipped classroom*), quando bem planejada e implementada, pode gerar resultados muito positivos na aprendizagem de conceitos matemáticos pelos estudantes (Fonseca et al., 2023a), torna-se relevante realizar uma experiência de ensino visando promover a aprendizagem de fatoração algébrica entre estudantes do 8º ano de uma escola pública, no Brasil. Essa experiência baseou-se na implementação de duas aulas híbridas que incorporam essa metodologia.

Neste texto, apresentamos parte dos resultados de um estudo que busca compreender o pensamento algébrico evidenciado por esses estudantes sobre fatoração algébrica. Procuramos responder às seguintes questões: i) Como é que os estudantes interpretam e/ou representam expressões algébricas fatoradas?; ii) Que processos de raciocínios matemáticos são mobilizado pelos estudantes para fatorar expressões algébricas?

Este estudo pretende contribuir para a investigação sobre a aprendizagem da álgebra escolar, lançando luz sobre como descrever e analisar o pensamento algébrico com base em elementos que auxiliem os estudantes a aprimorá-lo, melhorando a compreensão dos conceitos algébricos, e como propostas didáticas que utilizam a sala de aula invertida podem apoiar o desenvolvimento desse pensamento.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Para o desenvolvimento deste trabalho, é essencial uma clara definição dos conceitos que serão abordados e analisados. Assim, nesta seção, serão aprofundados temas centrais, como a aprendizagem da fatoração algébrica, o pensamento algébrico relacionado à fatoração algébrica e a metodologia de sala de aula invertida no ensino de Matemática.

2.1 APRENDIZAGEM DE FATORAÇÃO ALGÉBRICA

A fatoração algébrica é um tema relevante nas orientações curriculares para o ensino de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental destinado a estudantes com idades entre 12 e 15 anos. Ela consiste na decomposição de uma expressão algébrica em um produto de fatores que, quando multiplicados, retornam à expressão original (Guadagnini et al., 2021). Entre os tipos de fatoração, destacam-se a fatoração por agrupamento, que é aplicada em expressões com dois ou mais termos, resultando uma forma fatorada que inclui os fatores comuns da expressão original; e a fatoração por diferença de quadrados, usadas em expressões da forma $a^2 - b^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, permitindo reescrevê-las como $(a + b)(a - b)$. As técnicas de fatorações são ferramentas importantes na simplificação de frações algébricas (Chevallard, 2023; Guadagnini & Dias, 2022).

O desenvolvimento de habilidades relacionadas à fatoração algébrica é fundamental na educação básica, pois estabelece uma base sólida para o aprendizado da matemática (Chevallard, 2023). Os estudantes devem, por exemplo, compreender os processos de fatoração em relação aos produtos notáveis, como assimilar que o quadrado da soma de dois termos $(a + b)^2$ corresponde a $a^2 + 2ab + b^2$, o que será útil ao estudo de funções racionais (Ponte et al., 2009). Além disso, é importante que saibam obter expressões equivalentes por meio de fatorações, aplicando essas técnicas na resolução de equações e no estudo de funções (NCTM, 2000).

Guadagnini e Dias (2022) destacam a importância de combinar diferentes tipos de fatoração, ou aplicar repetidamente o mesmo tipo de fatoração, ao simplificar uma expressão algébrica. Um exemplo disso é a fatoração da expressão $(x^3 - 4x) - 2(x - 2)$. Inicialmente,

utiliza-se a técnica de fatoração por agrupamento no binómio $x^3 - 4x$, reescrevendo-o como $x(x^2 - 4)$. Em seguida, aplica-se a técnica de fatoração por diferença de quadrados ao produto, resultando em $x(x - 2)(x + 2)$. Por fim, utiliza-se a fatoração por agrupamento na expressão $x(x - 2)(x + 2) - 2(x - 2)$, obtendo-se a forma fatorada da expressão $(x - 2)[x(x + 2) - 2]$.

Apesar da importância da fatoração algébrica no currículo da educação básica, a literatura aponta que os estudantes enfrentam dificuldades no aprendizado desse conceito. Entre as principais estão: i) a dificuldade em compreender a noção de fator comum; ii) fragilidade no reconhecimento e na generalização de padrões algébricos, como na aplicação de produtos notáveis; iii) a incapacidade de combinar diferentes tipos de fatoração para simplificar expressões algébricas; e iv) dificuldades na manipulação dos termos algébricos de uma expressão para aplicação do processo de fatoração (Chevallard, 2023; Guadagnini et al., 2021, NCTM, 2000).

Para ajudar os estudantes a superar essas dificuldades, a literatura destaca a importância de desenvolver o pensamento algébrico. Promover o desenvolvimento adequado desse pensamento pode contribuir para uma melhor compreensão da fatoração algébrica, além de facilitar a assimilação de conceitos correlatos, como equações fracionárias e funções racionais (Chevallard, 2023; Ponte et al., 2009).

2.2 O PENSAMENTO ALGÉBRICO ASSOCIADO À FATORAÇÃO ALGÉBRICA

O pensamento algébrico abrange os processos cognitivos que facilitam a compreensão dos conceitos algébricos. Isso inclui a interpretação de registros algébricos (símbolos e proposições), a generalização e a aplicação de conceitos algébricos para resolver problemas em diferentes contextos (Blanton & Kaput, 2005; Radford, 2010).

Esse pensamento se manifesta de várias formas, incluindo a aritmética generalizada, que usa conceitos aritméticos para fazer generalizações; o pensamento funcional, que generaliza padrões numéricos para descrever relações funcionais; a modelagem, que formaliza essas generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos (Chimoni et al., 2020). A literatura também reconhece que o ensino dos conceitos algébricos deve integrar duas vertentes do pensamento algébrico: *representar* e *raciocinar* (Ponte et al., 2009).

Nesse sentido, *representar* refere-se à capacidade de interpretar os registros algébricos e traduzí-los em diferentes representações. A interpretação de registros algébricos inclui saber ler, compreender e operar com símbolos algébricos e evidenciar o sentido do símbolo em diferentes contextos (Blanton & Kaput, 2005). Tem-se por exemplo, a atribuição de significados aos termos algébricos e a identificação de fatores comuns em expressões algébricas. Por outro lado, a tradução dos registros algébricos envolve a transformação desses registros em diferentes formas de representação. Isto inclui converter uma expressão algébrica em sua forma verbal ou gráfica e vice-versa, bem como transformar uma expressão fatorada em sua representação algébrica correspondente (Ponte et al., 2009).

A vertente *raciocinar* envolve a capacidade de fazer inferências justificadas, tanto dedutivas quanto indutivas, com base na relação e generalização de ideias matemáticas por meio de registros algébricos (Jeannotte & Kieran, 2017). A habilidade de raciocinar matematicamente é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e envolve processos de classificação, comparação, generalização e justificação (Chimoni et al., 2020; Ponte et al., 2009).

Nesse sentido, a *classificação* refere-se à capacidade de organizar e categorizar informações com base em critérios específicos, utilizando o pensamento lógico e a análise (Jeannotte & Kieran, 2017). Um exemplo disso é classificar uma expressão algébrica, como caso particular de um trinômio quadrado perfeito e, em seguida, aplicar a regra da soma ou diferença de quadrados para fatorá-la (Guadagnini & Dias, 2022). Por sua vez, a *comparação* refere-se ao processo de busca de semelhanças ou diferenças em objetos ou relações matemáticas (Jeannotte & Kieran, 2017). Tem-se por exemplo, comparar expressões algébricas com as identidades de produtos notáveis, visando fatorar e simplificar essas expressões (Guadagnini et al., 2021).

A *generalização* é frequentemente usada para estabelecer relações válidas para uma certa classe de objetos (Ponte et al., 2009). No contexto das expressões algébricas, isso envolve a generalização de padrões algébricos, expressa por meio de uma identidade algébrica (Guadagnini et al., 2021). A *Justificação* refere-se à capacidade de obter conclusões ou descobertas fundamentadas a partir de um processo lógico com base em premissas (Chimoni et al., 2020). Isso inclui validar ou refutar conjecturas usando argumentos lógicos, hipóteses, definições e propriedades algébricas como, por exemplo, justificar a fatoração de trinômio quadrado perfeito com base na aplicação da identidade de produto notável (Ponte et al., 2009).

Para alcançar uma compreensão adequada dos conceitos algébricos, é importante que os estudantes sejam submetidos a experiências didáticas que integrem esses dois aspectos do pensamento algébrico. Quando bem planejadas e executadas, essas experiências proporcionam aos estudantes oportunidades para desenvolver habilidades no uso de símbolos e proposições algébricas, essenciais para essa compreensão (Ponte et al., 2009).

2.3 A SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO MATEMÁTICA

A sala de aula invertida (*flipped classroom*) é uma metodologia de ensino híbrido que inverte a ordem das atividades tradicionais realizadas nas aulas (Bergmann & Sams, 2012). Em vez de estudar novos conteúdos durante a aula e deixar a prática para casa, os estudantes estudam o material em casa usando recursos como vídeos instrucionais, podcasts e leituras orientadas (Chen & Wu, 2015). O tempo de aula é então dedicado à discussão, aprofundamento e aplicação do conhecimento adquirido, por meio de atividades individuais e/ou em grupo (Lo et al., 2017).

Embora a metodologia da sala de aula invertida esteja em processo de adoção por professores, ela tem atraído a atenção de pesquisadores em educação matemática devido aos seus benefícios significativos (Fonseca et al., 2023b; Lo et al., 2017; Valente, 2014). Entre os principais benefícios estão: (i) maior interação e participação dos estudantes nas aulas, promovendo habilidades sociais e trabalho em equipe; (ii) melhor compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes; e (iii) maior satisfação com os materiais e métodos de ensino. Esses aspectos indicam que a sala de aula invertida tem o potencial de transformar o ensino tradicional de matemática, oferecendo uma experiência de aprendizagem mais ativa e envolvente em comparação com o ensino expositivo convencional.

No entanto, a implementação dessa abordagem enfrenta desafios importantes. Criar ou selecionar materiais adequados, como vídeos e leituras, pode ser trabalhoso, especialmente em escolas com recursos limitados ou onde o acesso a dispositivos e internet é restrito (Fonseca et al., 2023b). Além disso, a metodologia exige que os estudantes sejam mais autônomos em seu aprendizado, o que pode ser um desafio ao ser implementada em classes com um grande número de estudantes (Valente, 2014). A avaliação também é um ponto crítico, pois

métodos tradicionais podem não refletir com precisão o engajamento e a compreensão dos estudantes (Lo et al., 2017). Esses desafios ressaltam a necessidade de mais pesquisas para explorar as potencialidades da sala de aula invertida e aprimorar sua adoção.

Valente (2014) resalta que não há um modelo único de sala de aula invertida, as tarefas e recursos podem variar de acordo com o contexto e os objetivos educacionais. No entanto, segundo a Flipped Learning Network (2014), quatro aspectos são essenciais na construção da sala de aula invertida: (i) um ambiente de aprendizagem flexível que atenda às necessidades individuais dos estudantes, (ii) a instrução intencional com atividades interativas para o ensino do conteúdo, (iii) a aprendizagem ativa que promove a prática e aplicação do conhecimento; e (iv) o feedback imediato, que proporciona orientação dinâmica aos estudantes.

Um modelo de sala de aula invertida que se alinha a esses aspectos e é relevante para os objetivos deste estudo é apresentado por Fonseca et al. (2023b), detalhado na Figura 1. Este modelo, resultado de pesquisas realizadas, desde 2020, pelos membros do projeto ‘Techschool – Tecnologias na Escola e Formação de Professores’ (que inclui os autores deste artigo). O modelo propõe um processo cíclico composto por três atividades: Instrucional, Exploratória e Avaliativa.

Figura 1. Esquema do processo cíclico da sala de aula invertida.



Fonte: Fonseca et al. (2023b).

A atividade instrucional tem como objetivo fornecer aos estudantes o conteúdo a ser estudado antes da aula, em um local conveniente para eles. Nessa fase, a instrução é realizada por meio de recursos digitais como videoaulas e quizzes, focando na explicação e exemplificação do conteúdo. Isso prepara os estudantes para a atividade exploratória, realizada em sala de aula e com o apoio do professor, onde o conteúdo é aprofundado através de uma prática de ensino exploratório, contemplando a realização de tarefas que integram recursos didáticos manipuláveis e tecnologias digitais. A atividade avaliativa, por sua vez, avalia as aprendizagens dos estudantes por meio da resolução de tarefas que integram problemas.

O que distingue este modelo de outros descritos na literatura é seu caráter cíclico. O processo inicia-se com a definição dos objetivos de aprendizagem, que orientam as atividades instrucional, exploratória e avaliativa. Os materiais de ensino, tais como tarefas, quizzes,

videoaulas e testes, são desenvolvidos para ajudar os estudantes a atingirem esses objetivos. Assim, o caráter cíclico das três fases descritas torna-se evidente. É importante destacar que todas as etapas da sala de aula invertida devem estar alinhadas com os objetivos de aprendizagem previamente estabelecidos (Fonseca et al., 2023b).

3. METODOLOGIA DO ESTUDO

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011), foi realizado no segundo semestre de 2023. Tem por base uma experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000) constituída de uma sequência integrada de duas aulas híbridas, integrando a metodologia de sala de aula invertida, com o objetivo de promover a aprendizagem de estudantes do 8º ano (com idades entre 13 e 14 anos) de uma escola pública no Brasil sobre a fatoração algébrica. As aulas foram ministradas pelo segundo autor deste texto e os estudantes não possuíam conhecimentos prévios sobre a fatoração algébrica.

Cada aula híbrida considerou um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa (Fonseca et al., 2023b). Na atividade instrucional, os estudantes responderam um quiz sobre fatoraões algébricas, tendo eles que recorrer à visualização de vídeos explicativos sobre o assunto. Na atividade exploratória, os estudantes foram convidados a participar de um jogo didático, sempre interagindo com professor-investigador para orientação e esclarecimentos de dúvidas. Por fim na atividade avaliativa, os estudantes resolveram um teste contendo quatro itens avaliativo que visavam consolidar as aprendizagens trabalhadas nas atividades anteriores.

Neste texto focamo-nos na primeira aula híbrida da experiência de ensino que considerou os seguintes aspectos, referidos na literatura, como objetivos de aprendizagem de fatoração de expressão algébrica: (i) identificar termos comuns e termos quadráticos em expressões algébricas; (ii) associar uma expressão algébrica à sua forma fatorada e vice-versa; e (iii) aplicar técnicas de fatoração por agrupamento e por diferença de quadrados para simplificar expressões algébricas (Chevallard, 2023; Guadagnini et al., 2021, NCTM, 2000).

A recolha de dados compreendeu as três etapas de realização da aula híbrida. Incluiu a gravação em áudio e vídeo da aula dedicada à aplicação do jogo ‘Par Perfeito’, bem como as produções escritas e digitais dos estudantes durante a resolução das tarefas. A análise descritiva e interpretativa dos dados (Wolcott, 2009) foi realizada por meio da triangulação, com foco nos pensamentos algébricos evidenciados pelos estudantes sobre fatoração algébrica (Tabela 1).

Tabela 1. Categorias de análise do pensamento algébrico e respectivos descritores.

	DESCRIÇÃO
Representar	Representações usadas pelos estudantes para interpretar e/ou representar expressões algébricas no processo de sua fatoração
Raciocinar	Processos de raciocínios matemáticos usados pelos estudantes para fatorar expressões algébricas

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Para a análise, incluímos trechos dos trabalhos dos estudantes (nomes fictícios) e utilizamos as legendas $Q_n A_k$ para identificar a atividade e a respectiva questão. Por exemplo, $Q_2 A_E$ representa a questão 2 da atividade exploratória.

4. A AULA HÍBRIDA DESENVOLVIDA

A aula híbrida que suporta este estudo considerou um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa visando introduzir o estudo da fatoração algébrica. Implementada em novembro de 2023, essa aula híbrida seguiu três etapas:

1ª etapa: atividade instrucional – nesta etapa, os estudantes responderam a um quiz contendo quatro questões, de múltipla escolha, uma semana antes da aula presencial. Para responder às questões, era necessário assistir a vídeos explicativos sobre fatoração por agrupamento de termos algébricos, diferenças de quadrados e procedimentos de simplificação algébrica relacionados a esses tipos de fatoração (Figura 2)

Figura 2. Ilustração do vídeo e questão do quiz da atividade instrucional.

O primeiro passo é identificarmos o fator comum!

Para confirmarmos nosso raciocínio, podemos aplicar a propriedade distributiva!

2) Ao fatorarmos a expressão algébrica a seguir, qual seria o fator que poderíamos colocar em evidência?

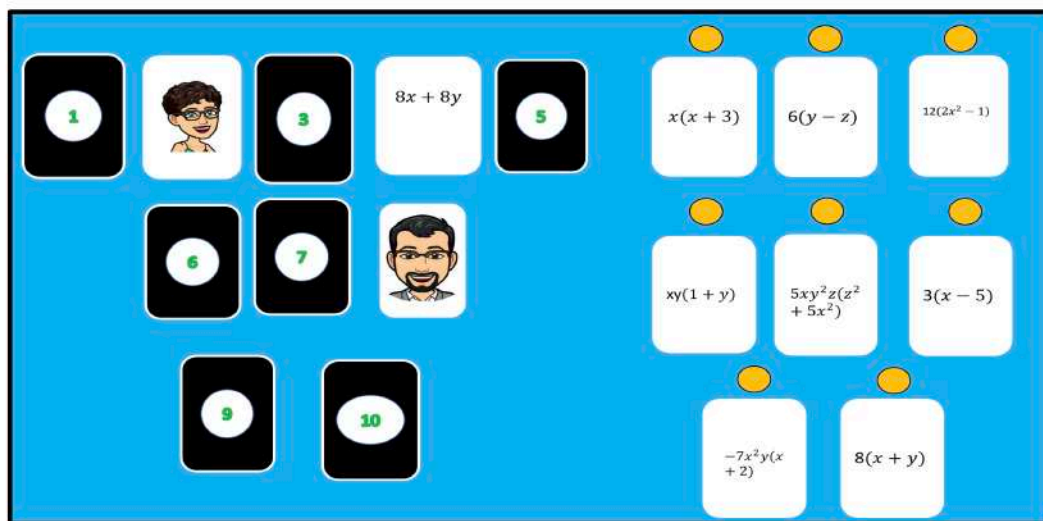
$x^2 + 4x$

4
 x^2
 x
 $x^2 + 4$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

2ª etapa: atividade exploratória – nesta etapa, os estudantes participaram de uma aula com duração de 2h, durante a qual jogaram ‘O Par Perfeito’, um jogo didático semelhante a um jogo da memória. O jogo utilizou dois conjuntos de cartas: um com expressões algébricas não fatoradas e outro com suas formas fatoradas (Figura 3). Os estudantes, divididos em dois grupos, revezavam-se na escolha das cartas, devendo relacionar uma expressão não fatorada com sua forma fatorada (e vice-versa) para formar um “Par Perfeito” e registrar a resposta e justificativa da escolha na folha de tarefas.

Figura 3. Exemplo de uma das rodadas do jogo proposto na fase exploratória.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O jogo foi estruturado em quatro rodadas: as duas primeiras focaram na fatoração por agrupamento; a terceira foi dedicada exclusivamente à fatoração de diferenças de quadrados; e a última combinou a fatoração por agrupamento com a de diferenças de quadrados, apresentando expressões como $8x^2 - 4y^2$. Cada resposta correta valia 10 pontos, e a equipe com o maior número de pontos foi a vencedora. O jogo também incluiu cartas especiais, “Darling” e “Vilmar”, que tornaram a atividade mais envolvente. A carta “Darling” permitia que a equipe jogasse duas vezes consecutivas, enquanto a carta “Vilmar” passava a vez de jogar para uma equipe adversária.

3ª etapa: atividade avaliativa – nesta etapa, os estudantes resolveram quatro itens avaliativos de múltipla escolha para verificar se os estudantes alcançaram as aprendizagens trabalhadas nas atividades anteriores.

5. RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados da análise dos dados focada nos pensamentos algébricos evidenciados pelos estudantes sobre fatoração algébrica. A análise começa com a fatoração por agrupamento e finaliza com a fatoração por diferença de quadrados. O pensamento algébrico foi analisado a partir de suas duas vertentes principais — representar e raciocinar — conforme discutido no referencial teórico.

5.1 FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTOS

Na atividade instrucional, o pensamento algébrico dos estudantes sobre fatoração por agrupamento foi inicialmente identificado nas respostas às questões Q_1A_1 e Q_2A_1 , que se concentravam na identificação e representação algébrica do fator comum em expressões

não fatoradas e foram analisadas com ênfase na vertente representar. O reconhecimento dos procedimentos envolvidos na fatoração por agrupamento foi analisado na questão Q_3A_1 , com foco na vertente raciocinar, já que era necessário deduzir os procedimentos com base em inferências.

Os resultados mostram que todos os nove estudantes conseguiram identificar a diferença entre a forma não fatorada e a forma fatorada de uma expressão algébrica (Q_1A_1), assim como o termo comum na expressão $x^2 + 4x$ (Q_2A_1). Além disso, eles foram capazes de assimilar a técnica de fatoração por agrupamento, que envolve a identificação e o agrupamento de termos que possuem fatores comuns. Todos obtiveram 100% de acerto nessas questões.

A esse respeito, destacamos que a visualização dos vídeos teve uma alta taxa de aproveitamento. Ressaltamos que os vídeos foram disponibilizados como ‘não listados’ no YouTube, sendo acessíveis apenas por meio de link compartilhado. Os nove estudantes assistiram a cada vídeo mais de uma vez, resultando em 29 visualizações do primeiro vídeo, 18 do segundo e 40 do terceiro. As seções que explicam o conceito de fator comum e o processo de decomposição de fatores em produto algébrico foram as mais visualizadas. Pode-se inferir que a frequência de visualizações dessas partes contribuiu significativamente para o bom desempenho dos estudantes na atividade instrucional, como confirmado pelos registros de visualização do segundo vídeo, que abordou o procedimento de fatoração por agrupamento (Figura 4).

Figura 4. Momentos de visualização do vídeo 2 da atividade instrucional.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir do gráfico, é possível observar que a porcentagem de visualização manteve-se próxima a 40% durante a maioria do tempo de duração do vídeo, apresentando pico de 56% no momento de 1:01, onde se explicava o processo de fatoração por agrupamento. Essa explicação envolvia a identificação de fatores comuns e a decomposição da expressão algébrica em um produto desses fatores. Esses dados sugerem que os estudantes estavam atentos a essa seção específica em busca de informações para responder à Q_2A_1 .

Durante a atividade exploratória, a análise do pensamento algébrico dos estudantes focou na capacidade de interpretar registros algébricos (representar) e utilizar processos de raciocínio na fatoração de expressões (raciocinar). Os resultados mostram que a maioria dos estudantes (nove dos doze) conseguiu relacionar corretamente as cartas que continham expressões algébricas com suas respectivas formas fatoradas, por agrupamentos simples.

Os estudantes foram capazes de identificar fatores comuns na expressão algébrica e representar o produto algébrico que continha esses fatores. Eles forneceram explicações adequadas dos registros envolvidos, baseadas em processos de raciocínio, determinando corretamente a forma fatorada da expressão. Isso ficou evidente no diálogo entre Michael e o pesquisador, quando o estudante justificou sua escolha pela expressão fatorada $2(x + y)$.

Michael: Acho que é a carta $2(x + y)$...

Pesquisador: Por que você escolheu esta carta?

Michael: Porque 2 vezes x é $2x$ e 2 vezes y é $2y$.

Pesquisador: Então, nesse caso, quem seria o fator comum?

Michael: Seria o 2.

No diálogo, se observa que Michael comparou os termos $2x$ e $2y$, identificando o fator comum que deveria ser destacado da expressão e representa o produto $2(x + y)$. Para justificar sua conclusão, ele explicou: '2 vezes x é $2x$ e 2 vezes y é $2y$ ', sustentando sua escolha pela expressão fatorada $2(x + y)$ com base na aplicação da propriedade distributiva. Dessa forma, Michael utilizou de maneira adequada tanto a vertente representar quanto a de raciocinar (comparação e justificação) para associar corretamente a expressão algébrica à sua forma fatorada.

A fatoração de expressões que envolvia a aplicação, em duas etapas, da técnica de fatoração por agrupamento revelou-se um desafio para 10 dos 12 estudantes. Embora eles fossem capazes de identificar os fatores comuns nas expressões algébricas apresentadas, não conseguiram destacá-los das expressões e representar o produto algébrico que continha esses fatores, o que dificultou a generalização do processo de fatoração por agrupamento nessas expressões. Essa dificuldade é exemplificada no diálogo entre o pesquisador e a estudante Lucy.

Lucy: Acho que o par é $(x + 2y)(y + 3)$...

Pesquisador: Por que esse seria o par? Como você fez?

Lucy: Porque essa opção apresenta x , y , 2 e 3 e 2 vezes 3 é 6 ...

Pesquisador: Mas como seria para fazer a fatoração por agrupamento?

Lucy: Não sei ...

O diálogo revela que Lucy associa a expressão $xy + 3x - 2y^2 - 6y$ com um produto algébrico que contém seus termos comuns, x , y , 2 e 3. Ela identifica semelhanças, como o produto dos fatores 2×3 com 6 (um dos termos da expressão), e conclui que a forma fatorada da expressão é $(x - 2y)(y + 3)$. No entanto, Lucy não conseguiu manipular os termos algébricos

de maneira a agrupar os fatores comuns e generalizar a técnica de fatoração por agrupamento, o que a impediu de obter a forma simplificada da expressão algébrica e de justificar sua conjectura. Isso revela uma fragilidade no processo de raciocínio de generalização para combinar, em duas etapas, a aplicação da técnica de fatoração por agrupamento em expressões algébricas.

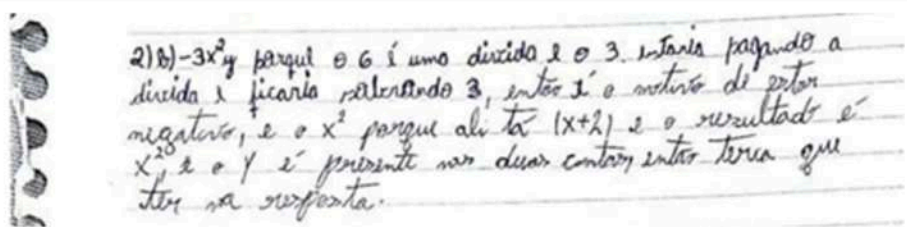
Neste momento, o professor utilizou o quadro para exemplificar diferentes tipos de expressões algébricas que deveriam ser fatoradas, combinando duas etapas da técnica de fatoração por agrupamento. Ele explicou passo a passo o procedimento correto para agrupar os fatores comuns das expressões e encontrar a forma fatorada. Após a explicação, alguns estudantes verbalizaram que haviam compreendido o processo e conseguiram identificar corretamente as expressões que poderiam ser fatoradas por essa técnica.

Na atividade avaliativa, os estudantes foram desafiados a fatorar uma expressão algébrica utilizando a técnica de agrupamento em uma etapa (Q_2A_A) e em duas etapas (Q_3A_A). Os resultados mostram que, na (Q_2A_A), todos os nove estudantes identificaram e representaram algebricamente o fator comum $-3x^2$ y da expressão algébrica (vertente representar). Para justificar sua resposta, eles compararam ou classificaram os termos da expressão (vertente raciocinar), agrupando-os para extrair o produto algébrico da forma fatorada, tal como se verifica na resposta apresentada por Michael (Figura 5).

Figura 5. Resposta do estudante Michael à .

Q_2A_A : [...] Qual seria a expressão algébrica que completaria a fatoração esquematizada no caderno? [a figura do caderno contém: $-3x^3y - 6x^2y = ???(x + 2)$]

a) $3x^2y$ b) $-3x^2y$ c) $3xy$ d) $-3xy$



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Michel representa corretamente o fator comum $-3x^2$ da expressão $-3x^3y - 6x^2y$. Para justificar sua resposta, ele explica que o fator -3 é comum em ambos os termos, pois -6 pode ser decomposto em $2x(-3)$. Ele reforçou essa decomposição ao afirmar que 6 representa uma ‘dívida’ (ou seja, -6), e o 3 estaria ‘pagando’ essa dívida, restando 3 [ou seja $2x(-3)$]. Comparando os termos da expressão, Michael identificou que x^2 é um fator comum, e, ao colocá-lo em evidência, obteve o termo $x + 2$. Ele também observou que o fator y também é comum em ambos os monômios.

Assim, ele concluiu corretamente que $-3x^2y$ é o fator comum da expressão algébrica e apresentou o produto $-3x^2y(x + 2)$ da sua forma fatorada, revelando uma adequada capacidade

de interpretar registros algébricos (vertente representar) e de usar processos de raciocínio (associação e comparação) para fatorar a expressão algébrica.

No entanto, oito dos nove estudantes não conseguiram aplicar, em duas etapas, o processo de fatoração por agrupamento para simplificar a expressão algébrica da Q_3A_1 . Esses estudantes tiveram dificuldades em identificar os fatores comuns $3 - y$ ou $x^2 + 3$ e mobilizar processo de raciocínio de generalização para decompor a expressão algébrica em um produto desses fatores, tal como exemplificado na resposta de Maria (Figura 6).

Figura 6. Resposta da estudante Maria à.

Q_3A_1 : Em um jogo emocionante, um participante recebe um envelope contendo uma expressão algébrica $[-x^2y + 3x^2 - 3y + 9]$ e deve escolher, entre quatro cartas com produtos algébricos, aquela que apresenta a expressão fatorada correspondente. Qual das opções contém a forma fatorada da expressão algébrica presente no envelope recebido?

a) $3 - y)(x^2 + 3)$ b) $(y + 3)(x^2 + 3)$ c) $(3 - y)(x + 3)$ d) $(y + 3)(x + 3)$

3-b

~~$-x^2y + 3x^2 - 3y + 9$~~

$3x^2y - 3x^2y - 3xy - 6x^2$

$6x^2y$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Maria indicou de forma errada a alternativa b , que apresentava o produto $(3 + y)(x^2 + 3)$, como forma fatorada da expressão $-x^2y + 3x^2 - 3y + 9$. Ela evidencia ter identificado, incorretamente, como fatores comun o monômio ‘ $6xy$ ’ ao invés de x^2 , ou 3. Além disso, Maria apresentou a expressão $3x^6y^6 - 3x^2y - 3x^2y - 6x^2$, que está desconexa da forma fatorada correta $(3 - y)(x^2 + 3)$. Essas dificuldades revelam fragilidade na manipulação dos termos algébricos, bem como na aplicação e generalização da técnica de fatoração por agrupamento, impedindo-a de obter a forma fatorada correta da expressão.

5.2 FATORAÇÃO POR DIFERENÇA DE QUADRADOS

Na atividade instrucional, a análise do pensamento algébrico dos estudantes sobre a fatoração por diferença de quadrados foi realizada com base nas respostas à questão Q_4A_1 . Essa questão focou no reconhecimento dos procedimentos algébricos para esse tipo de fatoração, e foi analisada com ênfase na vertente raciocinar, já que era necessário a justificação correta dos procedimentos.

Os resultados mostram que sete dos nove estudantes identificaram corretamente que o procedimento para realizar a fatoração por diferença de quadrados consiste em extrair a raiz quadrada dos termos ‘quadrados’ da expressão algébrica e, em seguida, escrever o produto da soma pela diferença dessas raízes. Em contraste, dois estudantes apontaram um procedimento incorreto, a saber, calcular a soma e a diferença dos termos antes de extrair a raiz quadrada.

Além disso, o vídeo que apoiava a resolução dessa questão apresentou um alto índice de visualização, com 29 acessos registrados. As seções que explicam o conceito de diferença de quadrados e o processo de decomposição em produtos algébricos foram as mais assistidas.

Isso sugere que essas partes do vídeo contribuíram significativamente para o bom desempenho dos estudantes na resposta à questão, como pode ser observado na Figura 7, que mostra os registros de visualização no YouTube.

Figura 7. Momentos de visualização do vídeo 4 da atividade instrucional.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir do gráfico, é possível observar que o percentual de visualização manteve-se em média próximo a 30% durante o vídeo, com um pico de 31% que se estabiliza entre 1:11 e 1:31, onde se explicava o processo de fatoração por diferença de quadrados. Essa explicação envolvia a identificação de termos quadrados, o procedimento para encontrar suas raízes quadradas, e a decomposição da expressão em um produto que inclui esses resultados. Esses dados sugerem que os estudantes estavam atentos a essa seção em busca de informações para responder à Q_4A_j .

Na atividade exploratória, a análise do pensamento algébrico dos estudantes considerou a capacidade deles de interpretar registros algébricos em expressões modeladas pela identidade $a^2 - b^2$, onde $a, b \in \mathcal{R}$ e mobilizar processos de raciocínios para fatorá-la. Os resultados mostraram que 10 dos 12 estudantes identificaram os termos quadráticos e representaram corretamente os resultados das raízes quadradas desses termos (vertente representar) e foram capazes de classificar a expressão algébrica como um caso particular da identidade $a^2 - b^2$. Eles aplicaram corretamente a regra de fatoração por diferença de quadrados para obter a forma fatorada da expressão, como o produto $(a + b)(a - b)$ (vertente raciocinar), conforme exemplificado no diálogo entre a estudante Lucy e o pesquisador sobre a fatoração de $y^2 - 16$.

Lucy: Acho que é a carta $(a + 4)(y - 4)$...

Pesquisador: Por que você escolheu essa carta?

Lucy: Porque essa carta apresenta y e 4.

Pesquisador: Apenas por isso? Consegue explicar melhor?

Lucy: Sim, é porque y vezes y é y^2 e 4 vezes 4 é 16.

O diálogo mostra que Lucy identificou corretamente os termos quadrados da expressão $y^2 - 16$, reconhecendo que y^2 é o quadrado de y e 16 é o quadrado de 4 , como fica claro em sua explicação: ‘porque y vezes y é y^2 e 4 vezes 4 é 16 ’. Ela também reconheceu a identidade algébrica da diferença de quadrados $a^2 - b^2$, para $a = y$ e $b = 4$. Embora tenha usado a expressão informal ‘porque essa carta apresenta y e 4 ’, isso não revela incompreensão dessa identidade. Por fim, Lucy associou corretamente a expressão $y^2 - 16$ ao produto $(y + 4)(y - 4)$, aplicando adequadamente a regra da fatoração por diferença de quadrados. Isso revela a capacidade de Lucy em mobilizar adequadamente tanto a vertente representar quanto a de raciocinar (classificação e justificção) ao fatorar expressões algébricas.

Na questão Q_4A_A da *Atividade Avaliativa*, solicitou-se aos estudantes que fatorassem $x^4 - 36$. Os resultados mostram que todos os nove estudantes que resolveram a questão apresentaram a fatoração correta, revelando terem sido capazes de identificar os termos quadráticos x^4 e 36 e representar corretamente os resultados de suas raízes quadradas x^2 e 6 (vertente representar). Além disso, foram capazes de classificar a expressão $x^4 - 36$ como um caso particular da identidade $a^2 - b^2$, aplicando corretamente a técnica de fatoração por diferença de quadrados para fatorar a expressão, conforme exemplificado na resposta de Michael (Figura 8).

Figura 8 Resposta do estudante Michael à.

Q₄A_A: [...] Como uma forma de propor para seus alunos um desafio especial, o professor Vilmar solicitou que fosse fatorada a expressão algébrica $x^4 - 36$ presente na figura a seguir [figura está na tarefa], prometendo uma caixa de bombons àquele que respondesse corretamente. Qual seria a forma fatorada da expressão algébrica proposta?

a) $(x - 6)(x + 6)$ b) $(x + 36)(x - 36)$ c) $(x^2 + 6)(x^2 - 6)$ d) $(x^2 + 36)(x^2 - 36)$

4) c) $(x^2 + 6) \cdot (x^2 - 6)$ porque $x^2 \cdot x^2$ é x^4 , $+ \cdot -$ é $-$ e $6 \cdot 6$ é 36 por isso a resposta é $x^4 - 36$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

6. CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Este estudo analisa o pensamento algébrico evidenciados pelos estudantes em uma prática didática que integra a metodologia de sala de aula invertida, visando promover aprendizagem sobre fatoração algébrica por agrupamento e por diferença de quadrados. Os resultados obtidos fornecem resposta às questões de investigação

Em relação à primeira questão – ‘Como os estudantes interpretam e/ou representam expressões algébricas fatoradas?’ – os resultados mostram que os estudantes que demonstraram habilidade em interpretar expressões fatoradas, seja por agrupamento ou por diferença de quadrados, foram capazes de identificar corretamente os fatores comuns ou representar o valor algébrico das raízes quadradas dos termos quadráticos. Frequentemente, eles recorreram

à aplicação da propriedade distributiva ou ao cálculo de potências para justificar suas conclusões, sem necessariamente destacar os fatores repetidos ou a extração da raiz quadrada. Essas ações associadas à vertente de ‘representar’ do pensamento algébrico foram essenciais para que os estudantes, em ambos os casos, conseguissem representar o produto algébrico correspondente à forma fatorada, confirmando conclusões apontadas por Blanton e Kaput (2005), Godino et al. (2012) e Chimoni et al. (2020) em seus estudos.

Em relação à segunda questão – ‘Quais processos de raciocínio matemático são mobilizados pelos estudantes na fatoração de expressões algébricas?’ – os resultados indicam que os processos de classificação, comparação e justificação foram os mais utilizados pelos estudantes que aplicaram corretamente as técnicas de fatoração por agrupamento ou por diferença de quadrados para fatorar as expressões. Inferimos que a fragilidade no processo de generalização da técnica de fatoração por agrupamento, como discutido também em Guadagnini e Dias (2022) e Chevallard (2023), contribuiu para que a maioria dos estudantes não conseguisse fatorar corretamente expressões cuja forma fatorada resulta no produto de dois binômios.

Os resultados indicam que, de modo geral, os estudantes demonstram uma capacidade adequada de mobilizar aspectos das vertentes representar e raciocinar do pensamento algébrico para: (i) identificar termos comuns e termos quadráticos em expressões algébricas; (ii) associar uma expressão algébrica à sua forma fatorada e vice-versa; e (iii) aplicar técnicas de fatoração por agrupamento e diferença de quadrados para simplificar expressões algébricas. Esses resultados são consistentes com o que se espera no estudo introdutório da fatoração algébrica tal como apontam Guadagnini e Dias (2022) e Ponte et al. (2009).

Embora os resultados não possam ser generalizados em função das características do contexto e dos participantes do estudo, consideramos que as vertentes do pensamento algébrico constituem ferramentas valiosas para a análise do pensamento algébrico dos estudantes. Acreditamos que as vertentes podem ser integradas às instruções didáticas que visam desenvolver o pensamento algébrico, uma vez que são essenciais para a compreensão de qualquer conceito algébrico, conforme apontam Ponte et al. (2009).

Os subsídios desta investigação indicam que a implementação de práticas didáticas para o ensino da Matemática, por meio da metodologia de sala de aula invertida, apoiada por um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa, e que integre o uso de tecnologias digitais e jogos didáticos, pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e criar um ambiente propício para reflexões e explicações sobre conceitos matemáticos. Esse impacto corrobora as ideias apresentadas por Bergmann e Sams (2012) e Lo et al. (2017), e é confirmado pela visualização dos vídeos da atividade instrucional, que contribuiu para a capacidade dos estudantes de representar e raciocinar sobre as técnicas de fatoração por agrupamento e diferença de quadrados. Além disso, na atividade exploratória, os estudantes tiveram a oportunidade de compartilhar e discutir seus conhecimentos, mobilizando seus raciocínios durante a tarefa, enquanto a atividade avaliativa proporcionou uma visão clara das aprendizagens e das dificuldades que ainda persistem entre eles.

No entanto, este estudo representa apenas um primeiro passo na compreensão das potencialidades dos elementos que descrevem e analisam o pensamento algébrico, bem como do impacto da sala de aula invertida na promoção desse pensamento. A maneira como o pensamento algébrico emerge e se desenvolve, e como a sala de aula invertida contribui nesse processo, demanda um aprofundamento nos recursos e estratégias didáticas que possam facilitar esse desenvolvimento.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

VGF e MCT conceberam a ideia apresentada, desenvolveram a teoria e adaptaram a metodologia para este contexto. VGF criou o modelo metodológico. MCT realizou as atividades e coletou os dados. VGF e MCT analisaram juntos os dados. Todos os autores participaram ativamente da discussão dos resultados, revisaram e aprovaram o trabalho.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados que sustentam os resultados deste estudo estarão disponíveis com os autores correspondentes, VGF e MCT, mediante solicitação razoável.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IFRJ, CAPES e FAPERJ pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bergmann, J., & Sams, A. (2012) *Flip Your Classroom: reach every student in every class every day*. Eugene, Oregon: ISTE.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005) Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 412–446.
- Bianchini, B., & Lima, G. (2021) A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. *Bolema*, 35(70), 981 – 999. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a19>
- Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.
- Chen, C. M., & Wu, C. H. (2015). Effects of different video lecture types on sustained attention, emotion, cognitive load, and learning performance. *Computers & Education*, 80, p. 108-121. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2014.08.015>
- Chevallard, Y. (2023). El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el Collège Segunda parte: Perspectivas curriculares: la noción de modelización. *Educ. Matem. Pesq.*, 25(1), 556-596. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p556-596>
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020) The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, 44(3), 1-50. <https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280>
- Godino, J. D, Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012) Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, 26(42), 483-511. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005>
- Guadagnini, M. R., Junior, V. B. S., Ignácio, R. S., & Dias, M. A. (2021). Factorización numérica y algebraica: ecología de un objeto protomatemático en función de la introducción de nuevas praxeologías desde 1960 hasta 2021 en la escuela primaria. *Educ. Matem. Pesq.*, 23(3), 281-313. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p281-313>
- Guadagnini, M. R., & Dias, M. A. (2022). Modelo Epistemológico de Referência para a Fatoração Implementado por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa no Ensino Fundamental. *Bolema*, 36(72), 286-307. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13>



- Flipped Learning Network (FLN). (2014). *The Four Pillars of F-L-I-P™*. Disponível em: <https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/>. Acesso em: 6 set. 2024.
- Fonseca, V. G., Arquieres, D. D., Pedro, V. S., & Borges, I. R. L. (2023a). Acción de futuro profesor de matemáticas en la implementación de una práctica didáctica, en un contexto de enseñanza remota de emergencia, sobre la ecuación exponencial. *Intersaberes*, 18, E023tl4019.
- Fonseca, V., Pereira, M., & Carvalho, E. (2023b) Ensino de sequência numérica: conhecimento didático evidenciado por futuros professores de Matemática na elaboração de aula híbrida, em abordagem de sala de aula invertida. XXXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Barcelos: Instituto Politécnico do Cávado e do Ave.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Lo, C. K., Hew, K. F., & Chen, G. (2017). Toward a set of design principles for mathematics flipped classrooms: A synthesis of research in mathematics education. *Educational Research Review*, 22, p. 50-73. <http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.002>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM
- Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa, Ministério da Educação – DGI-DC.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 1(12), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>
- Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Valente, J. A. (2014). Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, 4, 79-97. <https://doi.org/10.1590/0104-4060.38645>
- Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.



IA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

AI IN MATHEMATICAL PROBLEM-SOLVING

Alexánder Hernández¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6342-3914>

RESUMEN

Esta investigación se centra en analizar la capacidad de una inteligencia artificial generativa, denominada o1, para analizar problemas matemáticos de manera reflexiva en un escenario de formación docente que utiliza herramientas digitales de forma coordinada. A partir de un problema matemático previamente trabajado en un seminario de docentes, se interactúa con o1 para realizar las distintas fases de la resolución de problemas. Prestando especial atención a la aproximación dinámica con GeoGebra y como o1 se resuelve en este contexto. Los hallazgos indican que, si bien o1 puede generar propuestas estructuradas y promover la reflexión matemática, también comete errores que requieren una evaluación crítica por parte del usuario. Se concluye que la IA puede ser una herramienta útil para facilitar el análisis de problemas por parte de los docentes, siempre y cuando se reflexione sobre sus respuestas haciendo uso de los conocimientos matemáticos y de la experiencia en la práctica docente.

Palabras clave: Inteligencia artificial generativa, resolución de problemas matemáticos, formación docente

ABSTRACT

This research focuses on analysing the capability of a generative artificial intelligence, named o1, to reflectively analyse mathematical problems within a teacher training scenario that utilizes digital tools in a coordinated manner. Starting from a mathematical problem previously worked on in a teacher seminar, interaction with o1 is conducted to carry out the different phases of problem solving, paying special attention to the dynamic approach with GeoGebra and how o1 performs in this context. The findings indicate that, although o1 can generate structured proposals and promote mathematical reflection, it also makes errors that require critical evaluation by the user. It is concluded that AI can be a useful tool to facilitate problem analysis by teachers, provided that its responses are reflected upon using mathematical knowledge and practical teaching experience.

Keywords: Artificial intelligence, Mathematical problem solving, Teacher training.

¹ Universidad de La Laguna, La Laguna, Código Postal 38207, Santa Cruz de Tenerife, España. Correo electrónico: alexander.hernandez@ull.edu.es



1. INTRODUCCIÓN

La integración de la resolución de problemas matemáticos, el uso de herramientas digitales y la irrupción de la inteligencia artificial (IA) en el entorno educativo conforman un nuevo escenario para la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones previas han destacado cómo herramientas como GeoGebra facilitan la exploración de problemas, permitiendo la generación de conjeturas y la identificación de propiedades matemáticas que no suelen aparecer en enfoques tradicionales basados en lápiz y papel (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Jacinto & Carreira, 2017; Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019). Estas y otras herramientas digitales han influenciado en los procesos de enseñanza-aprendizaje, ofreciendo nuevas oportunidades para enriquecer la comprensión matemática.

Con la aparición de aplicaciones que incorporan asistencia de IA, especialmente tras el lanzamiento de ChatGPT en noviembre de 2022, surge la necesidad de investigar cómo estas herramientas pueden influir en la resolución de problemas matemáticos. La IA automatiza procesos, genera enfoques innovadores personalizables y abre un nuevo campo para la experiencia educativa. Es esencial comprender tanto sus ventajas como sus limitaciones en contextos de resolución de problemas, para aprovechar estas oportunidades.

Para este reporte de investigación se realizó una experiencia de resolución y formulación de problemas asistidos por una inteligencia artificial generativa y se presenta una reflexión sobre su uso. Se pretende contribuir al entendimiento de cómo la IA generativa puede ser utilizada por docentes de Matemáticas, con el fin de que pueda ser incorporada en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria y Secundaria.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

A continuación, detallamos las ideas clave que envuelven la investigación. Comenzando con la resolución de problemas y el uso coordinado de las herramientas digitales, para luego, presentar una terminología básica relacionada con el uso de IA.

2.1 Resolver problemas como una actividad matemática

El término problema de matemáticas hace referencia a una tarea no rutinaria (Pólya, 1945). Esta definición tiene un carácter relativo, lo que es un mero ejercicio para una persona puede ser un problema para otra (Schoenfeld, 1985). Es más, para que se active el proceso de resolución de problemas, es necesario que haya alguien, o un grupo, interesado en buscar la solución (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). ¿Cuál es objeto de resolver el problema? Si sólo interesa dar con una solución, se buscará una forma eficiente de dar una respuesta correcta. Ahora, si el problema se usa para comenzar una actividad de indagación matemática, estamos ante un proceso más complejo. El uso de la tecnología combinado con la segunda opción permite enriquecer las discusiones, establece conexiones intramatemáticas y provoca la aparición de nuevas preguntas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Jacinto & Carreira, 2017).

Dentro de este escenario general, se puede concretar que en un contexto docente se efectúa la resolución de problemas como una actividad de preparación. Cuya finalidad principal será adelantarse a lo que pueda ocurrir en el aula posteriormente, pero, también, valorar las posibilidades de la tarea o su dificultad. En este sentido, tanto para el profesorado en activo como para el profesorado en formación “la resolución de problemas usando tecnología

ofrece una oportunidad para desarrollar la comprensión matemática necesaria en la Educación Secundaria” (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019).

Las ventajas de abordar los problemas por múltiples aproximaciones han sido nombradas por distintas investigaciones (Gómez-Arciga & Poveda-Fernández, 2017; Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018) señalando que el uso de tecnología facilita este proceso, así como estrategias que no aparecen si no se usan herramientas digitales. Indicando, entre otras conclusiones, que para aprovechar dichas ventajas en un entorno de enseñanza-aprendizaje es necesario realizar un uso coordinado de la tecnología.

2.2 Uso coordinado de las herramientas digitales

Actualmente, si dispones de un dispositivo con conexión a internet, se puede acceder a diversas aplicaciones y plataformas que permiten la indagación en Matemáticas. Están las que se diseñaron específicamente para ello, como Wolfram Alpha, GeoGebra, Desmos o Delta-Math y otras en las que se incluyen las Matemáticas dentro del resto de contenidos. Hay repositorios de contenido abierto, por ejemplo, Wikipedia que funciona de manera enciclopédica. Existen plataformas de autoformación, como Khan Academy o Brilliant, donde se encuentran los contenidos organizados por áreas de conocimiento, que permiten encontrar recursos multimedia ordenados por nivel de dificultad y profundización. Además, se pueden encontrar canales en plataformas (YouTube, Twitch, Amautas...) y grupos en redes sociales (Instagram, Pinterest, Telegram...) dedicados a las matemáticas de cualquier nivel. A la hora de plantear una actividad de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se deben tener en cuenta las posibilidades de las herramientas digitales y coordinar su uso como parte de la actividad.

Santos-Trigo et al. (2022) proponen el uso de un muro digital (*digital wall*) como una herramienta para coordinar los aprendizajes con el uso de la tecnología. Este muro digital es un espacio donde los estudiantes pueden registrar sus experiencias de aprendizaje. Este puede realizarse con diferentes estructuras dependiendo de la plataforma virtual que se utilice, podría ser parte del cuaderno de clase en Teams o diseñarse como un libro digital en GeoGebra. En cualquier caso, es una herramienta con la que se realiza un seguimiento detallado del aprendizaje y permite: documentar, monitorear y reflexionar sobre su progreso en la resolución de problemas matemáticos. De esta forma, un muro digital se convierte en una plataforma de colaboración, donde el aprendizaje y la autoevaluación se desarrollan de forma integrada.

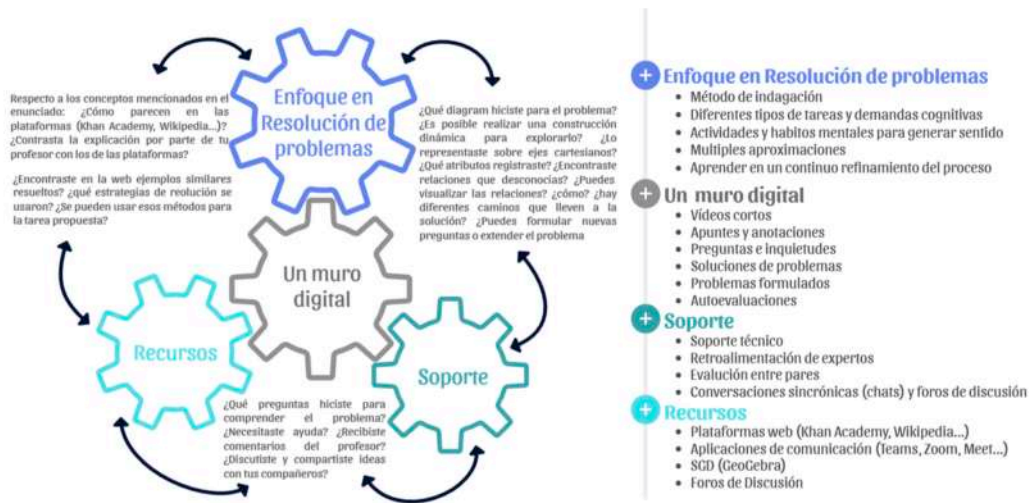
El marco conceptual mencionado se estructura con tres elementos esenciales (Santos-Trigo et al, 2022, pp. 32-33): un enfoque de resolución de problemas que motive la búsqueda de múltiples representaciones y aproximaciones, el uso de diversas herramientas digitales y la capacidad para plantear y discutir preguntas y soluciones (Figura 1):

- Un *enfoque en resolución de problemas* para respaldar la enseñanza y el aprendizaje. Donde se abordan las matemáticas como un proceso activo de cuestionamiento, exploración y resolución de problemas que se abordan profundizando en los conceptos, usando recursos y desde varias estrategias. Las tareas son el medio para que las múltiples aproximaciones a la resolución desarrollen el pensamiento matemático.
- Uso coordinado y sistemático de *recursos*, herramientas digitales y plataformas en línea, como GeoGebra, WolframAlpha, Khan Academy o YouTube. Que permiten

representar, explorar y resolver problemas matemáticos, además de poder compartir ideas y comunicar resultados.

- *Soporte* en línea para el planteamiento de preguntas y obtención de retroalimentación de compañeros y profesores. Para ello, hay diferentes espacios de interacción (foros de discusión, correos electrónicos o chats) donde se pueden ampliar perspectivas y reforzar los procesos de aprendizaje.

Figura 1. Estructura de un muro digital con un enfoque en la resolución de problemas.



Fuente: Traducido por el autor a partir de Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Gómez-Arciga (2022, p. 33).

Las conclusiones de Santos-Trigo et al. (2022, pág. 50) destacan que:

Aquí, un muro digital se convierte en una herramienta central para que los estudiantes registren y monitoreen su propio aprendizaje. Así, los tres componentes del marco conceptual distinguen los referentes para estructurar los muros individuales: un enfoque de resolución de problemas que respalde el trabajo de los estudiantes, el uso coordinado de las ventajas tecnológicas, incluidas aquellas asociadas con la representación y exploración de modelos dinámicos (GeoGebra), y el apoyo y la retroalimentación que los estudiantes podrían recibir de los docentes y compañeros.

Es fundamental explorar cómo integrar las IA en los elementos del modelo, aprovechando sus capacidades para ofrecer retroalimentación inmediata, generar ideas para el abordaje de problemas y tener la capacidad de representar varios papeles como recurso, soporte o resolutor.

2.3 Sobre la IA

Esta sección omite cualquier polémica que se ha generado por la aparición de la IA y que ha sido discutida en varios medios de comunicación y en gran cantidad de artículos

científicos (González-Alcaide, 2024, pp. 11-13). Vamos a partir de la hipótesis de que la integración de IA generativa en el aula permitirá que los estudiantes empleen esta tecnología en el desarrollo de su pensamiento matemático. Nos interesa indagar en cómo funciona de forma genérica las aplicaciones que la utilizan y como es actualmente la interacción con ella.

González-Alcaide (2024) señala la importancia de las *inteligencias artificiales generativas* en el escenario educativo. En ellas se incluyen *chatbots*, creadores de arte digital, generadores de textos, imágenes y contenido multimedia a partir de modelos entrenados con datos masivos. Basada en el aprendizaje automático, la IA generativa aplica algoritmos para reconocer patrones, aprender de datos y realizar tareas complejas, destacando el procesamiento del lenguaje con grandes modelos de lenguaje. Este autor explica como los chatbots textuales, como ChatGPT, se basan en estos modelos de lenguaje de aprendizaje profundo que analizan patrones para generar respuestas coherentes. Utilizando datos matemáticos y estadísticos, calculan probabilidades de palabras sucesivas en función del contexto, mejorando su precisión con cada nueva interacción. ChatGPT, por ejemplo, funciona con una estructura que permite analizar dependencias entre palabras para lograr coherencia en el texto. Este modelo aprovecha tres características: generación de contenido, preentrenamiento con datos extensivos y una red neuronal profunda, que reconoce secuencias complejas en lenguaje natural (González-Alcaide, 2024, pág. 25-29). Esta elección estocástica no está libre de los sesgos que puedan contener sus bases de datos, es más, la aceptación o no de sus respuestas, por parte de los usuarios, retroalimenta a la red neuronal. De esta manera “ajusta” sus respuestas al usuario que se las solicita. En la Tabla 1 hay parte de un glosario de términos asociados al uso de la IA.

Tabla 1. Glosario de términos asociados al uso de las herramientas de inteligencia artificial generativa.

Término	Definición
<i>Alucinación</i>	Término utilizado para referir los casos en los que los chatbots generan información aparentemente correcta, verosímil e incluso plausible, pero que es falsa o inexistente. Generalmente, se produce en los datos numéricos, fechas, referencias bibliográficas o enlaces, debido a la naturaleza probabilística de los grandes modelos de lenguaje.
<i>Contexto</i>	Conjunto de información utilizada para generar los contenidos, que incluye, además de la entrada o instrucción (prompts) que se realiza, todos los textos y contenidos generados como respuesta a peticiones previas.
<i>Entrada (prompt)</i>	Instrucción introducida en una aplicación de inteligencia artificial generativa de forma textual u oral con el propósito de que genere una respuesta. Puede adoptar la forma de una pregunta, de petición de información o de exhortación para desarrollar una acción, pudiendo acompañarse en algunas aplicaciones de documentos o imágenes.

Fuente: 1 d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior (González-Alcaide, 2024).

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las herramientas digitales utilizadas en esta experiencia son GeoGebra y o1-preview (lo llamaremos o1 a partir de ahora). Como hemos indicado GeoGebra permite resolver problemas desde una aproximación dinámica y genera una reflexión matemática ideal para un enfoque basado en la indagación. La IA generativa o1 es del tipo chatbot, lo que permite que los usuarios puedan interactuar con ella usando un lenguaje natural. En consecuencia, las discusiones y retroalimentaciones que se generan se realizan de forma más directa y rápida.

Esta primera evaluación es un ejercicio de autorreflexión, como investigador me pongo en el papel de usuario. A partir de un problema trabajado previamente en un seminario de docentes, interactué con o1 para indagar en cada una de las fases de la resolución de problemas, buscar diferentes estrategias, revisar los procesos matemáticos, dar una respuesta al problema original y plantear nuevos problemas relacionados. Con esta información, y en un ejercicio de analogía, reflexiono sobre el marco presentado por Santos-Trigo et al. (2022), el muro digital queda alojado en el espacio de almacenamiento personal y los tres elementos serían:

- Un *enfoque en resolución de problemas* para respaldar la enseñanza y el aprendizaje. Similar al expuesto, pero con la particularidad que las personas envueltas en el proceso de aprendizaje son docentes de matemáticas. Buscan reforzar su pensamiento matemático y, también, reflexionar sobre la práctica de aula.
- Uso coordinado y sistemático de *recursos*, específicamente GeoGebra y o1-previewer.
- Un *soporte* en línea para el planteamiento de preguntas y obtención de retroalimentación sincrónica con o1 y una revisión de las respuestas de compañeros.

En definitiva, el problema de investigación trata de realizar una evaluación de la capacidad de aplicación de inteligencia artificial generativa o1 para analizar problemas matemáticos de manera reflexiva.

4. ABORDAJE METODOLÓGICO

4.1 OpenAI o1-previewer

La experiencia se realizó con OpenAI o1-previewer lanzado en septiembre de 2024. Según sus desarrolladores, o1 es un “gran modelo de lenguaje entrenado con aprendizaje de refuerzo para realizar razonamientos complejos” (OpenAI, 2024). La razón de su elección es que promete ser una IA más adaptada a los procedimientos científicos que ha superado varias pruebas (Jones, 2024). Una de estas pruebas fue específica de resolución de problemas matemáticos:

“OpenAI también probó a o1 en un examen de clasificación para la Olimpiada Internacional de Matemáticas. Su mejor modelo anterior, GPT-4o, resolvió correctamente solo el 13% de los problemas, mientras que o1 obtuvo un 83%.” (p. 275)

Otras razones para elegir o1 fueron: ser un modelo de gran lenguaje que permite las interacciones usando expresiones comunes, que la tarea prevista requiere de respuestas

elaboradas y ser de reciente desarrollo por lo que la experiencia fue la más actualizada posible. Una limitación fue que, en el momento de redactar este artículo, o1 no dispone de la capacidad de interactuar con otras aplicaciones de OpenAI o externas.

4.2 Generación del Contexto

La primera tarea es generar un *Contexto* dentro del que se puedan interactuar con o1 para obtener propuestas detalladas en los problemas. La pauta principal fue simular la forma de proceder que se sigue en un seminario de resolución de problemas para docentes de primaria y secundaria. Desde 2008, el *Seminario* se organiza en cada curso escolar.

Este grupo organiza el proceso de resolución de problemas siguiendo las cuatro fases propuestas por Polya (How to solve it?, 1945), que nombrar como: Comprender, Pensar, Ejecutar y Responder. Estas fases se han adaptado desde la investigación a la práctica docente en centros de Educación Primaria y Secundaria (niveles 1-10), especialmente para estudiantes de edades entre los 9 a los 14 años (Rupérez-Padrón & García-Déniz, 2006). Además, buscan desarrollar en el alumnado la habilidad de resolución de problemas, alineándose con la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Para lograrlo se plantea la necesidad de resolver cada problema por diferentes estrategias, consiguiendo múltiples caminos a la solución, que permiten desarrollar procesos matemáticos variados y para diferente nivel educativo.

Con el objetivo de trasladar esta pauta de trabajo a o1, se eligió una *Entrada* inicial para indicar que se iba a resolver un problema por fases (Tabla 2).

Tabla 2. Entrada introducida para empezar la resolución con o1.

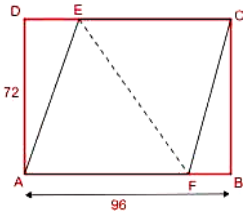
<p>Después te voy a dar el enunciado de un problema. Te doy indicaciones y espera. Hay que resolver este problema de matemáticas siguiendo cuatro fases de resolución. Estas fases como objetivo dar un enfoque de indagación matemática, de forma que resolver cada problema sea una tarea de aprendizaje para desarrollar el pensamiento matemático. Aquí te describo las fases que me gustaría que abordáramos para resolver el problema:</p>
<p>Fase 1: Comprender Hay que indicar claramente los datos del problema, los objetivos y las relaciones entre ellos. Si es necesario, también puedes proponer un diagrama o un esquema para visualizar el problema de manera más clara.</p>
<p>Fase 2: Planificar En esta fase se hace una lista de estrategias posibles para resolver el problema. Hay que dar varias opciones sin detallarlas, el objetivo es considerar la más que interés antes de decidir cuál ejecutar. Los heurísticos a tener en cuenta: modelo físico para que escolares manipulen, ensayo y error, organizar la información, construir modelos en programas de geometría dinámica y otros que valores.</p>
<p>Fase 3: Ejecutar Una vez hayamos decidido qué estrategia seguir, ejecutemos la solución paso a paso. Si algo no funciona, volvemos a la planificación para probar otra estrategia.</p>
<p>Fase 4: Responder Se verifica la solución: Comprobando si cumple con las condiciones originales del problema. Comentamos posibles extensiones o variaciones del problema. Presentemos la solución de manera clara y concisa, de acuerdo con lo que se pidió en la fase de comprensión.</p>

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Problema planteado

El problema utilizado se denomina “Un rombo en el rectángulo” y fue propuesto en el Seminario en febrero de 2023. El enunciado del problema incluía una imagen, debido a que o1 no procesa imágenes se añadió al enunciado una descripción de la imagen como *entrada* (Tabla 3).

Tabla 3. Enunciado del problema propuesto en el Seminario y descripción de la imagen para o1.

Un rombo en el rectángulo	
Los lados del rectángulo ABCD miden 72 y 96mm, respectivamente. El polígono AFCE es un rombo. ¿Cuál es la medida de la diagonal EF del rombo?	
Imagen original	Descripción de la imagen para o1
	<p>Hay un rectángulo rojo, sus lados son horizontales y verticales. Los vértices A y B están abajo a izquierda y derecha, respectivamente. Los vértices D y C arriba, a izquierda y derecha.</p> <p>Hay un punto F sobre el lado AB, un punto E sobre el lado CD. Hay un rombo dibujado sobre el rectángulo es el AFCE.</p> <p>Debajo de AB dice 96, a la izquierda de AD dice 72.</p>

Fuente: Elaboración propia.

4.4 Resolución del problema sin IA

El problema se trabajó en el seminario durante unos 45 minutos por parte de los asistentes. Hubo aproximaciones con lápiz y papel y otras con GeoGebra. Tras la sesión, el equipo coordinador comparte una síntesis de las aportaciones de los y las docentes. Este documento y mis propias anotaciones como asistente al seminario son parte del muro digital de esta tarea. En esta sección se reproduce de forma fidedigna la resolución del problema que se produjo en el Seminario.

4.4.1 Fase 1: Comprender

La comprensión del problema se realizó en gran grupo, en ella se puntualizaron los datos, las relaciones y el objetivo (Figura 2). En ella se indicó que parte de la información venía dada en la imagen del problema. Entre la información implícita del problema, se recordó que los rombos y rectángulos son paralelogramos, es decir, los lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.

Figura 2. Resumen de la fase 1 presentada en el Seminario.

Fase I Comprender

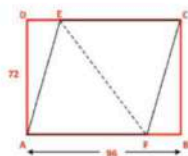
Datos: hay un rectángulo ABCD de lados 72 y 96 mm, en su interior hay un rombo AFCE.

Objetivo: saber la longitud de la diagonal del rombo.

Relación: dos vértices del rectángulo coinciden con los del rombo, dos lados del rombo están sobre los del rectángulo,

Otra información: un rombo tiene los cuatro lados de la misma longitud

Esquema:



Fuente: Equipo de coordinación del Seminario de resolución de problemas 2023.

4.4.2 Fase 2: Pensar

Se nombraron tres posibles estrategias para realizar en la fase siguiente:

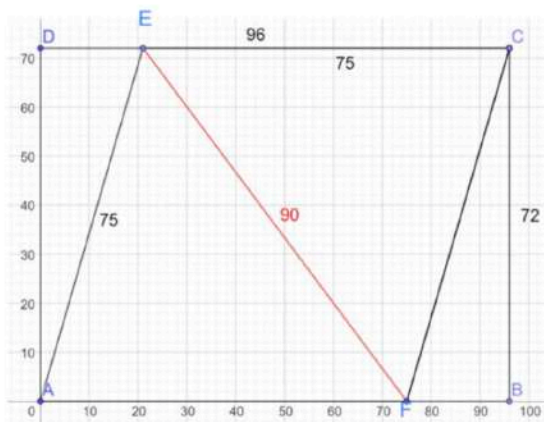
- Modelización del problema en GeoGebra
- Organizar la información con GeoGebra en una aproximación dinámica
- Organizar la información desde la geometría y el uso de razones trigonométricas.

4.4.3 Fase 3. Ejecutar

El modelo elegido fue una construcción de GeoGebra, sobre los ejes cartesianos y la cuadrícula (Figura 3). Se construyó el rectángulo ABCD colocando los vértices en las coordenadas $A = (0,0)$, $B = (96,0)$, $C = (96,72)$ y $D = (0,72)$. De esta manera sus dimensiones coinciden con 96 de largo y 72 de alto. Una vez hecho esto colocan el punto E en el lado CD y trazan dos segmentos AE y CE. Ahora, visualizando el valor de los segmentos (su longitud), pueden arrastrar E sobre CD hasta que ambas longitudes coinciden. De esta manera descubren que el lado del rombo debe medir 75 mm. Colocan en el eje x el punto $F = (75,0)$, por lo que AFCE es un rombo. Trazan el segmento EF y al visualizar su valor, 90. Dan por solución que la diagonal del rombo mide 90mm.

Figura 3. Construcción para la estrategia de modelización.

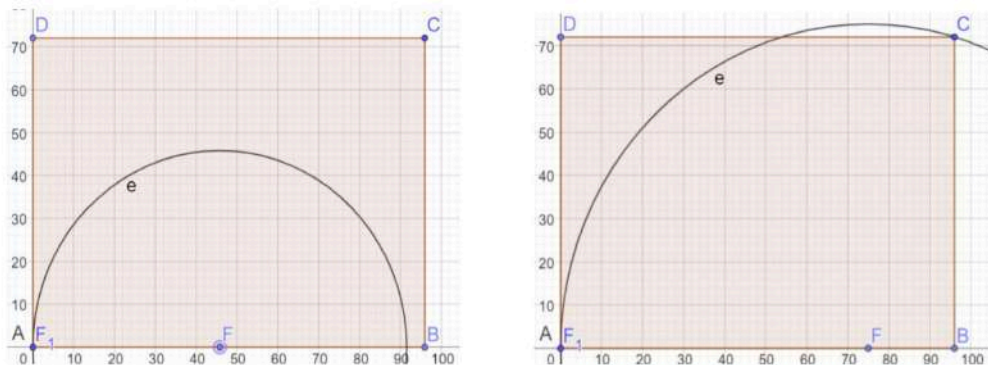
Fase III
Ejecutar



Fuente: Equipo coordinador del Seminario 2023.

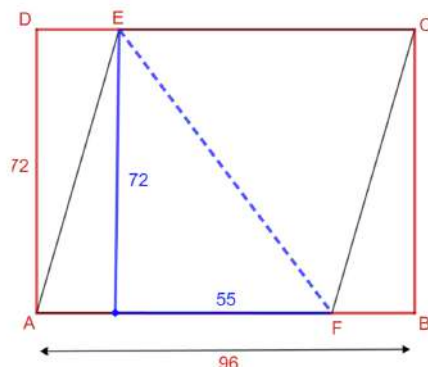
Otra de las aproximaciones presentadas se apoya en GeoGebra comenzando con una construcción similar. Esta vez colocan F sobre el segmento AB y trazan la circunferencia de centro F que pasa por A (Figura 4). Cuando la circunferencia pase por C, los lados AF y FC serán de la misma longitud. Luego, AFCE será un rombo.

Figura 4. Arrastre de F sobre AB.



Fuente: Equipo de coordinación del Seminario de problemas 2023.

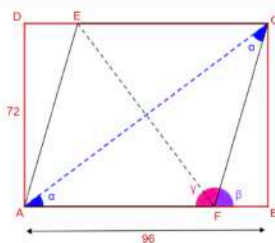
Llegados aquí, se puede comprobar que la longitud de AF es 75 mm y la de FB es 21mm. Con esta nueva información, se puede dibujar un triángulo rectángulo de altura 72 mm y base 55 mm, cuya hipotenusa coincida con la diagonal EF (Figura 5). Después de aplicar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la longitud de la hipotenusa, se propone que la solución es 90mm.

Figura 5. Triángulo rectángulo dentro de la imagen inicial.

Fuente: Elaboración propia.

Ambas aproximaciones trabajan con la característica de que un rombo tiene lados de igual longitud, en la segunda conectan esto con que los puntos de una circunferencia son equidistantes al centro. El uso de GeoGebra es meramente instrumental, se podrían los mismos pasos usando regla y compás. Claro que, el arrastre de E y la visualización de los valores de los segmentos facilitan la tarea.

La estrategia que usa razones trigonométricas añade al diagrama la diagonal AC. Observan que ABC forma un triángulo rectángulo y que la diagonal coincide con la bisectriz del ángulo EAF. Así relacionan los ángulos interiores y exteriores del rombo con la longitud de los lados del rectángulo (Figura 6). Para luego, calcular la longitud del segmento FB, y proceder como en la aproximación anterior para dar con la solución, 90mm.

Figura 6. Dedución de la longitud del segmento FB.

$$ABC \text{ es un triángulo rectángulo} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{72}{96} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$AFC \text{ es un triángulo} \Rightarrow \gamma = \pi - 2\alpha \Rightarrow \beta = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{72}{\overline{FB}} \xrightarrow{\text{Por(2)}} \tan 2\alpha = \frac{72}{\overline{FB}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{72}{\overline{FB}} \xrightarrow{\text{Por(1)}} \\ &\xrightarrow{\text{Por(1)}} \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{72}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{FB} = 21\text{mm} \end{aligned}$$

Fuente. Elaboración propia.

Este camino a la solución depende de reconocer varias propiedades geométricas que envuelven a la figura. En este caso, que los ángulos opuestos de un rombo tienen la misma amplitud y que sus bisectrices son las diagonales de este. Además, son necesarios conocimientos de trigonometría para relacionar las longitudes y los ángulos.

4.4.4 Fase 4: Respuesta

Para realizar la comprobación, se vio la necesidad de verificar que se cumplía la información recogida en la fase 1. Para ello, los docentes indicaron que en las construcciones de GeoGebra se podía verificar que los 4 lados del polígono AECF tienen la misma longitud (caracterización de un rombo), con dos de sus vértices coincidentes con los del rectángulo y los lados horizontales descansan sobre los del rectángulo.

Además, reflexionan sobre la posibilidad de que hubiera otra solución, indicando que es única, ya que al arrastrar E se observó que sólo se podía alcanzar en un punto las condiciones. Otra propuesta de trabajo, la hace un asistente, indicando que se podría buscar una construcción robusta, donde se puedan modificar las dimensiones del rectángulo y la figura inscrita fuera siempre un rombo.

Finalmente, escriben la respuesta ya discutida: La diagonal del rombo mide 90 mm.

5. RESULTADOS

Esta sección se dedica a presentar las interacciones con o1 a la hora de realizar la tarea descrita en la sección 4. La estructuraremos siguiendo las fases de resolución de problemas, al igual que se interactuó con el chatbot.

La interacción con o1 comienza con la entrada de la Tabla 2. Se le indica en otra entrada que: “No puedes cambiar de fase hasta que te avise, ahora te voy a dar el enunciado. Puedes realizar la fase 1.”. Luego, se introdujo el enunciado (Tabla 3).

En la Fase 1, o1 presentó una lista detallada de datos, objetivo y relaciones. Además, incluyó instrucciones para la visualización. Al revisarla, pude observar que incluyó alguna información poco relevante y repetitiva, por ejemplo, “A: abajo a la izquierda” como dato o “Base horizontal: $AB = CD = 96 \text{ mm}$ ” como relación cuando ya lo había puesto en dato. Le solicité que reescribiera esta parte, señalando que parte deseaba eliminar. La respuesta de o1 después de haberla refinado está en la Tabla 4. Este proceso de refinamiento de la respuesta es habitual a la hora de utilizar una inteligencia artificial generativa, la parte humana interactúa revisando lo expuesto por la IA y verifica su validez.

Tabla 4. Respuesta de o1 para la fase de Comprender.

Fase 1: Comprender

Datos del problema:

- Rectángulo ABCD:
 - Lados horizontales AB y CD miden 96 mm.
 - Lados verticales AD y BC miden 72 mm.
- Puntos adicionales:
 - F es un punto sobre el lado AB.
 - E es un punto sobre el lado CD.
- Rombo AFCE:
 - Formado por los puntos A, F, C y E.

Objetivo:

- Calcular la medida de la diagonal EF del rombo AFCE.

Relaciones entre los datos:

- Propiedades del rombo:
Todos los lados son iguales.
Las diagonales se cortan en el punto medio y son perpendiculares.
Las diagonales bisecan los ángulos internos.

Visualización:

- Dibujar el rectángulo ABCD con las dimensiones dadas.
- Ubicar el punto F en el lado AB y el punto E en el lado CD de tal manera que al unir A-F-C-E se forme un rombo.
- Identificar las diagonales del rombo: AC (que coincide con una diagonal del rectángulo) y EF (la diagonal que debemos calcular).

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

Si nos fijamos, respecto a la propuesta realizada en el seminario, o1 realiza una fase de comprender muy similar. Cabe destacar, que señala que las diagonales son perpendiculares, se cortan en sus puntos medios y que bisecan los ángulos del rombo. Estas dos propiedades pasaron desapercibidas en la fase de comprensión realizada por el profesorado y sólo la de bisección fue usada, posteriormente, en una de las aproximaciones. Si se hubiera surgido esta información de entrada, posiblemente las aproximaciones realizadas en el seminario podrían haber sido otras.

Para realizar la fase de planificar, se escribió la siguiente entrada en o1: “Realiza la fase 2 atendiendo a la primera instrucción.”. De esta manera se consiguió sin más interacciones la respuesta mostrada en la Tabla 5.

Tabla 5. Respuesta de o1 para la fase Planificar.

<p>Fase 2: Planificar A continuación, se presentan varias estrategias posibles para resolver el problema:</p>
<p>Uso de coordenadas cartesianas: Asignar un sistema de coordenadas al rectángulo y expresar las posiciones de los puntos A, B, C, D, E y F. Utilizar las propiedades del rombo para establecer ecuaciones y resolver para la diagonal EF.</p>
<p>Uso de coordenadas cartesianas: Asignar un sistema de coordenadas al rectángulo y expresar las posiciones de los puntos A, B, C, D, E y F. Utilizar las propiedades del rombo para establecer ecuaciones y resolver para la diagonal EF.</p>
<p>Aplicación de propiedades geométricas del rombo y el rectángulo: Utilizar las propiedades conocidas de los rombos (lados iguales, diagonales que se bisecan y son perpendiculares) junto con las dimensiones del rectángulo para encontrar relaciones que permitan calcular EF.</p>

Análisis de triángulos congruentes y semejantes: Identificar triángulos dentro de la figura que sean congruentes o semejantes y utilizar sus propiedades para establecer proporciones y relaciones entre los lados y diagonales.

Construcción de un modelo dinámico: Utilizar software de geometría dinámica como GeoGebra para modelar el problema, manipular los elementos y observar las relaciones que emergen, facilitando así la comprensión y solución del problema.

Organización de la información en tablas o diagramas: Crear tablas que relacionen las medidas conocidas y desconocidas, o diagramas adicionales que ayuden a visualizar las relaciones entre los elementos del problema.

Aplicación de vectores y álgebra lineal: Representar los puntos y vectores asociados para utilizar operaciones vectoriales que permitan calcular la longitud de EF. Estas estrategias ofrecen diferentes enfoques para abordar el problema y encontrar la medida de la diagonal EF del rombo.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

El chat propuso seis estrategias para dar con la solución, al igual que antes o1 evidencia su capacidad para generar una tormenta de ideas bien estructurada. A priori, los caminos propuestos parecen válidos, quizás los menos desarrollados son la estrategia 5 y 6, pero en esta fase se buscaba pensar en ideas para luego poner en práctica. Esto se ha conseguido en la primera interacción, sin necesidad de refinar el proceso.

Antes de seguir con la fase 3, se realizó una pregunta para organizar las estrategias. En un escenario de formación docente, antes de abordar una estrategia de resolución es habitual preguntarse cuál de estos caminos es más conveniente para el alumnado. En la **Tabla 6** se puede leer la respuesta de o1 a la entrada: “¿Qué estrategia de las 6 propuestas sería más adecuada para abordar con estudiantes de matemáticas de entre 9 y 11 años? ¿Cuáles serían para estudiantes mayores?”. Se puede observar como la propuesta de la IA está bien estructurada y plantea una justificación aceptable.

Tabla 6. Respuesta de o1 sobre elección de estrategias.

Para estudiantes de matemáticas de entre 9 y 11 años, es recomendable utilizar estrategias que sean visuales, manipulativas y que no requieran conocimientos avanzados de álgebra o geometría analítica. De las seis estrategias propuestas, las más adecuadas para este grupo serían:

Estrategia 2: Aplicación de propiedades geométricas del rombo y el rectángulo

Esta estrategia utiliza las propiedades básicas de las figuras geométricas, como las medidas de lados y ángulos, que son conceptos accesibles para estudiantes de esta edad. Permite resolver el problema mediante razonamiento geométrico simple.

Estrategia 5: Organización de la información en tablas o diagramas

Crear tablas y diagramas ayuda a los estudiantes a visualizar y organizar la información de manera clara. Esto facilita la comprensión del problema y les permite identificar relaciones entre los datos.

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico

Aunque requiere recursos adicionales, utilizar herramientas como software de geometría dinámica o incluso construcciones físicas con papel y lápiz puede ser muy efectivo. Los estudiantes pueden manipular el modelo y observar cómo cambian las medidas, lo que enriquece su comprensión.

Para estudiantes mayores, con conocimientos más avanzados en matemáticas, las siguientes estrategias serían más apropiadas:

Estrategia 1: Uso de coordenadas cartesianas

Esta estrategia implica asignar coordenadas a los puntos y utilizar ecuaciones para encontrar la solución. Es adecuada para estudiantes que han estudiado geometría analítica y tienen habilidades algebraicas sólidas.

Estrategia 3: Análisis de triángulos congruentes y semejantes

Requiere un entendimiento más profundo de las propiedades de los triángulos y cómo aplicarlas en la resolución de problemas geométricos complejos.

Estrategia 6: Aplicación de vectores y álgebra lineal

Es apropiada para estudiantes que han aprendido sobre vectores y pueden aplicar operaciones vectoriales en el contexto geométrico.

En resumen, para estudiantes de 9 a 11 años, la Estrategia 2 es la más adecuada, apoyada por la Estrategia 5 para organizar la información y, si es posible, la Estrategia 4 para ofrecer una experiencia más interactiva. Las otras estrategias son más apropiadas para estudiantes mayores que poseen un nivel avanzado en matemáticas y están familiarizados con conceptos como coordenadas cartesianas, vectores y análisis de triángulos.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

A la hora de dar el siguiente paso en el proceso de resolución, se eligió primero la estrategia 4, construcción de un modelo dinámico. La razón es en parte técnica, ya que como se ha mencionado la IA generativa se retroalimenta de la conversación. Y como en el marco que se ha seleccionado el uso de GeoGebra es relevante, se busca una respuesta “sin contaminar”. Dicho de otro modo, que la resolución del problema siguiendo otras estrategias no intervenga en la respuesta que puede dar o1 sobre la construcción dinámica. La entrada para el chat fue: “Desarrolla la fase 3, ejecutar, siguiendo la estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico. Indicando los pasos de construcción para GeoGebra y que hacer para dar con la solución usando esta herramienta digital.” La respuesta completa sin ningún refinamiento se encuentra en la Tabla 7.

Tabla 7. Respuesta de o1 para la aproximación dinámica.

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico en GeoGebra
<p>Vamos a utilizar GeoGebra para construir el rectángulo y el rombo, y así encontrar la medida de la diagonal EF del rombo AFCE. A continuación, se detallan los pasos para realizar la construcción y obtener la solución:</p>
<p>Paso 1: Dibujar el rectángulo ABCD</p> <ol style="list-style-type: none"> 1, Abrir GeoGebra: Inicia GeoGebra en tu computadora o accede a la versión en línea. 2, Crear los puntos del rectángulo: Punto A: Haz clic en la herramienta “Punto” y coloca el punto A en el origen de coordenadas (0, 0). Punto B: Crea el punto B en el eje x a una distancia de 96 mm de A. Como GeoGebra utiliza unidades estándar, consideraremos 96 unidades. Ingresas B = (96, 0). Punto D: Crea el punto D en el eje y a una distancia de 72 mm de A. Ingresas D = (0, 72). Punto C: Crea el punto C en la posición (96, 72) para completar el rectángulo. 3, Dibujar los lados del rectángulo: Utiliza la herramienta “Polígono” y selecciona los puntos en el siguiente orden: A, B, C, D, y de vuelta a A para cerrar el polígono. <p>Paso 2: Ubicar los puntos F y E para formar el rombo</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Colocar el punto F en el lado AB: Como queremos formar un rombo AFCE, necesitamos que los lados AF y CE sean iguales y paralelos. Para simplificar, coloca el punto F en el lado AB de manera que AF sea igual a AD (72 unidades). Dado que AB mide 96 unidades, esto significa que F estará a una distancia de 24 unidades de B. Ingresas F = (24, 0). 2. Colocar el punto E en el lado CD: De manera similar, coloca el punto E en el lado CD de forma que CE sea igual a AD (72 unidades). Esto significa que E estará a una distancia de 24 unidades de D. Ingresas E = (72, 72). <p>Paso 3: Construir el rombo AFCE</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Verificar los lados iguales: Utiliza “Distancia o longitud” para medir los segmentos AF, FC, CE y EA. Deben ser iguales. Comprueba que $AF = FC = CE = EA = 72$ unidades. 2. Dibujar las diagonales del rombo: La diagonal AC ya está dibujada como parte del rectángulo. Dibuja la diagonal EF uniendo los puntos E y F con la herramienta “Segmento entre dos puntos”. <p>Paso 4: Calcular la medida de la diagonal EF</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Medir la diagonal EF: Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” y selecciona el segmento EF. GeoGebra mostrará la longitud de EF en la vista gráfica o en el panel algebraico. 2. Anotar el valor obtenido: Supongamos que GeoGebra muestra que EF = 120 unidades. <p>Paso 5: Verificar que el cuadrilátero AFCE es un rombo</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Comprobar la igualdad de los lados: Asegúrate de que todos los lados del cuadrilátero AFCE miden 72 unidades. 4. Comprobar que las diagonales son perpendiculares: Utiliza la herramienta “Ángulo” para medir el ángulo entre las diagonales AC y EF. Si el ángulo es de 90 grados, las diagonales son perpendiculares, confirmando que AFCE es un rombo.
<p>Conclusión:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es de 120 unidades. • Dado que cada unidad en GeoGebra representa 1 mm, la diagonal EF mide 120 mm.

Explicación adicional:

- Cálculo manual de EF:

Podemos utilizar el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos formados por las diagonales del rombo.

Las diagonales del rombo se cortan en su punto medio y son perpendiculares.

La mitad de la diagonal AC mide : $\frac{AC}{2} = \frac{120}{2} = 60$ unidades.

La mitad de la diagonal EF es $\frac{EF}{2}$

La longitud de los lados del rombo es **72 unidades**.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= (\text{lado})^2 & 3600 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 5184 & \frac{EF}{2} &= \sqrt{1584} \\ (60)^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= (72)^2 & \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 5184 - 3600 & \frac{EF}{2} &\approx 39.8 \\ & & \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 1584 & & \mathbf{EF \approx 79.6 \text{ unidades}} \end{aligned}$$

Sin embargo, esto no coincide con la medida obtenida en GeoGebra, lo que indica que necesitamos revisar nuestra construcción o cálculos.

Corrección de la construcción:

- Replantear la posición de los puntos E y F:

Es posible que al colocar F y E a 24 unidades de B y D, respectivamente, no obtengamos un rombo perfecto.

Para que AFCE sea un rombo con diagonales AC y EF, necesitamos que las diagonales cumplan con las propiedades del rombo.

Calculamos la longitud de AC:

$$AC = \sqrt{(96 - 0)^2 + (72 - 0)^2} = \sqrt{96^2 + 72^2} = \sqrt{9216 + 5184} = \sqrt{14400} = 120 \text{ unidades}$$

Entonces, la diagonal AC mide 120 unidades.

Utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar EF:

$$\begin{aligned} 2 \times \text{Área del rombo} &= AC \times EC \\ \text{Área del rombo} &= \frac{(\text{lado})^2 \times \sin(\theta)}{\sin(90^\circ)} \end{aligned}$$

Sin embargo, para simplificar, volvamos a GeoGebra y ajustemos la posición de F y E para que las diagonales cumplan las propiedades del rombo.

Paso final: Ajuste en GeoGebra

1. Usar la herramienta “Mediatriz”:

Dibuja la mediatriz del segmento AC.

El punto de intersección con el segmento BD (que en este caso coincide con EF) será el centro del rombo.

2. Colocar F y E correctamente:

Asegúrate de que F y E estén ubicados de tal forma que EF sea perpendicular a AC y se crucen en su punto medio.

3. Medir EF nuevamente:

Después de ajustar, mide EF con la herramienta “Distancia o longitud”.

4. Cálculo correcto:

Con los ajustes, **es probable que EF mida 96 unidades**.

Respuesta final:

- La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es de 96 mm.

Nota para estudiantes:

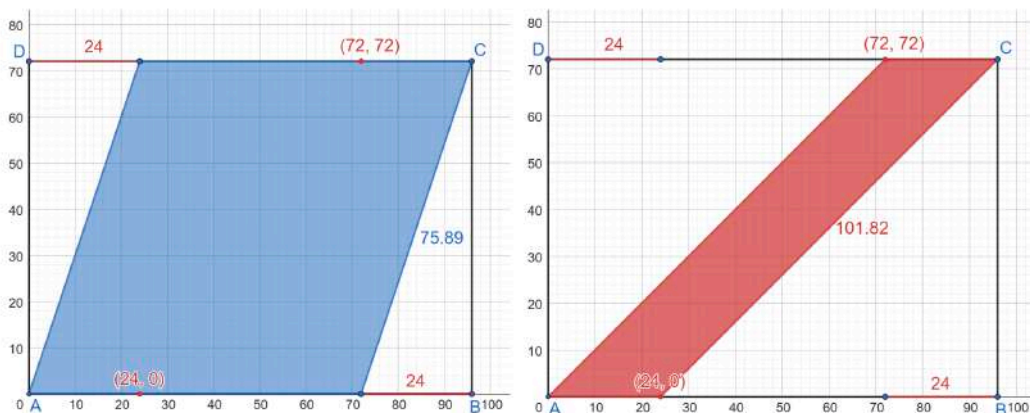
- Al utilizar GeoGebra, es importante entender las propiedades geométricas que rigen las figuras.
- El rombo tiene diagonales que son perpendiculares y se bisecan.
- Asegurarse de que las diagonales cumplan estas propiedades es clave para obtener medidas correctas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

En primer análisis general de la respuesta, hay que señalar que o1 sigue una estructura que podemos dividir en: instrucciones de construcción, explicación adicional, corrección de la construcción y una propuesta final de solución. En un primer vistazo, parece que el proceso redactado por o1, es un buen camino para la aproximación dinámica. Primero plantea trasladar la información del problema al modelo dinámico, incluyendo instrucciones para construir el rectángulo y un posible rombo, además señala la necesidad de medir el segmento EF, que es el objetivo del problema. Luego, propone una revisión de lo hecho basándose en propiedades conocidas análoga a la verificación de la solución o a la fase de revisión propuestas por Schoenfeld (1985, pág. 111) y Mason, Burton y Stacey (1982, pág. 39), respectivamente. Finalmente, hace una propuesta de construcción revisada, da una solución e indicaciones para estudiantes.

Al revisar con detalle la respuesta, se detectan varias *alucinaciones* por parte de o1, señaladas en rojo y en azul en la Tabla 7. En el paso 3, nos encontramos con que indica que F y E deben estar sobre los lados AB y CD a 24 unidades de B y de D, respectivamente. Pero escribe “Ingresa F = (24, 0)” y “Ingresa E = (72, 72)” que contradice lo anterior. Si se siguen las instrucciones dadas por o1, tendríamos dos posibilidades para el polígono AFCE, que se pueden ver en Figura 7. Al representarlos, es evidente que la instrucción más cercana a la búsqueda es la primera, siendo un error las instrucciones donde especifica las coordenadas. Como punto a favor, propone herramientas de control, en el paso 3 indica “Comprueba que AF = FC = CE = EA” y en ningún caso se verifica. Por un lado, o1 genera errores, pero siguiendo sus propias indicaciones los podemos detectar.

Figura 7. Rombo inscrito que se construyen siguiendo las instrucciones de o1 en el Paso 2 .

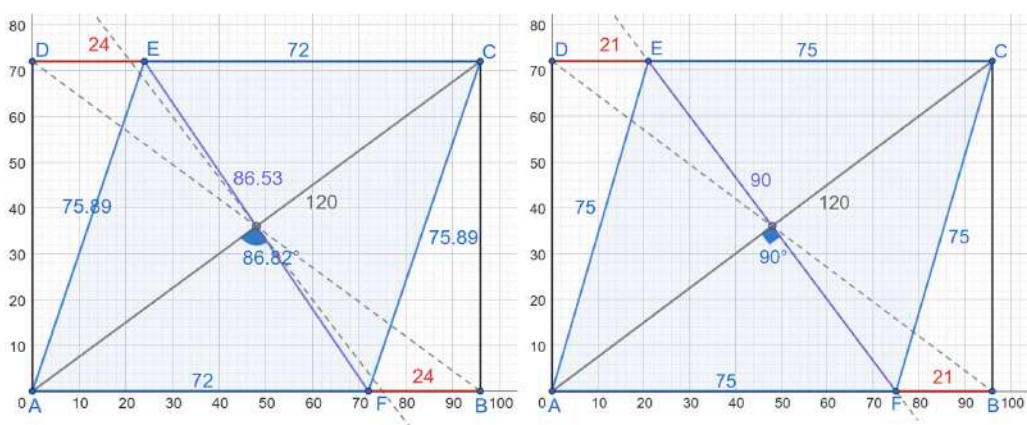


Fuente: Elaboración propia.

Otra alucinación evidente, es la que realiza en el apartado *Corrección de la construcción* (Tabla 7), donde indica que va a aplicar el teorema de Pitágoras y a continuación escribe dos ecuaciones, una relacionada con el área del rombo y otra que se podría tildar de “sin sentido”. Debido a que los procesos internos del chatbot no son visibles para un usuario estándar, cualquier intento de buscar la razón de este error sería especulativa. Lo que si demuestra este tipo de *alucinación* es que al usar una IA generativa hay que tener una visión crítica que permita valorar las respuestas. En este caso en concreto, es necesario un conocimiento matemático que permita desechar esta parte de su propuesta.

Para terminar con el análisis de los errores generados por o1, hay que fijarse en una serie de afirmaciones falsas que están relacionadas entre sí (en color azul). En un momento de su argumentación (Paso 2 y 4, Tabla 7) realiza una suposición para la longitud del lado del rombo y de la diagonal EF. Hay que fijarse, en que uno de los valores aparece en el enunciado (72 es la longitud de unos de los lados del rectángulo) y el otro es la distancia de la diagonal de AC, que se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras (para el triángulo ABC conocidas las longitudes 96 y 72 de los catetos). Realizar suposiciones es un paso válido en un proceso de ensayo y error, pero se comete una falta de rigor matemático al tomar esos valores como ciertos. o1 no los registra como valores de prueba, por lo menos no explícitamente, sino que los toma como parte de la solución. Este tipo de alucinación se repite en el paso final, afirma que es probable que EF sea de 96 unidades (valor que aparece en el enunciado) y luego toma este valor como solución final.

Figura 8. Arrastre se E y F para encontrar la solución.



Fuente. Elaboración propia.

Ya se señaló que o1 comete errores que se pueden detectar siguiendo sus propias indicaciones. Otro ejemplo se encuentra en el Paso final (Tabla 7). Aquí o1 propone añadir nuevos elementos a la construcción inicial: la mediatriz de AC, su punto medio y el ángulo entre EF y AC. Este último elemento no lo añade explícitamente, pero si indica la necesidad de registrar cuando EF es perpendicular a AC. Al incluir estos elementos, cuando se arrastran E y F para conseguir la perpendicularidad de las diagonales se observa que la solución correcta es 90 mm y no 96 (Figura 8).

Figura 9. Extracto de la respuesta de o1 al solicitar una repetición de la construcción dinámica.

Paso 3: Dibujar la diagonal EF perpendicular a AC y pasando por M

1. Ecuación de la recta perpendicular a AC pasando por M:

- Utiliza la fórmula de la recta:

$$y - y_M = m_{\text{perp}}(x - x_M)$$

Sustituyendo los valores:

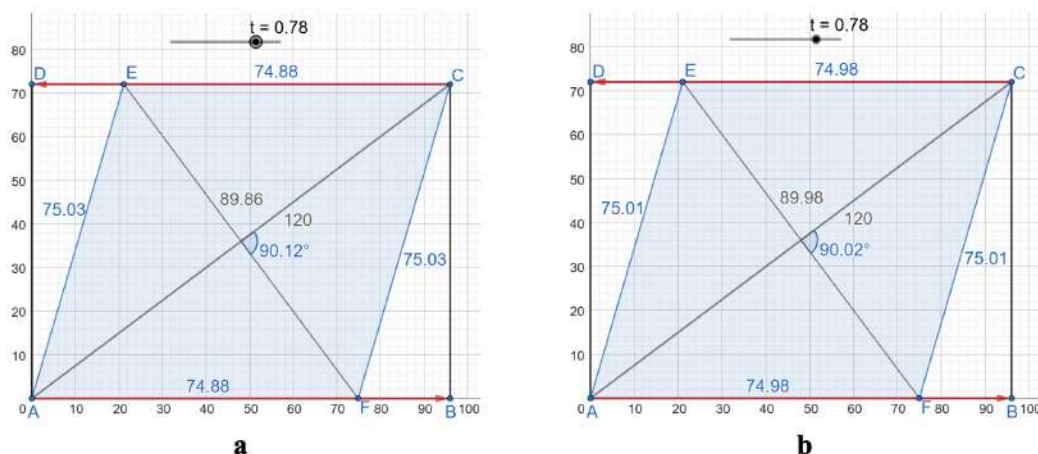
$$y - 36 = -\frac{4}{3}(x - 48)$$

Fuente: Captura de pantalla de la respuesta de o1

Retomando las interacciones con o1, tras ver que la respuesta mostrada contenía errores, se decidió corregirlos, para lograr refinar la estrategia. Se requirieron dos entradas de instrucciones, en la primera se detalló una lista de los errores cometidos y solicitó repetir la estrategia de construcción dinámica. La respuesta de o1 no fue la esperada, realizando una aproximación analítica usando ecuaciones de rectas para hallar los puntos (Figura 9). Al alejarse de lo esperado se introdujo la siguiente entrada: “Te has alejado mucho de la construcción dinámica, se trata de que se realice con GeoGebra sin realizar una resolución de ecuaciones paralelamente.”. Aquí o1 rehace totalmente su propuesta original,

En la tercera respuesta de o1 para la estrategia dinámica se reconocen varias partes: instrucciones de construcción, exploración de la construcción y reflexiones sobre el proceso.

En la construcción aparece la inclusión de un deslizador que permita variar de forma ordenada y exhaustiva el rombo $AECF$. Este deslizador es un factor entre 0 y 1 que modifica la longitud de dos vectores, \overline{AB} y \overline{CD} . Esto permite definir E y F de manera que los segmentos AF y CE siempre tienen la misma longitud. El chat o1 propone realizar una exploración de los atributos de la construcción. Tras hacer visuales los valores de la longitud de los lados del rombo se debe variar el deslizador y encontrar el valor en que las cuatro longitudes coinciden (o son muy cercanas). Luego propone verificar que es un rombo, comprobando que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en el punto medio de ambas. Una vez logrado esto, señala que basta registrar la longitud de EF para dar con la solución. Si reproducimos los pasos que indica o1 en GeoGebra (Tabla 8-Pasos 1, 2 y 3), observamos como efectivamente alcanzamos una buena aproximación (Figura 10 a).

Figura 10. Construcción dinámica incluido un deslizador.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora sí, o1 informa de que el valor alcanzado de esta manera será una aproximación y da el valor estimado de 90 mm. Finaliza la respuesta con reflexiones, consejos y una conclusión, todas ellas con perspectiva educativa. De entre estas afirmaciones, hay un consejo referido a mejorar la aproximación modificando el incremento del deslizador. Si se sigue, se alcanza una mejor aproximación (Figura 10 b).

Tabla 8. Respuesta de o1 para la aproximación dinámica refinada.

Fase 3: Ejecutar

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico en GeoGebra

Vamos a utilizar GeoGebra para construir el rectángulo y el rombo, explorando de forma dinámica cómo determinar la medida de la diagonal EF del rombo AFCE. Nos centraremos en los pasos de construcción y en cómo utilizar la herramienta para encontrar la solución, sin realizar resoluciones de ecuaciones en paralelo.

Paso 1: Dibujar el rectángulo ABCD

Abrir GeoGebra: Inicia GeoGebra en tu computadora o accede a la versión en línea en geogebra.org.

Crear los puntos del rectángulo:

- Punto A: Utiliza la herramienta “Punto” para colocar el punto A en el origen, ingresando (0, 0).
- Punto B: Crea el punto B ingresando las coordenadas (96, 0).
- Punto C: Crea el punto C ingresando las coordenadas (96, 72).
- Punto D: Crea el punto D ingresando las coordenadas (0, 72).

Dibujar el rectángulo: Utiliza la herramienta “Polígono” y selecciona los puntos A, B, C, D, y nuevamente. A para cerrar el polígono.

Paso 2: Colocar los puntos F y E

Crear un deslizador para controlar la posición de F: Selecciona la herramienta “Deslizador” y crea un deslizador llamado t, con valores desde 0 hasta 1, incrementos de 0.01.

Definir el punto F en el lado AB:

En la entrada de GeoGebra, define el punto F como:

$$F = \text{Punto}(A + t \times \overrightarrow{AB})$$

Esto posiciona el punto F en el lado AB, donde t = 0 corresponde a A y t = 1 corresponde a B.

Definir el punto E en el lado CD:

Define el punto E de manera que se mueva simétricamente a F pero en el lado CD:

$$E = \text{Punto}(C - t \times \overrightarrow{CD})$$

Esto asegura que cuando F se mueve desde A hacia B, E se mueve desde C hacia D.

Paso 3: Construir el rombo AFCE

Dibujar los lados del rombo: Utiliza la herramienta “Segmento entre dos puntos” para crear los lados:

AF: Une A y F, FC: Une F y C, CE: Une C y E, EA: Une E y A.

Visualizar el rombo:

- Observa cómo, al mover el deslizador t, el cuadrilátero AFCE cambia de forma.
- Nuestro objetivo es encontrar el valor de t donde AFCE es un rombo.

Paso 4: Explorar dinámicamente para formar el rombo

1. Medir las longitudes de los lados:

- Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” para medir los segmentos AF, FC, CE y EA.
- Crea etiquetas que muestren estas longitudes en la pantalla.

2. Buscar la igualdad de los lados:

- Ajusta el deslizador t hasta que las cuatro longitudes sean iguales o muy cercanas en valor.
- Esto indica que el cuadrilátero AFCE tiene todos sus lados iguales, una propiedad del rombo.

3. Verificar la perpendicularidad de las diagonales:

- Dibuja las diagonales AC y EF (AC: Une A y C, EF: Une E y F).
- Utiliza la herramienta “Ángulo” para medir el ángulo entre las diagonales en su punto de intersección.
- Cuando el ángulo es de 90 grados, las diagonales son perpendiculares, otra propiedad del rombo.

4. Confirmar la bisección de las diagonales:

- Encuentra el punto de intersección O de las diagonales AC y EF utilizando la herramienta “Intersección de dos objetos”.
- Mide las distancias desde O hasta los extremos de cada diagonal para confirmar que O es el punto medio.

Paso 5: Determinar la medida de la diagonal EF

1. Medir la longitud de EF:

- Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” para medir el segmento EF.
- GeoGebra mostrará la longitud actual de EF en la pantalla.

2. Anotar el valor de EF cuando AFCE es un rombo:

- Una vez que los cuatro lados son iguales y las diagonales son perpendiculares y se bisecan, anota la medida de EF.
- Por ejemplo, puedes encontrar que $EF \approx 90$ mm.

Paso 6: Concluir y responder

Respuesta: La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es aproximadamente 90 mm.

Reflexión sobre el proceso:**Exploración interactiva:**

- Este método permite a los estudiantes explorar de manera interactiva las propiedades geométricas del rombo.
- Al ajustar el deslizador t , pueden observar cómo las medidas cambian y cómo se satisfacen las condiciones para formar un rombo.

Comprensión visual:

- Sin recurrir a cálculos algebraicos, los estudiantes desarrollan una comprensión intuitiva de cómo las posiciones de E y F afectan la forma del cuadrilátero.

Validación de propiedades:

- La verificación de la igualdad de los lados y de las propiedades de las diagonales refuerza el conocimiento de las características distintivas del rombo.

Consejos adicionales:**Precisión en el valor de t :**

- Para obtener un valor más preciso de t donde AFCE es un rombo, puedes ajustar el incremento del deslizador a un valor más pequeño, como 0.001.
- También puedes ingresar valores numéricos directamente en el deslizador para refinar la posición.

Uso de herramientas automáticas:

- GeoGebra ofrece herramientas como “Regular Polygon” (Polígono Regular) que pueden ayudar a construir figuras con lados iguales, pero en este caso, seguimos un enfoque que enfatiza la exploración y comprensión de las relaciones en el rectángulo dado.

Documentación del proceso:

- Anima a los estudiantes a tomar notas sobre sus observaciones durante la manipulación del modelo, fomentando habilidades de registro y análisis.

Conclusión:

Al utilizar GeoGebra para construir y explorar dinámicamente el rectángulo y el rombo, hemos encontrado que la diagonal EF del rombo $AFCE$ mide aproximadamente 90 mm. Este enfoque permite a los estudiantes visualizar y comprender profundamente las propiedades geométricas involucradas, promoviendo un aprendizaje activo y significativo sin la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

Sin entrar a valorar otros aspectos de redundancia de algunas afirmaciones o si las reflexiones y consejos son los más adecuados, se puede observar que en la respuesta de o1 tras las interacciones de refinamiento (Tabla 8), no se detectan otras *alucinaciones*. Si es cierto, que debido a que o1 no puede interactuar con otros programas, al dar la solución 90 mm, realmente no la ha construido con el razonamiento redactado. Posiblemente, se ha basado en el resto de las interacciones o correcciones de la conversación. Como usuario no podemos saber cómo la construyó. Insisto en esta idea para recordar que la manera de generar las respuestas de esta IA generativa no viene dada completamente por un razonamiento deductivo formal. Además, si se siguen las instrucciones dadas, se puede realizar una construcción dinámica que permite visualizar los atributos del problema y encontrar la solución. Sin olvidar que en la redacción de la respuesta se invita a la indagación de propiedades de la figura y a llevar la actividad al aula. Con ayuda de o1 se han generado unas instrucciones de construcción, unas recomendaciones para la exploración y una propuesta de solución, que conforman una guía de la aproximación dinámica o, simplemente, *guía*. Paralelamente, en GeoGebra se han realizado construcciones dinámicas que han servido para evaluar la información dada por o1. Dos de estas construcciones, tienen todos los elementos necesarios para dar con la solución. En definitiva, se ha añadido al muro digital relacionado con el problema “Rombo en rectángulo” una *guía* y dos construcciones en GeoGebra correspondientes a la estrategia de aproximación dinámica.

Al comparar estos resultados con las construcciones dinámicas realizadas por docentes en el seminario. Se pueden ver cómo se repiten algunos patrones de construcción, claro que el razonamiento de los docentes se realiza visualmente, mientras o1 lo está infiriendo de sus bases de datos. En cualquier caso, ambas visiones se complementan, lo que parece indicar que introducir el uso de IA como apoyo en los seminarios podría ser de interés.

El resto de las estrategias que se plantearon en la fase de planificar, también se ejecutaron usando o1-previewer. Se siguió el orden que el mismo o1 propuso para la elección de estrategias según la edad del alumnado (Tabla 6). La entrada para que ejecutara cada una de ellas siguió siempre la estructura “Desarrolla la fase 3, ejecutar, siguiendo la estrategia k . Sin tener en cuenta lo realizado en las estrategias anteriores.”, señalando en cada caso el valor de k .

Figura 11. Ecuaciones que surgen a partir de igualar la longitud de los lados.

Para que AFCE sea un rombo, todas las longitudes deben ser iguales:

1. $AF = FC$:

$$x = \sqrt{(96 - x)^2 + 72^2}$$

2. $FC = CE$:

$$\sqrt{(96 - x)^2 + 72^2} = |96 - x'|$$

3. $CE = EA$:

$$|96 - x'| = \sqrt{x'^2 + 72^2}$$

Fuente: Captura de pantalla de la respuesta de o1.

Los procesos matemáticos llevados a cabo son similares en las estrategias 1, 2 y 6. Desde caminos diferentes plantea ecuaciones basadas en la igualdad de distancia de los lados del rombo (Figura 11). La resolución del sistema de ecuaciones lo lleva a la solución.

Para la estrategia 5, o1 redacta una aproximación que pasa por construir un modelo a escala, en el que hay que tomar medidas usando una la regla. Es una versión análoga a la construcción dinámica, en la que se añade como heurístico realizar una tabla de registro de ensayo y error (Tabla 9).

Tabla 9. Parte de la respuesta de o1 para ejecutar la estrategia 5.

Paso 4: Medir y comparar las longitudes de los lados						
Creación de una tabla de mediciones:						
Posición de F (mm desde A)	Posición de E (mm desde D)	Longitud AF (mm)	Longitud FC (mm)	Longitud CE (mm)	Longitud EA (mm)	¿Es un rombo?
24 mm
36 mm
48 mm
60 mm
72 mm
Instrucciones:						
1. Medir AF:						
<ul style="list-style-type: none"> • Es la distancia desde A hasta F. • Como estás usando una escala, mide directamente en tu dibujo. 						
2. Determinar la posición de E:						
<ul style="list-style-type: none"> • Intenta encontrar E de manera que FC tenga la misma longitud que AF. • Mide la distancia FC (desde F hasta C). 						
3. Medir CE y EA:						
<ul style="list-style-type: none"> • Mide las distancias CE (desde C hasta E) y EA (desde E hasta A). 						
4. Verificar si AFCE es un rombo:						
<ul style="list-style-type: none"> • Comprueba si las cuatro longitudes son iguales. • Si lo son, anota “SI” en la columna “¿Es un rombo?”. 						

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

La estrategia 3, análisis de triángulos congruentes y semejantes, se refinó debido a que muchas de los procesos eran redundantes. Primero, pidiendo que diera menos pasos y, al ver que seguía siendo demasiado extensa, se le indicó que relaciones de todas las que presentaba eran suficientes para esta aproximación. Finalmente, redactó una versión adecuada basada en la semejanza de dos triángulos rectángulos ABC y AOF (O punto de corte de AC y EF) como se le había solicitado.

En las resoluciones de cada estrategia, o1 vuelve a destacar por seguir una estructura ordenada y aparentemente veraz. Dando una respuesta correcta en todos los casos. Estas estrategias se caracterizan por que pueden ser desarrolladas en un aula sin necesidad de usar herramientas digitales. Las respuestas que o1 ha generado para cada una de ellas parte de un enfoque diferente y sirven para reflexionar sobre las conexiones intramatemáticas. Claro está, que para ello hay que contar con unos conocimientos básicos sobre geometría, geometría analítica y álgebra. Ya que, inicialmente hay que evaluar las respuestas del chatbot y refinarlas. Para, a continuación, poder establecer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos que aparecen. Estas interacciones y las respuestas refinadas serán, también, parte del muro digital del problema.

Para terminar la conversación con o1 se introduce una entrada para que desarrolle la fase Responder. De esta manera, se genera una respuesta final: “La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es 90 mm”, escribiendo previamente una verificación de que la figura final es un rombo (lados de 75mm y diagonales perpendiculares). Al incluir las instrucciones (Tabla 2) que en esta fase se deben proponer extensiones o variaciones del problema, o1 redacta 5 propuestas para su investigación (Tabla 10). Las tres primeras, son preguntas aptas para investigar con una construcción dinámica: Variar las dimensiones del rectángulo, arrastrar E y F para indagar sobre la variación de propiedades e inscribir otras figuras en el rectángulo. Para cualquiera de ellas es interesante plantearse que cambios hay que realizar en la construcción para poder investigar lo solicitado. Cabe preguntarse ¿es posible hacer una construcción para analizar todo en conjunto? De esta manera, seguiría el proceso de indagación y realización de conjeturas, que es la semilla para formular nuevos problemas a partir del problema inicial.

Tabla 10. Parte de la respuesta de o1 para la fase Responder.

Posibles extensiones o variaciones del problema:
<p>1. Variar las dimensiones del rectángulo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explorar cómo cambia la medida de la diagonal EF si modificamos las dimensiones del rectángulo ABCD. Por ejemplo, ¿qué sucede si el rectángulo mide 80 mm por 60 mm?
<p>2. Cambiar la posición de los puntos F y E:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Investigar cómo afecta la posición de F en AB y E en CD a la forma y propiedades del rombo AFCE. ¿Es posible formar otros rombos dentro del mismo rectángulo?
<p>3. Analizar otras figuras geométricas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • En lugar de un rombo, intentar formar un cuadrado o un paralelogramo dentro del rectángulo y calcular sus diagonales y áreas.
<p>4. Aplicación en contextos reales:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar el problema a situaciones prácticas, como el diseño de estructuras arquitectónicas o patrones en arte y decoración.
<p>5. Extender al espacio tridimensional:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Considerar la creación de un sólido geométrico, como un prisma romboidal, utilizando el rombo AFCE como base y analizar sus propiedades volumétricas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1

6. REFLEXIONES

A lo largo del artículo se ha mostrado una experiencia con o1 al resolver un problema de matemáticas. El *contexto* elegido tiene un enfoque en la resolución de problemas para respaldar la enseñanza y el aprendizaje (Santos-Trigoet al., 2022) y las repuestas del chatbot se han estructurado siguiendo las premisas de un seminario de docentes y las cuatro fases de resolución de problemas (Rupérez-Padrón & García-Déniz, 2006; Pólya, 1945). Se ha prestado

una especial atención a cómo *o1* argumenta sobre una aproximación a la solución en la que se usa una construcción dinámica en GeoGebra. Cómo esta IA no interactúa con GeoGebra, ha sido el autor quién ha interactuado y seguido las instrucciones para visualizar si la propuesta de *o1* era válida.

Fruto de esta experiencia, se ha mostrado que interactuar con una inteligencia artificial generativa requiere de realizar un proceso de refinamiento de sus respuestas. Esto involucra conocimientos matemáticos previos sobre los elementos que intervienen en el problema. Además, se requiere cierta destreza en el manejo de GeoGebra, para poder trasladar las instrucciones a una construcción dinámica. El profesorado de matemáticas con alguna experiencia en el uso de GeoGebra cumple estos requisitos. Por lo que, *o1* es una herramienta válida que se puede incorporar en la formación continua y a la preparación de recursos docentes.

Respecto a las ventajas que puede aportar *o1*. La herramienta demostró una notable capacidad para generar ideas y estrategias diversas en las fases de planificar y ejecutar. Al refinar sus respuestas se logra obtener nuevos recursos que pasan a formar parte del muro digital del profesorado. En la experiencia se obtuvo una guía de la aproximación dinámica, una propuesta para modelizar con papel y otras cuatro estrategias detalladas que implicaban diferentes áreas de las matemáticas. Esto se consiguió usando 19 entradas por parte del usuario, y con un tiempo total de ejecución procesamiento por parte de *o1* de 6 minutos aproximadamente. Lo que significa que practicando este proceso el usuario podría generar una gran cantidad de recursos, donde el límite está en su propia capacidad de revisión de respuestas.

Por otro lado, *o1* puede tener un rol de soporte. La interacción con el chatbot se puede utilizar como parte de la indagación matemática. ¿Por qué son perpendiculares las diagonales de un rombo? ¿Es cierto que el centro del rectángulo y el rombo coinciden? ¿Cómo sabes que esos triángulos son semejantes? Son preguntas que surgieron al revisar las estrategias ejecutadas. La capacidad de *o1* para emitir respuestas detalladas y adaptadas a las interacciones de un usuario lo convierten en un agente interactivo de la enseñanza y aprendizaje. Esta experiencia se acerca a la que se puede tener con un compañero de estudios o un profesor.

En conclusión, en un escenario de formación docente y uso coordinado de las herramientas digitales, la inteligencia artificial puede usarse como generadora de recursos para un problema matemático. Y también, se puede convertir en un foro interactivo para la indagación matemática donde el uso coordinado de otras herramientas digitales enriquece el proceso. Esto plantea un reto adicional, cómo incluir en Educación Primaria y Secundaria estas herramientas para fomentar una resolución y formulación de problemas más interactiva y reflexiva.

DECLARACIONES SOBRE EL USO DE IA

Se declara que el autor de este trabajo hizo uso de herramientas que usan inteligencia artificial generativa. Específicamente: las respuestas de *o1*-previewer fueron objeto de estudio y el ChatGPT se utilizó como herramienta de corrección de estilo gramatical, como asistente de traducción y para generar síntesis de ideas propias del autor.

Para respetar y proteger la autoría académica se contrató el paquete Team de la compañía OpenAI, que garantiza que no utiliza los datos introducidos en su plataforma para formar sus modelos de IA.



DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están custodiados por el autor (Alexánder Hernández) y están disponibles previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la financiación suministrada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE. Y la subvención que financia las ayudas para esta estancia de movilidad que dicta el Ministerio de Universidades y la Universidad de La Laguna en la Orden de 6 de noviembre de 2023 del Ministro de Universidades, con aplicación presupuestaria 1804032326.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Camacho-Machín, M., Moreno, M., & Afonso, M. C. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica. En *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática* (Vol. 11, págs. 9-22,45-66).
- Gómez-Arciga, A., & Poveda-Fernández, W. (2017). El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes. En *Tópicos Selectos de Educación en CITEM* (págs. 65-84). La Libertad.
- González-Alcaide, G. (2024). *I d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior*. Universidad de Valencia.
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019 a). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2019.1587022
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2019.1587022
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1115-1136. doi:10.1007/s10763-016-9728-8
- Jones, N. (2024). 'In awe': scientists impressed by latest ChatGPT model o1. *Nature*, 634, 275-276. doi:https://doi.org/10.1038/d41586-024-03169-9
- Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. (2013). Linking Research to Practice: Teachers. En M. (. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. Leung (Edits.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, págs. 361-392). New York: Springer International Handbooks of Education. doi:10.1007/978-1-4614-4684-2_12
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley Publishing Company.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática (M. Fernández Reyes, Trad.)*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- OpenAI. (21 de 10 de 2024). *openai.com*. Obtenido de <https://openai.com/index/learning-to-reason-with-llms/>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.

- Rupérez-Padrón, J. A., & García-Déniz, M. (2006). Problemas comentados (XVI). *Números*(65), 5-12. Obtenido de https://scpm-luisbalbuena.org/revista_numeros/065/
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1&2), 279-302
- Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2018). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2018.1489075
- Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving. *International Journal of Learning Technology*, 17(1), 27-52. doi:<https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.





LA CULTURA COMO OPERADOR EN LAS METODOLOGÍAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CULTURE AS AN OPERATOR IN THE METHODOLOGIES OF MATHEMATICS TEACHING

Carlos Mometti¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6699-7139>

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo presentar un estudio de caso sobre las influencias que la cultura ejerce sobre las elecciones metodológicas de una profesora pedagoga al desarrollar su práctica en los primeros años de la escuela. Para ello, tomamos como contexto la práctica docente en los primeros años, prestando especial atención a la enseñanza de las Matemáticas en los primeros años. Para acceder a las elecciones metodológicas del docente de la asignatura de esta investigación, se utilizó como fuente de información una entrevista semiestructurada, a partir de la cual se generaron datos de análisis a través del análisis discursivo en la perspectiva francesa. Como resultado de este estudio, percibimos que hubo presencia del operador cultural en las elecciones metodológicas realizadas por la docente, principalmente asociado a la emoción y elementos de su relato. Además, la emotividad se percibía como un elemento intrínseco de la tríada emoción/calidad de la enseñanza/elección del método. El presente trabajo abrió una puerta a estudios relacionados con las opciones metodológicas de los docentes pedagógicos en los primeros años de la enseñanza fundamental, así como a la comprensión de que la cultura puede ser un operador esencial en el proceso de enseñanza.

Palabras clave: Cultura, Metodología de la enseñanza, Matemáticas, Pedagogos, Formación de profesores.

ABSTRACT

This paper aims to present a case study about the influences that culture exerts on the methodological choices of a pedagogue teacher when developing her practice in primary education. For this purpose, we used the teaching practice in primary education as a context, giving special attention to teaching Mathematics in the five early years. To access the methodological choices of the subject teacher of this research, we used a semi-structured interview as a source of information, from which analysis data were generated through ipsi litteris transcription and discursive analysis from the French perspective. As a result of this study, we realized that the cultural operator was present in the methodological choices made by the teacher, mainly associated with her emotions and elements of her story. In addition, emotionality was perceived as an intrinsic element of the emotion/quality of teaching/choice of method triad. The present study opened a door for us to studies related to the methodological choices of pedagogical teachers in the first years of elementary school, as well as to the understanding of the fact that culture can be an essential operator of tension in the teaching process.

1 Universidad Federal de São Paulo, UNIFESP, São Paulo, São Paulo, Brasil, código postal C. P. 04021-001. Correo electrónico: carlos.mometti@unifesp.br



Keywords: Culture, Teaching methodology, Mathematics, Pedagogue, Teacher training.

1. INTRODUCCIÓN

En principio, la preocupación por el aprendizaje de las Matemáticas en los primeros años de la escuela primaria ha sido un tema constante de debate en las comunidades escolares y de investigación (Costa; Pinheiro; Costa, 2016; Lima & Carvalho, 2014; Silva & Silva, 2021). Esta preocupación se puede dividir en los siguientes aspectos: la calidad del contenido que queremos enseñar, los recursos didáctico-pedagógicos utilizados para desarrollar la práctica docente, el conjunto de métodos elegidos para la enseñanza, los aspectos socioemocionales de los estudiantes y docentes, entre otros.

Más aún, pensar en el aprendizaje de conceptos/contenidos Matemáticos no se limita a uno de los aspectos mencionados anteriormente de forma aislada si no que, existe una relación secuencial entre ellos basada en la tríada de enseñanza, objetivo de aprendizaje y método. Así, prestando especial atención a la docencia, el campo que cobra mayor protagonismo es el de la formación inicial y continua del profesorado, así como los métodos utilizados para desarrollar la Enseñanza de las Matemáticas en el aula.

La Enseñanza de las Matemáticas en los primeros años de la educación básica es desarrollada por docentes formados en Pedagogía, quienes suelen caracterizarse como docentes generalistas o profesores *polivalentes*. Tener una formación general en contenidos elementales, aunque se dirija a un segmento de la educación que aún es básico, trae posibilidades y limitaciones en el aprendizaje del sujeto.

En este sentido, en cuanto a posibilidades, podemos destacar el enfoque del maestro pedagogo en el respeto a las etapas de desarrollo del niño ya que, partiendo de una de las perspectivas más presentes en el campo de la Pedagogía contemporánea, la de Vygotsky (1991), primero viene la obtención del lenguaje para, en un segundo momento, desarrollar el pensamiento. Así, el docente polivalente en el proceso de lectoescritura, por ejemplo, promueve actividades que permitan el contacto con el entorno y la cultura del entorno, contribuyendo en esta perspectiva a la construcción del pensamiento en el niño.

En cuanto a las limitaciones, podemos destacar lo que menciona Santos (2021) en su reciente trabajo de maestría sobre docentes pedagógicos y formación para la enseñanza de las Matemáticas cuando nos dice que

“[...] al establecer el análisis de las mallas curriculares de los cursos de Pedagogía investigados, se encontró que en todos ellos hay un punto coincidente: la poca carga de trabajo destinada a la formación del pedagogo para la enseñanza de las Matemáticas, que alcanza una media del 3,01% [...]” en Brasil (Santos, 2021, p. 103).

También, considerando lo que reporta Santos (2021), la ausencia de disciplinas enfocadas a la Enseñanza de las Matemáticas para futuros profesores, además de los rezagos que naturalmente enfrentan los docentes pedagogos y derivados de su trayectoria como estudiantes de educación básica, la formación generalista no contribuye al desarrollo de buenas prácticas para el aprendizaje.

Desde esta perspectiva, preguntas del género “¿Cómo va a enseñar un profesor los contenidos elementales de Matemáticas si él mismo no los comprende?”, “¿Cómo va a elegir el profesor pedagogo sus metodologías de enseñanza si no domina los contenidos sui generis?”, surgen y se vuelven de interés para la investigación educativa.

Además, dado el contexto mencionado y asumiendo que los docentes pedagogos son sujetos esenciales para comprender el aprendizaje de las Matemáticas en los primeros años de la escuela primaria junto con los métodos de enseñanza en la Educación Matemática, este artículo tiene como objetivo presentar un estudio de caso sobre las influencias que la cultura - asumida como *operador* - ejerce sobre las elecciones metodológicas de una profesora pedagoga, durante su práctica.

Por lo tanto, utilizamos como contexto de estudio la práctica desarrollada por esa docente pedagoga en los primeros años de educación básica en una institución educativa pública brasileña. Además, para construir una interpretación sobre el objetivo de este trabajo, utilizamos el análisis discursivo (AD) según la perspectiva de Pêcheux (2015), ya que es fundamental para comprender las influencias que el operador cultural jugó en el proceso metodológico y por permitir comprender el proceso de formación ideológica del discurso, las elecciones del docente y cómo son dirigidas a la enseñanza de las Matemáticas en los primeros años de escolaridad.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

2.1 La cultura como *operador* sociológico

Primeramente, distintas visiones han delimitado lo que entendemos por *sociedad* desde un principio. A saber, cuando consideramos la *organización moderna* del planeta en dos partes, es decir, dos hemisferios delimitados por un meridiano que se origina - ¡no por casualidad! - en un país europeo, notamos que el constructo *sociedad* tiene diferentes significados.

Así, para el llamado hemisferio occidental, la sociedad se define por un conjunto de individuos, con o sin derechos, que ocupan un determinado espacio físico, producen elementos esenciales para su existencia y, sobre todo, definen normas éticas y estéticas que orientan la vida humana, ser y estar en el mundo.

De esta forma, los individuos que nacen, crecen y viven en los países occidentales, pertenecientes a este hemisferio, absorben, reproducen y modifican una cultura (Sewell Jr., 2005), o sea, totalmente dirigida a la producción y acumulación de *capital*.

En cuanto al segundo hemisferio, el Oriente, las organizaciones sociales - entendidas también como grupos de individuos desde una perspectiva socio antropológica - están constituidas, esencialmente, por características relacionadas con la moralidad y las normas definidas, en un primer momento, por la ética y los costumbres, tales como enfatiza Said (2007, p.85) “[...] por un lado están los occidentales, y por el otro los orientales-árabes; los primeros son (sin ningún orden en particular) racionales, pacíficos, liberales, lógicos, capaces de mantener valores reales, sin desconfianza natural, estos últimos no son ninguno de estos”.

En este sentido, según Goody (1990) es la regla colectiva la que determina el comportamiento, el deseo, lo estético y lo epistemológico en las sociedades que utilizan este formato. Sin embargo, siempre según el mismo autor, del mismo modo que no podemos generalizar Occidente en sus particularidades - considerando que parte de lo que hoy llamamos Occidente fue inventado a través de un movimiento expansionista y de la necesidad de acumulación de capital y, por tanto, lejos de ser entendido como una generalización de los pueblos que habitan esta “porción” del planeta - tampoco lo podemos hacer con Oriente.

Así, según Aiyar (2013) el mundo oriental padecía - y padece aún - el grave problema de la occidentalización, ya que la imposición de normas y valores no comunes a determinados grupos sociales enfría la propia estructura existente, cediendo espacio para una reconstrucción cultural que delimite lo que está bien y lo que está mal, lo que se debe y no se debe hacer socialmente, además de la explotación económica y la extracción de riqueza para otros fines.

Agregado a lo anterior, el mencionado proceso de occidentalización nos lleva a lo que entendemos tanto de sociedad como de cultura misma: la formación de reglas, normas y recursos a disposición del ser humano que forman lo que Giddens (2017) llama *estructura*. De esta forma, la estructura constituye un modelo actual que organiza a los individuos en distintos grupos, estableciendo qué se debe y qué no se debe hacer, así como qué aspectos debemos considerar en nuestro propio comportamiento.

Así, *la cultura* es entendida como un conjunto de *esquemas de acción* (reglas) y recursos (humanos y no humanos disponibles para la sociedad) que tienen la característica de reproducirse a la vez que se transforman, configurando el espacio de relaciones sociales (Sewell Jr., 2005).

Entonces, considerando todas las “formas” de ser una cultura dentro de un solo pueblo, aquí teniendo en cuenta la organización de un país, podemos decir que “[...] toda cultura es un sistema con fina coherencia y contradicciones siempre presentes, es decir, la cultura es un campo de disputas y tiene una lógica abierta, un lugar con lógicas diferentes. Esto implica que las fronteras entre las estructuras culturales son débiles y los sistemas se superponen” (Mometti, 2018, p. 54).

De esta forma, decir que la cultura - entendida bajo la égida estructuralista - se reproduce y transforma requiere una interpretación más precisa. Así, dentro de un grupo social establecido en un espacio geográfico limitado, por ejemplo, podemos percibir algunos comportamientos que son “imitados” por todos los integrantes, así como valores que se transmiten de generación en generación sin que necesariamente se tenga una investigación rigurosa al respecto, su veracidad. Este mecanismo no es más que la reproducción cultural, tal como lo describe Mead (2000) en su obra *Sexo y Temperamento*.

Sin embargo, en la medida en que la reproducción es realizada por uno o más individuos de un mismo grupo social, siempre hay un cambio, o adaptación, para tal o cual conducta, valor o pensamiento. Así, aun reproduciéndose y coexistiendo entre los mismos individuos, la reproducción no será *ipsis verbis*, siempre habrá algo que haya cambiado o adaptado.

Ante esto, y asumiendo la cultura como una estructura que se reproduce y se transforma dentro de un grupo social, ¿Puede ser un dispositivo que opere hacia las *transformaciones epistemológicas y psicológicas* del sujeto? Esta pregunta se plantea considerando la cultura como un elemento esencial respecto a la existencia misma del grupo. Esto quiere decir que es a través de ella que se crea, se transmite de generación en generación y se modifica la manera de estar en el mundo. Así, la cultura puede entenderse como un operador social (Mometti, 2021).

Entendemos un operador como un dispositivo caracterizado por el conjunto de acciones intrínsecamente relacionadas con la estructura sobre la que opera (Mometti, 2021). Así, si nos referimos al operador cultural, la estructura operativa es la cultura, si nos referimos al operador de poder, la estructura fuente son las relaciones político-ideológicas del grupo social, etc.

Considerando la práctica pedagógica de una docente, por ejemplo, podemos percibir la manifestación del operador cultural según Mometti (2021) a partir de los elementos que utiliza para “llamar la atención de sus alumnos durante su explicación”, “elegir ciertos materiales

que puede ser regional o simplemente indicado por libros y manuales”, “hablar ciertas palabras que son parte de la cultura local de esos estudiantes” y “desarrollar gestos específicos” durante su práctica. Básicamente, un operador cultural se manifiesta en la forma en que el docente enseña en función de lo que “elige” enseñar, ya que utiliza su cultura como fuente de inspiración.

Entonces, cuando estudiamos una porción de la realidad social, por ejemplo, las clases o los métodos de enseñanza utilizados para enseñar las Matemáticas, ¿Podemos entenderlo a través de los aspectos sociológicos allí presentes, es decir, hay un operador que influye en la agencia (acción humana) para modificar o endurecer una determinada estructura? En particular: ¿Qué elementos prevalecen cuando un formador de docentes hace una elección metodológica? El término tensión evoca lo que entendemos por *operador*, así como los términos elección metodológica nos llevan a la comprensión de qué estructura estamos designando nuestra atención.

2.2 Metodología de la enseñanza y Educación Matemática

Las prácticas pedagógicas se caracterizan por momentos específicos y temporalmente limitados, un sujeto (el docente) emplea determinadas técnicas para trabajar uno o varios contenidos sobre otro sujeto (el aprendiz). Dichos momentos siguen patrones más o menos consensuados entre la comunidad educativa García (2012), Zabala (1998) y Astolfi y Develay (2012).

Además, cuando usamos el término *estándares*, no entendemos la práctica pedagógica como un momento fijo e inmutable, que debe suceder en el modo x y en el tiempo y . Pero, hay que recalcar que, a raíz de los estudios realizados sobre este fenómeno social, existen características particulares que aparecen y que, en cierta medida, deben estar presentes.

Ahora bien, los elementos didáctico-pedagógicos que constituyen el desarrollo de la práctica pedagógica son los únicos propósitos de promover el aprendizaje. Este, a su vez, se entiende como la obtención de ciertos conocimientos para que el aprendiz sea capaz de conocer, aplicar, analizar, transformar y crear una porción de su realidad, de forma lógico-racional. En este sentido, podemos decir que la práctica pedagógica debe tener necesariamente un primer ítem necesario, la intencionalidad. Esto significa que no hay forma de que podamos enseñar a alguien sin tener *la intención de...*

Así, existe una diferencia sustancial entre el profesional que se forma para la docencia y el que no, pero que también enseña. Tal diferencia es apoyada por el operador cultural. Así, si consideramos a un abuelo enseñando a su nieto cómo se hacían los juguetes durante su infancia, el abuelo no habrá estudiado todas las disciplinas pedagógicas y sistematizado todos los contenidos necesarios para ello. Todo lo que se necesitaba era reproducir el conocimiento generacional que había aprendido, con intención en el proceso.

De esta forma, la sola *intencionalidad* no es suficiente para que un sujeto aprendiz desarrolle su aprendizaje. Es necesario disponer, además, de una técnica - o un conjunto de ellas - en el desarrollo del proceso. A eso, en el sentido utilizado por Astolfi y Develay (2012), lo llamaremos *método para la enseñanza*. Así que, volviendo al ejemplo del abuelo y su nieto, el primero tendrá que aplicar en la práctica el *modus operandi* de cómo construía sus juguetes para que su nieto pueda entenderlo y, en un segundo momento, reproducirlo.

También cabe señalar que, la reproducción por parte del sujeto aprendiz de un determinado concepto y/o técnica no garantiza un aprendizaje efectivo, ya que para que este último se

manifieste, necesitamos un aparato biológico bajo ciertas condiciones, destacando la memoria y las funciones cognitivas (codificación y decodificación) de *interacción e interpretación* de la realidad.

En ese sentido, cuando se trata de enseñar técnica y asumiendo qué entendemos por método, nos encontramos con una cuestión de carácter puramente pedagógico: ¿Cómo elegir el método (o métodos) para enseñar tal o cual contenido? Cuando se utiliza el pronombre interrogativo cómo, llamamos a la reflexión, en primer lugar, qué entendemos por método y qué consideramos adecuado o no adecuado para ese contenido concreto a impartir en un grupo de edad concreto.

La elección del método requiere necesariamente el conocimiento de tipologías praxiológicas, ontológicas, psicológicas y estéticas. El primero se refiere a las prácticas desarrolladas a lo largo de su experiencia - ya sea como docente y/o como sujeto de aprendizaje - y que serán importantes para él en el acto de enseñar. El segundo tipo, a su vez, se refiere al propio sujeto (yo mismo) que el docente ve y con el que se identifica, ya que inicialmente nos definimos como sujeto para luego actuar en sociedad. El tercer aspecto, el psicológico, se asocia con lo ontológico cuando se eleva a la esfera social, es decir, la forma en que el docente se comporta y se relaciona a través de su identificación como sujeto. Finalmente, la cuarta tipología se refiere a las formas en que recopilamos información del mundo exterior y la transformamos en símbolos y códigos propios. Porque, algunos de los métodos de enseñanza consideran, *a priori*, la forma de su presentación a los estudiantes y no su estructura epistemológica (Kant, 2002).

De ahí que, como ya dicho las elecciones metodológicas están sujetas a las tipologías mencionadas y manifiestan, en su totalidad, el *modus operandi* de cómo un determinado contenido matemático, por ejemplo, se *enseñará* o *no*. En este sentido, y ante el contexto de la Educación Matemática en los primeros años de la enseñanza básica, estudios como los de Oliveira y Oliveira (2013), Julio y Silva (2018) y Ortega y Santos (2018) nos muestran cómo un currículo amplio y, a la vez, poco específico dificulta, en el ámbito de la formación docente, comprender cómo se puede enseñar Matemática.

Por lo tanto, la comprensión de los contenidos de Matemáticas puede contribuir significativamente a la elección metodológica del profesor pedagogo en relación a su práctica pedagógica en los primeros años de la enseñanza fundamental.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo es presentar un estudio de caso sobre las influencias que la cultura, tomada como operador, ejerció o no, en las opciones metodológicas de un formador de docentes que actúa en los primeros años de la escuela primaria. Según la perspectiva de Yin (2015) sobre los supuestos para el desarrollo de estudios de caso, en un primer momento definimos el contexto del trabajo, posteriormente delimitamos el caso y los sujetos involucrados para, finalmente, elegir los criterios de análisis e interpretación.

Así, el contexto seleccionado fue la práctica pedagógica desarrollada por un profesor polivalente, activo en una red pública de enseñanza ubicada en el Estado de São Paulo, Brasil. Esta maestra, indicada en este trabajo con el nombre de Teresa (nombre ficticio), fue elegida como sujeto de investigación.

En cumplimiento de lo dispuesto en la Ley brasileña núm. 13.709 del 14 de Agosto de 2019, el nombre ha sido sustituido por uno ficticio y los datos protegidos. Además, siguiendo las Resoluciones del Ministerio de la Salud/Brasil núm. 466 del 12 de diciembre de 2012, núm. 510 del 7 de abril de 2016 y la Circular núm. 2/2021/CONEP/CNS/MS, la docente participante de la entrevista dio su libre consentimiento para su uso en la investigación científica. Así, a partir del contexto de su práctica, delimitamos entonces el caso a estudiar, que trata de las elecciones metodológicas que hace la profesora Teresa al desarrollar su práctica pedagógica en los primeros años de la escuela primaria.

Sin embargo, para acceder a la práctica pedagógica de Teresa, fue necesario establecer un modelo de recolección de información y transformación de datos. Este modelo tuvo en cuenta los siguientes aspectos: (i) Objetivo del estudio, (ii) Descripción lo más cercana posible a la confiabilidad, (iii) Acceso a aspectos metodológicos y elección metodológica respecto al proceso de enseñanza desarrollado por el docente.

En este sentido, y con base en los aspectos antes mencionados, el modelo de recolección de información nos llevó a optar por el instrumento de recolección de la entrevista semiestructurada. A partir de esta entrevista pudimos acceder a la principal información sobre la práctica pedagógica de Teresa en los primeros años de la escuela primaria, así como a elementos referentes a sus conceptos de enseñanza y aprendizaje.

En la misma línea, la entrevista semiestructurada se organizó en cuatro ejes temáticos, entendidos aquí como ejes heurísticos y motivadores para acceder a lo que la docente nos tenía que decir. Estos ejes se dividieron en: (1) Sobre su formación escolar; (2) Sobre su formación pedagógica y universitaria; (3) Sobre su práctica profesional; (4) Sobre sus técnicas de enseñanza.

De esta forma, los datos transformados y utilizados para el análisis en este trabajo partieron de la información recogida en el eje (4), aunque los otros ejes han contribuido a una comprensión más universal de las opciones metodológicas de la profesora Teresa.

Además, para realizar el análisis e interpretación de los datos, utilizamos el análisis discursivo (AD) según la perspectiva de Pêcheux (2015). Así, según el citado autor, no hay mejor manera de acceder al pensamiento de un sujeto que analizar su discurso bajo la lente ideológica.

Para el camino del AD en la perspectiva considerada, se siguieron los siguientes pasos: (1) Lectura flotante hasta agotar el tema buscado; (2) Resaltar las superficies discursivas a analizar; (3) Diferenciación de marcas discursivas sobre superficies previamente seleccionadas; (4) Identificación del objeto discursivo (causas del llamado olvido 1 y 2 en la enunciación); (5) Reconocimiento del proceso discursivo (posibles significados del discurso y otras posibilidades - pre-búsqueda de formaciones ideológicas); (6) Reconocimiento de formaciones discursivas (modo de organización de los aspectos ideológicos); (7) Identificación de la formación ideológica.

En este sentido, según las definiciones metodológicas de Pêcheux (2015), se entiende por superficie discursiva el conjunto de elementos fraséales que serán utilizados para un análisis profundo de las bases ideológicas allí presentes. Puede ser una sola frase o, como es habitual en AD, un pasaje más largo. La selección de la superficie discursiva depende del objetivo del análisis. Una marca discursiva se conoce, en esta metodología, como una ventana de análisis, es decir, la puerta de entrada para que el analista inicie su recorrido de análisis. Son palabras que llaman la atención del analista, lo que puede ayudar en la interpretación de lo que allí está escrito “ideológicamente”.

Desde el momento en que se identifica la formación ideológica, quedan claras las razones por las cuales el sujeto enunció ese discurso, que, en nuestro caso, serían: ¿Hay presencia del operador cultural en las elecciones metodológicas señaladas por la profesora Teresa? O dicho de otro modo: considerando al operador cultural como un dispositivo que tensa elecciones metodológicas, ¿Podemos percibirlo en el discurso enunciado de la docente? Esta pregunta se denomina en el AD la delimitación del concepto-análisis y contribuyó a nuestra orientación a lo largo del proceso. El estudio del discurso de la docente nos brinda la posibilidad de comprender las razones por las cuales eligió enseñar como enseñó a sus alumnos y esto, de alguna manera, cumple con nuestro objetivo, que es comprender sus elecciones metodológicas.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, en la Tabla 1 se presentan las superficies discursivas seleccionadas en el bloque 4 de la entrevista realizada a la docente, objeto de esta investigación. Para ellas usamos un número correspondiente. Además, optamos por presentar las marcas discursivas, la formación discursiva y la formación ideológica porque estos son los elementos que resultan, respectivamente, de la lectura flotante, objeto y proceso discursivo. Esto quiere decir que, los tres elementos presentes en la tablas nos dan el análisis mismo de las superficies discursivas consideradas.

Tabla 1. Análisis discursivo de la entrevista a la profesora Teresa (profesora 1).

Superficie discursiva	Marcas discursivas	Formación discursiva	Formación ideológica
1. Primero tendría que prepararme, porque hay muchos temas. Como digo... Emblemáticos en mi vida.	1. tendría que 2. prepararme 3. porque hay muchos 4. Emblemáticos en mi vida	La falta de comprensión de los contenidos matemáticos, no por la cantidad, sino por la calidad del método utilizado en el primer contacto, crea oscuridades a la hora de enseñarlos, ocupando el rol de profesor.	No aprender a lo largo de la formación refleja la dificultad para elegir y enseñar.
2. Entonces, después de yo estudie trataría de transformar eso en una forma, primero, de una manera más lúdica y concreta para poder enseñarles.	5. después de yo estudiar 6. yo trataría 7. transformar 8. manera más lúdica y concreta 9. poder enseñarles	Los conceptos, términos o ideas que no son accesibles a los estudiantes no contribuyen al aprendizaje. La accesibilidad está íntimamente ligada a la <i>episteme</i> .	Para aprender un determinado concepto/contenido, éste debe estar presente en la vida del sujeto (o en la vida cotidiana, es decir, construida junto con el sujeto).

Superficie discursiva	Marcas discursivas	Formación discursiva	Formación ideológica
3. Porque no quería que pasaran por lo que yo tuve que pasar. Para aprender un poco de lo que aprendí, porque no aprendí casi nada, pero me gustaría que aprendan un poco.	10. No quería 11. pasaran por lo que yo tuve 12. para aprender un poco 13. No aprendí casi nada 14. pero me gustaría que aprendan un poco	La cantidad que sería óptima para aprender depende de cómo el maestro elija enseñar. Las malas elecciones implican sufrimiento por parte del alumno y, en consecuencia, poco aprendizaje.	Una mala elección metodológica provoca sufrimiento en el aprendizaje.
4. Entonces, apuesto mucho por esta parte de concreto. ¿No es siempre hacerlo todo con intencionalidad? Y que estés lo más preparado posible, porque siempre hay algún alumno que te hará esa pregunta, que pensará más allá de lo que tú pensabas.	15. apuesto mucho 16. No es siempre 17. intencionalidad 18. más preparado 19. siempre hay 20. te hará 21. pensará más allá	Si el objetivo es el aprendizaje del estudiante, entonces parte de elementos de su realidad.	Concepción constructivista del aprendizaje.
5. Porque nos guste o no, seguimos siendo gente del siglo pasado, estamos pegados en ciertas ideas, ¿no?	22. nos guste o no 23. gente del siglo pasado 24. estamos pegados	Los mismos, los fijos, no son buenos para el aprendizaje de los alumnos. El cambio y la adaptación son necesarios.	Actualización y cambio constante: paradigma de la educación para el siglo XXI.

Fuente. Elaboración propia.

A partir de las superficies discursivas 1, 2 y 3 de la Tabla 1 se observa que la docente realiza sus elecciones metodológicas guiada, en un primer momento, por elementos de experiencias negativas vividas en el estudio de las Matemáticas durante su etapa de estudiante. Esto justifica sus dificultades para comprender los contenidos matemáticos mencionados en la superficie discursiva 1, así como el uso de la marca discursiva 4 para resaltar la oscuridad, la duda, la incompreensión. En este punto, es claro que el operador cultural que enfatiza la elección metodológica se manifiesta en el discurso de la profesora Teresa a partir de métodos mal aplicados durante su formación básica.

Además, el uso del término “después de yo...” en la superficie discursiva del núm. 2 implica una secuencia práctica de actuación por parte de la docente, es decir, en la descripción de lo que haría una vez superada la parte conceptual de las Matemáticas que necesita enseñar. De esta forma, y volviendo al discurso anterior, la docente enfatiza que en un segundo momento transformaría lo aprendido en algo concreto, más lúdico (marca núm. 9).

Puesto que, podemos decir que hay una presencia del operador cultural en la elección metodológica de la docente a partir del uso del término “transformar”, ya que la cultura implica, como se mencionó, una reproducción y, al mismo tiempo, una transformación.

Así, el significado del término “transformar” para la docente es más que “cambiar” el *modus operandi* de cómo se enseña tal o cual concepto de las Matemáticas. Refleja, sobre todo, algo que ella quiso (implicación de deseo) haber tenido, pero no tuvo, como se mencionará más adelante por las marcas 11, 12 y 13. En este sentido, hay una notoria confusión entre los términos utilizados por la docente como concreto, lúdico y forma, ya que todos estos conceptos en el campo pedagógico son completamente diferentes.

Por lo que sigue, se ve en la formación discursiva construida por el docente aun lidiando con la superficie discursiva núm. 2 de una suerte de accesibilidad epistémica, o sea, de aquel conocimiento al que el sujeto puede acceder y obtener/producir (Mometti, 2021). La accesibilidad epistémica es trabajada por el discurso de la profesora Teresa junto con la idea de desarrollo cognitivo. Esto significa que, la docente considera como aprendizaje lo epistémicamente accesible. Por ello, utiliza los términos “lúdico” y “concreto”. Así, la formación ideológica que sustenta el discurso del docente es ciertamente la misma que da las premisas del movimiento pedagógico constructivista.

Luego, el énfasis en el uso de los términos “porque” y “poco” en la superficie discursiva núm. 3 nos lleva a entender que, la docente busca justificación de su elección metodológica, al mismo tiempo que alude a elecciones inadecuadas para enseñar un tema de particular contenido matemático y que proporcionan al estudiante poco aprendizaje. El significado de “poco” en este discurso está claramente relacionado con la cantidad/calidad y, a su vez, con el éxito del proceso de enseñanza desarrollado por el docente.

De esta forma, cuando la profesora Teresa en intervenciones anteriores nos revela a través de formaciones discursivas que la incomprensión de los contenidos matemáticos y su inaccesibilidad nos da a entender que, el uso del término “pequeño” nos parece perfectamente justificado al completar ese “No aprendí casi nada, pero un poco me gustaría [enseñar, énfasis añadido]”. Además, hay un discurso cargado de emoción negativa, es decir, una emoción nostálgica que repercute en la frustración por no haber comprendido/aprendido/seguido los contenidos de Matemáticas durante su formación. Con este discurso, la maestra Teresa asume su deseo de “ser” esa maestra que no “tuvo”.

El uso de la marca discursiva núm. 16 nos muestra la elección metodológica de la docente a través de los discursos previos de sufrimiento e incomprensión de las Matemáticas. Así, cuando se usa el término “concreto” en realidad significa: lo concreto es accesible y, por lo tanto, contribuye al aprendizaje. Aquí vemos un punto de conexión entre la accesibilidad epistémica y el desarrollo cognitivo destacado por la docente en discursos anteriores. Eso significa que para la profesora el conocimiento sui generis es la misma cosa que el desarrollo de la inteligencia. Así, lo concreto como propuesta metodológica -apoyada en la formación ideológica constructivista- actúa claramente como operador cultural en las elecciones metodológicas de la profesora Teresa (profesora 1).

La docente utiliza una pregunta retórica para justificar su elección metodológica, ya que al utilizar el término “intencionalidad” destaca el objetivo principal de la enseñanza, que es “tener la intención de...”. Así, al optar por trabajar las Matemáticas a través de la concreción (concepción constructivista), la docente deja en claro que su intención es promover un aprendizaje sin sufrimiento, es decir, lo que no es concreto para el alumno causa sufrimiento y, por lo tanto, no aprende. Aquí vemos que para la profesora Teresa, la emoción que se produce

en el alumno durante el estudio de las Matemáticas es su termómetro de aprendizaje de las Matemáticas.

Con respecto a la marca discursiva núm. 19, notamos una superlativación de la técnica por parte del profesor. Esto nos lleva a entender que estando “más preparados” y yendo más allá de “preparados”, es decir, además de conocer todos los contenidos matemáticos que se van a enseñar, es necesario tener la técnica de enseñanza acorde con lo que se espera del estudiante en una situación hipotética de aprendizaje.

Por ello, en la misma superficie discursiva, la docente justifica que estar “más preparado”, es decir, “conocer el contenido más la técnica” se debe a las posibles dificultades que tendrá el alumno. En ese sentido, hay una previsión pedagógica por parte del docente y, en este momento, contribuye al aprendizaje.

Sin embargo, el marco discursivo núm. 20 nos da a entender que, para la docente, la seguridad pedagógica es el punto central de su elección metodológica. Entonces, para poder enseñar de manera “apropiada” y generar resultados positivos, la docente necesita anticipar lo que puede o no ocurrir en el aula. Aunado a esto, el énfasis en el estudiante que piensa “más allá” lo da la docente en otros momentos de la entrevista, principalmente cuando habla de su voluntad y deseo de estudiar durante su etapa estudiantil, pero no hubo ningún estímulo en el por parte del maestro.

En este punto, es notoria la presencia de la emoción relacionada con el aprendizaje, que para esta docente opera como el norte de su práctica pedagógica. El operador cultural que acentúa la elección metodológica de la profesora Teresa, evidenciada también en la superficie discursiva núm. 4, es la preparación como elemento constitutivo de la comprensión y comprensión de los contenidos matemáticos.

Así, en la superficie número 5, la profesora Teresa trae a su discurso la tensión de una condición externa a las elecciones que el propio docente puede hacer, especialmente cuando utiliza los términos “querer o no”. Esto nos muestra que la docente reconoce que está desfasada en cuanto al tipo de asignatura que trabaja, principalmente en cuanto a generación.

Como se mencionó, existe una divergencia entre la práctica pedagógica que actualmente desarrollan los docentes pedagógicos y su público, ya que este último pertenece a la denominada Humanidad Digital (Mometti, 2021). En este sentido, el “ser del siglo pasado”, para la profesora Teresa, significa estar “detrás” de los estudiantes, en el sentido generacional. En este punto percibimos el elemento cultural operando en su pensamiento metodológico, ya que en cada generación la cultura se transforma y reproduce dentro de un grupo social específico (Sewell Jr., 2005).

El uso de la marca núm. 24, “pegados”, refleja nuevamente la elección metodológica del docente, ya que estar enyesado es lo mismo que no cambia, permanecer inmóvil frente a la evolución sociocultural de un pueblo en un tiempo histórico dado. Así, al referirse al término “ideas”, complementando su discurso, la docente alude a nuevas metodologías para la enseñanza.

Este es el primer punto de su discurso donde vemos la posibilidad de un cambio de paradigma en cuanto a la metodología didáctica para la enseñanza de contenidos de Matemática en los primeros años, paradigma que comienza con la inserción de las tecnologías digitales de aprendizaje a principios del siglo XXI.

Con relación a la superficie discursiva 6 se observa que la profesora se proyecta a través del uso del pronombre personal “yo”: que denota la subjetividad de su discurso, reafirmando su perspectiva personal de sujeto hablante con relación a su desempeño docente dando énfasis

de significado de acuerdo con la fuerza de su posición como sujeto de conocimiento. Así, observamos la autoimagen en este discurso.

Desde el punto de vista de la teoría de Pêcheux (2015), es importante considerar el concepto de “interdiscurso” y “memoria discursiva”. El interdiscurso se refiere al conjunto de discursos existentes en una sociedad que influyen en la producción de nuevos discursos. La memoria discursiva, a su vez, se refiere a las huellas de estos discursos existentes presentes en el lenguaje.

Así, es posible inferir que las superficies discursivas se insertan en un contexto socio-cultural específico que influye en la forma en que el hablante se posiciona en relación con los docentes. La expresión de adoración y negación del miedo puede estar relacionada con discursos dominantes en la sociedad en la que se inserta el hablante, como la apreciación del papel de los docentes y la expectativa de que los alumnos no les tengan miedo.

4. CONSIDERACIONES FINALES

El presente trabajo presenta un estudio de caso desarrollado con una docente pedagoga en activo en los primeros años de la enseñanza fundamental sobre las influencias que la cultura, tomada como operador tensionado, puede ejercer sobre las elecciones metodológicas durante el proceso de enseñanza de las Matemáticas. Así, y para acceder a las opciones metodológicas, optamos por desarrollar una entrevista semiestructurada con dicha docente sobre su práctica y cómo pensaría sobre sus clases de Matemáticas para los primeros años.

Observamos a través de la articulación entre lo lingüístico y lo histórico, para entender cómo los textos se construyen para decir lo que dicen, a partir del establecimiento de significados posibles, de acuerdo con determinada(s) formación(es) discursiva(s), con el fin de enseñar a las personas “a leer su opresión en los propios textos que, al mismo tiempo, la expresan y la enmascaran” (Courtine, 2006, p.53). Para ello, tenemos en cuenta que los significados siempre están mediados por las condiciones de producción del discurso, considerando que, según esta teoría, los significados de un discurso no están preestablecidos, sino que se construyen en la esencia de determinadas condiciones de producción, en la relación entre el interdiscurso (memoria discursiva) y el intradiscurso (hilo discursivo).

Así, a partir de la información que se obtuvo de la docente, a través del discurso hablado y después de la transcripción de la misma, se realizó un análisis discursivo desde la perspectiva francesa para comprender el papel del operador cultural en las elecciones metodológicas. Como primer resultado, pudimos ver que la manifestación del operador cultural en la elección metodológica evidenciada por la docente se dio a través de métodos mal aplicados para enseñar Matemáticas cuando era estudiante.

Esto quiere decir que, sus dificultades para comprender y comprender los contenidos matemáticos se originaron en malas elecciones de su profesora, lo que la llevó a tomar decisiones que contribuyeron a que la alumna tuviera un “ser” completamente diferente al que había vivido. Por ello, identificamos, a través del mencionado operador cultural, los elementos accesibilidad epistémica y desarrollo cognitivo.

Por lo tanto, del primer elemento anterior, la docente nos trajo el segundo resultado de este estudio: la manifestación de su opción metodológica por el uso de la concreción en las clases de Matemáticas. Esto se justificaba, porque tener un profesor que hacía malas elecciones metodológicas provocaba que se impusiera un “estado de sufrimiento” durante su

aprendizaje de las Matemáticas. Este sufrimiento interfería en el desarrollo cognitivo, que para el docente es lo mismo que aprender.

Un tercer resultado de este estudio mostró la emotividad como un elemento fundamental para la elección metodológica de la profesora Teresa. De esta forma, y de acuerdo con las marcas discursivas presentadas en la Tabla 1, aprender mucho o poco se relaciona con la cualidad que, a su vez, se deriva de ser accesible o no por el estudiante. Esto revela que, aun teniendo como base ideológica la docente, contemplando las premisas del movimiento constructivista que se inició en la década de 1970 en Brasil, todavía sitúa el “sufrimiento” como la primera causa del fracaso, es decir, del no aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Finalmente, pudimos observar que hubo operadores culturales interfiriendo en las elecciones metodológicas del docente de la asignatura de este estudio, que convergen a una relación intrínseca entre emoción – calidad de la enseñanza – elección de cómo enseñar. Además, el presente estudio nos abre nuevas puertas en lo que se refiere a comprender cómo los docentes pedagógicos desarrollan sus prácticas, a partir del lente de la elección y la relación con los saberes aprendidos en Matemáticas.

En esta perspectiva de análisis, se refuta la certeza de la importancia de la observación del discurso para la comprensión del conjunto. Un discurso bien construido puede ser el diferencial para promover la comprensión significativa por parte del docente. Los aspectos sociales, culturales, económicos y políticos que se materializan en la vida de las personas están presentes en todos los ámbitos de sentido y trascendencia.

Son múltiples las historias, las múltiples vidas y también muchas las contradicciones que se dan en los procesos dialógicos. La matriz sociohistórica está constituida por la polisemia, la heterogeneidad y la complejidad, abriéndose a múltiples sentidos y diferentes direcciones. Las personas se van constituyendo continuamente en la dinámica de relaciones y desarrollo de procesos.

En definitiva, finalizamos este estudio de caso con la siguiente pregunta abierta: si la selección inadecuada de la técnica didáctica para un determinado contenido/concepto matemático proporciona un momento negativo de aprendizaje, ¿podemos entenderlo como un operador cultural?

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, RFS y CPC con previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aiyar, S. (2013). *Accidental India: A History of the Nation's Passage through Crisis and Change*. New Delhi: Aleph Book Company.
- Astolfi, J. P. & Develay, M. (2012). *A didática das ciências*. Trad. Magda Sento Sé Fonseca. 16 ed. Campinas: Papirus Editora.
- Costa, J. de M., Pinheiro, N. A. M., & Costa, E. (2016). A formação para matemática do professor de anos iniciais. *Ciência & Educação (Bauru)*, 22(2), 505–522. <https://doi.org/10.1590/1516-731320160020014>
- Courtine, J. *Metamorfoses do discurso político: derivas da fala pública*. São Paulo: Claraluz, 2006.



- García, W. E. (2012). *Educação: visão teórica e prática pedagógica*. Brasília: Liber Livro.
- Giddens, A. (2017). *A estrutura da sociedade*. São Paulo: Editora Martins Fontes.
- Goody, J. (1990). *The oriental, ancient and primitive systems of marriage and the family in the pre-industrial societies of Eurasia* (Studies in Literacy, the Family, Culture, and the State). Cambridge: Cambridge University Press.
- Julio, R. J.; & SILVA, G. H. G. S. (2019). Compreendendo a Formação Matemática de Futuros Pedagogos por meio de Narrativas. *Bolema*, v.32, n.62, p.1012-1029, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/mzVW5WQRj3VChHqXHh5s79N/?format=pdf&lang=pt>
- Kant, I. (2002). *Crítica da razão prática*. São Paulo: Editora Martins Fontes.
- Lima, S. M., & Carvalho, A. de L. (2014). Um estudo sobre a formação do pedagogo e o ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Série-Estudos - Periódico Do Programa De Pós-Graduação Em Educação Da UCDB*, (37), p. 201–214. <https://doi.org/10.20435/serie-estudos.v0i37.761>
- Mead, M. (2000). *Sexo e temperamento*. Trad. Rosa Krausz. São Paulo: Editora Perspectiva.
- Mometti, A. C. (2018). *Práticas inovadoras e o ensino de física: estudo dos percursos didáticos de um grupo de licenciandos por meio de projetos interdisciplinares*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. doi:10.11606/D.48.2019.tde-04112020-091339. Recuperado em 2024-11-28, de www.teses.usp.br
- Mometti, C. (2021). Operadores Culturais e a Prática Pedagógica na Educação Matemática nos Anos Iniciais. *Boletim Cearense De Educação E História Da Matemática*, 8(23), 1202–1218. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i23.4907>
- Oliveira, G. M. & Oliveira, A. T. C. C. (2013). A matemática na formação inicial de professores dos anos iniciais: reflexões a partir de uma análise de teses e dissertações defendidas entre 2005 e 2010 no Brasil. *Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v.4, n.1, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2238>
- Ortega, E. M. V. & Santos, V. M. (2018). A relação dos alunos do curso de pedagogia com o conhecimento matemático e seu ensino: um estudo longitudinal. *Revista Holos*, V.2, ano 32, p.207-2024, 2018. Disponível em: <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/issue/view/140>
- Pêcheux, M. (2015). *Análise do discurso*. Org. Eni Puccinelli Orlandi. 4 ed. Campinas: Editora Pontes.
- Said, E. (2007). *Orientalismo: o oriente como invenção do ocidente*. Trad. Rosaura Eichenberg. 1 ed. São Paulo: Companhia das Letras.
- Santos, R. F. dos. (2021). *A formação do pedagogo e o ensino da matemática*. 2021.171 f. Dissertação (Programa Stricto Sensu em Educação) - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2021. Disponível em: <https://bdtd.ucb.br:8443/jspui/handle/tede/2927>.
- Sewell Jr., W. H. (2015). *Logics of history: social theory and social transformation*. Chicago: University of Chicago Press.
- Silva, S. M. da, & Silva, G. H. G. da. (2021). A formação matemática de futuros pedagogos e pedagogas de um curso a distância. *Cadernos De Pesquisa*, 51, e06970. Recuperado de <https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/6970>
- Vygotsky, L. S. (1991). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Editora Martins Fontes.
- Yin, R. K. (2015). *Case study research: design and methods*. New York: Sage publications.
- Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed Editora.



IDONEIDAD MEDIACIONAL Y ECOLÓGICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO Y TECNOLÓGICO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MEDIATIONAL AND ECOLOGICAL SUITABILITY OF DIDACTIC-MATHEMATICAL AND TECHNOLOGICAL KNOWLEDGE OF MATHEMATICS EDUCATION TEACHERS

José David Vargas Gamboa¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-2343-9644>

RESUMEN

La finalidad de este artículo es elaborar recomendaciones para mejorar el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesorado de la carrera Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, específicamente en las facetas mediacional y ecológica propuestas en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, en relación con el uso de las tecnologías digitales. Este constituye una síntesis de los resultados parciales de una investigación realizada por el autor en el marco de su investigación de maestría. Se realizó una investigación cualitativa de tipo descriptiva sobre dichas facetas, así como los tipos de uso que se le da a los recursos y herramientas tecnológicas digitales. Se concluye la necesidad de mejorar el conocimiento de los formadores de formadores sobre cómo integrar las tecnologías en el proceso educativo, especialmente las relacionadas con el diseño de recursos y la comunicación, por medio de capacitaciones continuas. En futuras investigaciones en esta misma población se recomienda el estudio de las demás facetas del conocimiento didáctico-matemático, con el fin de tener un panorama más completo de las características de las personas formadoras de profesores.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico, Tecnologías digitales, Formadores de formadores, Capacitación continua.

ABSTRACT

The purpose of this article is to develop recommendations to improve the Didactic-Mathematical Knowledge of the faculty of the Mathematics Education career of the University of Costa Rica in the mediational and ecological facets, proposed in the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, in relation to the use of digital technologies. This is a synthesis of the partial results of research carried out by the author within the framework of his master's research. Qualitative descriptive research was carried out on these facets, as well as on the types of use given to digital technological resources and tools. It is concluded that there is a need to improve the knowledge of trainers of trainers on how to integrate technologies in the educational process, especially those related to the design

¹ Departamento de Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico: jose.vargas_g@ucr.ac.cr



of resources and communication, through continuous training. In future research in this same population, the study of the other facets of didactic-mathematical knowledge is recommended, in order to have a more complete picture of the characteristics of teacher trainers.

Keywords: Ontosemiotic Approach, Digital Technologies, Initial Teacher Training, Ongoing Professional Development.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las características de una carrera universitaria debería ser que el personal docente tenga la actitud de mejora continua, para lo cual se requiere reflexión objetiva del quehacer académico en cuanto a docencia, pues esto incide en la calidad de la educación, con lo cual se da un impacto en la sociedad (Sánchez *et al.*, 2023, p. 10708).

En ese sentido, el presente trabajo tiene el objetivo de elaborar recomendaciones para mejorar el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesorado de la carrera Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica en las facetas mediacional y ecológica en relación con el uso de las tecnologías digitales. Este trabajo surge como síntesis de los resultados parciales de una investigación previa y más amplia, titulada “Propuesta para el uso de las herramientas y recursos tecnológicos, basada en una caracterización de las facetas mediacional y ecológica del conocimiento didáctico matemático del profesorado de la Carrera Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica en el 2021” (Vargas, 2022). Es a partir de los resultados de la caracterización de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesorado en dichas facetas y el uso de las tecnologías digitales que se pretende responder la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo se puede mejorar el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesorado de la carrera Educación Matemática en cuanto a las facetas mediacional y ecológica, en relación con el uso de las tecnologías digitales?

En la actualidad, distintos autores han realizado investigaciones sobre el uso de las tecnologías en el proceso educativo a nivel nacional. Por ejemplo, Castro y Artavia (2019) remarcan que el cambio en la tecnología implica la necesidad de capacitación del personal docente (alfabetización digital), con la finalidad de actualizarlo respecto a los requerimientos del entorno mundial, lo cual requiere un esfuerzo para promover la formación constante del profesorado.

También en Costa Rica se han realizado esfuerzos por comprender cómo implementar la virtualidad (lo cual es parte del conocimiento de las tecnologías digitales) en los cursos a nivel de educación superior. Este afán de mantener al personal docente actualizado y en concordancia con las competencias digitales de la sociedad actual es de vital importancia. En este sentido, Calderón (2020) menciona, por ejemplo, la importancia de emplear una estrategia pedagógica y una correcta planificación para el uso integrado de la tecnología en el proceso educativo, y no un uso de materiales didácticos aislados o grabaciones de clases. En el ámbito específico de la carrera Educación Matemática, existen experiencias favorables del uso de la tecnología que reportan la ayuda del uso sistemático de GeoGebra al estudiantado en la formulación de conjeturas y conexiones de conceptos (Poveda y García, 2021).

También hay casos a nivel internacional, como el de Vilchez (2017), quien llegó a la conclusión de que el empoderamiento en los principales recursos digitales por parte de docentes en formación conllevó a un mejor desarrollo de competencias. Tales recursos van desde el software matemático y contenidos multimedia hasta las redes sociales. Otro caso es el de Engelbrecht *et al.* (2020). En su investigación, notaron que el acceso a las tecnologías digitales,

en particular internet, cambia la forma en la que se transmite el conocimiento. Además, que la disponibilidad de los recursos de aprendizaje en línea genera que las personas estudiantes tengan preferencia a consultarlos, en vez de buscar en libros o preguntar a las personas docentes.

En estas investigaciones lo que resulta innegable es el interés del uso de las Tecnologías Digitales (TD) en el proceso educativo, y la actitud reflexiva de la comunidad educativa al respecto de un uso informado, con propósito y correcto de las TD, para impulsar el proceso educativo y que no sean un obstáculo o distractor en la labor de la persona docente.

En cuanto a las herramientas de análisis y reflexión del proceso educativo en matemática, se destaca el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), por Godino *et al.* (2017), el cual ayuda a explicar la práctica docente. Específicamente, la noción de Conocimiento Didáctico-Matemático permite caracterizar los conocimientos y competencias del profesorado en ejercicio. Las implicaciones del EOS para este artículo se desarrollarán en el marco teórico.

En el momento del estudio no se conocía una caracterización del conocimiento en tecnologías educativas del profesorado del Departamento de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR), por lo que se consideró necesario analizar cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos del profesorado de dicho departamento. Específicamente en las facetas mediacional y ecológica, así como en cuáles de ellos existe posibilidad de mejora, en el sentido de ser conocimientos incorrectos, correctos pero aplicados de forma inadecuada o vacíos de conocimiento, por mencionar algunas posibilidades. A partir de esto se pueden generar recomendaciones acordes con las necesidades detectadas para los participantes de la investigación.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

El análisis realizado en la investigación se basó en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), el cual constituye un sistema teórico que integra varios enfoques, con la finalidad de analizar prácticas educativas en el aula de matemática.

El EOS consta de cinco grupos de nociones teóricas: sistema de prácticas operativas y discursivas; configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas; configuración didáctica; idoneidad didáctica; y dimensión normativa. No es el objetivo de este artículo sintetizar cada grupo de nociones; a la persona interesada se recomienda consultar a Godino *et al.* (2009), Godino *et al.* (2017) y Godino (2022).

En la investigación realizada se tomó en cuenta la noción de idoneidad didáctica para analizar los recursos utilizados por las personas docentes. Esta noción se entiende como “criterio general, relativo a las circunstancias contextuales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático” (Godino *et al.*, 2017, p. 94).

Además, el foco de atención de la investigación es el CDM del profesorado, el cual se compone de seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Se dio atención a dos de ellas: la mediacional y la ecológica, ya que la faceta mediacional hace referencia a los recursos materiales y temporales disponibles, y la ecológica al ajuste con respecto al centro educativo y las condiciones del entorno en el que se desarrolla (Godino,

2013). Más precisamente, la faceta mediacional del CDM se refiere al conocimiento que permite a la persona docente escoger los mejores recursos para el aprendizaje. Pueden ser tecnológicos, materiales y temporales. Por su parte, la faceta ecológica del CDM abarca desde la relación de la matemática con otras disciplinas, hasta las políticas intervinientes en el proceso educativo: curriculares, profesionales, económicas, entre otras (Godino *et al.*, 2017, pp. 96-97).

Además, se toma como punto de referencia óptimo los estándares definidos en los conocimientos, habilidades y actitudes declarados por la Escuela de Matemática de la UCR (2015), los cuales se espera que el personal docente implemente en los cursos. Así que el análisis realizado está enfocado en el cumplimiento de dichos estándares.

2.2 Tecnologías digitales en el proceso educativo

El uso de las Tecnologías Digitales (TD) en el proceso educativo es amplio, ya que permite acceder, producir, tratar y comunicar información, y varía dependiendo de múltiples factores, tales como la teoría del aprendizaje que se esté utilizando, la disponibilidad de los recursos, la calidad, la innovación, entre otros (Belloch, s.f.; Cabero y Llorente, 2015).

Las TD tienen un papel central en el proceso educativo, en tanto les permiten a las personas docentes realizar su trabajo de formación desde distintas formas y considerar nuevas oportunidades de innovación. En este sentido, la persona docente, formadora de educadores matemáticos, debe tener conocimiento de una amplia gama de dichas herramientas y recursos de TD para implementarlos en sus clases. Así es capaz de generar no solo conocimiento matemático y didáctico-matemático, sino que también ayuda a desarrollar en el estudiantado las competencias digitales necesarias para la integración de profesionales actualizados en una sociedad en constante cambio.

Entre las muchas herramientas existentes, se encuentra una gran variedad de estos recursos que van desde texto, audio y video, hasta los entornos virtuales como Moodle, así como herramientas específicas para la matemática, tales como GeoGebra, Wolfram Mathematica o Wolfram Alpha y LaTeX, los cuales están a disposición del personal docente que constituyó la población de la investigación. Por lo tanto, estas herramientas se consideraron como la base sobre la cuales se realizó el estudio.

Otro aspecto que también varía ampliamente es la forma de uso en el proceso educativo. Con base en lo anterior, en esta investigación se considerarán los siguientes usos que se le puede dar a la tecnología en el proceso educativo, los cuales se basan en Area *et al.* (2016): planear lecciones, preparar materiales o recursos didácticos, presentar informes, registrar evaluaciones de estudiantes, evaluar a los estudiantes, fomentar la investigación, ayudar en la resolución de problemas, comunicación estudiante-estudiante, comunicación estudiante-docente, realizar grabaciones de sesiones sincrónicas o videos.

Dichos usos engloban actividades específicas realizadas por cada docente. Cabe aclarar que es posible que existan muchos otros usos más específicos, pero para efectos de la investigación se consideraron solamente dichas categorías establecidas *a priori*. Estas se implementaron en el cuestionario, tal como se explica en la siguiente sección.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La investigación realizada es de enfoque cuantitativo con alcance descriptivo, y cuenta con un diseño no experimental, ya que se buscaba conocer el fenómeno en estudio en su

ocurrencia natural, y no se pretendía ver relaciones entre las variables estudiadas según su modificación.

Cabe destacar que se realizó el estudio de forma transversal, ya que, por las características de la investigación, no había recursos ni tiempo para valorar el fenómeno de forma longitudinal. Esta se llevó a cabo durante el I Ciclo del año 2021, en el contexto de la pandemia provocada por el virus responsable de la COVID-19. Esto produjo que en la UCR se diera una virtualización forzada de los cursos (que normalmente se daban de forma presencial), lo cual indujo la necesidad de utilizar herramientas tecnológicas digitales para tal fin.

Además, es importante notar que el autor del presente artículo, quien realizó la citada investigación, pertenece al personal docente de la carrera, lo cual le da la oportunidad de un análisis a profundidad. En efecto, se cuenta con la experiencia en el contexto y el conocimiento de la dinámica de trabajo grupal del departamento, que conlleva a la reflexión de los procesos docentes y que es usual realizar en el profesorado de la carrera (por ejemplo, por medio de reuniones de autoevaluación, grupos de estudio sobre temas didácticos y de realidad nacional, entre otros). Aunado a esto, se utilizaron elementos declarados en las políticas universitarias según la Rectoría de la UCR (2020a, 2020b y 2020c) y en la Escuela de Matemática de la UCR (2015) para realizar esta investigación.

3.1 Instrumento de recolección de la información

La información fue recolectada por medio de un cuestionario autoadministrado (técnica de encuesta) de forma individual, por medio de una plataforma digital. Dicho cuestionario estaba conformado por preguntas cerradas y escalas. La validez y confiabilidad del cuestionario se dio por criterio de tres expertos en cada una de las siguientes áreas: formación de docente de matemática, didáctica de la matemática y ciencias cognoscitivas. A dichos expertos se les compartió una versión preliminar del cuestionario y un instrumento de valoración. Posteriormente, se mejoró el cuestionario con las sugerencias brindadas. La versión del cuestionario con las correcciones aplicadas se encuentra en el siguiente enlace, para que la persona lectora interesada pueda replicar el estudio, o bien, adaptarlo a un nuevo contexto:

https://6f33fa7f78ea46e2aaca-my.sharepoint.com/:b/g/personal/jose_vargas_g_ucr_ac_cr/EQpi1ph8tKxAjOfCfLiwJc4B7iYLLeY21nFAPhZl311ttw?e=olaxJP

3.2 Proceso de recolección y análisis de la información

La recolección de la información se realizó con 22 personas docentes que representaban la totalidad del personal docente del Departamento de Educación Matemática, exceptuando al autor de este trabajo, quien también es docente en dicho Departamento. Como se mencionará más adelante, a pesar de haber tratado de recolectar información de la totalidad de la población, se obtuvieron únicamente 13 respuestas, pues la participación fue voluntaria.

Se definieron escalas de valoración y se enviaron a las personas docentes entre el 30 de junio del 2021 y el 17 de julio del mismo año. Estos se hicieron llegar por medio de un correo electrónico que se envió desde la Dirección del Departamento de Educación Matemática, previo consentimiento. Los datos se procesaron por medio de hojas de cálculo.

Para realizar la recolección de la información de una forma más organizada, se desarrolló el cuestionario de forma que permitiera clasificar por niveles las distintas variables presentes en el proceso educativo, y que son parte de esta investigación. Dichas variables

son los componentes de idoneidad ecológica y mediacional, los cuales pueden ser muy alto (80%-100%), alto (60%-80%), medio (40%-60%), bajo (20%-40%) y muy bajo (0%-20%). Esta misma escala se utiliza para valorar globalmente cada faceta, así como el conocimiento y aplicación de las políticas de la UCR en cuanto a las tecnologías digitales, y para valorar el nivel de dominio de cada recurso o herramienta tecnológica.

El análisis se realizó primero en la faceta ecológica, luego en la mediacional y, finalmente, en los recursos y herramientas. Este análisis se sintetiza en tablas que resumen los componentes e indicadores de cada faceta, así como su valoración según la escala. Cabe aclarar que se utilizaron herramientas de estadística descriptiva, no correlacional, debido a la naturaleza de la investigación.

3.3 Resultados obtenidos

En esta sección se presentan los principales resultados obtenidos del proceso de recolección de información y su sistematización con base en las escalas establecidas, tanto en su valoración cuantitativa como cualitativa. La interpretación y análisis de dichos resultados se presenta en el apartado siguiente. Por cuestiones de espacio en el presente artículo, a continuación se presentan los principales resultados obtenidos en la investigación en los cuales hay puntos importantes de mejora. Para la persona lectora que quiera profundizar o ampliar lo aquí expuesto, puede consultar a Vargas (2022).

Se obtuvieron 13 respuestas de las 22 personas docentes a las que se envió el cuestionario (59.09% de la población), de las cuales ocho imparten cursos del área matemática, tres del área didáctico-matemática y dos de otras áreas (en el momento de la recolección de datos).

Con respecto a la faceta ecológica y las políticas institucionales de la UCR, se nota en primer lugar que 6 de las 13 personas docentes basan sus actividades de innovación tecnológica en la experiencia propia o de otras personas docentes. En cuanto al conocimiento de los factores socio-profesionales, 7 de las 13 personas docentes expresaron no conocer dichos factores para promoverlos en el curso que impartían en ese momento, lo cual es un punto muy importante para la mejora. Otro aspecto en el que hay gran oportunidad de mejora es en la integración de nuevas tecnologías aplicando recursos y herramientas adecuadas. Se sintetizan los resultados de esta faceta en la Tabla 1 (Vargas, 2022, p. 87).

Tabla 1. Valoración de la faceta ecológica del CDM según componentes e indicadores de idoneidad ecológica.

Componentes	Indicadores	Idoneidad del indicador	Valoración del indicador	Idoneidad del componente	Valoración del componente	Idoneidad de la faceta ecológica	Valoración de la faceta
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares	62.82%	Alto	60.43%	Alto		
	Se siguen las directrices institucionales en cuanto a las formas de aplicar las tecnologías digitales	64.62%	Alto				
	Se cumple con el tiempo establecido para cada sesión sincrónica	53.85%	Medio				
Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva	76.92%	Alto	42.27%	Medio	71.31%	Alto
	Integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo, utilizando herramientas o recursos apropiados	7.62%	Muy bajo				
Adaptación socio-profesional y cultural	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los y las estudiantes	30.77%	Bajo	57.70%	Medio		
	Se enseña al estudiantado formas de usar la tecnología en el proceso educativo	84.62%	Muy alto				
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico	96.15%	Muy alto	96.15%	Muy alto		
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares	100.00%	Muy alto	100.00%	Muy alto		

Fuente: Tomado de Vargas (2022).



En cuanto a la faceta mediacional y la capacitación del personal docente, es importante mencionar que, de las 13 personas docentes, 8 han recibido capacitación sobre el uso de tecnología, y de los 5 restantes la mayoría no lo ha hecho por falta de tiempo. Sin embargo, en casi todos los tipos de recursos tecnológicos sobre los que se preguntó, los cuales se pueden observar en la Tabla 2 (Vargas, 2022, p. 92), todas las personas docentes manifestaron haberlos aprendido a utilizar a partir de la experiencia sin capacitación. Además, en promedio, un 5.96% de las personas docentes aprendieron a utilizar algún recurso por medio de capacitación, y un 2.83% con capacitación para el uso de software en el aula.

También es de notar que los valores más altos de no utilización están en los siguientes recursos: diseño gráfico, edición de video, adición de audio y creación y edición de páginas web, así como herramientas de programación. En la Tabla 2 (Vargas, 2022, p. 92) se observa el nivel de dominio de cada tipo de herramienta o recurso que tiene el personal docente.

Tabla 2. Medidas de tendencia central sobre el nivel de dominio del personal docente según tipo de herramienta o recurso.

Recurso o herramienta	\bar{X}	s	<i>Mde</i>	<i>Mo</i>	Asimetría	Nivel de dominio
Procesadores de texto (Microsoft Word, Open Office Writer, etc.)	8.08	1.26	8	7	0.13	Muy alto
Herramientas de creación de presentaciones (Microsoft PowerPoint, Prezi, etc.)	7.46	1.66	8	9	-0.88	Alto
Hojas de cálculo (Microsoft Excel, Hojas de Cálculo de Google, etc.)	7.54	1.13	7	7	0.71	Alto
Creador de mapas conceptuales (Coggle, Lucidchart, etc.)	4.85	2.70	5	7	-0.80	Medio
Software de diseño gráfico (Canva, Piktochart, etc.)	2.62	3.36	0	0	0.90	Bajo
Software de edición de video (OpenShot, Adobe Spark, Magisto, etc.)	3.62	3.48	3	0	0.16	Bajo
Software de edición de audio (Audacity, Pro Tools, etc.)	2.46	3.13	0	0	0.71	Bajo
Herramientas de creación y edición de páginas web (Wix, Jimdo, Wordpress, etc.)	3.00	2.89	3	0	0.56	Bajo
Plataformas de almacenamiento de archivos (Google Drive, OneDrive, etc.)	8.00	1.83	8	8	-1.07	Muy alto
Plataformas de videos en línea (YouTube, Vimeo, etc.)	5.69	3.82	7	0	-0.60	Medio
Herramientas de video comunicación (Zoom, Skype, etc.)	6.85	3.41	8	9	-1.41	Alto

Recurso o herramienta	\bar{X}	s	<i>Mde</i>	<i>Mo</i>	Asimetría	Nivel de dominio
Herramientas de comunicación asincrónica (WhatsApp, Telegram, Correo electrónico, etc.)	7.08	3.43	9	9	-1.55	Alto
Herramientas de transmisión o grabación de audio y video (OBS, grabación de Zoom, etc.)	5.92	3.68	7	7	-0.91	Medio
Plataformas educativas LMS (Moodle, Blackboard, etc.)	5.92	3.80	7	0	-0.75	Medio
Software especializado en matemática (GeoGebra, WolframAlpha, etc.)	6.38	3.33	7	5	-1.04	Alto
Software de edición de texto matemático (LaTeX, MathMagic, etc.)	5.54	4.12	7	0	-0.52	Medio
Herramientas de programación (Java, Visual Basic, etc.)	2.46	3.91	0	0	1.25	Bajo
Calculadora (física o digital)	5.54	3.64	7	7	-0.62	Medio
Otro tipo:	0	0	0	0	-	Muy bajo

Nota: \bar{X} Media aritmética, s Desviación estándar, *Mde* Mediana, *Mo* Moda.

Fuente: Tomado de Vargas (2022).

En este ámbito del uso de los recursos y herramientas tecnológicas, se realizó una caracterización de la forma en que se utilizan y su finalidad. En este sentido, la gran mayoría de docentes mencionó hacer uso de las tecnologías con mayor frecuencia para introducir situaciones o problemas matemáticos, o bien, para apoyar argumentaciones. Las actividades en las que usaron menos tecnología corresponden a la evaluación del estudiantado, el fomento de la investigación y la resolución de problemas. Además, resalta el bajo porcentaje de uso de las TD para las distintas labores docentes, así como para el fomento de la comunicación estudiante-docente y estudiante-estudiante. Cabe notar que el 53.84% de las personas docentes afirmaron no usar algunos de los recursos o herramientas por razones de desconocimiento de su existencia o de cómo utilizarlos, mientras que un 30.77% afirmó que no las utilizan por razones didácticas.

En cuanto a las condiciones de las lecciones, la mayoría de las personas docentes afirmaron que un grupo de menos de 30 personas estudiantes es adecuado, y que los cursos que imparten son en su mayoría en la franja de 10:00 a 13:00, luego en las franjas de 07:00 a 10:00, y de 13:00 a 16:00. Todas las personas docentes consideraron que el horario es apropiado para el curso que impartieron. Asimismo, en relación con el tiempo de las lecciones, solamente 3 de 13 docentes confirmaron que el tiempo de clases es el necesario para desarrollar la enseñanza pretendida. Además, un 30.77% manifestó que sus estudiantes no cuentan, en general, con equipo tecnológico que les permita la participación fluida en las clases.

En la Tabla 3 (Vargas, 2022, p. 102) se presenta la totalidad de indicadores de idoneidad mediacional con su respectiva valoración.

Tabla 3. Valoración de la faceta mediacional del CDM según componentes e indicadores de idoneidad mediacional.

Componentes	Indicadores	Idoneidad del indicador	Valoración del indicador	Idoneidad del componente	Valoración del componente	Idoneidad de la faceta ecológica	Valoración de la faceta
Recursos y herramientas tecnológicas	Se usan materiales informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.	56.92%	Medio	41.23%	Medio		
	Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones por medio de las tecnologías digitales.	84.62%	Muy alto				
	Se utilizan las herramientas y recursos de forma apropiada para fomentar la comunicación estudiante-estudiante y estudiante-docente	9.09%	Muy bajo				
	Utilización apropiada de las tecnologías digitales en distintas labores docentes (planear lecciones, elaborar materiales, grabar lecciones).	14.29%	Muy bajo				
Condiciones del grupo	El número de estudiantes permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.	69.23%	Alto	64.10%	Alto		
	El horario del curso es apropiado.	100.00%	Muy alto				
	Las condiciones tecnológicas del estudiantado son las adecuadas para recibir las lecciones en el formato establecido.	23.08%	Bajo				
Tiempo	El tiempo (sincrónico y asincrónico) es suficiente para la enseñanza pretendida.	23.08%	Bajo	38.47%	Bajo		
	Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.	53.85%	Medio				

Fuente: Tomado de Vargas (2022).

4. DISCUSIONES

En este apartado se presenta una discusión de los principales resultados, para analizarlos a la luz de la teoría y posteriormente brindar las conclusiones derivadas de dicha discusión.

4.1 Faceta ecológica y políticas institucionales de la UCR

Es importante recalcar que, según los datos obtenidos, gran parte de las personas docentes basan sus innovaciones en la experiencia propia o de colegas. Esto puede deberse a la constante actividad reflexiva en conjunto que se realiza en el Departamento de Educación Matemática (por medio de reuniones de departamento, capacitaciones, etc.); sin embargo, es de notar que no muchos se basan en el conocimiento de investigaciones actualizadas o conocimiento técnico del uso de herramientas. Esto representa una oportunidad de mejora en la capacitación del personal docente.

En la Tabla 1 (Vargas, 2022, p. 87), se visualiza claramente que hay muchas herramientas tecnológicas que no se usan para muchas de las tareas docentes en el proceso educativo. Esto no significa que se realice un mal trabajo en dicho proceso, sino que se pueden estar desaprovechando posibilidades de formación en tecnologías digitales actualizadas que ayudarían al proceso educativo. Además, es consistente con los hallazgos de González y De Pablos (2015), quienes mencionan que algunos de los elementos que obstaculizan el uso de la tecnología en el proceso educativo son el acceso a recursos, apoyo de autoridades, conocimiento, competencias tecnológicas y formación. Es de importancia central superar estos obstáculos para un mejor desarrollo de la alfabetización digital (Castro y Artavia, 2019).

Por otro lado, cabe destacar que gran parte de las personas docentes afirmaron no conocer sobre factores socio-profesionales y su incorporación en los cursos. Esto es central, pues el desarrollo de dichos factores es de vital importancia para desarrollar el perfil académico profesional que se espera en el estudiantado (Escuela de Matemática de la UCR, 2015). Es de notar que, esta respuesta puede significar que las prácticas que realizan en este sentido no son de forma consciente. Es decir, quizá sí se realizan acciones en esta línea, pero no intencionadas y dirigidas a ese propósito. En este sentido, la posibilidad de mejora radica justamente en hacerse consciente de la necesidad de estar en concordancia con los factores sociales y los avances en la tecnología por parte del profesorado, como lo menciona Calderón (2020).

4.2 Faceta mediacional y capacitación del personal docente

En concordancia con lo mencionado en la sección anterior, es visible que muy pocas personas docentes aprendieron a usar los recursos por medio de capacitaciones; más bien fue por medio de la experiencia de uso. Como se mencionó anteriormente, la mayor necesidad de mejora está en fomentar el conocimiento de las herramientas de diseño, creación de audio y video, así como de páginas web y programación, pues resulta que son las que tienen menos nivel de dominio, como se vio en la Tabla 2. Nótese que esto corresponde a los recursos con uso menos frecuente.

Uno de los puntos fuertes es el uso de la tecnología para introducir situaciones, problemas y apoyar la argumentación. Esto apoya el proceso educativo, ya que de esta forma se manifiestan los significados institucionales y personales del estudiantado (Godino y Burgos, 2020). Además, es consistente con los hallazgos de Poveda y García (2021) en cuanto al uso de la tecnología para apoyar procesos de formulación de conjeturas, específicamente con GeoGebra.

Por otro lado, uno de los usos menos desarrollados corresponde al fomento de la comunicación estudiante-estudiante y estudiante-docente; existe una gran oportunidad de mejora en la atención de las exigencias de una sociedad altamente virtualizada, en la que incluso los cursos universitarios algunas veces se imparten en esa modalidad (Calderón, 2020).

Otros elementos que son importantes a considerar según las respuestas brindadas son las condiciones contextuales (tiempo de clase, cantidad de estudiantes y horario de clase), los cuales parecen ser adecuados, pero con cierto faltante en el tiempo de clase. Además, se presenta una carencia en el equipo tecnológico con el que cuenta el estudiantado en general, en el momento en que se realizó la recolección de datos.

4.3 Usos de los recursos y herramientas tecnológicas

Es importante notar que el hecho de que haya poco uso de la tecnología para evaluar, fomentar la investigación y resolver problemas no indica que estas tres actividades no se realicen del todo, sino que, probablemente, se realizan de forma tradicional, sin implicar la tecnología. Cabe resaltar que hay alto uso y dominio de herramientas para preparar documentos, informes o planeamientos, lo que es consistente con el tipo de tareas tradicionales de las personas docentes. Sin embargo, las tecnologías que permiten personalizar dichos materiales, hacerlos más llamativos o ilustrativos, o bien, presentarlos en formatos distintos, son las que tienen menos porcentaje de uso y dominio. Esto podría deberse al foco de importancia que poseen las personas docentes, que prestan más atención al contenido que a la presentación, entre muchas otras posibles razones.

Sin embargo, es importante recordar la importancia de la forma en que se presenta la información, para alcanzar a desarrollar el aprendizaje de forma adecuada al tomar en cuenta elementos como las múltiples formas de aprendizaje y el Diseño Universal para el Aprendizaje, por mencionar algunos. Asimismo, hay que recalcar que las TD pueden permitir alcanzar un nivel mucho mayor de interacción en el aula cuando la persona docente las utiliza apropiadamente en el proceso educativo.

Aunado a lo anterior, autores como Area (2000) y Cabero (2003) hacen notar la importancia de que el estudiantado y profesorado tengan contacto frecuente con las TD, al igual que las posibilidades de desarrollar experiencias de aprendizaje relacionadas con dichas tecnologías. Todo esto en el marco de la formación inicial del profesorado, para el desarrollo de competencias tecnológicas digitales, lo que requiere una capacitación continua del profesorado, para una correcta utilización de estos recursos.

5. CONCLUSIONES

Primero, es importante notar que este estudio está enfocado en la población docente de la carrera Educación Matemática de la UCR, así que los resultados no deben ser generalizados a otras poblaciones. Sin embargo, sirven como idea base para notar posibles líneas de

diagnóstico de necesidades del personal docente en determinada institución. Además, los instrumentos de recolección de información, y el diseño metodológico en general, pueden ser replicados en esta población o adaptados a otras poblaciones, con lo cual se presenta un aporte a la disciplina con miras a describir el CDM del profesorado en relación con la tecnología.

En este sentido, el adaptar los indicadores de idoneidad didáctica, al menos en algunas de las facetas, resulta esclarecedor al detectar dificultades y oportunidades de mejora en los conocimientos del profesorado y la forma en la que conducen el proceso educativo. Esto con la finalidad de desarrollar acciones formativas pertinentes para dicha población, que conlleven a desarrollar un trabajo más oportuno y apegado a los estándares del departamento.

Para desarrollar tales acciones formativas en el profesorado se necesitan espacios de reflexión y capacitación. En este sentido, cabe destacar que el personal docente de la carrera Educación Matemática cuenta con una amplia disposición a participar en distintas capacitaciones continuas, en pro de mejorar la forma en la que se realiza la formación del estudiantado. Esto es un punto fuerte de dicha población, que debe ser aprovechado para un mejor desarrollo del trabajo del departamento.

Uno de los puntos importantes a resaltar es que, en el momento del estudio, las personas docentes transitaban la virtualización forzada debida a la pandemia del COVID-19, por lo que no se esperaba una alta formación en el uso de las tecnologías digitales en el proceso educativo, tal como se evidenció en los resultados de la investigación. Esto abre las puertas a capacitaciones relacionadas con estos temas.

A pesar de la situación emergente en la que se realizó el estudio, es de notar que la experiencia obtenida en la virtualización de los cursos conlleva a un proceso de reflexión sobre las ventajas de los cursos en dicha modalidad. Sin embargo, para que esto se lleve adelante de buena forma en el futuro es necesario mejorar los conocimientos y habilidades de las personas docentes, por medio de capacitaciones técnicas y didácticas sobre el uso de las tecnologías digitales. Esto pensando en varias vertientes: primera, la posibilidad de impartir algunos cursos de la carrera en formato virtual; segunda, en la posibilidad de implementar B-Learning en algunos momentos de la carrera y, por último, la gran posibilidad de aplicar algunos recursos o herramientas tecnológicas en las clases presenciales o trabajo asincrónico que realiza el estudiantado.

Entonces, el uso adecuado de las herramientas que se tiene disposición es central. En este ámbito de ideas, una de las principales recomendaciones en cuanto a la faceta mediacional del CDM es la capacitación docente sobre los recursos en los que se detectó poca utilización y bajo nivel de dominio, como lo son las herramientas de diseño, comunicación, edición de audio y video, y creación de páginas web. En estas capacitaciones es importante hacer notar las ventajas que brinda la tecnología para la realización de algunas de las tareas cotidianas del profesorado. Además, deben incluirse ejemplos y prácticas de cómo utilizarlas para ello; por ejemplo, para realizar evaluaciones, diseñar materiales, entre otros.

Por otro lado, en cuanto a la faceta ecológica del CDM se nota un alto conocimiento y aplicación de directrices curriculares y disposición a la innovación tecnológica. Otro punto fuerte que se detectó en la faceta ecológica es que existe un uso adecuado de las tecnologías para motivar y contextualizar situaciones. Sin embargo, se puede promover su uso para mejorar el lenguaje matemático, los procedimientos y argumentos, ya que son

parte de los conocimientos, habilidades y actitudes que se pretenden desarrollar en la carrera, según lo declarado por la Escuela de Matemática de la UCR (2015).

Uno de los principales aspectos que tienen bajo nivel es el aplicar estrategias para desarrollar los factores socio-profesionales en el estudiantado, así como la integración de las tecnologías mencionadas en párrafos anteriores. En este sentido, por ejemplo, hay una carencia importante en cuanto a los recursos con los que cuenta el estudiantado, y es parte de los análisis sobre la viabilidad de las estrategias que escoja el personal docente, además de ver la posibilidad de utilizar los recursos institucionales, en caso de que no se cuente con los recursos de uso personal del estudiantado. Por lo tanto, se recomienda elaborar un espacio de reflexión sobre los factores socio-profesionales relacionados con el uso de las tecnologías digitales, el cual debe estar basado no solo en la experiencia de aula, sino en elementos teóricos que den apoyo a las reflexiones.

Finalmente, la principal recomendación derivada de esta investigación es la de implementar capacitaciones constantes para que el personal docente se mantenga actualizado sobre el uso de las más recientes tecnologías de uso educativo. Esto para que puedan tener a mano nuevas posibilidades educativas, así como la capacidad de implementarlas adecuadamente en la formación inicial del profesorado, lo cual constituye su principal tarea. Igualmente, capacitarles para que las futuras personas docentes también tengan un conocimiento adecuado de dichas herramientas y recursos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

JVG concibió la idea presentada, desarrolló la teoría, adaptó la metodología, elaboró y aplicó los instrumentos, así como el análisis de los datos y las discusiones y conclusiones.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora JVG, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

El agradecimiento es para las personas colegas del Departamento de Educación Matemática de la UCR, por su anuencia a colaborar con la investigación desarrollada, así como la disponibilidad de estar siempre dispuestas a reflexionar sobre la labor que realizamos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Area Moreira, M. (2000). *¿Qué aporta Internet al cambio pedagógico en la Educación Superior?* [Versión electrónica]. <http://manarea.webs.ull.es/articulos/art01.htm>

Area Moreira, M., Hernández Rivero, V. y Sosa Alonso, J. J. (2016). Modelos de integración didáctica de las TIC en el aula. *Revista Científica de Educomunicación*, (47), 79-87. <https://doi.org/10.3916/C47-2016-08>

Belloch Ortí, C. (s.f.) *Las tecnologías de la información y comunicación (T.I.C.)*. Universidad de Valencia. <https://www.uv.es/~bellohc/pdf/pwtic1.pdf>

- Cabero Almenara, J., Cebreiro López, B., Salinas Ibáñez, J. M., Castaño Garrido, C. M., Morales Lozano, J. A., Martínez Sánchez, F., Romero Tena, R., Gisbert Cervera, M. y Prendes Espinoza, M. P. (2003). Las nuevas tecnologías en la actividad universitaria. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, (20), 81-100.
- Cabero Almenara, J. y Llorente Cejudo, M. C. (2015). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): escenarios formativos y teorías del aprendizaje. *Revista Lasallista de Investigación*, 12(2), 186-192. <https://doi.org/10.22507/rli.v12n2a19>
- Calderón Meléndez, A. (2020). Elementos claves de la virtualidad en la educación superior. *Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior*, 11(2), 80-104. <https://doi.org/10.22458/caes.v11i2.3322>
- Castro Granados, A. y Artavia Díaz, K. Y. (2020). Competencias digitales docentes: un acercamiento inicial. *Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior*, 11(1), 47-80. <https://doi.org/10.22458/caes.v11i1.2932>
- Engelbrecht, J., Llinares, S. y Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM Mathematics Education*, 52, 825-84. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>
- Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. (2015). Texto parcial del Plan de Estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática. Costa Rica: Escuela de Matemática. https://emate.ucr.ac.cr/images/EMATE/Departamentos/Ensenanza/Educacion/perfil_academico_profesional_educacion_matematica.pdf
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2013_idoneidad_didactica.pdf
- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1-24. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8 de marzo del 2009 de J.D. Godino, C. Batanero y V. Font. (2007), The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. (Versión ampliada y revisada de The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(12) 127-135, por J. D. Godino, C. Batanero y V. Font, 2007). https://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema de la indagación y transmisión. *Revista Paradigma*, XLI, 80-106. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino&Burgos_Paradigma2020.pdf
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Poveda, W. y García Cuéllar, D. (2021). Estrategias asociadas al uso de GeoGebra en un contexto de resolución de problemas. *REMATEC*, 16(37), 61-80. Recuperado de <https://rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/252/259>
- Rectoría de la Universidad de Costa Rica. (2020a). *Resolución R-95-2020*. <http://www.rectoria.ucr.ac.cr/site/wp-content/uploads/2020/03/resoluciones-r-95-2020.pdf>
- Rectoría de la Universidad de Costa Rica. (2020b). *Resolución R-158-2020*. <http://www.rectoria.ucr.ac.cr/site/wp-content/uploads/2020/06/resolucion-r-158-2020.pdf>
- Rectoría de la Universidad de Costa Rica. (2020c). *Resolución R-254-2020*. <http://www.rectoria.ucr.ac.cr/site/wp-content/uploads/2020/10/resolucion-r-254-2020.pdf>

- Sánchez Jaramillo, J. A., David Vásquez, A. G., Cárdenas Zapata, L. C. y Cadavid Rojas, A. M. (2023). Formación continuada docente: desafíos y oportunidades para una educación de calidad. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(2), 10706-10729. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.6156
- Vargas, J. (2022). *Propuesta para el uso de las herramientas y recursos tecnológicos, basada en una caracterización de las facetas mediacional y ecológica del conocimiento didáctico-matemático del profesorado de la Carrera Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica en el 2021* [Tesis de maestría, Universidad Estatal a Distancia].
- Vílchez Guizado, J. (2019). Empoderamiento digital y desarrollo de competencias matemáticas en la formación del docente de matemática. *MLS Educational Research*, 3(1), 59-78. <https://doi.org/10.29314/mlser.v3i1.130>



ANÁLISIS FACTORIAL EXPLORATORIO DE LAS EXPECTATIVAS DE EFICACIA Y LOS VALORES DE LAS TAREAS EN MATEMÁTICA, UN ANÁLISIS REALIZADO EN PERSONAS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

EXPLORATORY FACTOR ANALYSIS OF EFFECTIVENESS EXPECTATIONS AND TASK VALUES IN MATHEMATICS, AN ANALYSIS CONDUCTED IN ENGINEERING AND SCIENCE STUDENTS

Víctor Adolfo Rojas Cruz¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-6538-1656>

RESUMEN

Esta investigación exploró las expectativas de eficacia y el valor de las tareas en estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias, con un enfoque en su motivación hacia la matemática. El objetivo fue evaluar dimensiones clave como las expectativas de eficacia, el valor de logro, intrínseco, de utilidad y el costo de las tareas, utilizando una escala adaptada de Safavian (2019). El estudio adoptó una metodología cuantitativa correlacional con un diseño ex post facto, pues las variables analizadas ya estaban presentes y no fueron manipuladas experimentalmente. Para validar la escala, se realizaron entrevistas cognitivas con 10 estudiantes de cálculo en la Universidad de Costa Rica, para lo cual se aseguró la comprensión de los ítems por parte de los participantes. Posteriormente, un análisis factorial exploratorio (AFE) con rotación Promax reveló la existencia de cuatro factores principales: expectativas de eficacia, valor intrínseco, utilidad y costo. Entre los hallazgos más importantes, se identificó una relación estrecha entre el valor de logro y el valor de utilidad, sugiriendo que una mayor percepción de utilidad influye positivamente en el rendimiento académico. El análisis también resultó en la eliminación de algunas preguntas para mejorar la precisión de la escala. En conclusión, los factores de valor intrínseco, utilidad y costo emergieron como componentes clave para medir la motivación en estudiantes de matemáticas, lo que destaca la importancia de estos aspectos en el éxito académico.

Palabras clave: valores de las tareas, motivación al logro, análisis factorial, rendimiento académico.

ABSTRACT

This research explored efficacy expectations and task value in engineering and science undergraduate students, with a focus on their motivation towards mathematics. The objective was to assess key dimensions such as efficacy expectations, achievement value, intrinsic value, utility value, and task cost, using a scale adapted from Safavian

¹ Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico: VICTOR.ROJASCRUZ@ucr.ac.cr

(2019). The study adopted a correlational quantitative methodology with an ex post facto design, since the variables analyzed were already present and were not experimentally manipulated. To validate the scale, cognitive interviews were conducted with 10 calculus students at the University of Costa Rica, ensuring the participants' understanding of the items. Subsequently, an exploratory factor analysis (EFA) with Promax rotation revealed the existence of four main factors: efficacy expectations, intrinsic value, utility, and cost. Among the most important findings, a close relationship was identified between achievement value and utility value, suggesting that a higher perception of utility positively influences academic performance. The analysis also resulted in the removal of some questions to improve the accuracy of the scale. In conclusion, intrinsic value, utility and cost factors emerged as key components for measuring motivation in mathematics students, highlighting the importance of these aspects in academic success.

Keywords: task values, achievement motivation, factor analysis, academic performance.

1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación realizó un análisis factorial exploratorio de las expectativas de eficacia y el valor de las tareas en estudiantes universitarios de ingenierías y ciencias. Se identifican las principales variables involucradas en la motivación al logro en matemática; estas son las expectativas de eficacia, el valor de las tareas (logro, intrínseco, utilidad y costo). Con estas variables, se quiere obtener medidas confiables y válidas, de manera que se le dé validez y confiabilidad a la escala que se trabajó, la cual fue una adaptación de Safavian (2019).

El objetivo es validar y analizar una escala que mida las expectativas de autoeficacia y los valores de las tareas en matemáticas, a través de un análisis factorial exploratorio, con el fin de identificar los factores subyacentes que influyen en estudiantes de ingeniería y ciencias. Esto nos lleva a la pregunta problema: ¿es posible validar una escala que mida las expectativas de autoeficacia y los valores de las tareas en estudiantes de ingeniería y ciencias, e identificar los factores latentes que explican estas dimensiones mediante un análisis factorial exploratorio?

Los principales hallazgos relacionados al tema de investigación muestran que la motivación al logro se mide mediante los valores de las tareas y las expectativas de eficacia relacionadas con el rendimiento académico. Crombie *et al.* (2005) estudiaron la relación entre las variables expectativas de eficacia y el rendimiento académico, y mostraron una asociación positiva ($\beta=0,34$). En esta investigación se estudiaron los logros previos en noveno y después en universidad; se obtuvieron correlaciones positivas en ambos casos.

Safavian (2019) encontró que los valores de las tareas y las expectativas de eficacia se asocian de manera positiva; esto quiere decir que, si un estudiante posee altas expectativas de eficacia y valores de las tareas, su rendimiento académico aumenta. Jiang, Simpkins y Eccles (2020) examinaron las relaciones entre las variables de las expectativas de eficacia y el rendimiento académico. Se muestra una correlación positiva entre el autoconcepto de habilidad matemática y el rendimiento académico.

En la investigación de Cárcamo, Moreno y Del Barrio (2020) se mostró una relación negativa entre el valor de costo y el rendimiento académico. Analizaron las relaciones entre las variables y para conocer el papel que desempeñan en la explicación del rendimiento académico en matemática. Participaron un total de 406 estudiantes de cuarto y quinto grado de primaria en Colombia. Se seleccionaron 406 estudiantes (58.9 % niñas) de estrato socioeconómico medio.

El interés en el tema surge a partir del deseo de ahondar en los resultados de documentos como los del quinto informe del Estado de la Educación (2015), el cual revela que existe una disparidad importante en la calidad educativa entre colegios públicos, privados y científicos (Fernández y Del Valle, 2013).

El sistema de educación de los colegios científicos ofrece una formación académica con un nivel más elevado, en comparación con el promedio nacional (Estado de la Educación Costarricense, 2017); pues sus profesores, para trabajar en este tipo de centros, deben cumplir con una formación matemática y educativa superior a la solicitada en los demás. En estos centros educativos se enseñan contenidos de más alto nivel que en la mayoría de colegios públicos, ya sea en matemática o en otras áreas del conocimiento que no se exigen en otros centros de educación pública (MEP, 1994).

Por otra parte, los alumnos de centros educativos urbano-marginales presentan alta deserción en los primeros niveles de secundaria, así como bajos resultados en pruebas estandarizadas como PISA o los exámenes de bachillerado del último año de secundaria. Muchas de estas personas estudiantes son las que ingresan a las universidades públicas a estudiar ingeniería y ciencias (Estado de la Educación Costarricense, 2017). Es decir, que a pesar de lo presentado anteriormente, gran parte de la población universitaria de universidades públicas proviene de colegios públicos. Al recolectar evidencia de estos hechos, se toman mejores decisiones en las estrategias didácticas para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en cursos universitarios. El objetivo fue realizar un análisis factorial exploratorio para validar la escala, de manera que se realizaron entrevistas cognitivas y se hizo una traducción de la escala.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La definición de expectativa de eficacia varía dependiendo del contexto que se investigue. Según Wigfield (1994), las expectativas de éxito se pueden definir como las creencias del individuo sobre lo bien que le irá en una próxima tarea. También, se puede definir como la apreciación subjetiva del éxito en una tarea realizada por un individuo; además, se puede ver como una estimación más objetiva de la posibilidad de éxito basada en la información extraída de datos normativos (Orozco y Díaz, 2009).

Este constructo posee la dificultad de que las predicciones basadas en las expectativas de éxito pueden depender de la interacción de una relación probable entre las percepciones de competencia y las expectativas. Esto quiere decir que, por ejemplo, los sujetos que se creen incompetentes para realizar una tarea podrían tener una expectativa subjetiva de éxito relativamente baja, aun cuando los datos normativos indiquen que la tarea es bastante fácil. Para corregir estos errores teóricos, es importante iniciar separando conceptualmente los efectos motivacionales derivados de la dificultad real de la tarea y las expectativas subjetivas de éxito o del nivel de confianza.

Las expectativas de eficacia se relacionan con el propósito y los esfuerzos que se hacen para lograr algo, de ahí que el surgimiento de este concepto y los conceptos relacionados constituyan focos importantes sobre los que centrar el análisis evolutivo de la orientación al logro.

En algunas publicaciones se les llama expectativas de éxito (Eccles y Wigfield, 1992), y en ocasiones se utilizan escalas de autoeficacia o autoconcepto de capacidad. Las asociaciones de expectativa de éxito y los logros en matemática están bien documentadas (Simpkins, Davis-Kean, y Eccles, 2006). Estas asociaciones son positivas, fuertes y no varían en el tiempo (Steinmayr y Spinath, 2009).

Hasta el momento no está claro si la variación en el rendimiento en matemáticas se explica constantemente por las expectativas de éxito en los estudiantes. Por ejemplo, un estudio encontró que el 50 % de la variación en el rendimiento matemático de los estudiantes en la escuela secundaria se explica por la autoeficacia, los logros previos y la capacidad, mientras que esto fue del 29 % para los hispanos (Stevens *et al.*, 2004).

Los valores de la tarea se definen bajo cuatro componentes principales: de logro, utilidad, intrínseco y costo. El valor de la tarea en general se asocia a las creencias que posee un estudiante sobre sus posibles logros. Este componente se ha medido y analizado de muchas formas, la que presenta mejor confiabilidad y que se muestra en las investigaciones de los antecedentes, es el uso de escalas para medir sus cuatro componentes (Eccles, 2005).

En Eccles *et al.* (1983), se muestran las interpretaciones que hacen los estudiantes sobre su propio estilo y sus percepciones de las actitudes y expectativas de los socializadores influyen en sus metas y creencias específicas de la tarea. Otras influencias que no se muestran en el modelo son el desempeño previo en diferentes tareas, las creencias, valores y comportamientos de socializadores importantes, y el entorno cultural más amplio.

Según Eccles y Wigfield (1992), **el valor de la tarea se puede entender como las creencias sobre los estados finales deseados**. En educación, los estudiantes tienen asignaturas que les llaman más la atención que otras, lo cual hace que estudien más o entiendan mejor los conceptos de unas y les cueste más entender otras. Naturalmente, una asignatura que nos agrade, que nos parezca esencial para nuestras vidas y que consideremos que es fácil nos va a motivar mucho más que aquellas que no nos agraden o nos parezcan difíciles.

Ahora bien, los valores tienen una definición amplia. Johnston (1995), por ejemplo, los interpretó como creencias sobre los estados finales deseados; además, identificó un conjunto de valores que creía que eran fundamentales para la experiencia humana, y algunos de estos valores se refieren al logro.

En la literatura sobre motivación al logro, los valores de las tareas se han definido más específicamente como una tarea que satisface las diferentes necesidades de los individuos (Eccles *et al.*, 1983; Wigfield y Eccles, 1992). Un aspecto importante es que el valor de la tarea se puede desagregar en cuatro componentes principales de los valores subjetivos: valor o importancia de logro, valor intrínseco, valor de utilidad o utilidad de la tarea y costo (Eccles *et al.*, 1983; Wigfield y Eccles, 1992).

Eccles *et al.* (1983) definieron el valor de logro como la importancia que le da un individuo a hacer bien una tarea determinada. **Es la importancia propia para lograr satisfacer este logro; es decir, si lo consideramos algo fundamental para nuestra propia forma de ser o es simplemente algo más que tenemos que conseguir porque está en el currículo académico** (Deci y Ryan, 1985; Harter, 1981).

El valor de utilidad se refiere a cómo una tarea encaja en los planes futuros de un individuo; por ejemplo, tomar una clase de matemáticas para cumplir un requisito de un título (Widgfield, 1994). Utiliza conocimientos más “extrínsecos” para realizar una tarea, como hacer una tarea no por sí misma, sino para alcanzar algún estado final deseado. Por tanto, este constructo puede compararse con el constructo de la motivación extrínseca. Si bien es posible que exista cierta superposición en estas construcciones, es importante señalar que los constructos de valores y los de valor e interés intrínseco y extrínseco provienen de distintas perspectivas teóricas y, por lo tanto, tienen diferentes raíces intelectuales (Widgfield y Eccles, 2000).

El valor intrínseco es el disfrute que se obtiene al realizar la tarea. Este componente es similar en ciertos aspectos a las nociones de motivación intrínseca. Deci y Ryan (1985) afirman que cuando los individuos realizan tareas que son intrínsecamente valoradas, existen importantes consecuencias psicológicas para ellos, la mayoría de las cuales son bastante positivas.

Eccles *et al.* (1983) definieron el valor de costo como la decisión de participar en una actividad; por ejemplo, hacer una tarea de matemática, y cómo esta limita el acceso a otras actividades, tal como llamar a amigos o salir a realizar algún deporte. Es decir, es una evaluación de cuánto esfuerzo se tomará para realizar la actividad y su costo emocional.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Esta es una investigación cuantitativa de tipo correlacional, ya que las variables sobre la teoría de motivación al logro matemático; es decir, las expectativas de eficacia y valores de la tarea (intrínseco, creencias propias sobre la matemática, utilidad y de costo) se van a estudiar sin hacer ningún cambio en la motivación de las personas estudiantes, sino la motivación que poseen en el momento de la investigación.

El diseño de investigación es *ex post facto*, lo que indica que es observacional. Se plantea la validación de hipótesis en relación con la validación de la escala. Cabe resaltar que no se tiene control de las variables independientes; es decir, de las expectativas de eficacia y valores de la tarea,) dado que sus manifestaciones ya han ocurrido (Bisquerra, 1989).

En esta investigación se quiere encontrar evidencias de que las relaciones esperadas se presentan en los datos a partir de las variables expectativas de eficacia y valores de la tarea. Existen dos tipos de investigación *ex post facto*: una es retrospectiva, en la que todo ha ocurrido antes de que llegue el investigador, y la prospectiva es cuando todavía no ha ocurrido el desenlace. Este último tipo es el que emplea la presente investigación, pues primero se estudian las variables mencionadas sobre motivación al logro matemático en estudiantes que estén llevando un curso de Cálculo I en la Universidad de Costa Rica (Gambara & León, 1995).

La investigación de tipo *ex post facto* posee ciertas limitaciones, como la incapacidad de controlar directamente las variables independientes, la imposibilidad de realizar una asignación aleatoria y el riesgo de interpretaciones erróneas derivadas de la falta de control. Las primeras dos limitaciones no se pueden cambiar y ambas se encuentran presentes en la investigación.

Se buscó entender y explicar la motivación al logro matemático, utilizando las variables expectativas de eficacia y valores de la tarea (intrínseco, creencias propias sobre la matemática, utilidad y de costo) asociadas al rendimiento académico mediante el uso de escalas. Se parte de dos hipótesis básicas: se esperaba encontrar que las cargas factoriales fueran superiores a 0.4 en las variables expectativas de eficacia y los cuatro valores de las tareas.

La muestra es a conveniencia (también llamada accidental) de personas de un curso universitario de matemática, para un total de 128 personas (74 hombres, 52 mujeres y 1 prefirió no decir el género), debido a que representa un porcentaje importante de los estudiantes que participan en el curso de interés (Hernández, 2014). Se adaptó la escala de motivación al logro en matemática de Safavian (2019), está compuesta por ítems de las dimensiones valor intrínseco (seis reactivos), valor de utilidad (cuatro reactivos) y de costo (cinco reactivos) en una escala de cinco puntos.

Originalmente, la escala de Safavian (2019) posee dos ítems de valor de costo, se agregaron 3, por el análisis de datos. Los valores Alpha de Cronbach obtenidos fueron: valor intrínseco 0.94, valor de utilidad 0.88 y valor de costo 0.88. Todos los valores son superiores a 0.77, lo que indica consistencia interna de la escala.

Además, se adaptó la escala de expectativas de eficacia de Safavian (2019), la cual está compuesta por seis ítems en una escala de cinco puntos. El valor de Alpha de Cronbach correspondiente a esta escala es 0.89, lo que también indica consistencia interna de la escala. Con base en las entrevistas cognitivas no hubo necesidad de cambiar la redacción en la traducción de la escala, por lo que los ítems se mantuvieron muy similares a lo propuesto.

En el procedimiento, primero se hace una adaptación de escalas de Safavian (2019). En una primera etapa se realizaron entrevistas cognitivas para validar la escala y obtener información sobre el entendimiento de los ítems. Así, se realizaron 10 entrevistas a estudiantes universitarios de **Cálculo I**, luego se analizaron los resultados obtenidos y se realizaron los cambios pertinentes a la escala.

La segunda etapa consistió en realizar la aplicación de la escala; se hizo un análisis factorial exploratorio, cuyos resultados obtenidos se detallan en el siguiente capítulo. Sin embargo, con los datos obtenidos se recomienda eliminar una dimensión de valor de la tarea con dicho análisis.

El Alpha de Cronbach de la escala utilizada en el piloto fue de 0.93, lo que, nuevamente, indica consistencia interna de la escala. Para el análisis factorial, solamente el valor de logro no cargaba en ninguno de los tres factores, por lo que se decidió eliminarlo de la aplicación.

Para el análisis de datos, en las entrevistas cognitivas se hace el análisis de los datos obtenidos usando el enfoque de Smith y Molina (2011), en el que se analizan los autoreportes de cada persona, de manera que se generen cambios en la escala para mejorar su comprensión, así las respuestas obtenidas en la aplicación son más confiables y los datos son más acertados.

En la aplicación de la escala, el análisis es un análisis factorial exploratorio. El propósito principal es identificar una estructura de factores en un conjunto amplio de datos, lo cual permite agrupar las variables que se correlacionan fuertemente entre sí, y que las correlaciones con otras variables sean menores (Pérez y Medrano, 2010).

Según Pérez y Medrano (2010), se deben verificar varios supuestos en un análisis factorial: la normalidad, linealidad y multicolinealidad de las puntuaciones. Se recomienda hacer un análisis exploratorio inicial de los datos con el fin de detectar casos atípicos o con valores extremos, o bien variables que no carguen en un mismo factor.

Criterios para el análisis de datos:

- Para que los ítems de una variable carguen en un mismo factor, su carga factorial debe ser mayor que .40, o que al menos cuatro ítems carguen superior a este valor (Pérez y Medrano, 2010).
- La prueba estadística medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) debe ser mayor que .70 (Pérez y Medrano, 2010).

4. RESULTADOS

En las entrevistas cognitivas los participantes fueron 10 estudiantes de los cursos Cálculo 2 y Precálculo de la Universidad de Costa Rica durante el II semestre del 2022. Tomando el libro de entrevista cognitiva de (Smith y Molina, 2011), se procedió con el protocolo de entrevista cognitiva. Se le explicó a cada persona estudiante el objetivo de la entrevista, que es validar la comprensión de la escala, que logren verbalizar los ítems e indicar si comprenden lo que se pretende medir.

Para esto, en cada uno de los ítems la persona entrevistadora le pidió al participante que leyera en voz alta cada uno de los ítems en forma pausada, que indicara qué comprendía del ítem, cuál respuesta marcaría y por qué. Cada una de las entrevistas duró entre 20 minutos y una hora. Debido a la disponibilidad de las personas estudiantes y su tiempo, algunas entrevistas se realizaron de manera presencial y otras de forma virtual a través de Zoom. En todas las entrevistas hubo una persona que observaba las entrevistas; esta persona era únicamente observadora. De las entrevistas virtuales se tiene como evidencia los videos de las entrevistas, mientras que de las presenciales se tiene la grabación en audio y el consentimiento de cada persona.

Luego, se realizó un análisis de todas las respuestas, de manera que los aspectos más sobresalientes fueron:

- La existencia de dos ítems iguales, el 9 y el 14. *Es importante para mí ser bueno resolviendo problemas que involucran matemáticas.*
- La sugerencia de quitar el verbo *poder*, de la frase *soy capaz de poder...* para los ítems de expectativa de eficacia. Es decir, para el ítem 1 por ejemplo: pasar de *Soy capaz de poder aprender todo lo que se enseña en matemática*, a *soy capaz de aprender todo lo que se enseña en matemática*. Esta sugerencia se da porque se considera que el término *poder* no es excluyente, pues muchas personas pueden estar en la universidad estudiando, pero por su condición socioeconómica se les imposibilita el estudio.
- Ser más específico en el ítem que se refiere a renunciar a mucho. “¿A qué se refiere?”, mencionaron 4 personas estudiantes. Se cambió por: *tengo que renunciar a actividades personales para entender bien la materia en matemática.*
- Se sugirió resaltar en negrita la palabra *éxito* del ítem 10, para lograr distinguirla de la palabra *entender* en el ítem 5. Se acató esta recomendación, con el fin de comunicar adecuadamente la diferencia de ambos ítems. Ítem 10: *El éxito en matemática requiere que renuncie a otras actividades que disfruto.* Ítem 5: *Tengo que renunciar a mucho para entender bien la materia en matemática.* En el ítem 11, que dice lo siguiente: *Soy capaz de poder hacer todo el trabajo en la clase de matemática.* Se sugiere hacer el cambio de la palabra *trabajo* a *ejercicios* o *prácticas en clase.*

La escala completa con la base de datos se puede encontrar en: https://docs.google.com/spreadsheets/d/1hKnPvgLsOMsd9LGSJJrVe021iEZk_HBDQJxtDg_kdj0/edit?usp=sharing.

La aplicación se realizó en 128 estudiantes del curso MA-1210 Cálculo 1 para salud, durante el II ciclo 2022 en la Universidad de Costa Rica. Se utilizaron las dos escalas adaptadas de Safavian (2019) y se les añadieron ítems de valor de costo de las tareas de elaboración propia, además de todas las correcciones de redacción que se tomaron de las entrevistas cognitivas. El objetivo de la aplicación fue obtener evidencias de validez y confiabilidad de las puntuaciones de la escala, mediante análisis factorial exploratorio, de manera que se obtuvieran índices confiables para la aplicación final.

Para realizar el proceso de recolección de datos, primero se solicitó el permiso ante las autoridades de la Escuela de Matemática, con el fin de que el director de la escuela, el director del Departamento de Matemática Aplicada y las coordinadoras de las cátedras dieran el visto bueno para la aplicación. Una vez obtenido el visto bueno, se procedió a la recolección de datos. Este proceso se realizó de manera presencial, pues se quería tener la mayor cantidad de muestra posible. La aplicación se hizo en todos los horarios en los que las personas docentes accedieron a colaborar. Este proceso ayudó a motivar a las personas estudiantes a responder de manera certera, y se explicó que siempre se iba a velar por la confidencialidad de los datos.

Se procedió con el análisis factorial, utilizado para analizar las interrelaciones que existen entre las variables métricas explicando las interrelaciones en términos de un número menor de variables denominadas factores (si son inobservables) o componentes principales.

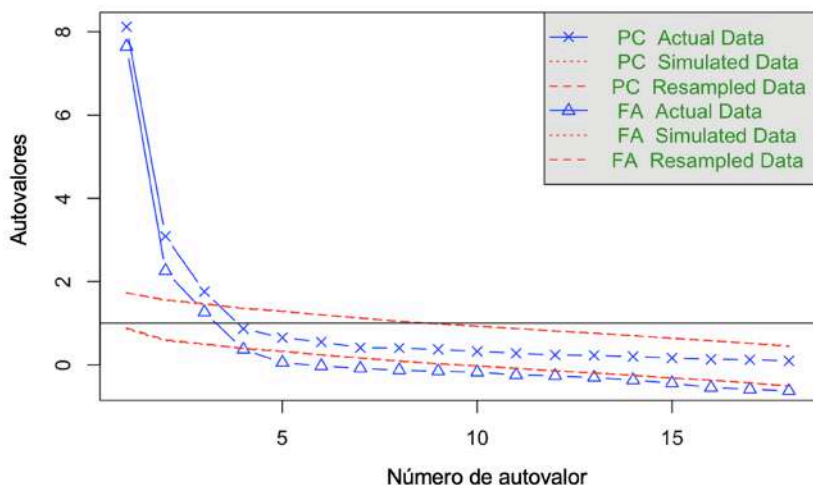
Para el análisis factorial se usó la investigación llamada “Mecanismos subyacentes a la relación de la ansiedad ante los exámenes con el rendimiento en pruebas”, de Rojas (2021). Este estudio es muy útil, pues realiza un análisis factorial a alguna de las escalas que se usaron, además de usar el modelo de ecuaciones estructurales en el análisis de datos.

La estructura del análisis factorial que usó Rojas (2021) tiene tres partes fundamentales: la retención de factores, la extracción y la interpretación. En los siguientes párrafos se detalla el uso de este análisis para la presente investigación.

- **Interpretación de factores:** Para determinar cuántos factores se iban a extraer, se realizó un análisis paralelo, el cual se usó para determinar la cantidad de factores significativos en el análisis. Por último, “la cantidad de factores a extraer se definió por el número de cocientes previos, a la cola de cocientes con valores menores o iguales a 1.25” (Rojas, 2021, p. 97).
- **Extracción:** En esta etapa se estimaron la cantidad de factores determinada en la etapa previa. Para esto se realizó un Análisis Factorial Exploratorio (AFE) con el método de estimación de mínimos residuos cuadráticos. La cantidad de factores que arrojó este análisis es de 3 (Rojas, 2021).
- **Interpretación:** se realizó una rotación Promax, para permitir que los factores estuvieran correlacionados. De esta manera se analizan los ítems con cargas factoriales mayores a .40, como se muestra en la metodología (Pérez y Medrano, 2010).

Los resultados obtenidos de la escala de valores de las tareas fueron los siguientes:

Retención de factores: El análisis paralelo indicó que la matriz de correlaciones se podía descomponer en tres factores. En la Figura 1 se muestra la gráfica del análisis paralelo realizado en los autovalores propios obtenidos en la escala de valores de las tareas. Este método muestra la estimación de los factores en el análisis de la estructura interna de la escala de valores de las tareas (Raimundi y Schmidt, 2015).

Figura 1. Análisis de componentes principales de los valores de las tareas.

Fuente: Elaboración propia.

En esta Figura 1 se realiza una interpretación sobre la cantidad de factores que sugiere la gráfica, en este caso son tres, pues son los valores superiores a los autovalores obtenidos por la matriz de datos simulados. Se evidencia que, después del tercer autovalor, los autovalores fueron muy similares entre sí para la escala de valores de las tareas. Los primeros tres autovalores son distintos; se logra observar que después del tercer autovalor, las puntuaciones son muy similares.

Extracción e interpretación: Las cargas factoriales de los factores estimados se presentan en la Tabla 1. Se obtuvo que, en cada factor, los ítems que cumplieron el criterio establecido correspondieron a una misma dimensión teórica.

En el primer factor hubo seis ítems de valor intrínseco que cumplieron el criterio. En el segundo y tercero hubo siete y cinco reactivos que cumplieron el criterio establecido, respectivamente; en el segundo factor, los reactivos de valor de logro y valor de utilidad y, en el tercer factor, los reactivos de valor de costo. Sin embargo, se logra observar que el valor de logro realmente no está cargando en ningún factor; tienen mayor tendencia a cargar en el segundo factor al igual que el valor de utilidad.

Con base en lo anterior, se concluyó que los factores representaban a las tres dimensiones establecidas en el análisis factorial, dispuestas en la construcción de la escala de motivación al logro en matemática. Sin embargo, en el segundo factor, están cargando los reactivos de valor de logro y valor de utilidad y, en particular, el valor de logro carga en un mismo factor muy bajo, a diferencia de los demás, en los que las puntuaciones son altas.

Los resultados obtenidos indican un aspecto que sobresale en particular de esta investigación: el hecho que la subescala de valor de logro tiene una tendencia a cargar en el valor de utilidad. Si se observa detalladamente a los reactivos y la definición de cada uno, se puede analizar que, en realidad, el valor de utilidad ya define el valor de logro; así, una persona que posea un alto valor de utilidad tendrá un alto valor de logro por la construcción y definición de los valores. Para este caso, se toma la decisión de eliminar por completo el valor de logro para la aplicación de la escala.

El Alpha de Cronbach de la escala fue de 0.87, lo que indica consistencia interna. Los Alpha de Cronbach de cada una de las subescalas por aparte fueron: valor de costo 0.94, valor de logro 0.89, valor de logro 0.91 y valor de utilidad 0.91.

- En la Tabla 1 se muestran las cargas factoriales, y se resalta que el Alfa de Cronbach de cada subescala asociada al factor es alta.

Tabla 1. Cargas factoriales rotadas de la escala de valores de la tarea en matemática del piloto.

Ítems		F1	F2	F3
<i>Valor intrínseco</i>				
2-	Me gusta practicar matemática.	.85	-.06	.04
7-	Me gustan las matemáticas.	.96	-.05	-.06
12-	Las matemáticas me emocionan.	.85	.07	-.06
16-	Estoy fascinado(a) por la matemática.	.82	.06	.05
20-	Disfruto hacer matemática.	.93	-.02	.00
22-	Disfruto el curso de matemática.	.75	.05	-.01
<i>Valor de utilidad</i>				
3-	La matemática es útil para mis metas laborales.	.00	.82	.01
8-	Las matemáticas me serán útiles más adelante en la vida.	-.09	.97	-.07
13-	Los conceptos matemáticos son valiosos porque me ayudarán en el futuro.	.05	.80	.04
17-	Ser bueno(a) en matemática será importante cuando consiga un trabajo o salga de la universidad.	.07	.80	.00
<i>Valor de logro</i>				
4-	Ser bueno(a) en matemática es importante para mí.	.40	.36	.17
9-	Es importante para mí ser bueno(a) resolviendo problemas que involucran matemática.	.39	.34	.19
21-	Para mí es importante ser una persona que razona matemáticamente.	.25	.48	.20

Valor de costo				
5-	Tengo que renunciar a actividades personales para entender bien la materia en matemática.	-.07	.01	.82
10-	El éxito en matemática requiere que renuncie a otras actividades que disfruto.	.00	.04	.75
14-	El tiempo invertido para estudiar matemática me afecta el rendimiento académico en otros cursos.	-.04	-.01	.71
19-	Cuando estudio matemática me queda poco tiempo para mis actividades de recreación.	.11	-.04	.77
23-	Cuando llevo cursos de matemática siento que el tiempo no me alcanza.	-.04	-.04	.81

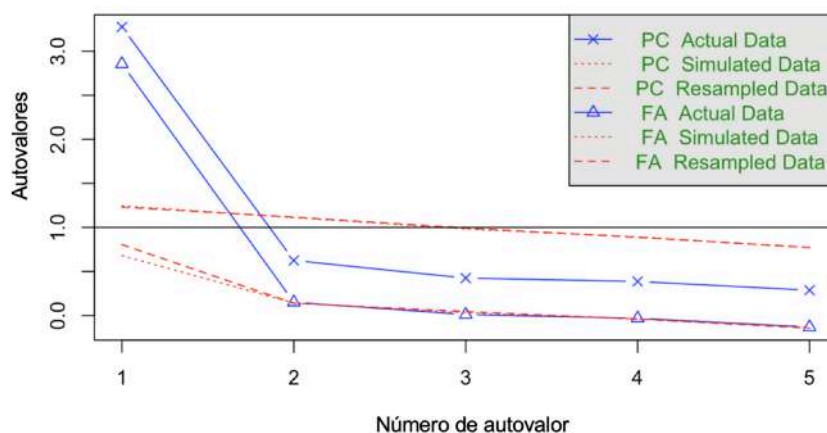
F1= factor 1, F2= factor 2, F3= factor 3.

Fuente: Elaboración propia.

Los ítems de valor intrínseco cargaron en el factor 1 (F1), de valor de utilidad cargan en el factor 2 (F2) y los de valor de costo en el factor 3 (F3), pues sus valores son superiores a .40. De hecho, el valor más bajo es .68 y el más alto es .82, por lo que corresponden a la misma dimensión teórica. Solamente el valor de logro no carga en ninguno de los tres factores. Los resultados obtenidos de la escala de expectativas de eficacia fueron los siguientes:

Retención de factores: El análisis paralelo indicó que la matriz de correlaciones se podía descomponer en un factor. En la Figura 2 se muestra la gráfica del análisis paralelo realizado en los autovalores propios obtenidos en la escala de expectativas de eficacia. Este método muestra la estimación de los factores en el análisis de la estructura interna de la escala de expectativas de eficacia (Raimundi y Schmidt, 2015).

Figura 2. Análisis de componentes principales.



Fuente: Elaboración propia.

En esta figura se realiza una interpretación sobre la cantidad de factores que sugiere la gráfica; en este caso es 1, pues los valores son superiores a los autovalores obtenidos por la matriz de datos simulados. Se evidencia que, después del primer autovalor, los autovalores fueron muy similares entre sí para la escala de expectativas de eficacia. *Extracción e interpretación:* Las cargas factoriales de los factores estimados se presentan en la Tabla 2. Se obtuvo que, en cada factor, los ítems que cumplieron el criterio establecido correspondieron a una misma dimensión teórica, ya que todos cargan en el factor 1 (F1) con un valor superior a 0,40.

El Alpha de Cronbach de la escala es 0.92, lo que muestra consistencia interna de la escala.

A continuación, se muestran las cargas factoriales de la escala de expectativas de eficacia:

Tabla 2. Cargas factoriales rotadas de la escala de expectativas de eficacia en matemática del piloto.

Ítems	F1
Expectativas	
1- Soy capaz de aprender todo lo que se enseña en matemática.	.75
6- Soy capaz de resolver los problemas de las tareas más difíciles en matemática.	.73
11- Soy capaz hacer todas las prácticas en la clase de matemática.	.67
15- Soy capaz de hacer incluso el trabajo más difícil en clase de matemática.	.83
18- Soy capaz de aprender los temas difíciles de matemática.	.79

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Las entrevistas cognitivas mejoraron la comprensión de la escala en el contexto en el que se aplicó, ya que se aplicaron en personas estudiantes de los cursos de Cálculo o que habían llevado cursos de matemática, y todas estas personas estudiantes eran estudiantes regulares de la Universidad de Costa Rica. Las entrevistas cognitivas permitieron identificar y corregir errores en la redacción de los ítems del cuestionario, por lo que se mejoró la claridad y precisión de las preguntas. Esto contribuye a validar el instrumento, así como asegurar una comprensión de las preguntas más cercana a los intereses de la investigación. Así, se evidenció que las entrevistas cognitivas ayudaron a detectar posibles interpretaciones erróneas o ambiguas de los ítems. Este proceso facilitó la refinación de las preguntas para propiciar una interpretación uniforme por parte de los encuestados, lo cual reduce el riesgo de sesgos o malentendidos.

Las entrevistas cognitivas no solo ayudaron a evaluar el contenido de las preguntas, sino que también revelaron problemas relacionados con el formato del instrumento (por ejemplo, el diseño visual y la estructura de las opciones de respuesta), lo que favoreció así una mejora integral del cuestionario. Dichas entrevistas demostraron ser un recurso valioso para

adaptar el instrumento a diferentes contextos culturales o socioeconómicos, al identificar términos o referencias culturales que podrían no ser entendidos de la misma manera por todos los participantes. De este modo, se garantiza la aplicabilidad y la validez del instrumento en diferentes poblaciones.

A través de las entrevistas cognitivas, fue posible entender cómo los participantes procesan la información contenida en las preguntas, lo que permitió ajustar la secuencia o redacción de los ítems para que se alinearan mejor con el flujo cognitivo natural de los encuestados. Condujeron a una mayor confiabilidad del instrumento, al asegurar que los ítems fueran claros, comprensibles y medibles de la manera en que se pretendía inicialmente. Esto se refleja en una mayor consistencia en las respuestas obtenidas.

Este proceso de realizar las entrevistas no solo arrojó información respecto a la comprensión de la escala y la redacción, sino que también mostró información valiosa sobre la motivación de las mismas personas estudiantes entrevistadas. Muchas de ellas respondieron la escala y presentaron un discurso de su experiencia.

La experiencia de las personas estudiantes muestra que el interés viene de sí mismos; es decir, de la motivación intrínseca. Algunos hablaron de los padres de familia y el entorno que los rodean, personas docentes influyentes, y otros hasta han pensado en cambiarse de carrera a una que lleve más matemática.

Por último, fueron útiles para probar diferentes versiones del cuestionario o distintos tipos de formato de respuesta, lo cual permitió elegir la versión que generaba menos dudas y proporcionaba respuestas más completas y precisas.

El análisis factorial exploratorio permitió identificar factores subyacentes que explican una proporción significativa de la varianza en las variables analizadas, lo que sugiere que las dimensiones latentes identificadas son coherentes con las teorías subyacentes, y proporcionan una estructura clara de las expectativas de autoeficacia y valores de tareas en matemáticas.

El AFE fue útil para reducir la dimensionalidad del conjunto de variables originales. De las variables latentes, se identificaron el número de factores y factores principales, lo que simplifica la interpretación de los datos y facilita su utilización en futuros estudios o aplicaciones prácticas.

Los factores emergentes del análisis factorial se alinean con los constructos teóricos propuestos inicialmente. Por ejemplo, los factores de “expectativas de eficacia” y “valores de las tareas” coinciden con los componentes sugeridos por teorías motivacionales como el Modelo de Expectativa-Valor de Eccles (2000), lo que refuerza la validez teórica del instrumento.

A partir de los resultados del AFE, se identificaron ítems que no se agruparon en ninguno de los factores principales o que presentaron cargas factoriales bajas. Esto llevó a la eliminación o modificación de estos ítems para mejorar la precisión y validez del instrumento, con lo que se aumentó su confiabilidad. Los factores identificados resultaron relevantes en el contexto específico de estudiantes de ingeniería y ciencias. Esto sugiere que las expectativas de autoeficacia y los valores de las tareas están relacionados de manera significativa con factores únicos que podrían diferir de otros contextos académicos.

Los factores resultantes mostraron una alta consistencia interna, evaluada mediante coeficiente Alpha de Cronbach, lo que sugiere que los ítems dentro de cada factor miden adecuadamente el mismo constructo subyacente. Lo anterior refuerza la validez de los factores identificados en la estructura del modelo.

Los factores identificados en el AFE proporcionan una base para comprender mejor las expectativas de eficacia y los valores que influyen en el rendimiento académico de los

estudiantes. Estos hallazgos pueden tener implicaciones prácticas para el diseño de intervenciones educativas que fortalezcan los factores más importantes, de forma que mejoren los resultados académicos.

Una limitación del AFE es que, si bien permitió identificar patrones claros en los datos, es importante destacar que los factores identificados requieren una validación adicional mediante un análisis factorial confirmatorio (AFC) para confirmar su estructura en otras muestras y asegurar su generalización.

El AFE mostró que los ítems del cuestionario se agrupan de forma clara y coherente, por lo que reveló una estructura latente significativa que puede utilizarse para futuras investigaciones o para la intervención educativa. Esta estructura proporciona un marco válido para medir las expectativas de autoeficacia y los valores de tareas en matemáticas.

Con base en los análisis realizados en el análisis factorial exploratorio, se tomaron varias decisiones para la aplicación de la escala y relacionarlo con el rendimiento académico.

Primeramente, en relación con los factores, el valor de logro realmente está cargando en dos factores: el de utilidad e intrínseco. A nivel teórico se logran realizar ciertas interpretaciones, que vienen también del análisis de las entrevistas cognitivas. Y es que el valor de logro se explica ya en otro valor, que es el valor de utilidad. Cuando a una persona estudiante le es útil la matemática, su valor de logro se verá influenciado directamente; es decir, con un valor de utilidad alto, ya se va a tener un alto valor de logro.

Si analizamos detalladamente los ítems, el ítem de valor de logro que carga con valor de utilidad en realidad se explica usando la definición de valor intrínseco; lo mismo sucede con los dos ítems de valor de logro que cargan más con el valor de utilidad.

Esta aplicación piloto mejora la comprensión de la estructura de la escala al realizar un mayor análisis de los ítems. Por lo general, en las investigaciones se omite esta aplicación, de forma que se realiza una traducción de la escala, se desarrollan las entrevistas cognitivas y se hace la aplicación.

Los Alfa de Cronbach fueron aceptables, lo que dio una buena señal de que la aplicación de la escala es adecuada, que la traducción de la escala y las entrevistas cognitivas fueron adecuadas.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a todo el comité asesor de este proyecto de investigación: Phd. Luis Rojas, Phd. Rodolfo Fallas y Phd. Vanessa Smith. Además, a la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica por brindar los grupos para la investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guía práctica*. CEAC.
- Cárcamo, C., Moreno, A., y del Barrio, C. (2020). Diferencias de género en matemáticas y lengua: Rendimiento académico, autoconcepto y expectativas. *Suma Psicológica*, 27(1), 17-24. <https://doi.org/10.14349/sumapsi.2020.v27.n1.4>
- Crombie, G., Sinclair, N., Silverthorn, N., Byrne, B., DuBois, D., y Trinneer, A. (2005). Predictors of young adolescents' math grades and course enrollment intentions: Gender similarities and differences. *Sex Roles*, 52(5-6), 351-367. <https://doi.org/10.1007/s11199-005-2678-1>

- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Plenum Press
- Eccles, J. (1983). Expectancies, values, and academic behaviors. En J. T. Spence (Ed.), *Achievement and achievement motives: Psychological and sociological approaches* (pp. 75-146). W.H. Freeman and Company
- Eccles, J. S. (2005). Subjective task value and the Eccles et al. model of achievement-related choices. En A. J. Elliot & C. S. Dweck (Eds.), *Handbook of competence and motivation* (pp. 105-121). Guilford Publications
- Programa Estado de la Nación. (2017). *Estado de la Educación Costarricense*. Programa Estado de la Nación. <https://estadonacion.or.cr/?informes=sexto-informe-estado-de-la-educacion-2017>
- Fernández, A., y Del Valle, R. (2013). Desigualdad educativa en Costa Rica: La brecha entre estudiantes de colegios públicos y privados. Análisis con los resultados de la evaluación internacional PISA. *Revista CEPAL*. <https://www.cepal.org/sites/default/files/pr/files/51699-hojainformativa-educacionCostaRica-RevistaCEPAL-111.pdf>
- Gambara, H. y León, O. (1995). *Diseño de investigaciones: cuaderno de prácticas*. MacGraw Hill. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=566761>
- Jiang, S., Simpkins, S. y Eccles, J. (2020). Individuals' math and science motivation and their subsequent STEM choices and achievement in high school and college: A longitudinal study of gender and college generation status differences. *Developmental Psychology*, 56(11), 2137-2151. <https://doi.org/10.1037/dev0001110>
- Harter, S. (1981). A new self-report scale of intrinsic versus extrinsic orientation in the classroom: Motivational and informational components. *Developmental Psychology*, 17(3), 300-312. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.17.3.300>
- Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill. <https://www.esup.edu.pe/> <https://www.esup.edu.pe/wp-content/uploads/2020/12/2.%20Hernandez,%20Fernandez%20y%20Baptista-Metodolog%C3%ADa%20Investigacion%20Cientifica%206ta%20ed.pdf>
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (1994, 19 de mayo). *Normas básicas reguladoras del proceso educativo en los colegios científicos costarricenses*. http://cse.go.cr/sites/default/files/acuerdos/normas_basicas_reguladoras_del_proceso_educativo_en_los_cientificos.pdf
- Orozco, C. y Díaz, M. (2009). Atribuciones de la motivación al logro y sus implicaciones en la formación del pensamiento lógico-matemático en la Universidad. *INCI*, 34-45. https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0378-18442009000900008
- Pérez, E. R. y Medrano, L. A. (2010). Análisis factorial exploratorio: Bases conceptuales y metodológicas. *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento*, 2(1), 58-66. <https://doi.org/10.32348/1852.4206.v2.n1.15924>
- Parker, P., Marsh, H., Guo, J., Anders, J., Shure, N. y Dicke, T. (2018). An information distortion model of social class differences in math self-concept, intrinsic value, and utility value. *Journal of Educational Psychology*, 110(3), 445-463. <https://doi.org/10.1037/edu0000215>
- Programa Estado de la Nación. (2015). *Estado de la Educación Costarricense*. Programa Estado de la Nación. <https://repositorio.conare.ac.cr/handle/20.500.12337/669>
- Programa Estado de la Nación. (2017). *Estado de la Educación Costarricense*. Programa Estado de la Nación. <https://estadonacion.or.cr/?informes=sexto-informe-estado-de-la-educacion-2017>
- Schmidt, V. I., Raimundi, M. J., & Molina, M. F. (2015). Satisfacción vital en dominios específicos: Adaptación de una escala para su evaluación. *Liberabit*, 21(2), 299-312. <https://biblat.unam.mx/hevila/Liberabit/2015/vol21/no2/11.pdf>
- Simpkins, S. D., Davis-Kean, P. E. y Eccles, J. S. (2006). Math and science motivation: A longitudinal examination of the links between choices and beliefs. *Developmental Psychology*, 42(1), 70-83. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.42.1.70>
- Smith Castro, V. y Molina Delgado, M. (2011). *Cuadernos metodológicos: la entrevista cognitiva: Guía para su aplicación en la evaluación de instrumentos de papel y lápiz*. IIP UCR. <https://iip.ucr.ac.cr/es/publicaciones/>

publicacion-de-investigador/la-entrevista-cognitiva-guia-para-su-aplicacion-en-la-0

- Steinmayr, R. y Spinath, B. (2009). The importance of motivation as a predictor of school achievement. *Learning and Individual Differences*, 19(1), 80–90. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.05.004>
- Stevens, T., Olivarez, A., Lan, W. Y. y Tallent-Runnels, M. K. (2004). Role of mathematics self-efficacy and motivation in mathematics performance across ethnicity. *The Journal of Educational Research*, 97(4), 208-222. <https://doi.org/10.3200/joer.97.4.208-222>
- Wigfield, A. y Eccles, J. S. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68-81. <https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015>
- Wigfield, A. y Eccles, J. S. (1994). Children’s competence beliefs, achievement values, and general self-esteem: Change across elementary and middle school. *Journal of Early Adolescence*, 14(2), 107-138. <http://dx.doi.org/10.1177/027243169401400203>
- Wigfield, A. y Eccles, J. (1992). The development of achievement task values: A theoretical analysis. *Developmental Review*, 12(3), 265-310. [https://doi.org/10.1016/0273-2297\(92\)90011-P](https://doi.org/10.1016/0273-2297(92)90011-P)



COMPRENSIÓN DEL APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA DESDE LA DIVERSIDAD COGNITIVA: HACIA LA ACCESIBILIDAD

UNDERSTANDING ARITHMETIC LEARNING FROM COGNITIVE DIVERSITY: TOWARDS ACCESSIBILITY

Elba Azucena Martínez Cárdenas¹

 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-8061-2183>

RESUMEN

La presencia de discapacidad intelectual y de discalculia en las aulas escolares regulares es un desafío para los profesores, en particular por la baja comprensión frente al aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque de diversidad cognitiva. En este artículo de revisión de literatura, se muestra la emergencia de investigación en educación matemática que fortalezca la reflexión didáctica sobre la comprensión de los procesos de aprendizaje de estudiantes con trastornos del neurodesarrollo, para favorecer el diseño de ambientes de aprendizaje de la aritmética que sean accesibles. Para esto, se relacionan aspectos cognitivos, semióticos y afectivos para comprender la diversidad cognitiva como natural a todo ambiente de aprendizaje, y se constituyen trayectorias hipotéticas de aprendizaje, específicamente de patrones aritméticos mediados por juegos estructurados matemáticamente. Se instala el juego como un dispositivo didáctico relacionado con la práctica de resolución de problemas, en la que se desarrollan heurísticas, se producen cambios de estado y se genera conexión afectiva, por lo que se alcanza progresión en el aprendizaje de patrones aritméticos y en la construcción y desarrollo de representaciones desde la interacción con lo otro y con los otros. Finalmente, se considera la posibilidad de hacer uso de la electroencefalografía en el rastreo del aprendizaje de la aritmética, con el fin de evidenciar conexiones entre los aspectos enunciados y la respuesta biológica de la actividad eléctrica del cerebro durante las prácticas de juego.

Palabras clave: Diversidad cognitiva, Discapacidad intelectual, Discalculia, Aprendizaje de patrones aritméticos, Juegos estructurados, Electroencefalografía.

ABSTRACT

The presence of intellectual disability and dyscalculia in regular school classrooms poses a challenge for teachers, particularly due to the low comprehension of mathematics learning from a cognitive diversity perspective. This literature review article highlights the emergence of research in mathematics education aimed at enhancing didactic reflection on understanding the learning processes of students with neurodevelopmental disorders, to promote the design of arithmetic learning environments that are accessible. Cognitive, semiotic, and affective aspects are related to understand cognitive diversity as inherent to every learning environment, and to establish hypothetical learning

¹ Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Código postal: 111161, Correo electrónico: elamartinezc@udistrital.edu.co



trajectories, specifically of arithmetic patterns mediated by mathematically structured games. Game-based learning is introduced as a didactic device, related to problem-solving practice, in which heuristics are developed, state changes occur, and affective connections are generated, achieving progression in the learning of arithmetic patterns, in the construction and development of representations from interaction with the other and with others. Finally, the possibility of using electroencephalography in tracking arithmetic learning is considered, in order to demonstrate connections between the aforementioned aspects and the biological response of brain electrical activity during gaming practices.

Keywords: Cognitive diversity, Intellectual disability, Dyscalculia, Learning arithmetic patterns, Structured games, Electroencephalography.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la educación inclusiva es imperante en la actualidad mundial; la UNESCO insta a “garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje para todos” (2016, p. 20). Esto indica que no es suficiente incluir al estudiante en el aula, sino que se requiere posibilitar el proceso de aprendizaje (Martínez, 2019). Entonces, el desafío para la investigación educativa consiste en construir relaciones y conocimiento para ampliar la comprensión sobre las condiciones de las poblaciones con discapacidad, así como los referentes que pueden posibilitar el diseño de ambientes de aprendizaje accesibles.

Comprender la discapacidad desde la diversidad funcional busca caracterizar la discapacidad a partir de la relación entre las capacidades de las personas y las demandas del ambiente en el que se desenvuelven (OMS, 2001). Desde esta perspectiva, la comprensión de las condiciones de las poblaciones puede permitir el diseño de ambientes de aprendizaje que eliminen barreras para el aprendizaje. Condiciones de neurodesarrollo atípico como la Discapacidad Intelectual (en adelante DI) implican mayores desventajas para los estudiantes (OMS, 2001) y mayores retos para los profesores. Las condiciones particulares de la población no son visibles, por lo que se complejiza la forma de diseñar las adaptaciones correspondientes y necesarias para eliminar barreras de aprendizaje.

La diversidad del funcionamiento cognitivo en el aprendizaje de las matemáticas se hace visible en las aulas escolares, en este caso en niños con DI o con discalculia, dado que presentan condiciones enmarcadas en trastornos del desarrollo neurológico (OMS, 2001; Fernández, et.al., 2010; APA, 2014). Se aborda la discalculia para establecer un panorama del problema de investigación en el campo específico de la educación matemática, lo que aporta en el conocimiento de indicadores de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y las implicaciones que tiene para la persona que no se eliminen barreras, como la persistencia de la dificultad y la afectación social y adaptativa que puede implicar.

La discalculia se caracteriza por la dificultad en el dominio de la aritmética, en respuesta a esto, se propone la identificación de patrones aritméticos como objeto de estudio, ya que son base para la construcción de otras ideas matemáticas y de otros patrones (Clements y Sarama, 2015). Así mismo, se constituyen desde un hábito cognitivo de encontrar regularidades (Steen, 1988; Clements y Sarama, 2015), lo cual favorece el aprendizaje de las matemáticas.

Partiendo de estos fundamentos, desde el enfoque de diversidad cognitiva, esta revisión de literatura presenta una propuesta de investigación, en la que se aborda la articulación de aspectos cognitivos, semióticos y afectivos como indisociables en el aprendizaje de las matemáticas, integrando la incorporación de juegos estructurados matemáticamente. Estos juegos se

proponen como dispositivos didácticos para favorecer el desarrollo de trayectorias de aprendizaje de la aritmética (Clements y Sarama, 2015; Palomá, 2018; Rodríguez, 2018; Pinzón, 2021) y como artefactos tecnológicos que junto a la lectura de ondas electroencefalográficas (EEG) ofrecen información para ampliar la comprensión del aprendizaje de las matemáticas, generando datos sobre cambios de estado en el aprendizaje, que aporten a reflexiones didácticas que impacten en prácticas pedagógicas incluyentes.

2. DIVERSIDAD COGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La discapacidad se manifiesta desde una relación entre las limitaciones que tiene la persona de acuerdo con su funcionamiento a nivel sensorial, motor y mental, respecto a su entorno y sus posibilidades de participación en el mismo (OMS, 2001). Considerar la variación en el funcionamiento de las diferentes estructuras biológicas humanas y el impacto en sus posibilidades de participación en el ambiente es lo que se entiende como el enfoque de diversidad funcional. En particular, la diversidad cognitiva refiere a la variación en las funciones involucradas en el proceso de aprendizaje; en la clase de matemáticas se manifiesta en trastornos del desarrollo neurológico (APA, 2014) como la DI (trastorno de desarrollo intelectual) y la discalculia (trastorno específico del aprendizaje de las matemáticas).

La percepción y el conocimiento que el profesor tiene sobre la discapacidad impacta en el desarrollo de sus prácticas pedagógicas. Duschatzky y Skliar (2000) consideran que, si se comprende la discapacidad como un déficit, entonces se establecen prácticas educativas excluyentes. Los profesores pueden manifestar baja expectativa frente al aprendizaje de las matemáticas de estudiantes con DI, lo cual tiene efectos en su marginación dentro de las prácticas escolares (Clements y Sarama, 2015; Howard y Otros, 2018). Estudios previos han planteado que la mayor parte de las experiencias de fracaso en matemáticas no necesariamente responden a razones neurológicas, sino que pueden ser derivadas de la enseñanza o de situaciones diversas vividas por los alumnos con o sin discapacidad. Así, las dificultades que presentan niños con bajo rendimiento en matemáticas están relacionadas con una interacción de factores ambientales como la calidad de la educación y las oportunidades de aprender, sin olvidar el desarrollo temprano y el entorno de aprendizaje en el hogar (Butterworth, 2005; Broitman y Sancha, 2021; Clements y Sarama, 2015; Fritz, et al., 2019).

En la investigación educativa se ha identificado que los aportes para ocuparse de las condiciones de enseñanza de contenidos matemáticos a alumnos con y sin discapacidad de manera simultánea no son suficientes (Broitman y Sancha, 2021). La neurociencia revela que la capacidad de aprender del ser humano puede superar barreras biológicas, dada la plasticidad del cerebro y su capacidad de adaptación a cambios orgánicos. Para Dehaene (2019), la comprensión de “un modelo mental de lo que ocurre dentro de la cabeza del niño” (p. 18) puede contribuir a mejorar el aprendizaje de todos; ya que, aunque existen variaciones entre lo que los distintos niños saben, esto no significa que dejen de tener los mismos algoritmos de aprendizaje.

En la comprensión del acceso al aprendizaje de las matemáticas se devela la presencia de relaciones entre aspectos cognitivos, semióticos y afectivos. En primer lugar, los múltiples interpretantes que se desarrollan entre los estudiantes de un aula de clase --bajo un único diseño producto del interpretante realizado por el profesor en relación con el objeto matemático a estudiar-- evidencian juegos de interpretación de signos que se dan en el marco de la comunicación e interacción en la clase (Saénz-Ludlow, 2016). En segundo lugar, se puede acceder al

aprendizaje de las matemáticas a través de representaciones y operaciones cognitivas como el tratamiento y la conversión, entre e inter diferentes registros de representación (Duval, 2016). Esto implica que el diseño didáctico puede favorecer o no las prácticas que pongan en juego los procesos cognitivos necesarios para permitir el acceso al aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, la afectividad tiene efectos en la cognición, por lo que la ansiedad matemática puede evitar que se active el conocimiento asociativo numérico (Kaufmann, et al., 2004).

Ahora bien, la discalculia potencializa dificultades más allá del desempeño académico; afecta la interacción social (Hornigold, 2015), genera problemas cotidianos al no poder hacer cuentas básicas, lo que impacta también su desarrollo laboral y social. Butterworth (2020) afirma que, a nivel emocional, la discalculia puede producir ansiedad matemática o, como plantean Emerson y Babbie (2010), una ansiedad matemática puede exacerbar una dificultad matemática.

3. APRENDIZAJE DE PATRONES ARITMÉTICOS DESDE LA DIVERSIDAD COGNITIVA

El aprendizaje, desde el punto de vista cognitivo, es un proceso en el que se establecen relaciones entre el cuerpo y la mente en las que se planifican las acciones futuras de acuerdo con lo percibido en las experiencias vividas (Dewey, 1998). La persona no es un espectador del mundo, sino que hace parte de este; en el aprendizaje “el cerebro reorganiza la actividad para mantener su continuidad; es decir, para hacer aquellas modificaciones en la acción futura que se requieren por lo ya hecho” (p. 282). Estudios de neurociencia desde la cognición humana expresan que la capacidad de aprender del ser humano se puede modificar continuamente, ya que “aprender es un principio vital, y el cerebro humano tiene un enorme potencial para la plasticidad: para modificarse por sí solo y adaptarse” (Dehaene, 2019, p. 10). Los planteamientos de Dehaene están en correlación con Dewey, quien cien años atrás, y con menos tecnología, ya establecía la necesidad de que el aprendizaje se desarrollara desde la experiencia.

La comprensión del proceso evolutivo de construcción de significados tiene efecto en el diseño de las clases de matemáticas y el proceso de inclusión, dado que los aspectos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas se relacionan con la perspectiva semiótica de las relaciones en la triada signo-objeto-interpretante. A su vez, esta triada representa lo natural en la diversidad cognitiva en cualquier aula de clase, debido a que en un ambiente de clase se desarrollan “juegos de interpretación” en los cuales “profesor y estudiantes se constituyen como sujetos intencionales capaces de interpretar signos lingüísticos, matemáticos y de otros tipos, en una sucesión de actos colaborativos de interpretación y comunicación llamados ciclos de interpretación” (Sáenz-Ludlow, 2016, p. 160). En los juegos de interpretación el profesor requiere tener conocimiento de diversas formas de interpretación de un objeto durante su proceso de planeación de la enseñanza, para brindar variadas entradas al aprendizaje de dicho objeto. El profesor como sujeto intencional *a priori* realiza una interpretación de signos para poderlos llevar a la discusión en el aula. En palabras de Sáenz-Ludlow (2007):

El maestro usa su conocimiento para estructurar las lecciones que se enseñarán y las estrategias de enseñanza que se usarán para involucrar a los estudiantes en el dialogo y así facilitar sus estrategias de pensamiento, sus interpretaciones y sus formas de comunicar (p. 194)

El aprendizaje de las matemáticas en particular está caracterizado por una naturaleza inmaterial de los objetos matemáticos que se requiere expresar a través de representaciones físicas, como son los signos matemáticos (Sáenz-Ludlow, 2016), los cuales están estructurados

por sistemas de representación semiótica (Duval, 2016). Es decir, que no se accede directamente a los objetos matemáticos por la experiencia o por los sentidos (Duval, 2016). En cambio, el aprendizaje de las matemáticas implica experiencia personal y social, en la que se realiza la interpretación de signos matemáticos y la construcción de significados matemáticos a través de la comunicación con otros (Sáenz-Ludlow, 2016). Estas interpretaciones y significados evolucionan de forma continua “como resultado de la exposición del individuo a una variedad de experiencias estrechamente interrelacionadas dentro de diferentes contextos, sociales y físicos” (Sáenz-Ludlow, 2006, p. 183).

Compatible con el proceso evolutivo y continuo del aprendizaje de las matemáticas, se relaciona el enfoque de trayectorias de aprendizaje, las cuales se estructuran de acuerdo con metas de aprendizaje, niveles de desarrollo y tareas asociadas a cada nivel para, progresivamente, alcanzar la meta, que refiere a una idea matemática (Clements y Sarama, 2015). Estos elementos combinados forman *a priori* Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (en adelante THA), que se basan en hipótesis de investigación de lo que el niño puede realizar en cada nivel de progresión de la trayectoria. Proponer en el diseño didáctico una progresión natural de aprendizaje desde diferentes entradas al objeto de estudio puede posibilitar que el estudiante con DI manifieste avance en su trayectoria real de aprendizaje (Martínez, 2019). Por otro lado, en el caso de la discalculia se requiere variar las entradas a la aritmética, ya que se han identificado, mediante la topografía cerebral, posibles afectaciones en la región parietal, que tiene la función de percibir la representación de la cantidad (Redolar, 2014; Dehaene, 2016).

4. JUEGO DISPOSITIVO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE PATRONES ARITMÉTICOS DESDE LA DIVERSIDAD COGNITIVA

La pobre comprensión de los números, en el sentido numérico es uno de los rasgos más evidentes en la discalculia (Geary, et al., 2000; Emerson y Babbie, 2010), por lo que se propone estructurar un diseño centrado en mejorar los procesos de aprendizaje en la aritmética, dentro de la cual, los patrones aritméticos son un objeto matemático que permite construirse desde el enfoque de trayectorias de aprendizaje como “un proceso, un dominio de estudio y un hábito de la mente” (Clements y Sarama, 2015, p. 304). Los patrones son generadores de otras ideas matemáticas (Clemens y Sarama, 2015), identificarlos y aplicarlos ayuda a establecer orden, cohesión, predictibilidad (Bishop, 2000. p. 111), por lo que su aprendizaje es importante en el estudio de las matemáticas iniciales, para proporcionar la base necesaria para el desarrollo del pensamiento estratégico (Hargreaves, et.al. 1998, p. 330).

Los patrones se comprenden como constitutivos de las matemáticas, los cuales se emplean en aplicaciones de las matemáticas para explicar y predecir fenómenos naturales. Steen (1988) afirma que

el matemático busca patrones en el número, en el espacio, en la ciencia, en las computadoras y en la imaginación. Las teorías matemáticas explican las relaciones entre patrones, funciones y mapas, operadores y morfismos, se une un tipo de patrón a otro para producir estructuras matemáticas duraderas. (p. 616)

Identificar patrones es una actividad matemática en la que surgen otros patrones, lo cual produce patrones de patrones (Steen, 1988). Desde el proceso cognitivo, el aprendizaje de patrones aritméticos requiere de procesos de atención, comparación, repetición y desarrollo de heurísticas de solución de situaciones que muestran progresión en su aprendizaje (Clements y Sarama, 2015). En suma, diseñar una trayectoria de aprendizaje de patrones aritméticos y

promover su progresión. a través de variadas entradas y experiencias, puede ser un punto de partida hacia la accesibilidad al aprendizaje de esta y otras grandes ideas matemáticas.

Una experiencia que permite el desarrollo de una THA de patrones aritméticos y que articula los aspectos semióticos, afectivos y cognitivos es el juego estructurado matemáticamente (Rodríguez, 2018). Resolver el juego es paralelo al proceso de resolución de problemas matemáticos, y en dicho proceso se promueve el vínculo cuerpo-mente en el aprendizaje (Dewey, 1998; Semetsky, 2014). Estudios previos con poblaciones diversas manifiestan que no solo se pueden identificar estructuras numéricas asociadas a los cambios de estado de un juego, sino que se manifiestan preliminarmente patrones corporales, rítmicos y verbales (Palomá, 2018, Rodríguez, 2018).

Un estudio realizado con población sorda describió patrones corporales durante el análisis y la solución de juegos, que posteriormente se representan en patrones aritméticos (Rodríguez, 2018. La Figura 1 presenta una viñeta que en la parte superior sugiere el patrón corporal que relaciona “Mirada” (representado con M negra), “Mano” (representada con M roja) y “Cabeceo” (representado con C). En la parte inferior se relaciona una aproximación al patrón numérico de acuerdo con las iniciales R y A, que representan los colores de las fichas. Este ejemplo ilustra cómo las habilidades cognitivas están intrínsecamente ligadas a los patrones corporales y numéricos durante la resolución de problemas matemáticos. La autora del estudio también menciona la presencia de habilidades de autorregulación, como el centrar la mirada para anticipar el próximo paso en el proceso de solución del juego. Estos hechos son relevantes para la accesibilidad al aprendizaje ante la diversidad cognitiva, ya que se pueden desarrollar registros de representación semiótica diversos, desde el lenguaje, los gestos y los movimientos, a través de los cuales se manifiesta la progresión de aprendizaje de patrones aritméticos. Es decir que no solo se contaría con distintas entradas al aprendizaje, sino también con distintas formas de identificar la producción de significados matemáticos.

Figura 1. Ejemplo de patrón corporal “resolviendo el juego”.



Fuente: Rodríguez (2018, p. 75).

El juego se vincula al diseño como un dispositivo didáctico que integra el tipo de interacciones sociales que se dan frente a este, la lúdica, la diversión y heurísticas asociadas a la resolución de problemas, particularmente, se plantea un aprendizaje a partir de juegos estructurados matemáticamente. El juego en su dimensión de dispositivo didáctico permite estructurar la relación entre el diseño de la enseñanza y el aprendizaje (Calderón y León, 2015), se vincula directamente al aprendizaje de las matemáticas en su relación con los procesos de la resolución de problemas matemáticos (Bruner, 1983; De Guzmán, 1984; Corbalán, 1996; Edo,

et al., 2014), por otro lado, conecta aspectos afectivos, como favorecer la interacción social con los otros en el ambiente lúdico y con lo otro, conectando con la mente y lo que desarrolla en esta (Huizinga, 1980). Desde la lúdica y la interacción social; el juego permite minimizar las consecuencias de las acciones, ofrece la oportunidad para realizar “combinaciones de la conducta que no se podrían realizar bajo tensión funcional” (Bruner, 1983, p. 45).

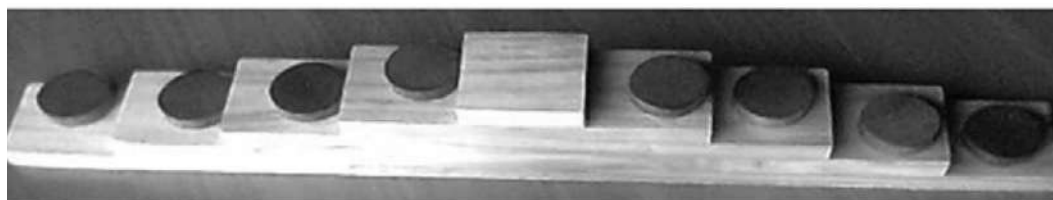
El juego permite construir un ambiente que se aleje del miedo al error, situación que potencia la plasticidad cerebral (Dehaene, 2019). Los juegos en la enseñanza de las matemáticas aportan particularmente a las personas que tienen dificultades con las matemáticas, ya que encuentran disfrute en el desarrollo de juegos cuya estructura difiere en poco de la matemática:

“... se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes.” (De Guzmán, 1984, p. 11)

Por su parte, Clements y Sarama (2015) manifiestan que las matemáticas se pueden promover a través del juego, que la percepción el juego mejora con objetos reales y que todos los niños deberían jugar con materiales estructurados. Realizar registros escritos es un aspecto semiótico que indica que un juego de estrategia es adecuado para la enseñanza de las matemáticas (Corbalán, 1996). Particularmente en el análisis de los procesos de solución de juegos, los niños pueden construir registros de representación semiótica de los procesos que perciben o los patrones que identifican en la solución. Estos registros permiten un acercamiento al conocimiento matemático, lo que se articula, por ejemplo, con el aprendizaje de aritmética (Palomá, 2018; Rodríguez; 2018; Martínez, 2019; Alonso, 2020).

El juego “La escalera” se toma como ejemplo de juego estructurado matemáticamente que permite la articulación con una trayectoria de aprendizaje de patrones aritméticos, y que manifiesta en sus cambios de estado la posibilidad de relacionar los aspectos cognitivos, semióticos y afectivos de acuerdo con lo descrito. Estudios previos evidencian el favorecimiento del aprendizaje de las matemáticas en poblaciones diversas (Palomá, 2018; Rodríguez; 2018; Martínez, 2019; Alonso, 2020. Su evolución en diseño accesible ha permitido, también, una evolución en tecnología que permite la toma de datos computacionalmente y el vínculo con el seguimiento de ondas electroencefalográficas, que es el reto que asume esta investigación.

Figura 2. Escalera GIIPLYM.



Fuente: Calderón y León (2015, p. 173).

La escalera surge de la adaptación al juego llamado “las ranas”, “sol y sombra” o “blanco y negro” (Corbalán, 1996, p. 23); una de las primeras adaptaciones es hacer el juego tridimensional, para darle el nombre y la imagen de escalera y permitir una visualización espacial diferente a la versión original (Figura 2). Este juego cuenta con dos grupos de piezas de distinto color a cada lado de la estructura, y para su solución se requiere intercambiar los lugares de las piezas, de tal manera que aquellas que se encuentran a la derecha pasen a la izquierda y viceversa. Las reglas del juego consisten en que solo se puede mover una pieza cada vez, solo se puede avanzar una posición cada vez y se puede saltar por encima de una pieza solo si es del color contrario (Palomá, 2018).

Una adaptación realizada en un semillero del Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas (en adelante GIIPLyM) consiste en incorporar, luces, sonidos, texturas e imanes, con la finalidad de hacer la arquitectura del juego accesible para poblaciones diversas (ver Figura 3).

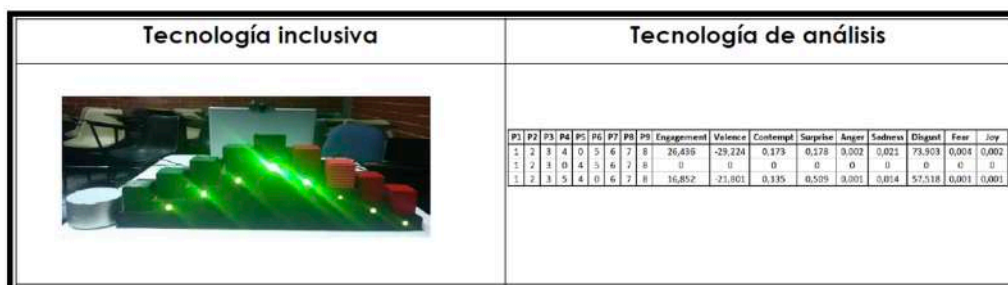
Figura 3. Escalera adaptación.



Fuente: Rodríguez (2018, p. 21).

Una incorporación tecnológica posterior relaciona el uso de la electrónica en el prototipo con una programación que lleva los datos de los movimientos del jugador a un archivo de Excel, para hacer el seguimiento de los cambios de estado en el desarrollo del juego y describir una trayectoria del aprendizaje de este.

Figura 4. Tecnología de juego inclusiva y tecnología de análisis intermedia



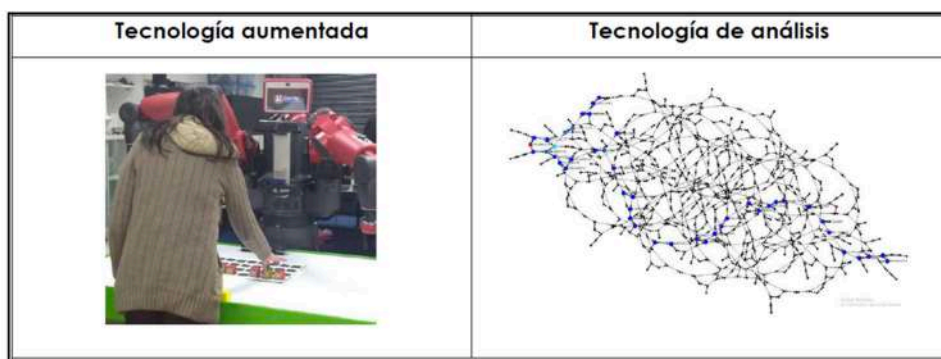
Fuente: Palomá (2018).



Se presenta una tecnología inclusiva para la escalera. Este prototipo cuenta con luces, sonido y vibración, además de fichas elaboradas con diferentes texturas en impresión 3D, y una tecnología de análisis intermedia, ya que permite sistematizar los cambios de estado del juego (ver Figura 4). Cada pieza del juego es identificada con un número del 1 al 8 y el espacio vacío del juego se identifica con un 0; de esta forma se evidencia en la tabla en cada fila el cambio de posición de las fichas. Este experimento en particular, vinculo además un seguimiento de gestos que reflejaban emociones, vinculando esa conexión cuerpo-mente en el desarrollo del juego.

La tecnología aumentada para el análisis del proceso del jugador y las trayectorias del juego evolucionó a un software que permite generar un grafo de todos los posibles cambios de estado del juego, describiendo una trayectoria ideal de desarrollo, la cual se compara con la trayectoria que sigue cada jugador. La arquitectura del juego presenta la conexión con un robot que, a través de una cámara y un software especializado, combina el seguimiento de las trayectorias del juego con la identificación de emociones de acuerdo con los gestos del jugador (ver Figura 5).

Figura 5. Tecnología aumentada de seguimiento del jugador y grafo de trayectoria de la escalera.



Fuente: Palomá (2018, p. 48).

El juego “La escalera” es un ejemplo de dispositivo didáctico para comprender la diversidad cognitiva desde el rastreo de las trayectorias de aprendizaje del juego y su relación con el desarrollo de la trayectoria de aprendizaje del objeto matemático. Este se da a partir de la experiencia física que tiene una connotación mental (Palomá, 2018); además, este juego en particular permite el desarrollo de una trayectoria de patrones aritméticos porque “gira en torno a la búsqueda e identificación de cambios, de regularidades, de patrones, de modelaciones” (Palomá, 2018, p. 102).

Se tiene una base de rastreo de cambios de estados del juego según la evolución en las tecnologías de análisis promovida por Páez et al. (2022). Desde estos seguimientos, los autores plantean dar respuesta a la problemática en la investigación en educación a partir de la modelación computacional de juegos, de forma que se recopilen datos sobre las trayectorias de aprendizaje de estos; los autores consideran que actualmente la investigación continúa siendo manual, local y reducida. Con estas tecnologías de análisis en la investigación en educación matemática se puede ampliar la comprensión del aprendizaje de patrones aritméticos en poblaciones con condiciones particulares de diversidad cognitiva, como las poblaciones con DI o con indicadores de discalculia, asociando las trayectorias de desarrollo del juego con patrones cognitivos que se desarrollan en el aprendizaje de las matemáticas.

Rastrear el comportamiento neuronal durante el desarrollo de una actividad matemática como el juego La escalera se puede realizar con la exploración en el registro de ondas electroencefalográficas (en adelante EEG). Pinzón (2021) refleja en un estudio exploratorio que se pueden registrar conexiones entre el seguimiento de la actividad neuronal, el seguimiento del aprendizaje de los patrones aritméticos, y aspectos afectivos evidentes en los momentos de ansiedad, inseguridad y estrés en correlación con acciones en el juego.

5. EXPECTATIVA DE DESARROLLO METODOLÓGICO - LABORATORIO PRELIMINAR

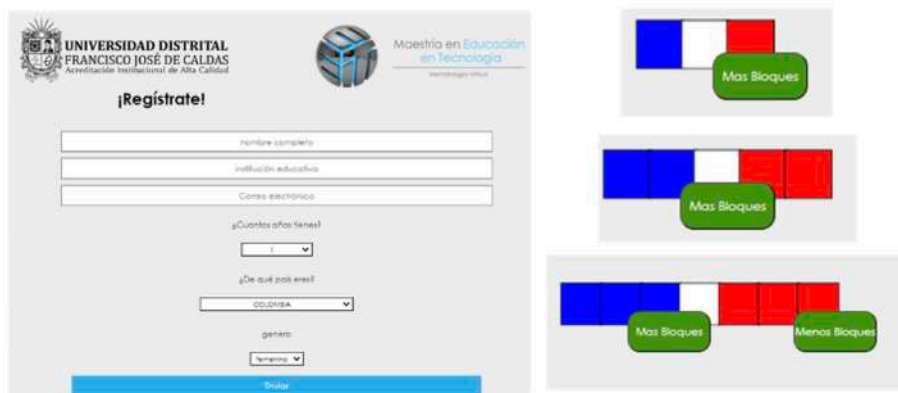
El laboratorio que se plantea para el proyecto de investigación, basado en la revisión de literatura, vincula a la metodología de toma de datos del juego La escalera con el seguimiento de electroencefalografía. Este se enfoca en rastrear los procesos de atención para comprender si el ambiente mediado por juegos puede favorecer la accesibilidad al aprendizaje de patrones a población con diversidad cognitiva. Desde la neurociencia se indica que “el entrenamiento del control ejecutivo puede modificar el coeficiente intelectual” (Dehaene, 2019, p. 219) y que un diagnóstico de coeficiente intelectual no determina la capacidad de aprender de una persona. Esta valoración representa una capacidad de comportamiento del cerebro que puede ser modificada a través del proceso educativo: “al igual que cualquiera de nuestras habilidades, su base está conformada por circuitos cerebrales específicos cuyos pesos sinápticos pueden modificarse mediante el entrenamiento” (Dehaene, 2019, p. 219).

Ante la posibilidad de modificar el coeficiente intelectual mediante el entrenamiento del control ejecutivo, se encuentra la noción de flexibilidad mental o flexibilidad cognitiva (Anderson, 2002) que refiere a “la capacidad de cambiar entre conjuntos de respuestas, aprender de los errores, idear estrategias alternativas, dividir la atención y procesar múltiples fuentes de información al mismo tiempo” (p. 74). Esta flexibilidad permite al ser humano relacionar variedad de respuestas a una misma situación, difiriendo del desarrollo del aprendizaje de las computadoras (Dehaene, 2019). La flexibilidad cognitiva es uno de los procesos cognitivos asociados con la función ejecutiva, junto con la anticipación, la selección de objetivos, la planificación, la autorregulación, la atención, el control inhibitorio y la actualización de la memoria de trabajo (Anderson, 2002; Clements y Sarama, 2019). A su vez, está directamente relacionada con la plasticidad cerebral enunciada en apartados previos.

A mayor atención, mejora la memoria y progresa el aprendizaje del niño con DI (Fernández, et al., 2010). Por las características del juego estructurado matemáticamente, se favorecen los procesos de entrenamiento de las funciones ejecutivas como la atención y la anticipación. Por lo tanto, se confirma que es un dispositivo didáctico fundamental en el diseño de ambientes que brinden oportunidades de aprendizaje que incluyan a todos, desde la caracterización de las condiciones de diversidad cognitiva.

En un experimento preliminar de laboratorio se hace uso del juego en línea La escalera y se describen varias relaciones que constituyen las expectativas del laboratorio a desarrollar en la investigación y los posibles datos que se pueden constituir.

Figura 6. Interfaz del juego.



Fuente: <http://juegosmatematicos.online/>

Como punto de partida, se toma el juego en línea (ver Figura 6), que permite la vinculación del software de análisis del juego con el software de la diadema Electroencefalógrafo Neurosky Mindwave Mobile II (ver Figura 7), el cual registra datos del nivel de atención del usuario durante el desarrollo de una actividad.

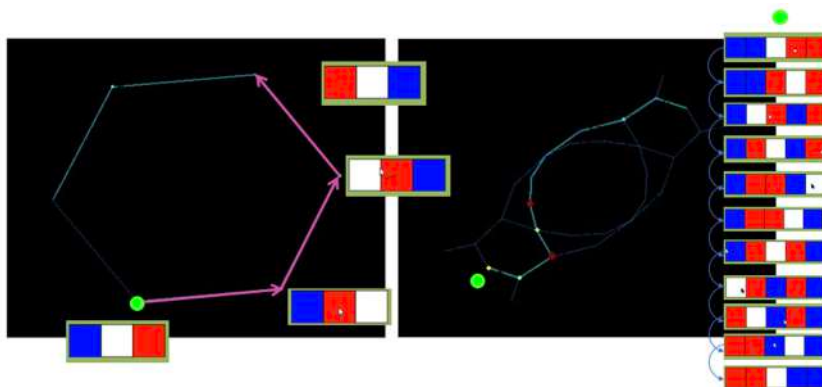
Figura 7. Electroencefalógrafo Neurosky Mindwave Mobile II.



Fuente: Morshad, et al. (2020).

El jugador que participó en el laboratorio fue un estudiante de la Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad Distrital, mayor de edad, que firmó permisos sobre el uso de datos del experimento. Se realizó la toma de datos por niveles, en los que se puede trabajar con el juego con una sola ficha por cada color, e ir aumentando progresivamente la cantidad de fichas. Los movimientos de las fichas describen los cambios de estado en el grafo y describen la trayectoria de juego desarrollada, la cual evalúa de forma diferenciada los procesos de cada jugador. En la Figura 8 se registran las soluciones que el jugador realizó para una y dos piezas por color.

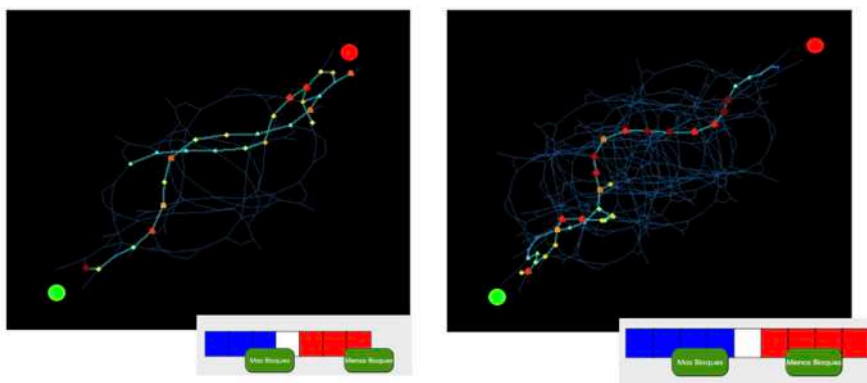
Figura 8. Juego para 1 y 2 fichas por color. Seguimiento del paso a paso y de la atención.



Fuente: Elaboración propia.

Se observa en la parte izquierda de la Figura 8 que el jugador logra resolver el juego en tres cambios de estado; el punto de partida en los grafos es donde se ha ubicado el círculo verde. En la parte izquierda, el jugador resolvió el juego en más pasos respecto a la cantidad óptima para resolverlo. En el grafo se evidencia como el recorrido inicia por la derecha y luego se desvía hacia la izquierda, lo que ilustra los pasos que se adicionaron al proceso del jugador. El grafo de la derecha muestra un componente adicional, y es el color que resalta algunos vértices. Este color representa la incorporación del dato sobre los niveles de atención, el cual en rojo refleja una atención muy alta, y en azul claro un nivel de atención mínimo. Nótese que los puntos rojos están ubicados en los vértices en los que el jugador se desvió en el juego y cuando estaba encontrando la ruta para retomar la solución.

Figura 9. Juego para 3 y 4 fichas por color. Seguimiento de la atención.



Fuente: Elaboración propia.

Se evidencia que el juego manifiesta mayores puntos de presencia de atención a medida que aumenta su nivel de complejidad; por otro lado, si se detallan las rutas tomadas en los grafos se pueden encontrar mejoras en las estrategias de los jugadores. En la parte izquierda de la Figura 9 se observa un grafo de un juego desarrollado con 3 fichas de cada color, en el

que se evidencia mayor atención iniciando y finalizando el juego. Por otro lado, en la parte derecha de la misma figura, se presenta un grafo para un juego con 4 piezas de cada color. Esta diferencia implica mayor dificultad del juego y se visualizan vértices rojos en casi todo el juego, por lo que se conservó una atención muy alta. Lo anterior se asocia con el nivel de concentración respecto al objetivo del juego y la motivación durante su solución.

Figura 10. Atención, expresión, patrón.



Fuente: Elaboración propia.

Es posible considerar que, ante la presencia de un juego en línea, puede ser más complejo manifestar aspectos cognitivos, semióticos y afectivos en el proceso de solución, por tratarse de una interacción social poco visible. Sin embargo, la relación entre lo afectivo y lo cognitivo (Semetsky, 2014) se refleja cuando Diego, durante su progresión de aprendizaje, empieza a crear inferencias, reglas y formas de desarrollar el juego. Asimismo, acompaña estas expresiones con gestos de alegría y satisfacción asociada a sus logros. Durante dicho progreso cognitivo el jugador asocia aspectos semióticos, ya que continuamente organiza y reorganiza la información en su mente, lo cual favorece la plasticidad cerebral y transforma y evoluciona los interpretantes que desarrolla con base en los procesos de comunicación con el juego. Es decir, el jugador está transformando sus hábitos y reflexionando con mayor profundidad sobre las implicaciones de los movimientos a ejecutar.

Cuando Diego expresa verbalmente lo que realizará en el juego, realiza unos movimientos corporales asociados, en los cuales se sustenta también la conexión cuerpo-mente del proceso de aprendizaje. Así, al encontrar patrones en la solución del juego, se presentan puntualmente las siguientes reacciones (ver Figura 10): gestos de sorpresa, al encontrar algo se presenta la expresión “¡ahhh!”, el gesto serio de concentración observable en la parte superior derecha, y los movimientos que involucran las manos, que desplaza para indicar el acto de correr o saltar.

Con la revisión presentada y la descripción del experimento como evidencia de la interacción entre metodologías de tomas de datos, se considera que al recoger datos en tiempo real de las conexiones neuronales que hace la persona en el desarrollo de una actividad, se puede encontrar información pertinente para la educación que permita comprender los procesos de aprendizaje desde características biológicas, como el funcionamiento del cerebro cuando aprende. El desafío de la investigación es explorar esta herramienta que brinda información

tanto cualitativa como cuantitativa de las ondas cerebrales, con el fin de establecer relaciones con la didáctica en la eliminación de barreras en el aprendizaje de las matemáticas.

6. METODOLOGÍA

El proceso metodológico de la revisión de literatura presentada parte de establecer antecedentes que permitan la identificación de problemas, dificultades, ausencias y necesidades en la investigación en educación matemática. Estas se vinculan con el campo cognitivo en el acceso a los objetos matemáticos, con el campo semiótico en los registros de representación y los juegos de interpretación, con lo afectivo en aspectos vinculantes a la actividad matemática, y con lo neuronal en relaciones de patrones de la actividad cerebral con la actividad matemática. Las fuentes primarias son identificadas en manuales de educación matemática, semiótica, psicología y relaciones entre la discapacidad intelectual, las dificultades de aprendizaje de matemáticas y el campo educativo; se identifican autores predominantes en discursos que aportan teóricamente al estudio y se buscan libros y artículos referenciados como una fuente secundaria. Adicionalmente, de los textos citados en las fuentes secundarias se identifican fuentes terciarias que muestran el tejido de más de una categoría y se vinculan al discurso de fundamentación teórica presentado. Por otro lado, se tiene como antecedentes los hallazgos y la evolución de los juegos y tecnologías de análisis, desarrollados en el grupo de investigación GIIPLyM, que fundamentan teóricamente y aportan en la construcción de las bases de laboratorio bajo las cuales desarrollar la investigación.

7. IMPLICACIONES Y CONCLUSIONES

La revisión de literatura presentada articula cuatro grandes categorías: 1. Discapacidad Intelectual y Discalculia. 2. Aprendizaje de las Matemáticas desde la Perspectiva de la Cognición Humana. 3. El Juego como Dispositivo Didáctico en el Aprendizaje de Patrones Aritméticos. 4. Tecnologías para el Seguimiento de Trayectorias de Aprendizaje de Patrones Aritméticos. Desde estas categorías se realiza una propuesta de investigación interdisciplinaria basada en diseño, con un alcance exploratorio y centrada en hallazgos de laboratorio, que busca ampliar la comprensión frente a los procesos de aprendizaje de patrones aritméticos desde aspectos semióticos, cognitivos, afectivos y neuronales. Con el fin de contribuir desde el campo de la educación matemática en la eliminación de barreras de aprendizaje de las matemáticas escolares.

El juego de La escalera, al ser estructurado matemáticamente, se instala como un dispositivo didáctico para el desarrollo de trayectorias de aprendizaje de patrones aritméticos, a partir de la resolución del juego en el marco de la actividad matemática de resolución de problemas. El proceso de desarrollo de estas trayectorias implica una progresión en los niveles del pensamiento, estimula la concentración y potencia una serie de habilidades matemáticas esenciales, incluyendo las numéricas, espaciales y la construcción de patrones. Durante la experiencia del juego, los participantes se involucran en una reflexión profunda sobre cada estado del problema, buscando activamente heurísticas que les permitan realizar movimientos cada vez más conscientes y avanzar hacia la resolución exitosa del desafío planteado.

La diversidad cognitiva en el desarrollo del juego La escalera se presenta de forma natural en los procesos únicos desarrollados por cada jugador, los cambios de interpretantes, las formas de comunicar, de analizar y las formas de interactuar con los profesores. Al variar estos aspectos de jugador a jugador, se permite una valoración particular de los procesos de

cada persona, vinculados a una misma actividad. Desde la investigación planteada a partir de esta revisión, se propone abordar el desarrollo del juego con población infantil con diversidad cognitiva e indagar sobre las formas en que evolucionan sus trayectorias de aprendizaje de patrones aritméticos, dado que la articulación de estas tecnologías es relevante para dar seguimiento a la evolución del aprendizaje.

8. REFERENCIAS

- ACACIA (2015). Discapacidad: Guía de detección y trato de la discapacidad. Editora: Gutiérrez y Restrepo, E. <https://acacia.red/wp-content/uploads/2018/11/9-Discapacidad.pdf>
- Alonso, N. (2020). *Articulación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la aritmética para población sorda en niveles iniciales*. [Tesis Maestría] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. <http://hdl.handle.net/11349/22925>
- Anderson, P. (2002). Assessment and Development of Executive Function (EF) During Childhood. *Child Neuropsychology*, 8(2), 71-82. https://www.researchgate.net/publication/10855413_Assessment_and_Development_of_Executive_Function_EF_During_Childhood
- Asociación Americana de Psiquiatría. American Psychiatric Association - APA. (2014). Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales DSM-5 (5a. ed.). Madrid: Editorial Médica Panamericana.
- Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 107-126. <https://doi.org/10.1007/BF03217079>
- Broitman, C. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre Didáctica de la Matemática y Educación Inclusiva. En Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha, I. y Escobar, M. (Eds). *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con Discapacidad*. La Plata. Ed. EDULP.
- Bruner, J. (1983). *El habla del niño. Cognición y desarrollo humano*. Ediciones Paidós Ibérica S.A. Barcelona.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*. 46(1), 3-18. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x>
- Calderón, D. y León, O. (2015). Elementos para una didáctica del lenguaje y las matemáticas en estudiantes sordos de niveles iniciales. Serie Investigaciones No. 5. Ed. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad: El Enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Traducido por: León O. y Otros. Learning Tools LLC.
- Clements, D. y Sarama, J. (2019). Executive Function and Early Mathematical Learning Difficulties. In Fritz, A., Geraldí, V. & Räsänen, P. (Eds). *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Springer International Publishing AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3>
- Corbalán, F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. *Revista SUMA*, 23, 21-32. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/23/021-032.pdf>
- Dehaene, S. (2019). *¿Cómo aprendemos? Los cuatro pilares con los que la educación puede potenciar los talentos de nuestro cerebro*. Ed. Siglo XXI. Serie Mayor: Ciencia que ladra. Argentina.
- Dewey, John. (1998). *Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación*. Ediciones Morata. Madrid.
- De Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. [Actas de las IV jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Santa Cruz de Tenerife]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=7767>
- Duchasky, S. y Skliar, C. (2000). *La Diversidad bajo sospecha. Reflexiones sobre los discursos de la diversidad y sus implicancias educativas*. <https://pim.udelar.edu.uy/portal/wp-content/uploads/sites/14/2019/08/Ladiversidadbajosospecha.pdf>

- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Ed). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. 61-94
- Edo, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2014). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. [Taller Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales] *Actas del XIII JAEM Congreso de Educación Matemática. Matemáticas para todos (1ª. Ed), 1-16*. Universidad Autónoma de Barcelona. https://www.academia.edu/3357544/Juego_y_matem%C3%A1ticas_Un_taller_para_el_desarrollo_de_estrategias_en_la_escuela
- Emerson, J., y Babbie, P. (2010). *The Dyscalculia Assessment*. Continuum International Publishing Group.
- Fernández, J., Cobacho, J., Berruezo, P. y Gosálvez, C. (2010). Definiciones, Modelos explicativos y Comorbilidad. En García, J., Pérez, J. y Berruezo, P. (Eds). *Discapacidad Intelectual. Desarrollo, Comunicación e Intervención*. Madrid. Ed. CEPE.
- Fritz, A., Haase, V. y Räsänen, P. (2019). Introduction. En Fritz, A., Gerald, V. & Räsänen, P. (Eds). *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Springer International Publishing AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3>
- Geary, D., Hamson, C. & Hoard, M. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children with Learning Disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77(3), 236–263. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561>
- Hargreaves, M., Shorrocks–Taylor, D. y Threlfall, J. (1998). Children’s Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315–331. <https://doi.org/10.1080/0305569980240305>
- Hornigold, J. (2015). *Dyscalculia. Tips, tools and techniques for supporting children whose mathematical ability is affected by dyscalculia*. Ed. Teachers’ Pocketbook.
- Howard, S., San Martín, C., Salas, N., Blanco, P. & Diaz, C. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. *Revista Colombiana de Investigación*, 74. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n74/0120-3916-rcde-74-00197.pdf>
- Huizinga, J. (1980). *Homo Ludens. A study of the play-element in culture*. Routledge & Kegan Paul.
- Kaufmann, L., Lochy, A., Drexler, A. y Semenza, C. (2004). Deficient arithmetic fact retrieval - Storage or access problem? A case study. *Neuropsychologia*, 42(4). <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2003.09.004>
- Martínez, E. (2019). *Juego y trayectorias de aprendizaje de la aritmética inicial en ambientes de aprendizaje que incluyen estudiantes en situación de discapacidad intelectual*. [Tesis Maestría] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. <http://hdl.handle.net/11349/15638>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 75 – 88.
- Morshad, S., Mazumder, Md., y Ahmed, F. (2020). *Analysis of BrainWave Data Using Neurosky Mindwave Mobile*. [International Conference on Computing Advancements] (ICCA 2020). <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3377049.3377053>
- ONU (2014). Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad. Guía de formación No. 19.
- OMS (2001). *Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud: CIF*. (WHO Library Cataloguing-in-Publication Data).
- Páez, J., Cobos, J., Aguirre, D., Molina, R., y Lievano, L. (2022). Learning analytics: Exploring the hypothetical learning trajectories through mathematical games. [International conference in methodologies and intelligent systems for technology enhanced learning] 156–165. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86618-1_16
- Palomá, N. (2018). *Una trayectoria real del juego la escalera vinculada a hipótesis que potencian el Aprendizaje de las funciones desde poblaciones Diversas*. [Tesis Maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia. <http://hdl.handle.net/11349/14304>

- Pinzón, N. (2021). *Exploración de relaciones entre las ondas electroencefalográficas (EEG) y la trayectoria de aprendizaje de patrones a través del juego la escalera*. [Tesis Maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia. <http://hdl.handle.net/11349/28377>
- Redolar, D. (2013). *Representación numérica*. En Neurociencia cognitiva (pp. 517-534). Editorial Médica Panamericana.
- Rodríguez, G. (2018). *El juego la escalera como dispositivo para la formulación de patrones aritméticos*. [Tesis Maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia. <http://hdl.handle.net/11349/14310>
- Saenz-Ludlow, A. (2007). Signs and the process of interpretation: sign as an object and as a process. *Studies in Philosophy and Education*, 26, 205-233. Springer. <https://www.academia.edu/24006690>
- Saenz-Ludlow, A. (2016). Juegos de interpretación en el aula: construcción evolutiva de significados matemáticos. En Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Ed). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*, 157-191
- Shalev, R. (2004). Developmental Dyscalculia. *Journal of Child Neurology*, 19(10), 765-771. <https://doi.org/10.1177/08830738040190100601>
- Semetsky, I. (2014). Taking the Edusemiotic Turn: A Body~mind Approach to Education. *Journal of Philosophy of Education* 48(3), 490-506. <https://doi.org/10.1111/1467-9752.12082>
- Steen, A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240, 611-616. <https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611>
- UNESCO (2016). Educación 2030. *Declaración de Incheon y Marco de Acción, para el objetivo de desarrollo sostenible 4*. Hacia una educación inclusiva, equitativa y de calidad y un aprendizaje a lo largo de la vida para todos.



APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS (ABP) PARA EL FORTALECIMIENTO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: PROPUESTA Y ESTUDIO EMPÍRICO

PROJECT BASED LEARNING (PBL) TO STRENGTHEN MATHEMATICAL COMPETENCIES IN SECONDARY SCHOOL: PROPOSAL AND EMPIRICAL STUDY

Laura Yanneth Cañas Mendoza¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-1234-8663>

Emil Hernández Arroyo²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7963-158X>

RESUMEN

Las competencias matemáticas desarrolladas en la primaria repercuten en el interés del niño por esta área de conocimiento y, por consiguiente, en su desempeño académico. La evidencia de vacíos al respecto y acentuados en contextos socioeconómicos poco favorecidos motivó la presente investigación. Con el objetivo de fortalecer estas competencias en estudiantes de sexto grado, por medio del diseño de un proyecto escolar a partir de las premisas de las metodologías activas de enseñanza, se presenta la estrategia titulada “Construyendo nuestra ciudad en miniatura: diseño urbano y réplicas a escala”, enmarcada en el modelo para proyectos estándar de oro de Boss y Larmer. Recorriendo la espiral holística de la investigación evaluativa, al diseñar la estrategia transitamos por los estadios exploratorio, descriptivo, comparativo, analítico, explicativo, predictivo, interactivo, proyectivo, confirmatorio y evaluativo. Con un diseño cuasiexperimental se analizaron estadísticamente los resultados de pruebas evaluativas pre y post, aplicadas a dos grupos de estudiantes: uno control y otro experimental (n=32). Tras la aplicación de la prueba de Levene, inicialmente se confirmó la homogeneidad de los grupos y, posterior al diseño y ejecución del proyecto se aplicó una prueba t de Student que determinó la validez de la propuesta metodológica, la cual es replicable en otros contextos escolares.

Palabras clave: Aprendizaje activo. Enseñanza de las matemáticas, Innovación pedagógica, Aprendizaje basado en proyectos (ABP).

1 Escuela de Ciencias Sociales. Universidad Pontificia Bolivariana (UPB), Bucaramanga, Santander, Colombia. código postal C. P. 680006. Correo electrónico: lauraycmm@gmail.com

2 Universidad Pontificia Bolivariana (UPB), Bucaramanga, Santander, Colombia. código postal C. P. 680006. Correo electrónico: emil.hernandez@upb.edu.co



ABSTRACT

The mathematical competencies developed in elementary school impact a child's interest in this area of knowledge and, consequently, their academic performance. The evidence of gaps in these competencies, particularly accentuated in socioeconomically disadvantaged contexts, motivated this investigation. With the aim of strengthening these competencies in sixth-grade students through the design of a school project, the strategy titled "Building Our Miniature City: Urban Design and Scale Replicas" is presented, based on the premises of active teaching methodologies and framed within the "Gold Standard Project Model" by Boss and Larmer. Going through the holistic spiral of evaluative research, the design of the strategy involved progressing through exploratory, descriptive, comparative, analytical, explanatory, predictive, projective, interactive, confirmatory, and evaluative stages. Using a quasi-experimental design, the results of pre- and post-evaluation tests were statistically analyzed for two groups of students: One control and the other experimental (n=32). Applying Levene's test initially confirmed the homogeneity of the groups, and after the design and implementation of the project, a Student's t-test determined the validity of the methodological proposal, which is replicable in other educational contexts.

Keywords: Active Learning, Mathematics education, Teaching method innovations, Project-Based Learning (PBL).

1. INTRODUCCIÓN

La ausencia de competencias matemáticas básicas en el estudiante al concluir la educación primaria constituye una problemática crítica en Colombia y Latinoamérica en general (World Bank, 2018), pues compromete su aprendizaje continuo y progresivo, afecta su rendimiento académico y, por ende, su futuro educativo. Estas deficiencias agravadas por las desigualdades sociales se reflejan en bajos desempeños en pruebas internacionales, nacionales y locales, lo que conlleva al acotamiento de oportunidades académicas y profesionales. Lee y Hong (2016, como se citó en World Bank, 2018) afirman que es crucial enfatizar en las necesidades de los más desfavorecidos para reducir estas brechas.

Este tema de estudio y preocupación aumentó con la llegada de la pandemia del Covid-19, al incrementar las brechas educativas por las implicaciones que trajo para cientos de estudiantes la falta de acceso a internet, así como la carencia de dispositivos electrónicos para recibir lecciones durante el confinamiento (Breda et al., 2020; Contini et al., 2022; Goudeau et al., 2021; Panagouli et al., 2021; Pensiero et al., 2020; Schult et al., 2022). Además de los factores socioeconómicos, otros socioemocionales rodean e inciden en el aprendizaje matemático; tal es el caso, por ejemplo, de la relación docente-estudiante.

En la Región Centro Oriente Colombiana, donde se encuentra ubicada Bucaramanga, los resultados de las pruebas matemáticas nacionales corroboran la problemática a nivel local. La diferencia entre los resultados obtenidos por estudiantes del más alto nivel socioeconómico en comparación con sus opuestos alcanza los 71 puntos, de forma que los puntajes más bajos se concentran en poblaciones vulnerables (sector oficial y zonas rurales). Los resultados evidencian una relación marcada entre habilidades socioemocionales y el desempeño en matemáticas (ICFES, 2022), lo que motiva la creación de iniciativas como la presentada en este estudio. Lo expuesto permite destacar la necesidad de buscar permanentemente mejoras en la construcción del conocimiento matemático (Berger et al., 2020; Chen et al., 2018; Davadas y Lay, 2020; Evans y Field, 2020; Gamboa Araya, 2014; Hwang y Son, 2021; Lichand et al., 2024; Maamin et al., 2021; Martínez-Padrón, 2021; Martínez-Padrón et al., 2021; Wakhata et al., 2022).

Para abordar esta problemática se propone una metodología activa de enseñanza (MA), como lo es el aprendizaje basado en proyectos (ABP). Definido por Kilpatrick (1918) como "una actividad intencional, con sentido, que se realiza en un ambiente social" (Díaz

Bordenave y Martins Pereira, 1997, p. 279), el ABP ha demostrado ser efectivo para mejorar el aprendizaje, el ambiente escolar, la actitud del estudiante y facilitar la comprensión de fenómenos y conceptos. Se enfatiza en esta MA y se considera, así mismo, la importancia de la formación docente en este terreno, lo que podría impulsar mejoras en este proceso (Padilla Doria y Flórez Nisperuza, 2022; Suárez Caballero, 2023; Villamagua León y Quizhpe Cueva, 2024). Con el presente estudio se brinda al docente una alternativa para implementar en el aula y una guía para futuros diseños de proyectos ajustados al contexto.

El presente artículo cobra importancia al abordar el estudio y posibles soluciones para uno de los mayores desafíos en materia educativa, considerada en el cuarto objetivo de la agenda 2030 para el desarrollo sostenible: educación de calidad. Este estudio centra la atención en una alternativa que puede disminuir la brecha y propender a un mayor acceso y equidad educativa, comprendiendo que para lograrlo se debe actuar contemplando particularidades propias de cada contexto, como el nivel socioeconómico, los grupos etarios, entre otros.

El objetivo de la presente investigación de carácter empírico consiste en fortalecer las competencias matemáticas en estudiantes de sexto grado por medio del diseño de un proyecto escolar titulado “Construyendo nuestra ciudad en miniatura: diseño urbano y réplicas a escala”, a partir de las premisas de las metodologías activas de enseñanza. Para ello, se seleccionó un grupo control y otro experimental de 32 estudiantes cada uno, bajo la hipótesis de que el ABP lograría un efecto positivo y significativo en la adquisición y fortalecimiento de competencias matemáticas. El proyecto se diseñó y ejecutó utilizando previamente un pretest y después un postest como instrumentos de recolección de datos. Al cierre del proceso, se analizaron los resultados de las pruebas cuantitativamente, buscando responder los siguientes interrogantes: ¿en qué medida el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) contribuye a mejorar las competencias matemáticas en estudiantes de contextos socioeconómicos desfavorecidos? ¿Cómo puede el ABP, enfocado en la construcción de una ciudad en miniatura, ayudar a los estudiantes a aplicar conceptos matemáticos en situaciones prácticas? ¿Qué desafíos o limitaciones se presentan al implementar el ABP en contextos educativos vulnerables, y cómo pueden superarse?

Con lo anterior se espera no solo alcanzar mejoras en el desempeño académico, sino también promover una aproximación práctica y contextualizada de las matemáticas en la vida cotidiana de los estudiantes. Esta investigación, por tanto, busca contribuir a la comprensión y aplicación del Aprendizaje Basado en Proyectos, de forma que apoye el logro de una educación inclusiva y de calidad, en línea con los objetivos educativos nacionales y globales.

2. METODOLOGÍAS ACTIVAS EN LA EDUCACIÓN

Las metodologías activas surgen en los siglos XVI y XVII con Juan Amos Comenio, según muchos, padre de la didáctica y de la pedagogía moderna (Berrio et al., 2010). Sobre sus cimientos se ha constituido un amplio campo de estudio que compila teorías y experiencias orientadas a mejorar la práctica educativa al centrarla en el estudiante y la pasión que en este debe despertar el aprendizaje. Así, este campo de estudio entra en una fuerte contienda con el arraigado magistrocentrismo, por buscar un cambio de paradigma en cuanto a los procesos de enseñanza.

En línea con este deseo por lograr una perspectiva diferente de la educación, Comenio (2011) resalta, entre otros elementos, el arte como medio para lograr un mejor entendimiento de las ciencias, su asociación con la aritmética y su aplicación en experiencias reales a medida que se aprenden. En relación con ello, expresa lo siguiente:



Aumentarás la facilidad en el discípulo si le haces ver la aplicación que en la vida común cotidiana tiene todo lo que le enseñes. Esto debe verlo siempre en la Gramática, Dialéctica, Aritmética, Geometría, Física, etc. De lo contrario, todo cuanto le relates le parecerán monstruos del Mundo Nuevo, y el muchacho que no sea muy diligente creará que existen en la Naturaleza y cómo existen, en lugar de saberlo por sí mismo. Pero si le muestras para qué vale cada cosa, le pondrás en su mano que sepa que lo sabe y pueda emplearla [...] Hay que procurar seriamente que en la escuela haya modelos o ejemplares de lo que tenga que hacerse e imágenes verdaderas, ciertas, sencillas y fáciles de entender e imitar, ya sean bosquejos o dibujos de las cosas o advertencias y preliminares de los trabajos. Entonces ya no será absurdo exigir a aquel a quien se ha dado la luz que vea; que ande el que ya tiene sus pies libres; que trabaje el que tiene las herramientas en la mano” (pp. 137-184).

Mientras se gesta y evoluciona esta corriente emancipadora, emergen paulatinamente concepciones en relación con las MA. Para Bonwell y Eison (1991) estas “consideran tareas de pensamiento de orden superior con actividades en las que el estudiante realice cosas a medida que analiza y piensa sobre lo que está haciendo” (p. 5). Bernal González y Martínez Dueñas (2009) resaltan como principal característica el abordar al estudiante como protagonista del aprendizaje que, por su carácter social, requiere de la interacción con otros.

Con el aprendizaje significativo como eje de las MA, vale la pena revisar su definición. Rodríguez Palmero (2004), al describir el término, destaca los aportes de Ausubel y Novak, quienes conjuntamente describen el aprendizaje significativo como el que se logra cuando el estudiante reestructura sus conocimientos de manera crítica, enlazando saberes previos con otros nuevos en un proceso que demanda interacción social, depende de su disposición y es susceptible tanto a los intereses de quien aprende como a la relación entre él, el docente y los recursos físicos empleados para tal fin educativo. Dicha construcción de conocimiento es mediada por la experiencia y se da paulatinamente.

El carácter experiencial e interaccionista fue avalado e impulsado por otros ilustres académicos. Al respecto, Bálsamo Estévez (2022) resalta aspectos relacionados con la Teoría Psicogenética de Jean Piaget, quien vincula el aprendizaje con dos hechos y como resultado de los mismos. El primero, la relación sujeto-entorno, de forma que el contexto y el rol del estudiante dentro del mismo juega un papel decisivo en este proceso. El segundo, la experiencia como elemento clave para favorecer el proceso cognitivo. Jhon Dewey, por otra parte, resalta la importancia de la conexión programa-maestro-niño y la necesidad de hacer del aula y la sociedad un mismo escenario (Zuluaga Garcés et al., 2010).

Atendiendo estas consideraciones, las MA contemplan aspectos que suscitan el estudio detallado de cada uno de los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje y la forma en que se relacionan, lo que conllevaría a un diseño cuidadoso y reflexivo por parte del docente. Se ha visto en experiencias previas, que la inserción de MA en el aula no siempre da los resultados esperados, principalmente por errores en su diseño, por un inconsciente retorno del docente a la clase magistral centrada en contenidos, por resistencia al considerar su potencialidad o por inexperiencia del mismo maestro en este campo. Lo anterior resalta la necesidad de que exista un compromiso social y político de desarrollar y fortalecer las competencias docentes en relación con el diseño e implementación de estas metodologías (Díaz Palencia et al., 2023; Biryukova y Kanska, 2024; Dagnew, 2023; Granda Sánchez et al., 2024; Moreira Rodrigues y de Lima dos Santos, 2024; Silverthorn, 2020; Aquino de Souza y Ribeiro, 2024).

2.1 Aprendizaje basado en proyectos

El aprendizaje basado en proyectos data a finales del siglo XIX e inicios del XX con el estadounidense William Heard Kilpatrick, inspirado por Jhon Dewey, quien fue su profesor en la Universidad de Chicago, colega en el Teachers College y hacia quien guardó gran admiración y respeto (Robles Sánchez, 2008). Según García y Rincón (2019), con base en los ideales de Kilpatrick, en esta metodología es imprescindible atender las necesidades y prioridades del estudiante y facilitar espacios en los que sea partícipe mientras coopera con otros, lo que le permite generar, con la guía docente, su propio conocimiento. Lo anterior permite ver que el ABP propone un camino hacia el aprendizaje basado en objetivos concretos y definidos, para lo que evita representaciones abstractas. La propuesta metodológica de Kilpatrick, inclusive después de más de un siglo, continúa siendo relevante y representa la posibilidad de un aprendizaje exitoso; adicionalmente, constituye un referente de esta investigación junto con aportes de otros autores como Thomas (2000), quien especifica elementos clave, propios y particulares del ABP:

Los proyectos de ABP son centrales, no periféricos, al plan de estudios... se centran en preguntas o problemas que “llevan” a los estudiantes a encontrar (y luchar con) los conceptos y principios centrales de una disciplina... involucran a los estudiantes en una investigación constructiva... son impulsados por los estudiantes en un grado significativo... Los proyectos son realistas, no escolares (p. 4).

Teniendo en cuenta lo anterior, a lo largo del proyecto diseñado en este estudio se contemplan situaciones e interrogantes desafiantes para el estudiante con el fin de propiciar la investigación, el trabajo colaborativo y la creatividad.

Finalmente, Boss y Larmer (2018) brindan una guía metodológica en la cual se detalla lo que estos autores denominan “elementos esenciales de diseño de proyectos para ABP estándar de oro”. Los mismos se exponen en la Figura 1. A partir de estas especificaciones se establece la ruta a seguir para la estructuración del proyecto.

Figura 1. Elementos esenciales de diseño de proyectos para ABP estándar de oro.



Fuente: Educarchile (2020).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

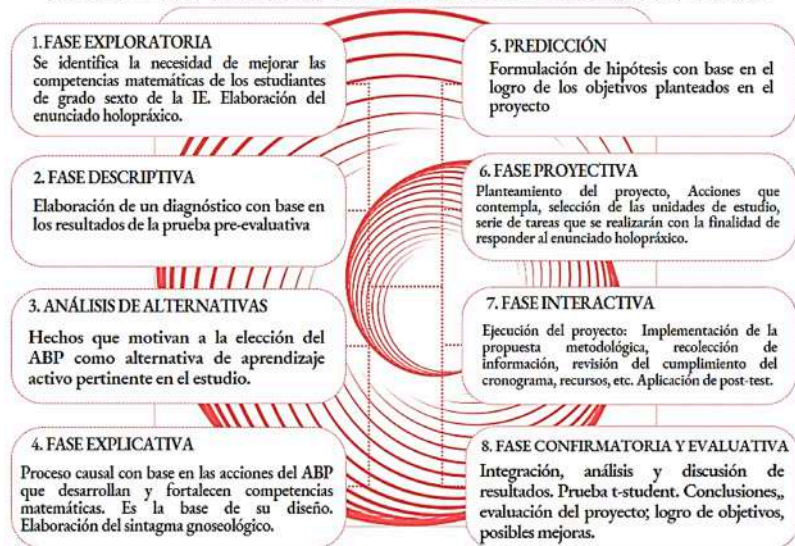
La presente investigación es de carácter cuantitativo con enfoque experimental y se desarrolla en dos etapas. La primera, centrada en el diseño del proyecto, sigue los ideales de Kilpatrick reflejados en las pautas metodológicas brindadas por Boss y Larmer (2018) y Guerrero Hernández (2023). Se investiga un fenómeno social real, como define Mejía Mejía (2011). La segunda etapa contempla un análisis estadístico con una prueba t de Student. Es una investigación aplicada que busca transformar la realidad siguiendo un diseño cuasiexperimental. Se abordan dos unidades de análisis, cada una de 32 estudiantes de sexto grado de una institución educativa oficial en la cual predomina población de estratos 1 y 2 de escasos recursos. Estas unidades constituyen los grupos control y experimental de la investigación.

En este estudio bivariable, con la estrategia metodológica (ABP) como variable independiente y el logro de competencias matemáticas como variable dependiente, se hace uso de datos provenientes de fuentes secundarias (en el proceso de prototipado del ABP) y primarias (en la ejecución del proyecto). Enmarcada en la investigación-acción, se busca transformar el escenario educativo y validar una hipótesis a pequeña escala con potencial para ser replicada en otros contextos.

Asimismo, el presente estudio se enmarca en la investigación evaluativa, dado que sigue la espiral holística descrita por Hurtado de Barrera y Barrera Morales (2000, p. 402). Esta espiral que contempla ocho estadios se ajusta a este estudio, como se deja ver en la Figura 2. Las primeras siete fases se relacionan con el proceso de diagnóstico y diseño del ABP. La segunda fase —denominada como descriptiva— y la fase evaluativa se relacionan con el análisis estadístico, al obtenerse con su ejecución la información necesaria para tal fin.

Figura 2. Estadios de la investigación evaluativa aplicados al ABP.

ESTADIOS DE UNA INVESTIGACIÓN EVALUATIVA DESDE EL INICIO DE LA ESPIRAL HOLÍSTICA



Fuente: Estadios de la investigación evaluativa adaptado de Hurtado de Barrera y Barrera Morales (2000, p. 402).

Comenzando con la fase exploratoria, se identifican deficiencias en competencias matemáticas a partir de puntajes bajos en pruebas institucionales, locales y nacionales. Luego, se elabora un diagnóstico con un pretest basado en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) del Ministerio de Educación Nacional (MEN) para los grados 2o a 6o, que se enfoca en competencias numérico-variacionales y espaciales-métricas. El pretest, con 20 preguntas de selección múltiple, se aplica en condiciones naturales en el aula. Los resultados completan la fase descriptiva.

La investigación avanza hacia la fase explicativa con el proyecto “Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura”. En esta etapa, se desarrollan actividades secuenciales como la formación de grupos colaborativos, asignación de roles, y creación de escenarios y figuras a escala. Al final, los equipos presentan su miniciudad y exponen cómo aplicaron las matemáticas a situaciones cotidianas.

En la fase predictiva se plantean dos hipótesis: la hipótesis nula (H_0) sugiere que el proyecto no contribuye al fortalecimiento de las competencias matemáticas, mientras que la hipótesis alternativa (H_a) propone lo contrario. Esta fase también presenta el plan del proyecto basado en el modelo Project Based Learning (PBL) estándar de oro de Boss y Larmer (2018). La fase proyectiva se conforma de las acciones seleccionadas para alcanzar metas dentro del proceso de ejecución al ABP. Este proceso –conocido como causal– se describe en la Tabla 1.

Tabla 1. Proceso causal con base en las acciones del ABP.

Actividad/Momentos clave		Justificación
Conformación de grupos de trabajo colaborativo y elección de roles.	Elaboración de un portafolio de actividades asociadas al proyecto	Fomenta la participación activa, Educa para la vida y la sociedad actual (Damián Ponte et al., 2021).
Desarrollo del portafolio de actividades.		Herramienta de registro de evidencias asociadas al desarrollo del proyecto.
Selección y corte de planos		La elaboración de maquetas constituye un apoyo didáctico para el docente en el proceso de enseñanza y ayuda a desarrollar conocimientos por medio de la observación y la práctica (Estefania, 2021, p. 129). La interacción con elementos tangibles en el entorno áulico despiertan interés en el estudiante y se propician condiciones para que el estudiante construya y resuelve problemas de la vida cotidiana con elementos tangibles (Calderón-Atariguana y Castro-Salazar, 2021).
Elaboración de minifiguras y mini escenarios.		
Consolidación de la miniciudad (integración de escenarios).		
Exposición del producto final y portafolio.	Consolida el trabajo colaborativo y contribuye al desarrollo de habilidades como la expresión oral.	

Fuente. Elaboración propia.



La fase interactiva se desarrolla durante la ejecución del proyecto. En esta, se recolecta información y se aplica el ABP, seguido de un postest. Esta prueba, conformada por preguntas de la estrategia “Evaluar Para Avanzar” del ICFES (2023), mide competencias matemáticas en los componentes numérico-variacional y espacial-métrico en los grados 3o a 6o. Finalmente, en la fase confirmatoria y evaluativa se socializan y analizan los resultados y se evalúa la validez del ABP. Seguidamente se presentan las conclusiones, que dan cierre al estudio.

4. RESULTADOS/DISCUSIONES

4.1 Análisis de homogeneidad de las unidades de análisis

Con los resultados de la prueba diagnóstica y el uso del programa SPSS, se llevó a cabo la primera prueba de hipótesis con el fin de determinar el grado de similitud en competencias matemáticas en los grupos experimental y control.

Planteamiento de la hipótesis:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ Los grupos son homogéneos}$$

$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ Los grupos no son homogéneos}$$

Nivel de significancia Alfa = 0,05. Criterio de decisión: Si $p < .05$, rechazamos H_0 y aceptamos la H_a ; si $p > .05$, rechazamos H_a . Los resultados de la prueba diagnóstica de prueba de hipótesis se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados del pretest en los grupos control y experimental.

Pretest Grupo Control				Pretest Grupo Experimental			
Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje
1	15	17	20	1	30	17	45
2	40	18	25	2	25	18	40
3	15	19	45	3	30	19	30
4	35	20	15	4	25	20	0
5	25	21	35	5	25	21	35

Pretest Grupo Control				Pretest Grupo Experimental			
Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje
6	30	22	20	6	45	22	15
7	10	23	25	7	20	23	40
8	25	24	20	8	35	24	45
9	25	25	30	9	35	25	10
10	35	26	35	10	20	26	45
11	20	27	15	11	50	27	40
12	40	28	25	12	35	28	40
13	35	29	30	13	35	29	50
14	15	30	15	14	15	30	35
15	15	31	35	15	50		
16	35	32	35	16	10		

Nota 1- Con los resultados obtenidos, la prueba de Levene de igualdad de varianzas arroja valores de $F = 2.799$ y de $p = .100 > .05$ indicando homogeneidad en el nivel de competencias matemáticas en los grupos a intervenir y se acepta H_0 .

Nota 2- El grupo experimental se redujo a 30 estudiantes debido al retiro de 2 estudiantes de la Institución Educativa.

Con los resultados obtenidos, se establecen condiciones para la aplicación de una prueba paramétrica.

4.1 Diseño del proyecto

Con la aplicación de los criterios establecidos en el modelo PBL estándar de oro de Boss y Larmer (2018), se establecen las siguientes características:



Conocimientos y habilidades

Este proyecto busca fortalecer en los estudiantes habilidades matemáticas a través de la resolución de situaciones que implican la interpretación y uso de operaciones para elaborar presupuestos y calcular longitudes, áreas y otras cantidades. Al trabajar en equipo, los estudiantes desarrollan su capacidad para colaborar de manera activa y creativa en un ambiente atractivo.

Pregunta orientadora

La pregunta orientadora –clave en el proyecto según Corrales Villada et al. (2020)– es ¿cómo pueden contribuir nuestros conocimientos matemáticos en el diseño y construcción de una versión en miniatura de una ciudad que sea fiel a diseños reales? Esta pregunta reta a los estudiantes a buscar soluciones prácticas y factibles.

Investigación continua

Cada equipo elabora un portafolio que sirve de guía, que permite la investigación continua, la aplicación de conocimientos y el seguimiento de las actividades, por lo que se fomentan habilidades de búsqueda e interpretación de información.

Conexión con el mundo real

Este proyecto ofrece a los estudiantes la oportunidad de apreciar el uso de las matemáticas en la vida diaria relacionando el trabajo con su entorno. La flexibilidad en el diseño de escenarios y figuras, así como el intercambio de experiencias, permite el aprendizaje significativo y la interacción entre los equipos.

Voz y voto de los estudiantes

Los estudiantes tienen voz y voto desde el inicio; eligen su equipo, rol y escenario a trabajar, lo que les brinda autonomía y motivación.

Reflexión

Esta acción se promueve al integrar la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación como estrategias de uso constante durante la ejecución del proyecto.

Crítica y revisión

Los productos son expuestos, y los comentarios de los compañeros y docentes permiten ajustar y mejorar el proyecto, lo que facilita su replicabilidad en otros grupos.

Producto para un público

Al concluir, cada equipo presenta una maqueta y un portafolio, luego de integrar todas las construcciones en una sola miniciudad. Esto promueve la participación y el entusiasmo de los estudiantes. La ruta seguida para el proyecto se ajustó al formato propuesto por Guerrero Hernández (2023) y se expone a continuación por etapas. Los diseños para las minifiguras seleccionados por los estudiantes se encuentran en el material didáctico diseñado mediante la página Canon en su mayoría, y otros diseños de libre acceso disponible en la web.

La Tabla 3 expone la estructuración de la primera fase del proyecto, destinada a su introducción, revisión de presaberes, romper el hielo con el estudiante y dar inicio al proceso de investigación entre otros aspectos.

Tabla 3. Proyecto escolar: Introducción y planificación.

Institución Educativa: _____ Docente: _____ Área: <u>Matemáticas</u> Grado: <u>Sexto</u>		
Proyecto	“Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: Diseño Urbano y Réplicas a Escala”	
Problemática o tema de interés de los estudiantes	Este proyecto brinda la posibilidad de construir elementos de la ciudad e integrarlos en el contexto de una ciudad en miniatura generando interés y motivación entre los estudiantes con elementos tangibles. Trabajar modelos en papel puede ser una experiencia divertida y gratificante para los estudiantes aumentando su compromiso y participación. Se plantea la pregunta orientadora: ¿Cómo pueden contribuir nuestros conocimientos matemáticos en el diseño y construcción de una versión en miniatura de una ciudad fiel a diseños reales?	
Metodología	Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).	
Temporalidad	8 sesiones de clase	
Propósito	Desarrollar y fortalecer en los estudiantes de grado sexto, habilidades de resolución de situaciones, interpretación y uso de operaciones entre decimales, fracciones y porcentajes. Promover en el estudiante su capacidad de trabajo colaborativo de manera activa y creativa en un ambiente que le permita enlazar sus presaberes con nuevos conocimientos.	
Campos Formativos	Contenidos	Procesos de Desarrollo y Aprendizaje
Matemáticas	Operaciones con decimales, fracciones, porcentajes.	Resolución de problemas matemáticos: Los estudiantes aplicarán conceptos, y realizarán operaciones básicas para resolver desafíos. Se proponen por ejemplo el cálculo de áreas, perímetros y la elaboración de presupuestos.

Institución Educativa: _____ Docente: _____ Área: <u>Matemáticas</u> Grado: <u>Sexto</u>		
Proyecto	“Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: Diseño Urbano y Réplicas a Escala”	
Liderazgo	Conversiones entre fracciones, decimales, porcentajes.	Pensamiento crítico y creativo: Los estudiantes deberán pensar de manera crítica y creativa para diseñar una ciudad funcional y estéticamente atractiva. Esto implica tomar decisiones sobre distribución de espacios públicos, así como resolver problemas inesperados durante el proceso de construcción.
Trabajo en equipo	Relaciones de orden de números fraccionarios y decimales.	Trabajo en equipo y colaboración: Los estudiantes deberán planificar, diseñar y construir la ciudad dando espacio a la colaboración, comunicación, resolución de conflictos y aprovechamiento de habilidades individuales.
Tecnología	Solución de situaciones con números decimales, fracciones y porcentajes	Desarrollo de habilidades de liderazgo: Con roles específicos dentro del equipo, los estudiantes desarrollan habilidades de liderazgo con tareas específicas y motivan a sus compañeros de equipo.
		Desarrollo de habilidades manuales: La creación de figuras armables a escala implica habilidades manuales y técnicas como el corte y pegado. Los estudiantes desarrollarán estas habilidades al trabajar en la construcción de los edificios y diferentes espacios de la ciudad.
		Conciencia del entorno y la comunidad: Al diseñar una ciudad, los estudiantes desarrollarán una mayor conciencia del entorno y la comunidad que les rodea, ayudando a comprender la importancia del diseño urbano en la calidad de vida de las personas y en el funcionamiento de una comunidad.
		Investigación continua: Cada vez que un equipo de trabajo requiera información para resolver algún reto o desafío, deberá investigar cómo se puede resolver. El docente guiará este proceso, tantas veces como sea necesario.

Institución Educativa: _____ Docente: _____ Área: <u>Matemáticas</u> Grado: <u>Sexto</u>	
Proyecto	“Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: Diseño Urbano y Réplicas a Escala”
Etapa 1: Introducción	
Sesión 1 y 2 (Identificación, y planificación)	
<p>Lluvia de ideas para generar reflexionen sobre cómo las matemáticas están presentes en el diseño de espacios públicos en una ciudad. Esta actividad inicial rompe el hielo y genera propuestas para construir diversos edificios o escenarios que se integrarán en una ciudad en miniatura. Se conectan conocimientos previos sobre operaciones matemáticas con números enteros, fracciones y decimales, fomentando el aprendizaje significativo. Se negocian los pasos a seguir entre estudiante y maestro, estableciendo las producciones necesarias, tiempos y acciones que realizarán. Se respetan los ritmos de aprendizaje y se promueve la empatía en los equipos de trabajo que se forman durante la sesión.</p>	
Actividades	Evaluación
<p>0-50 minutos: DEFINICIÓN DE ROLES. En grupos de 5 estudiantes, se distribuirán roles y elegirán un modelo a trabajar según las siguientes especificaciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Líder del proyecto: Coordina las actividades del equipo y garantizar cumplimiento en los plazos acordados. Aporta en la elaboración del presupuesto. 2. Investigador: Recopila la información necesaria para el desarrollo de actividades, como el diseño urbano, construcción de edificios y servicios públicos, y precios de productos. 3. Diseñador urbano: Encargado del corte y registro de planos de la construcción. 4. Ingeniero civil: Realiza cálculos relacionados con materiales necesarios para construcciones. 5. Artesano y presentador: Añade un sello personal al proyecto. diseñando y creando nuevas figuras con libertad para proponer. 	<p>Se valora el cumplimiento de las tareas, la colaboración en equipo, y el manejo del tiempo.</p> <p>NOTA: En caso de grupos con más de 5 estudiantes por el tamaño del grado, asumirán el mismo rol dos personas a la vez.</p>

Institución Educativa: _____ Docente: _____ Área: <u>Matemáticas</u> Grado: <u>Sexto</u>	
Proyecto	“Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: Diseño Urbano y Réplicas a Escala”
Actividades	Evaluación
55-90 minutos: CONSOLIDACIÓN DE HALLAZGOS. <ol style="list-style-type: none"> 1. Revisión de la investigación realizada y discusión sobre los hallazgos. 2. Trabajo en equipos para desarrollar el diseño urbano de la ciudad. 3. Presentación de diseños preliminares. Retroalimentación entre los equipos. Ajustes finales de cada diseño. 4. Preparación de los planos. 	<p>Se valora el cumplimiento de las tareas, la colaboración en equipo, y el manejo del tiempo.</p> <p>NOTA: En caso de grupos con más de 5 estudiantes por el tamaño del grado, asumirán el mismo rol dos personas a la vez.</p>

Fuente: Planificador adaptado de Guerrero Hernández (2023).

Al finalizar la primera etapa se da continuidad con la revisión de avances realizados, desafíos encontrados y elaboración del portafolio de actividades. Estas actividades se estructuran como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Proyecto escolar etapa 2. Acción.

Etapa 2: Acción	
Sesión 3 y 4 (Acercamiento)	
Exploración del modelo seleccionado para el proyecto. Diseño de planteamientos para formular una primera aproximación o exploración a las diversas facetas del problema a resolver. Esto es, que permita identificar aspectos sobresalientes, explicar el problema, entre otros.	
Actividades	Evaluación
<p>0-50 minutos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Revisión del diseño urbano y distribución de tareas para dar continuidad a la construcción. 2. Discusión sobre los avances y posibles desafíos encontrados durante la construcción y elaboración del portafolio de actividades. <p>55-90 minutos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Revisión de los progresos realizados hasta el momento y ajustes necesarios en la construcción. 2. Revisión final de la construcción y preparación para la presentación del proyecto. 3. Preparación de presentación final. 	<p>Revisión de avance de la elaboración de las figuras a escala.</p> <p>Seguimiento al desarrollo del portafolio.</p>

Fuente: Planificador adaptado de Guerrero Hernández (2023).

Para dar cierre al proyecto, se realiza la ejecución de la tercera y última fase del ABP, relacionada con la presentación del producto final y la culminación del proceso de evaluación formativa. La manera en que se estructura esta sección se muestra con detalle en la Tabla 5.

Tabla 5. Proyecto escolar etapa 3. Intervención.

Etapa 3. Intervención	
Sesión 5 y 6	
Se elaboran planteamientos para identificar avances y dificultades en el proceso. Posibles ajustes. Deciden cómo atender lo anterior y lo llevan a cabo.	
Actividades	Evaluación
<p>0-50 minutos:</p> <p>Se generan planteamientos para terminar, mejorar o hacer ajustes al producto planteado.</p> <p>55-90 minutos:</p> <p>Intercambio de producciones (ensayos, comparten borradores, entre otros). Los equipos explican lo que hicieron. Reciben retroalimentación y se hacen planteamientos para revisar y actuar sobre los cambios sugeridos.</p>	<p>Revisión de estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver desafíos encontrados.</p> <p>Seguimiento al trabajo colaborativo. Coevaluación y heteroevaluación formativas.</p>
Sesión 7 y 8 (Difusión y consideraciones finales)	
Presentación del producto. Muestra del producto final al aula, escuela o comunidad. Se formulan planteamientos para dar seguimiento y recibir opiniones sobre la forma en que el producto impactó los escenarios áulicos y escolares.	
Actividades	Evaluación
Exposición grupal. Cada equipo presenta su producto final mencionando cómo se usaron las matemáticas en la elaboración de la maqueta y el desarrollo del portafolio de actividades.	<p>Lista de chequeo</p> <p>Exposición grupal</p>
Materiales /Recursos	Estrategia de evaluación (Técnicas, instrumentos, herramientas)
<p>Papel, lápices, reglas</p> <p>Internet</p> <p>Papel cartón o cartulina</p> <p>Tijeras, pegamento y herramientas de corte</p>	<p>Rúbricas: Matrices de criterios detallados con niveles de desempeño (Excelente, bueno, satisfactorio, necesita mejorar) para evaluar diferentes aspectos del proyecto (Análisis de situaciones, calidad de construcción, trabajo en equipo, presentación).</p> <p>Lista de Verificación: Listados de tareas y habilidades a observar y completar durante el proyecto.</p> <p>Aplicación: Revisión de progreso y cumplimiento de metas.</p> <p>Cuestionarios de Autoevaluación y Coevaluación: Preguntas que permitan al estudiante reflexionar sobre su propio desempeño y el de sus compañeros.</p> <p>Actividad de cierre: Exposición grupal. Se atienden aportes del público tanto para estudiantes como para el docente.</p>

Fuente: Planificador adaptado de Guerrero Hernández (2023).

4.3 Ejecución del proyecto

El registro fotográfico de las etapas del proyecto se expone a continuación. La Figura 3 permite apreciar el producto de la primera fase, en la que se establecen los grupos colaborativos, se definen los diseños y se inicia la elaboración de los escenarios como parte de la introducción y planificación.

Figura 3. Ejecución del ABP etapa 1. Introducción y planificación.



Fuente: Fotografías tomadas por la autora LYCM.

Habiendo dado cumplimiento a las actividades iniciales, se da paso a la etapa denominada “de acción”, mostrada en la Figura 4. En estas sesiones se consolidaron las construcciones, se enfrentaron desafíos y, a la par con el proceso de elaboración de la miniciudad, los estudiantes desarrollaron su portafolio de actividades. Con esto se promovió una permanente reflexión y análisis en el estudiante.

Figura 4: Ejecución del ABP etapa 2. Acción.



Fuente: Fotografías tomadas por la autora LYCM.

Como cierre del ABP, se da paso a la etapa de intervención expuesta en la Figura 5. Allí se aprecia la miniciudad que contiene el producto final de cada grupo de trabajo colaborativo. Así, se conformó un gran producto final que permite que los estudiantes comprendan la importancia de complementarse unos con otros.

Figura 5. Ejecución del ABP etapa 3. Intervención.



Fuente: Fotografías tomadas por la autora LYCM.

El portafolio de actividades

El desarrollo de este componente del proyecto está diseñado para ser una guía del estudiante y una herramienta de investigación, aplicación de conocimientos y seguimiento de actividades, y se muestra en la Figura 6. Allí se evidencia que, a lo largo de su elaboración, se requirió el uso de las operaciones básicas entre números naturales, decimales y algunas combinaciones de operaciones para hallar, por ejemplo, la cantidad necesaria de ladrillos para construir un muro o determinar el valor total de una compra. En este aspecto, fue muy importante pedir a los estudiantes dejar registro de todas y cada una de las operaciones realizadas, para lo cual se designó un espacio dentro del cuadernillo.

Figura 6. Ejecución del ABP Portfolio de actividades.

PLAN DE ACTIVIDADES DEL ABP del Proyecto: Planificación y Presupuesto

M.1. Ejecución de un Documento de Proyecto

Descripción: El líder del proyecto debe crear un presupuesto detallado de todas las actividades necesarias para lograr la calidad en miniatura. Debe incluir precios, fechas y asignación de tareas.

Actividades Matemáticas:

- Operaciones con Números Naturales: Deducir el tiempo disponible en semanas y días. (Fecha de inicio: 1 de abril; final: 7 junio).

Tarea	Descripción	Fecha	Estimado en semanas
Planificación del Proyecto	Organizar las actividades y planificar el tiempo	1/4/2020	1
Compra y Recepción de Materiales	Investigación sobre cuánto cuestan y dónde comprar los materiales	1/4/2020	1
Compra y Entrega	Comprar los materiales y entrega de los mismos	1/4/2020	1
Montaje y Presentación	Construir el modelo y elaborar el presupuesto	1/4/2020	1
Acto de Entrega	Completar o recibir materiales necesarios	1/4/2020	1
Acto de la Estructura Física	Comenzar la construcción principal	1/4/2020	1
Decoración	Decorar el modelo y recibir la calificación	1/4/2020	1
Finalización y Entrega	Finalizar el modelo y entregarlo	1/4/2020	1
Evaluación	Revisar el presupuesto final y hacer ajustes	1/4/2020	1
Acto de la Presentación Final	Presentar el presupuesto final y hacer ajustes	1/4/2020	1
Acto Final	Presentar el proyecto terminado.	1/4/2020	1

M.2. Desarrollo del Proyecto

Descripción: El líder del proyecto debe crear un presupuesto detallado para el proyecto. Debe estimar los costos materiales, herramientas y otros recursos necesarios.

Actividades Matemáticas:

- Operaciones con Decimales: Sumar los costos de diferentes materiales, encontrar el costo total.
- Fracciones y Decimales: Comparar precios y calcular descuentos.

Material	Cantidad	Costo Unitario	Costo Total
Cemento	2000	0.15	300.00
Grava	4000	0.05	200.00
Armadura	100	2.00	200.00
Barro	3000	0.07	210.00
Plancha	200	1.00	200.00
Alambre	500	0.40	200.00
Placa de yeso	1000	0.20	200.00
Alfombra	100	1.00	100.00
Decoración	1000	0.10	100.00
Total			1910.00

M.3. Construcción de la Miniatura

Material	Cantidad	Costo Unitario	Costo Total
Cemento	2000	0.15	300.00
Grava	4000	0.05	200.00
Armadura	100	2.00	200.00
Barro	3000	0.07	210.00
Plancha	200	1.00	200.00
Alambre	500	0.40	200.00
Placa de yeso	1000	0.20	200.00
Alfombra	100	1.00	100.00
Decoración	1000	0.10	100.00
Total			1910.00

MATERIALES NECESARIOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA MINIATURA

Material	Cantidad	Costo Unitario	Costo Total
Cemento	2000	0.15	300.00
Grava	4000	0.05	200.00
Armadura	100	2.00	200.00
Barro	3000	0.07	210.00
Plancha	200	1.00	200.00
Alambre	500	0.40	200.00
Placa de yeso	1000	0.20	200.00
Alfombra	100	1.00	100.00
Decoración	1000	0.10	100.00
Total			1910.00

¿CÓMO CALCULAR LA CANTIDAD DE LADRILLOS PARA UN MURO?

El área del muro es $A = l \times h$. El área de un ladrillo es $A_{ladrillo} = l_{ladrillo} \times h_{ladrillo}$. La cantidad de ladrillos es $N = \frac{A}{A_{ladrillo}}$.

El área del muro es $24m \times 2.10m = 50.4m^2$. El área de un ladrillo es $0.24m \times 0.07m = 0.0168m^2$. La cantidad de ladrillos es $N = \frac{50.4}{0.0168} = 3000$.

Material	Cantidad	Costo Unitario	Costo Total
Ladrillos	3000	0.10	300.00
Cemento	2000	0.15	300.00
Grava	4000	0.05	200.00
Armadura	100	2.00	200.00
Barro	3000	0.07	210.00
Plancha	200	1.00	200.00
Alambre	500	0.40	200.00
Placa de yeso	1000	0.20	200.00
Alfombra	100	1.00	100.00
Decoración	1000	0.10	100.00
Total			1910.00

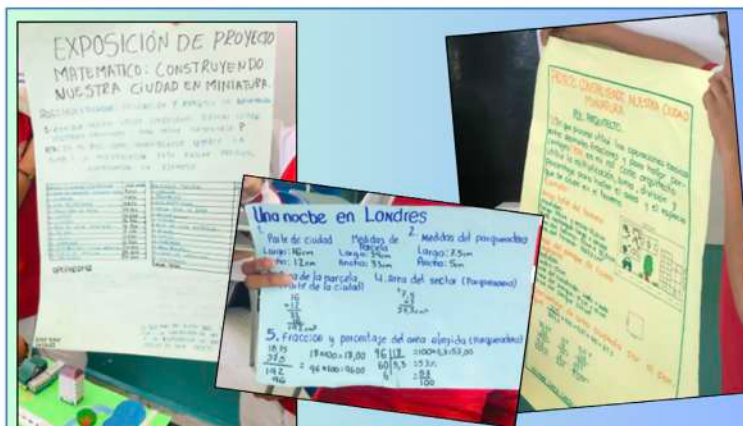
Fuente. Fotografías tomadas por la autora LYCM.

Exposición del producto final

En la Figura 7 se exponen muestras de las carteleras diseñadas por los estudiantes para el momento de la exposición del producto ante la comunidad estudiantil.



Figura 7. Ejecución del ABP Presentación final del producto.



Fuente. Fotografías tomadas por la autora LYCM.

4.4 Validez de la propuesta metodológica

La Tabla 6 muestra los resultados obtenidos por los estudiantes en el postest aplicado. Posterior a la realización de la prueba, se llevó a cabo la prueba de hipótesis para evaluar la validez del ABP propuesto.

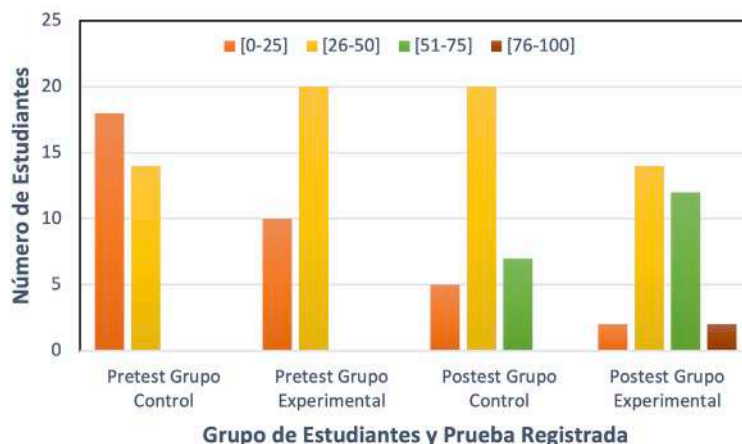
Tabla 6. Resultados de postest en los grupos control y experimental.

Postest Grupo Control				Postest Grupo Experimental			
Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje	Estudiante	Puntaje
1	50	17	45	1	45	17	75
2	20	18	30	2	45	18	55
3	45	19	55	3	55	19	80
4	40	20	25	4	25	20	45
5	30	21	60	5	55	21	50
6	50	22	45	6	55	22	45
7	40	23	35	7	40	23	45
8	25	24	50	8	45	24	60
9	20	25	40	9	55	25	15
10	40	26	50	10	30	26	60
11	30	27	45	11	80	27	60
12	55	28	25	12	45	28	50
13	40	29	65	13	45	29	65
14	30	30	40	14	40	30	55
15	55	31	65	15	55		
16	35	32	55	16	30		

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, en la Figura 8 se representan gráficamente los puntajes de los estudiantes, agrupados en 4 intervalos de 25 puntos cada uno según los puntajes obtenidos. Esto con el fin de facilitar la apreciación de los efectos del ABP.

Figura 8. Resultados de pretest y postest en los grupos control y experimental por intervalos de 25 puntos.



Fuente: Elaboración propia.

Nota 1 - La aplicación del pretest arroja una desviación estándar de 9.33 para el grupo control y de 13.10; entre tanto, la desviación estándar del postest arroja un valor de 12.55 y 14.60 para estos grupos, respectivamente.

Con el fin de complementar este análisis, se tuvo en consideración el valor de la media de los resultados obtenidos en las cuatro pruebas realizadas. Este ejercicio arrojó una media en el puntaje del pretest de 26.25 y en el postest de 41.71 en el grupo control. El grupo experimental arrojó una media de 31.83 y 50.17 en las mismas pruebas, respectivamente.

Prueba de validación

Con los datos obtenidos, se lleva a cabo la prueba t de Student. Se selecciona este tipo de prueba teniendo en cuenta que se lleva a cabo la comparación de las medias de dos grupos (en este caso, el grupo experimental y el grupo control) para determinar si existen diferencias significativas en sus resultados, particularmente tras la intervención educativa mediante el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Esta prueba permite, por consiguiente, evaluar el impacto de la metodología como parte de su validación. También se seleccionó específicamente esta prueba considerando que se ajusta al tamaño de la muestra de 32 estudiantes cada uno.

Hipótesis nula (H₀): La implementación del proyecto “Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: diseño urbano y réplicas a escala” no contribuye al fortalecimiento de las competencias matemáticas en estudiantes de grado sexto.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

(No hay diferencias significativas en las medias del grupo control y experimental)

Hipótesis alternativa (Ha): La implementación del proyecto “Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: diseño urbano y réplicas a escala” contribuye al fortalecimiento de las competencias matemáticas en estudiantes de grado sexto.

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

(Sí existe diferencias significativas entre las medias de los dos grupos)

Nivel de significancia = .05

Criterio de decisión:

Si $p < .05$, rechazamos la H_0 y aceptamos H_a .

Si $p > .05$, rechazamos la H_0 y aceptamos H_a .

En la Tabla 7 se presentan los resultados de la prueba t de Student para muestras independientes, realizada a partir de los resultados obtenidos en el postest.

Tabla 8. Prueba t de Student a partir de los resultados del postest.

	t	gl	P	95% IC	
				Inferior	Superior
Postest	2.449	60	.009	1.548	15.389

Fuente: Elaboración propia.

Con los resultados obtenidos en esta prueba se acepta la hipótesis alternativa H_a tras evidenciarse diferencias significativas entre las medias de los grupos experimental y de control.

5. CONCLUSIONES

La investigación presentada muestra que el diseño de un ABP difiere sustancialmente de la preparación tradicional de clases que ha sido implementada durante años. Cada uno de los elementos contemplados en la planificación de esta metodología es igualmente importante y fundamental para mantener la coherencia en la ruta trazada hacia un aprendizaje significativo. Este aprendizaje debe alejarse de lo abstracto y, en su lugar, ser ameno integrando elementos comunes de la vida real que sean comprensibles para el estudiante, tal como proponía su impulsor, Kilpatrick (1918). Por lo anterior, resulta crucial la formación docente en el diseño de esta metodología de enseñanza-aprendizaje.

Los resultados del pretest permitieron corroborar la problemática identificada y por la cual surgió la motivación para realizar esta investigación. Los estudiantes de ambos grupos control y experimental presentaban un bajo nivel de competencias matemáticas, comprobado por medio de la prueba de homogeneidad inicial. Este resultado viabilizó el uso de la prueba t de Student como herramienta adecuada para analizar la influencia del ABP propuesto en el aprendizaje matemático.

El ABP propuesto en esta investigación demostró ser exitoso. Esta afirmación respalda el cumplimiento del objetivo planteado al lograr mejorar las competencias matemáticas en los estudiantes del grupo experimental. Lo anterior permite inferir pertinencia en los eventos seleccionados para diseñar la estrategia. Al comparar los resultados del pretest y el postest se observan avances en los componentes numérico-variacional y espacial-métrico, en los cuales se enfocó el diseño. Se destaca la importancia de dar continuidad a la aplicación de esta estrategia metodológica para alcanzar resultados cada vez más contundentes y fomentar en el estudiante, además del pensamiento crítico, la cultura del trabajo colaborativo.

El aumento en la diferencia de medias entre los grupos control y experimental al ejecutar el proyecto y la prueba de significancia siguiente al postest confirman un mayor y significativo logro de competencias en el grupo experimental, lo cual valida la propuesta metodológica.

Los elementos tangibles involucrados en el diseño del proyecto matemático planteado, el trabajo en equipo y la libertad del estudiante para diseño y otros aspectos dejan ver, a partir de los resultados, los beneficios de la motivación y el trabajo colaborativo en el proceso de aprendizaje. A pesar de enfocar esta propuesta principalmente en el componente numérico-variacional, se ha logrado que los estudiantes logren mayor destreza en el uso de herramientas como la regla y escuadra, lo que fortalece tácitamente el componente espacial-métrico.

El cuidadoso diseño del proyecto emergente de las MA planteado en el presente estudio permitió despertar el interés en los estudiantes del grupo experimental y mitigar sentimientos negativos asociados con el aprendizaje de la matemática, a la vez que se mejoró el nivel de desempeño grupal. Estos resultados guardan concordancia con lo mencionado anteriormente sobre el ideal de Kilpatrick (1918) de tener en cuenta las necesidades y prioridades del estudiante y facilitar espacios en los que sea participe mientras coopera con otros, de forma que se le permita generar su propio conocimiento con el apoyo de la guía docente.

Una de las ventajas identificadas a partir de la ejecución del proyecto es que, aun siendo una propuesta de bajo costo—adaptable, por ende, a entornos con escasos recursos— posibilita mejoras en el proceso de aprendizaje matemático. Lo anterior hace ver la posibilidad de réplica en cualquier institución educativa (IE) y en otros contextos escolares.

La experiencia educativa del proyecto “Construyendo Nuestra Ciudad en Miniatura: Diseño Urbano y Réplicas a Escala” expuesta está apoyada en la filosofía de la educación de Jhon Dewey en cuanto a la vivencia de experiencias ajustadas a la realidad que sean de interés en el estudiante y en la que se involucren aspectos como el análisis, la posibilidad de expresar creatividad, comprobar ideas y “jugar” con ellas. Esta experiencia confirma lo expresado por Mohmmmed (2024) en relación con este pedagogo: “el niño es una criatura aficionada a la actividad y al movimiento y ama la exploración y el descubrimiento” (p. 6).

La mayor diferencia presentada entre los resultados postest vs pretest fue de 40 y 50 puntos en los grupos control y experimental, respectivamente. Dos estudiantes del grupo experimental alcanzaron 80 puntos en la prueba final. En el grupo control, el puntaje final más alto fue de 65 puntos en dos ocasiones. Así mismo, en la prueba post, el 13,33% de los estudiantes del grupo experimental alcanzó un puntaje mayor a 60 puntos, frente a un 6,25% del

grupo control. Estas cifras brindan solidez a la deducción realizada en líneas anteriores, relacionadas con la validación de la propuesta metodológica. Sin embargo, aún hay camino por recorrer. Se espera que esta investigación incentive a otros, con el objetivo de que se apunte cada vez con mayor contundencia a la disminución de la brecha educativa.

A partir de la experiencia expuesta en el presente estudio, se espera que la comunidad docente contemple la integración del ABP en la práctica pedagógica y se logre avanzar en la disminución de la brecha educativa aprovechando la potencialidad de esta metodología apoyada en el paidocentrismo. Una recomendación importante es no demeritar la base teórica como fundamento en las diferentes áreas de conocimiento. Se debe ser cuidadoso en el diseño del ABP para integrar elementos valiosos de ambos enfoques y mantener al estudiante como centro del proceso educativo.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

LYCM concibió la idea del proyecto de investigación, desarrolló su fundamentación teórica, diseñó la metodología y sus actividades, implementó el proyecto, recopiló y analizó los datos. EHA, la otra persona autora, asesoró la presente investigación, por lo que participó activamente mediante observaciones a la propuesta de investigación, la discusión de los resultados, así como con la revisión y aprobación de la versión final de esta publicación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, LYCM y EHA, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las familias que desearon ser parte de este estudio. A los estimados estudiantes de grado sexto y sus familias en especial, por permitirnos ser parte de su proceso de formación e inspirar estas acciones en la búsqueda de una mejor educación y mejores oportunidades de vida, para ellos y para toda la sociedad.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aquino de Souza, J. H. y Ribeiro, M. S. d. S. (2024, 13 de mayo). Metodologias ativas e protagonismo juvenil no ensino médio: As interferências no processo de aprendizagem. En V Congreso Internacional Multidisciplinario. <https://doi.org/10.56238/sevenVmulti2024-038>
- Bálsamo Estévez, M. G. (2022). Teoría Psicogenética de Jean Piaget. Aportes para comprender al niño de hoy que será el adulto del mañana. Serie Cuadernos de Psicología y Psicopedagogía N°7. Universidad Católica Argentina. <https://repositorio.uca.edu.ar/handle/123456789/13496>
- Berger, N., Mackenzie, E., y Holmes, K. (2020). Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015. *The Australian Educational Researcher*, 47(3), 409–444. <https://doi.org/10.1007/s13384-020-00379-8>
- Bernal González, M. d. C. y Martínez Dueñas, M. (2009). Metodologías activas para la enseñanza y el aprendizaje. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 14. <https://doi.org/10.21555/rpp.v0i14.1790>



- Berrio, J. R., Blanco, C. S., Orzaes, M. C. C., Pérez, M. C. D., Gálvez, I. E., Crespo, C. G., Fernández, M. G., Gil, I. G., Reina, V. G., Juan-Vera, M. J., Zúñiga, F. M., Pérez, A. M., Martínez, P. L. M., Calvo, Á. C. M., Urtaza, E. O., López, J. P., García, J. M. P., Zamora, S. R., García, B. S., y Vila, J. V. (2010). Historia y perspectiva actual de la educación infantil. Graó
- Biryukova, H., y Kanska, B. (2024). Використання активних методів навчання у процесі вивчення шкільних курсів географії [The use of active learning methods in the process of studying school geography courses. Theory and methodology of teaching geography]. *Scientific notes of Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University Section Theory and methods of teaching natural sciences*, 6, 34–45. <https://doi.org/10.31652/2786-5754-2024-6-34-45>
- Bonwell, C. C., y Eison, J. A. (1991). Active learning: Creating excitement in the classroom. The George Washington University. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED336049.pdf>
- Boss, S., y Larmer, J. (2018). Project based teaching: How to create rigorous and engaging learning experiences ASCD. <https://books.google.com.co/books?id=S1lxDwAAQBAJ&lpg=PP1&ots=wZlwt-GCV7R&dq=Project%20based%20teaching%20how%20to%20create%20rigorous%20and%20engaging%20learning%20experiences&hl=es&pg=PR18#v=onepage&q=Project%20based%20teaching%20how%20to%20create%20rigorous%20and%20engaging%20learning%20experiences&f=false>
- Breda, A., Farsani, D., y Miarka, R. (2020). Political, technical and pedagogical effects of the COVID-19 pandemic in mathematics education: an overview of Brazil, Chile and Spain. *Intermaths*, 1(1), 3–19. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v1i1.7400>
- Calderón-Atariguana, R. F., y Castro-Salazar, A. Z. (2021). Maquetación como recurso didáctico para la enseñanza – aprendizaje de la geometría. *CIENCIAMATRIA*, 7(3): Artículo 3. <https://doi.org/10.35381/cm.v7i3.580>
- Canon. Arte de papel. Canon Creative Park. Recuperado el 26 de agosto de 2024, de <https://creativepark.canon/es/categories/CAT-ST01-0071/top.html>
- Chen, L., Bae, S. R., Battista, C., Qin, S., Chen, T., Evans, T. M., y Menon, V. (2018). Positive attitude toward math supports early academic success: behavioral evidence and neurocognitive mechanisms. *Psychological Science*, 29(3), 390–402. <https://doi.org/10.1177/0956797617735528>
- Comenio, J. A. (2011). Didáctica Magna. Universidad Autónoma de la Ciudad de México. <https://www.repositorioinstitucionaluacm.mx/jspui/bitstream/123456789/2434/1/Did%20c3%a1ctica%20magna.pdf>
- Contini, D., Di Tommaso, M. L., Muratori, C., Piazzalunga, D., y Schiavon, L. (2022). The COVID-19 pandemic and school closure: learning loss in mathematics in primary Education. *IZA Discussion Papers: Artículo 14785*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4114323>
- Corrales Villada, K. J., Ramírez Ramírez, A., y Correa Trujillo, P. J. (2020). El aprendizaje basado en proyectos (ABPY) en Colombia, un análisis desde la propuesta del Buck Institute For Education (BIE) [Tesis, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/16898/8/CorreaPablo%2C%20Ram%2C%20ADrezYonny%2C%20CorralesKely_2020_AprendizajeBasadoProyectos.pdf
- Dagnew, A. (2023). Implementation of active learning strategies: The case of secondary schools: learning strategies. *Revija za elementarno izobraževanje*, 16(1), 107–125. <https://doi.org/10.18690/rei.16.1.1315>
- Damián Ponte, I. F., Benites Seguí, L. A., y Camizán García, H. (2021). El Aprendizaje colaborativo como estrategia didáctica en América Latina. *TecnoHumanismo*, 1(8), 31–52. <https://doi.org/10.53673/th.v1i8.41>
- Davadas, S. D., y Lay, Y. F. (2020). Contributing factors of secondary students' attitude towards mathematics. *European Journal of Educational Research*, 9(2), 489–498. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.9.2.489>
- Díaz Bordenave, J., y Martins Pereira, A. (1997). Estrategias de enseñanza-aprendizaje (2 ed.). Agroamerica.
- Díaz Palencia, J. L., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2023). Estado de uso de metodologías activas en las aulas de matemáticas secundarias. *Journal of Research in Mathematics Education*, 12(3), 229–245. <https://doi.org/10.17583/redimat.12852>

- Educarchile. (2020, 23 de abril). Parte 1: “¿Lo estoy haciendo bien?” - estándar de oro de ABP. Conversaciones con Suzie Boss [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=O5_rTeWSNRg
- Evans, D., y Field, A. P. (2020). Maths attitudes, school affect and teacher characteristics as predictors of maths attainment trajectories in primary and secondary education. *Royal Society Open Science*, 7(10): Artículo 200975. <https://doi.org/10.1098/rsos.200975>
- Gamboa Araya, R. (2014). Relación entre la dimensión afectiva y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Educare*, 18(2), 117–139. <https://doi.org/10.15359/ree.18-2.6>
- Goudeau, S., Sanrey, C., Stanczak, A., Manstead, A., y Darnon, C. (2021). Why lockdown and distance learning during the COVID-19 pandemic are likely to increase the social class achievement gap. *Nature Human Behaviour*, 5(10), 1273–1281. <https://doi.org/10.1038/s41562-021-01212-7>
- Granda Sánchez, E., Jiménez Cueva, R. M., Martínez Gaona, E. N., y Campoverde Moscol, A. (2024). Active didactics in the learning processes of high school students. *Salud, Ciencia y Tecnología - Serie de Conferencias*, 3, 780. <https://doi.org/10.56294/sctconf2024780>
- Guerrero Hernández, J. A. (2023, julio 9). Formatos de planeación aprendizaje basado en proyectos comunitarios. Docentes al día. <https://docentesaldia.com/2023/07/09/formatos-de-planeacion-aprendizaje-basado-en-proyectos-comunitarios/>
- Hurtado de Barrera, J., y Barrera Morales, M. F. (2000). *Metodología de la investigación holística* (3 ed.). Instituto Universitario de Tecnología Caripito.
- Hwang, S., y Son, T. (2021). Students' Attitude toward Mathematics and its Relationship with Mathematics Achievement. *Journal of Education and e-Learning Research*, 8(3), 272–280. <https://doi.org/10.20448/journal.509.2021.83.272.280>
- ICFES. (2022). Informe nacional de resultados de las pruebas Saber 3°, 5°, 7o y 9°. Aplicación 2022. https://www.icfes.gov.co/documents/39286/19845423/Informe_saber_359_06_2022.pdf
- Kilpatrick, W. H. (1918). “The Project Method”: Child-Centeredness in Progressive Education. *Teachers College Record*, 19. <https://www.education-uk.org/documents/kilpatrick1918/index.html>
- Lichand, G., Christen, J. y Egeraat, E. V. (2024). Neglecting students' socio-emotional skills magnified learning losses during the pandemic. *Npj Science of Learning*, 9(1), 28. <https://doi.org/10.1038/s41539-024-00235-9>
- Maamin, M., Maat, S. M. y H. Iksan, Z. (2021). The influence of student engagement on mathematical achievement among secondary school students. *Mathematics*, 10(1), 41. <https://doi.org/10.3390/math10010041>
- Magaña García, J. M. y Rincón, J. C. (2019). Metodología por proyectos en educación infantil [Tesis, Universitat de les Illes Balears]. https://dspace.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/155064/Magana_JuanaMaria.pdf?sequence=1&isAllowed=y#:~:text=La%20ense%C3%B1anza%20por%20proyectos%20de,el%20conocimiento%20de%20manera%20global
- Martínez-Padrón, O. J. (2021). Afecto en la resolución de problemas de Matemática. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, 5(1), 86–100. <https://doi.org/10.32541/recie.2021.v5i1.pp86-100>
- Martínez-Padrón, O. J., Ávila-Contreras, J. I., y García González, M. S. (2021). Conocimiento emocional, complejidad vivencial y resiliencia matemática. Tres facetas para el afecto en Educación Matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 1(2): Artículo 202105. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.6>
- Mejía Mejía, E. (2011). *Enfoque cuantitativo de la investigación científica* (1. ed.). Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Mite Sánchez, G. E. y Mendoza Guillén, A. E. (2021). Material didáctico lúdico para la enseñanza aprendizaje del cuerpo humano [Tesis, Universidad Técnica de Machala]. https://repositorio.utmachala.edu.ec/bitstream/48000/19088/1/Trabajo_Titulacion_576.pdf
- Mohammed, A. A. R. (2024). Philosophy of Education According to John Dewey. *International Journal of Religion*, 5(7), 987–995. <https://doi.org/10.61707/pkd9s321>

- Moreira Rodrigues, R. y de Lima dos Santos, N. N. (2024). Active methodologies: active methodologies as a pedagogical tool. *Revista Gênero e Interdisciplinaridade*, 5(01), 395–412. <https://doi.org/10.51249/gei.v5i01.1912>
- Padilla Doria, L. A. y Flórez Nisperuza, E. P. (2022). El aprendizaje basado en problemas (ABP) en la educación matemática en Colombia. Avances de una revisión documental. *Revista Boletín Redipe*, 11(2): Artículo 2. <https://doi.org/10.36260/rbr.v11i2.1686>
- Panagouli, E., Stavridou, A., Savvidi, C., Kourti, A., Psaltopoulou, T., Sergeantanis, T. N., y Tsitsika, A. (2021). School Performance among Children and Adolescents during COVID-19 Pandemic: A Systematic Review. *Children*, 8(12): Artículo 1134. <https://doi.org/10.3390/children8121134>
- Pensiero, N., Kelly, A., y Bokhove, C. (2020). Learning inequalities during the Covid-19 pandemic: How families cope with home-schooling. University of Southampton. <https://doi.org/10.5258/SOTON/P0025>
- Rodríguez Palmero, M. L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. En *Concept maps: theory, methodology, technology: proceedings of the first International Conference on Concept Mapping* (pp. 535–544). <https://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.PDF>
- Robles Sánchez, M. M. (2008, 7 de abril). Temas de educación: El método de proyectos de Kilpatrick. Temas de educación. <https://temasdeeducacin.blogspot.com/2008/04/el-mtodo-de-proyectos-de-kilpatrick.html>
- Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., y Lindner, M. A. (2022). Long-Term Consequences of Repeated School Closures During the COVID-19 Pandemic for Reading and Mathematics Competencies. *Frontiers in Education*, 13: Article 867316. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.867316>
- Silverthorn, D. U. (2020). When Active Learning Fails... and What to Do About It. En J. J. Mintzes y E. M. Walter (Eds.), *Active Learning in College Science* (pp. 985–1001). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33600-4_61
- Suárez Caballero, J. (2023). Gamificación y las Tecnologías Digitales en el área de Matemáticas de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, 12(1), 82–105. <https://doi.org/10.17583/redimat.9617>
- Thomas, J. W. (2000). A review of research on project-based learning. The Autodesk Foundation. https://my.pblworks.org/resource/document/a_review_of_research_on_project_based_learning?check_logged_in=1
- Villamagua León, K. J., y Quizhpe Cueva, J. L. (2024). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en la educación escolar. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(2), 6357–6377. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i2.11054
- Wakhata, R., Mutarutinya, V., y Balimuttajjo, S. (2022). Secondary school students' attitude towards mathematics word problems. *Humanities and Social Sciences Communications*, 9(1), 444. <https://doi.org/10.1057/s41599-022-01449-1>
- World Bank. (2018). *World Development Report 2018: Learning to Realize Education's Promise*. World Bank. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-1096-1>
- Zuluaga Garcés, O. L., Molina Osorio, A., Velásquez Acevedo, L. y Osorio Vega, D. B. (2010). La pedagogía de John Dewey. *Revista Educación y Pedagogía*, 5(10-11), 20–30. <https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/5697>



LAS EMOCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA NUEVA ESCUELA MEXICANA

EMOTIONS IN THE TEXTBOOKS OF THE NEW MEXICAN SCHOOL

Ana María Martínez Blancarte¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2089-7834>

Marleny Hernández Escobar²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0080-1436>

Cinthia Jessica Sánchez Serrano³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7982-9588>

RESUMEN

En la actualidad el Sistema Educativo Mexicano (SEM) está viviendo cambios relevantes y necesarios, uno de los temas que ha surgido con mucha fuerza está relacionado al papel que juegan las instituciones educativas en la formación emocional, si bien no es un término nuevo, su incorporación como innovación educativa en el currículo de la educación es reciente y obedece a distintas necesidades sociales. La Nueva Escuela Mexicana (NEM) ha implementado acciones para atender dicha situación, dentro de ellas se encuentra la elaboración de planes y programas, así como la creación de libros de textos gratuitos (LTG), los cuales contribuyen a la formación del educando. De tal manera que los objetivos de este reporte parcial de investigación cualitativa son: 1. analizar los contenidos emocionales en el área de matemáticas en los LTG de nivel primaria y secundaria y 2. Identificar en los planes y programas de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM) y de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) estos aspectos, a través de una metodología cualitativa de corte documental. Dentro de los hallazgos se señala que los LTG de primaria y secundaria consideran mayores apartados a la enseñanza de emociones que de matemáticas y que los programas de la BENM y la ENSM tratan las emociones en dos espacios curriculares. Se concluye que los esfuerzos por parte del SEM o la NEM no han sido suficientes para el abordaje emocional, no obstante, es un inicio que debe ser el parteaguas de muchas propuestas en pro de los estudiantes.

Palabras clave: Libros de texto, Enseñanza, Emociones, Matemáticas, Nueva Escuela Mexicana.

ABSTRACT

Currently, the Mexican Educational System (SEM) is experiencing relevant and necessary changes, one of the issues that has emerged with great force is related to the role that educational institutions play in emotional training, although it is not a new term, its Incorporation as an educational innovation in the education curriculum is recent

1 Benemérita Escuela Nacional de Maestros, Ciudad de México, México, C. P. 11330. Correo electrónico: ana.mblancarte@aefcm.gob.mx

2 Escuela Normal Superior de México, Ciudad de México, C. P. 02420. Correo electrónico: marleny.hernandez@aefcm.gob.mx

3 Escuela Normal Superior de México, Ciudad de México, C. P. 02420. Correo electrónico: cinthia.sanchez@aefcm.gob.mx

and responds to different social needs. The New Mexican School (NEM) has implemented actions to address this situation, among them is the development of plans and programs, as well as the creation of free textbooks (LTG), which contribute to the training of the student. Therefore, the objectives of this partial qualitative research report are: 1. to analyze the emotional contents in mathematics in the primary and secondary level LTG and 2. To identify in the plans and programs of the Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM) and the Escuela Normal Superior de México (ENSM) these aspects, through a qualitative documentary methodology. Among the findings, it is noted that primary and secondary LTG consider greater sections for teaching emotions than mathematics and that the BENM and ENSM programs deal with emotions in two curricular spaces. It is concluded that the efforts on the part of the SEM or the NEM have not been sufficient for the emotional approach, however it is a beginning that should be the watershed of many proposals for students.

Keywords: Textbooks, Teaching, Emotions, Mathematics, New Mexican School.

1. INTRODUCCIÓN

Hace poco tiempo, el mundo vivió una de las mayores pandemias provocada por el coronavirus denominado SARS-COVID-2 ante esta situación en México específicamente en el sector educativo se tomaron acciones inmediatas, dentro de las cuales se encontraba la suspensión de clases temporalmente, hasta trasladarse a la educación a distancia, sin embargo, tomó a todos desprevenidos, lo cual provocó que directivos, padres de familia, docentes y alumnos empezaran a desempeñar diversos roles, cada uno comprobó que la magnitud de la tarea desafiaba los recursos disponibles, físicos, tecnológicos y humanos, generando ansiedad y estrés en un escenario de incertidumbre, miedo al contagio y preocupación por lo que vendría (González, 2020).

Investigaciones señalan que la pandemia y las transformaciones que se habían venido gestando en la sociedad demostraron que los sujetos no tenían las herramientas necesarias para adaptarse fácilmente a los cambios, inevitablemente la pérdida de contacto social, el aislamiento causado por el confinamiento, y el cambio de dinámica, provocó que el estudiantado en los diversos niveles y países sufrieran niveles de estrés impactando en la salud y el desempeño académico (López & Contreras, 2022). Asimismo, tuvo efectos en términos de equilibrio socioemocional (González, 2020). En este sentido, se dio un énfasis y necesidad de trabajar los aspectos emocionales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que, han sido considerados como fundamentales para encontrar la satisfacción en la vida, el afrontamiento de situaciones estresantes, el desarrollo de una carrera, entre otros (Pérez- González, 2008).

En otras palabras, y basado en algunas investigaciones, atender los aspectos emocionales en el estudiantado, establece una menor presencia de problemas de salud mental, debido a que favorecen a que el individuo tome decisiones y afronte mejor los cambios, necesidades y demandas sociales (Hjemdal et al., 2006). De tal manera, que el reto para la NEM era establecer en los planes y programas y en sus propios libros de texto la relevancia de la formación socioemocional, Asimismo, se establece en el Diario Oficial de la Federación que “para la educación preescolar, primaria y secundaria en todos sus fases, grados y modalidades, tendrán un enfoque intercultural que articule los procesos formativos, la evaluación, la gestión escolar, los materiales, las tecnologías de la información y comunicación, bajo el principio de justicia curricular en su diseño, operación y valoración, considerando como aspectos centrales la inclusión, la relación recíproca, solidaria y de interdependencia de todos los colectivos sociales que acuden a dichos niveles educativos..” (Diario Oficial de la Federación (DOF, 2019, p. 66).

De tal manera, que la presente investigación documental tiene como objetivos primeramente analizar los contenidos emocionales en el área de matemáticas en los LTG de nivel primaria y secundaria; y posteriormente, identificar en los planes y programas de la BENM (2012, 2022) y de la ENSM (2018, 2022) estos aspectos, a través de una metodología documental. Lo anterior debido a que la NEM considera el tratamiento de lo socioemocional en los proyectos de educación básica de acuerdo a su organización de acuerdo a los ejes articuladores, estableciendo que:

La Educación Socioemocional es un proceso por medio del cual se propicia que niñas, niños y adolescentes (NNA) desarrollen de manera gradual, las habilidades que les permitan comprender y regular sus emociones; construir su identidad personal; mostrar empatía y cuidado hacia las demás personas; colaborar y establecer relaciones positivas; tomar decisiones responsables y aprender a manejar situaciones cotidianas de manera constructiva y ética, lo cual contribuye al logro del bienestar (SEP, s/a, p.5)

Lo anterior puede ser localizado en el programa sintético de cada fase con sus respectivos procesos de desarrollo del aprendizaje. Asimismo, se si visualiza la relación de los contenidos que se establece de manera directa, así como contenidos que pertenecen a otra área de conocimiento, pero que sin duda alguna aportan a la formación del sujeto (SEP, s/a).

No obstante, si bien, se ha demostrado la importancia de las emociones, así como de su desarrollo o potencialización mediante la educación conviene señalar que, por muchos años, se creyó y pensó que la práctica formativa debía estar centrada en lo racional, excluyendo lo emocional (Moncada y Gómez, 2016). Autores como Imbernón (2006) y Barrios, et al., (2022) establecen que los currículos de formación no deberían de estar sesgados solo al contenido, sino a desarrollar otro tipo de habilidades o competencias como comunicarse, empatía, autorregularse, autoconocerse, automotivarse, trabajar en equipo, colaborativamente, entre otras; que haría que los estudiantes den respuestas oportunas y pertinentes, pero sobre todo que puedan enfrentar y afrontar los cambios o problemáticas sociales (Salas – Hernández et al, 2023).

Respecto a la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con Gascón (1998):

Brousseau vislumbró por primera vez la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no habían sido construidos para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica [...] Uno de los rasgos esenciales de este punto de vista en didáctica consiste precisamente en tomar la actividad matemática en sí misma y, más en concreto, la actividad matemática escolar, como objeto primario de estudio (p. 18).

Por mucho tiempo se había considerado que el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes se adjudicara exclusivamente a los conocimientos y habilidades que estaban relacionadas con el razonamiento lógico – deductivo y básicamente la resolución de ejercicios y problemas. Haciendo obvio el aislamiento de una enseñanza de las emociones, ideologías, creencias y actitudes, y estableciendo actualmente la influencia mutua necesaria e importante entre las matemáticas y las emociones (Hachem, 2021).

En otras palabras, se establece la importancia de que los docentes formen a los estudiantes no solo en contenidos matemáticos que les permita aprobar un examen, es necesario desarrollar competencias socioemocionales para enfrentar y afrontar cualquier problema o situación que se presente en su vida (Hachem, 2021).

La formación educativa de las personas es fundamental para que puedan tener la oportunidad de llevar una vida más plena, libre y consciente. Este desarrollo integral abarca el conocimiento académico, la capacidad de pensar, analizar y resolver

de manera crítica cualquier situación, así como la adquisición de habilidades y competencias que les sirvan en su día a día (Hachem, 2021, p.6).

De lo expuesto anteriormente la presente denota la incorporación de las emociones en el currículo educativo como innovación, obedeciendo a distintas necesidades sociales y políticas educativas.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS-CONCEPTUALES

Hoy en día el proceso enseñanza-aprendizaje es un proceso integral, donde se atiende el desarrollo cognitivo, por un lado, y por otro el desarrollo emocional. Entendiéndose el primero como un proceso en el que el estudiantado organiza mentalmente la información que recibe y recaba a través de los sistemas senso-perceptuales (Ordoñez & Tinajero, 2005), para resolver situaciones que la vida les presenta. Para Piaget se convierte una reorganización gradual de los procesos mentales que son resultado de la maduración biológica y la experiencia ambiental (Cárdenas, 2011).

Por otro lado, las emociones son entendidas como la expresión o respuesta del organismo establecida o provocada por determinados estímulos del medio ambiente (James, 1884, citado en Mora, 2013). Asimismo, para la NEM y los programas de las normales, la educación socioemocional es aquella que ayuda a las personas a desarrollar habilidades emocionales y sociales que permiten entender y gestionar emociones, establecer relaciones saludables con los demás para el bienestar personal y social lo cual resulta parte fundamental de una educación integral (Bisquerra, 2003). En otras palabras, sin la emoción “el pensamiento racional se entelatece y desintegra. La mente racional no flota por encima de lo irracional, no puede liberarse y ocuparse sólo de la razón pura. Hay teoremas puros en matemáticas, pero no pensamientos puros que los descubran” (James, 1998, Mora, 2013, p.2). De tal manera, se enmarca la posibilidad de lograr en el alumnado un dominio disciplinar sin dejar de lado el desarrollo de competencias emocionales y sociales, es decir, es importante contribuir a la formación de ciudadanos equilibrados y que gocen de bienestar (Lazarus, 1982).

En México, la política educativa establecida en la Ley General de Educación (DOF, 2019) resalta que la educación en el Estado debe ser integral, enfocándose a educar para la vida mediante el desarrollo cognitivo, socioemocional y físico con el fin único de que todas las personas alcancen su bienestar. De tal manera que las emociones son útiles cuando guían adecuadamente el proceso sensorial, la toma de decisiones, brindan información sobre el mejor curso de acción, informan sobre el comportamiento de los demás y motivan comportamientos socialmente apropiados (Gross, 2015).

En el caso particular de las asignatura de matemáticas, Gil et al. (2006) proponen el diseño de proyectos y programas de prevención e intervención que apoyen a minimizar dificultades de aprendizaje en matemáticas mediante la mejora de las relaciones entre el profesorado y sus estudiantes, así como la modificación del imaginario social de la materia de matemáticas para favorecer la atracción y gusto por la disciplina, mejorando con ello las reacciones emocionales que experimentan los estudiantes ante su aprendizaje.

Tal y como señala Ibáñez (2002) “las emociones de los estudiantes constituyen un factor determinante en la construcción de sus aprendizajes” (p. 16), es por ello, que se vuelve indispensable incorporar estrategias que permitan en primera instancia el reconocimiento emocional, lo cual se observa en los planes de estudio de las escuelas normales y en los contenidos de los LTG de la Nueva Escuela Mexicana. De aquí la importancia de este estudio para

identificar los elementos fundamentales que se incorporan a los programas de todos los niveles educativos o proyectos, en este caso los LTG de educación básica.

Por otra parte, la pandemia solo ratificó la importancia de desarrollar las competencias sociales y emocionales de los estudiantes, así como la necesidad de que los docentes se encuentren preparados o formados bajo los mismos principios, por ende, las escuelas normales tienen un gran compromiso en los procesos formativos en donde prioricen lo disciplinar por sobre lo emocional y social (Tapia-Gutiérrez y Cubo- Delgado, 2017). En este sentido, esto representa un área de oportunidad para nuevos enfoques educativos.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

En esta investigación cualitativa, se realizó un análisis documental, el cual consistió en indagar, describir y representar la información de forma organizada, unificada y sistemática, para facilitar no solo su recuperación sino también su análisis (Sánchez & Tobón 2020), tratando de dar respuesta o atender los siguientes objetivos planteados a la investigación: analizar los contenidos emocionales en el área de matemáticas en los LTG de nivel primaria y secundaria e identificar en los planes y programas de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM) y de la Escuela Normal Superior de México (ENSM).

De tal manera, que comprendió el procesamiento analítico y sintético que dirige la información bibliográfica y general de la fuente, específicamente de los libros de textos gratuitos de nivel básico y de los planes y programas de estudio de las normales (BENM y de la ENSM), con relación a las emociones.

La presente investigación documental se desarrolló a través de las siguientes fases:

- **Fase 1.** Selección del Contexto: El contexto donde se desarrolló la presente investigación surge en dos ámbitos el primero el nivel básico (primaria y secundaria) en el cual se extrajeron los LTG para su identificación o indagación respecto a las emociones y el segundo en las normales tales como; la BENM y la ENSM en donde se analizó la malla curricular de ambas instituciones.
- **Fase 2.** Búsqueda de las fuentes documentales: Se realizó un análisis de la literatura, sobre el tema o término de emociones en un periodo no mayor a seis meses, realizada en buscadores como Google académico, Scielo y Redalyc. Asimismo, se indagó sobre los LTG que se encuentran de manera gratuita en la página de la Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos (CONALITEG), cuyo objetivo es la producción de estos, así como de materiales educativos y de apoyo en cada ciclo escolar, para los estudiantes y los planes y programas de BENM y ENSM, con el fin de establecer y concretar cada uno de los ejes u objetivos planteados en la investigación y así poder realizar aportaciones integradoras y metodológicas a la comunidad escolar.
- **Fase 3.** Selección de las fuentes pertinente y congruentes que permitieran primeramente esclarecer el termino emoción, posteriormente se solicitaron los LTG y por último los planes y programas de la BENM y ENSM que dan soporte al objetivo de investigación.
- **Fase 4.** Discusión y Análisis de Resultados. La revisión de los documentos permitió no sólo el procesamiento de la información, sino que se gestó una dinámica de análisis de

los mismos para la difusión del conocimiento con base en los objetivos planteados en la presente investigación.

4. RESULTADOS

Se presenta la discusión y los resultados de la sistematización del conocimiento obtenido en la revisión documental y la codificación generada a partir de la revisión de la literatura, primeramente, con elementos obtenidos de la pandemia, lo relacionado a los LTG y posteriormente con los planes y programas de las escuelas normales (BENM y ENSM).

De manera general se establece que según investigaciones a nivel mundial la pandemia tuvo repercusiones en la salud física y mental de los estudiantes de nivel superior viéndose comprometida a mayores niveles de estrés, impactando en su rendimiento, desempeño y sin duda alguna en las mismas relaciones que establecían (López, 2016). Lo cual provocó una readaptación a los cambios de vida, toda vez que se demostró que la sociedad no contaba con los elementos indispensables y necesarios para adaptarse con facilidad a los cambios que provocó el SAR-COVID2 (González, 2020), por lo que, la formación socioemocional ha sido estimada como necesaria para poder afrontar transformaciones sociales. (Pérez- González y Pena 2011).

Con los libros de educación básica propuestos en la Nueva Escuela Mexicana se dan a conocer y se implementan las metodologías activas como técnicas, estrategias y métodos, que ponen al alumno del nivel básico en el centro del aprendizaje individual y comunitario, basado en un trabajo colaborativo, el cual promueve el desarrollo de la creatividad y la innovación, todo ello para desarrollar el pensamiento crítico que permita generar una mayor motivación en el conocimiento interdisciplinario, adquirir nuevas habilidades para el aprendizaje autorregulado, manejar la incertidumbre, analizar, verificar y evaluar la pertinencia de proyectos de saberes y del pensamiento científico que den cuenta de su aplicabilidad metodológica.

El propósito de los libros de texto es crear discusiones sobre la pertinencia de un aprendizaje más globalizado, como se señala en los libros de texto de primaria “con el trabajo comunitario te apropiarás de nuevos aprendizajes relacionados con tu vida diaria...conocerás puntos de vista plurales y diversos a través de siete Ejes articuladores que vinculan los temas de diferentes disciplinas (SEP, 2023d, p. 4), es decir, que evite las fragmentaciones disciplinares (Barrios, et al., 2022), que recupere una perspectiva humanista y que lleve a pensar en las matemáticas, como posibilidad integradora que involucre diversas actividades con las cuales se establezcan relaciones entre aspectos de la realidad, en las que se formulen oralmente y por escrito dichas relaciones mediante expresiones en un lenguaje natural y en un lenguaje matemático, es decir que el estudiante logre efectuar distintos tipos de operaciones, desarrollar algoritmos y procedimientos con el uso y la creación de modelos a través de diversas representaciones.

Para los libros de texto la interdisciplinariedad es una estrategia metodológica para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias es decir, considerar “la integralidad de saberes disciplinares y a los diversos proyectos” (SEP, 2024, p. 8) que pone en práctica el enfoque didáctico y la aplicabilidad en contextos de su comunidad, además, se reconoce que las matemáticas surgen y se construyen a partir de necesidades específicas de otras disciplinas, que favorecen espacios de organización, de sistematización, de validación y de una comunicación de información científica, que permiten resolver situaciones y problemas (inclusive aquellos donde la matemática es formal).

Es por ello, que en los libros de texto se desarrolla el gusto por aprender a aprender matemáticas mediante el análisis de diferentes problemas, situaciones o fenómenos de su entorno, de su vida cotidiana, de las experiencias de su aprendizaje escolar y de los proyectos interdisciplinarios, desde una visión integradora, inclusiva y con una perspectiva de género, con el uso de preguntas interesantes y desafiantes que dinamizan y promueven la interactividad dentro del grupo.

Se desarrolla la comunicación de los estudiantes, así como también sus habilidades matemáticas y de convivencia a través de una metodología basada en la resolución de problemas que conlleva recursos procedurales relacionados con el razonamiento (intuir, observar, comparar, analizar, sintetizar, deducir, inducir, generalizar, abstraer, modelar, simbolizar, cuestionar, dudar, cuestionar, elaborar conjeturas como detonantes de un proceso de razonamiento, promover la justificación, la deducción, comprobar y argumentar, entre otras.), que ponen de manifiesto la necesidad de incorporar una mayor cantidad de problemas de aplicación y de problemas de modelaje, al estar situados en la realidad, debido a que los estudiantes brindarán soluciones a través de la construcción, selección, análisis, interpretación, evaluación, mejora y/o uso de modelos matemáticos en situaciones de las áreas del acceso al conocimiento y del ámbito socioemocional, las cuales establecen conexiones naturales a su contexto, a su nivel cognoscitivo y a sus intereses.

Los libros de texto de educación primaria se presentan en Cuatro Campos Formativos: Lenguajes; Saberes y pensamiento científico; De lo humano y lo comunitario; Ética, naturaleza y sociedades, a través de Cinco áreas: Múltiples lenguajes; Nuestros saberes; Proyectos de aula; Proyectos escolares; y Proyectos comunitarios. En educación secundaria, los libros que se revisaron fueron el Libro de proyectos y el de Nuestros saberes y pensamiento científico por su relación con la asignatura de matemáticas. Los libros de texto de educación básica se pueden revisar de manera física o bien las páginas web <https://libros.conaliteg.gob.mx/primaria.html> y en <https://libros.conaliteg.gob.mx/secundaria.html>.

El libro de Nuestros saberes es un material de consulta en la realización de actividades escolares que brinda información concreta sobre diversos contenidos, en el que se presentan definiciones y explicaciones de diversos conceptos matemáticos que se tienen que abordar según los contenidos obligatorios. Por ejemplo, en lo correspondiente al campo formativo Saberes y pensamiento científico, se presentan de manera alternada conceptos relativos a las ciencias y a las matemáticas.

El libro de Múltiples lenguajes contiene una gran variedad de textos literarios e informativos relacionados con los contenidos de matemáticas que se desarrollan en los otros libros. Mientras tanto, los libros de Proyectos (de aula, escolares y comunitarios) presentan una serie de actividades articuladas (recuperación de conocimientos de la comunidad, indagación, comprensión, socialización, aplicación y retroalimentación) para el abordaje, a través de la acción contextualizada, de los contenidos matemáticos educativos.

Desde el índice de los libros de texto se puede encontrar un comparativo en cuanto a la cantidad de proyectos destinados a las emociones y al campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico, en específico, de contenidos relacionados con matemáticas, por ejemplo, en el libro de Proyectos de Aula (véase la figura 1).

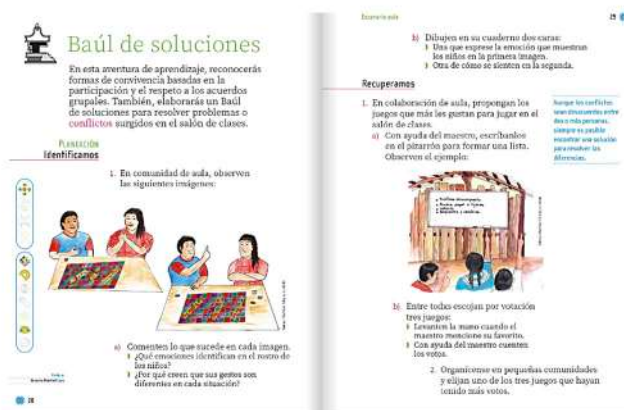
Figura 1. Índice del libro de Proyectos de Aula de Primer Grado de Educación Primaria.

Campo formativo Lenguajes	8
Conozcamos las maravillas de la lectura	10
Nombrario del grupo	18
Baúl de soluciones	26
Los saberes de mi comunidad	36
¡Creemos textos en colectivo!	46
Hagamos historietas con historias familiares o comunitarias	56
Somos y sentimos lo que comemos	68
Me autorreconozco	78
Campo formativo Ética, naturaleza y sociedades	86
Soy único y tú también	86
Diálogo para la justicia	94
Mi cuerpo dentro de una burbuja	100
Me siento bien cuando me cuidó	108
La importancia del bosque	116
México y la diversidad de símbolos culturales que lo representan	124
El reglamento del aula y su importancia	132
Campo formativo De lo humano y lo comunitario	138
El árbol de cualidades, actitudes y valores	140
Hablemos de empatía	152
La salud, ¡mi gran derecho!	168
El rincón de juegos	178
Campo formativo Saberes y pensamiento científico	192
Mi cuerpo y sus movimientos	194
¡Cuidado con los azúcares!	206
¿Qué tan resistente es un tubo de papel?	216
Lámparas de sol	226

Fuente: La figura representa el índice del Libro Proyecto de Aula de Primer grado de primaria.

Por otro lado, como se señala en el campo formativo de Lenguajes hay dos proyectos: Somos y sentimos lo que comemos, Me autorreconozco; sin embargo, en el proyecto Baúl de soluciones también se considera el tema de emociones en todo el proyecto (véase la figura 2). Mientras que los proyectos destinados al campo formativo Saberes y Pensamiento Científico consideran poco el tratamiento de los contenidos matemáticos, pues sólo dedican pequeñas secciones a lo señalado anteriormente.

Figura 2. Proyecto de Aula “Baúl de soluciones” de Primer Grado de Educación Primaria.



Fuente: Imagen que proyecta la actividad del Baúl de soluciones, establecida en el Libro Proyecto de Aula de Primer grado de primaria.

Lo anterior denota la importancia que la NEM establezca el vínculo del aprendizaje de las matemáticas y las emociones, quedando aún lado la mirada y preponderancia a lo racionalista clásico o cognitivo. “Es una realidad que las emociones intervienen en el aprendizaje de manera significativa ya sea facilitándolo u obstaculizándolo, desempeñando un papel en la comunicación de intenciones de los estudiantes hacia los demás” (Larios, 2005. p.185). En otras palabras, “existe una necesidad de descifrar los aspectos emocionales del conocimiento de la colectividad ... pues se consideran como la fuente de muchos fracasos en nuestra vida intelectual y, en particular, en nuestra educación” (Larios, 2005, p.186).

Respecto a los planes y programas de las normales se encontró primeramente que respecto a la BENM se forma a los futuros docentes de educación primaria con dos planes y programas, el 2012 y el 2022. En el primer plan y programa (SEP, 2012) no se observó el tratamiento de emociones de una manera explícita (véase la Figura 3), lo que se podría suponer que no contribuye a la formación integral del estudiantado, mientras que el plan (2022) destina sólo una asignatura para el tratamiento explícito de las emociones (véase la Figura 4) en el segundo semestre.

Figura 3. Licenciatura en Educación Primaria 2012.

Fuente: Imagen del plan de estudios 2012, de la Licenciatura en Educación Primaria (plan 2012). <https://dgesum.sep.gov.mx/lepri2012>

Figura 4. Licenciatura de Educación Primaria 2022.

I. 10 Malla curricular de la Licenciatura en Educación Primaria

Trayectos	FASE 1 INMERSIÓN		FASE 2 PROFUNDIZACIÓN				FASE 3 DESPLIEGUE	
	Semestre 01	Semestre 02	Semestre 03	Semestre 04	Semestre 05	Semestre 06	Semestre 07	Semestre 08
Fundamentos de la educación	El sujeto y su formación profesional 4Hrs. / 4.5Cr. Bases filosóficas, legales y organizativas del sistema educativo mexicano 4Hrs. / 4.5Cr.	Filosofía y sociología de la educación 4Hrs. / 4.5Cr.	Flexibilidad curricular 6Hrs. / 6.75Cr	Flexibilidad curricular 6Hrs. / 6.75Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. / 4.5Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. / 4.5Cr.	Flexibilidad curricular 6Hrs. / 6.75Cr.	Flexibilidad curricular 8Hrs. / 9Cr.
Bases teóricas y metodológicas de la práctica	Teorías del desarrollo y aprendizaje 4Hrs. / 4.5Cr.	Desarrollo socioemocional y aprendizaje 4Hrs. / 4.5Cr. Desarrollo socioemocional y aprendizaje 4Hrs. / 4.5Cr.	Pedagogías situadas globalizadoras 4Hrs. / 4.5Cr.	Pedagogía y didáctica del aula multigrado 4Hrs. / 4.5Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. / 4.5Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. / 4.5Cr.		
Práctica profesional y	Acercamiento a prácticas	Análisis de prácticas y	Intervención didáctica	Estrategias de trabajo docente y	Investigación e innovación	Práctica docente y proyectos de	Flexibilidad curricular	Flexibilidad curricular

Fuente: Imagen del Plan de estudio 2022. Licenciatura en Educación Primaria. <https://dgesum.sep.gov.mx/planes2022>



Respecto a la ENSM hay dos asignaturas para tratar las emociones (ver figura 5), cada una se aborda durante el primero y segundo semestre de la licenciatura, de manera general los contenidos que se establecen están relacionados al análisis y comprensión de la educación socioemocional en la formación de competencias emocionales en el pedagogo, el enfoque teórico-metodológico de la educación socioemocional en la educación básica y la educación socioemocional y la intervención.

Lo anterior explica y establece como contribuye en la formación socioemocional del docente en formación.

Figura 5. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Plan 2022.

I. 10 Malla curricular

Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje en Telesecundaria

Trayectoria	FASE I INGRESIÓN			FASE II PROFUNDIZACIÓN			FASE III DESPLIEGUE	
	Semestre 01	Semestre 02	Semestre 03	Semestre 04	Semestre 05	Semestre 06	Semestre 07	Semestre 08
Fundamentos de la educación	Marco filosófico, legal y organizativo del sistema educativo mexicano 4Hrs. 14.5Cr.	Desigualdades: educativa, socioeconómica y política de México 4Hrs. 14.5Cr. Introducción a la enseñanza en la escuela Telesecundaria 4Hrs. 14.5Cr.	Neurociencias y aprendizaje 4Hrs. 14.5Cr.	Educación en la sostenibilidad para una vida saludable 4Hrs. 14.5Cr.	Educación Inclusiva e interculturalidad crítica 4Hrs. 14.5Cr.	Investigación para la docencia 4Hrs. 14.5Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. 14.5Cr.	Flexibilidad curricular 4Hrs. 14.5Cr.
Bases teóricas y metodológicas de la práctica	Telesecundaria en México: desafíos para la igualdad y la inclusión 4Hrs. 14.5Cr. Adolescencia. Crecimiento y comportamiento 4Hrs. 14.5Cr.	Adolescencia. Emoción y convivencia sana 4Hrs. 14.5Cr.	Adolescencia. Procesos cognitivos 4Hrs. 14.5Cr.	Pensamiento pedagógico 4Hrs. 14.5Cr.	Gestión del centro educativo 4Hrs. 14.5Cr.			
Práctica profesional y saber pedagógico	Herramientas para la observación y análisis de prácticas y contextos escolares 4Hrs. 14.5Cr.	Observación y análisis de prácticas y contextos escolares 6Hrs. 16.75Cr.	Práctica docente en el aula 6Hrs. 16.75Cr.	Mediación pedagógica y trabajo docente 6Hrs. 16.75Cr.	Innovación para una docencia incluyente 6Hrs. 16.75Cr.	Proyecto de intervención docente 6Hrs. 16.75Cr.	Flexibilidad curricular 8Hrs. 8Cr.	Flexibilidad curricular 10Hrs. 11.25Cr.
Formación pedagógica, didáctica y metodológica	Propósitos, contenidos y enfoques para la planeación en Telesecundaria 4Hrs. 14.5Cr.	Planeación y evaluación 6Hrs. 16.75Cr.	Didáctica de la Biología 4Hrs. 14.5Cr.	Didáctica de la Física 4Hrs. 14.5Cr.	Didáctica de la Geografía 4Hrs. 14.5Cr.	Didáctica de las artes 4Hrs. 14.5Cr.		

Fuente: Trayecto formativo del Plan de estudio 2022. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. <http://dgesum.sep.gov.mx/planes2022>

En ambas instituciones (BENM y ENSM) se inicia con la formación emocional del estudiantado, olvidada por muchos años, pero que hoy reconocen la importancia y necesidad de aceptar y establecer “que la cognición y la emoción se afectan recíprocamente, por lo que la persona que se educa debe ser considerada como una mezcla de razón y emoción, de manera tal que separar estos dos componentes sería atentar contra el carácter humano del ser humano” (García, 2012, p.7). Asimismo desde la perspectiva de Tobón (2018), es indispensable para el estudiante normalista la formación socioemocional con el fin de que éste pueda lograr mayores niveles de adaptación personal, familiar, social, académica, vocacional y profesional, lo que disminuiría el estrés, debido a que, tendría la capacidad para manejar las emociones de forma apropiada, tomar conciencia de la relación entre emoción, cognición y comportamiento, tener buenas estrategias de afrontamiento y la capacidad para autogenerarse emociones positivas, es por ello que en la malla de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) y de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM) en su trayecto de bases teóricas y metodológicas de la práctica, se le brinda un espacio curricular al desarrollo socioemocional con la misma cantidad de créditos.

En el currículo general de la ENSM se adopta lo relacionado con las emociones para desarrollar las capacidades necesarias para atender la diversidad de los estudiantes y sus familias lo cual le permite comprender su incidencia en educación que le permite adquirir una mayor sensibilidad para percibir la diversidad como una dimensión enriquecedora y no como



un déficit, desplegando actitudes favorables a ella. Uno de los objetivos fundamentales en la formación del profesorado es procurar un cambio en los esquemas mentales, actitudes, estilos y compromisos profesionales del profesorado. Sin embargo, en el caso de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros se sigue teniendo la dificultad que los planes y programas se tienen diseñados por asignaturas mientras que en la Educación primaria es por campos formativos, así como también que los libros de texto de educación primaria destinan más partes de los proyectos al tratamiento de la temática socioemocional. Como se señala en el curso de Desarrollo emocional “se contempla la vivencia y toma de conciencia de la salud mental, emocional y la búsqueda permanente del bienestar, es deseable la reflexión y acción sobre el propio bienestar y las diversas formas de lograrlo, no solo con sus futuros estudiantes, sino en la vida personal, familiar y social” (SEP, 2022c, p. 6).

Asimismo, en la BENM únicamente destina un semestre (segundo semestre, véase la figura 4) a la formación del normalista sobre este tema con el curso titulado *Desarrollo Socioemocional y aprendizaje* conformado por tres unidades. La primera considera tres contenidos a) definición de emociones y su clasificación; b) Elementos neurofisiológicos de las emociones y c) marcos teóricos de la educación socioemocional. La segunda unidad refiere dos contenidos a) dimensiones de la educación socioemocional y sus habilidades y b) Estrategias para el desarrollo de las habilidades socioemocionales. Por último, la unidad tres considera el desarrollo de tres contenidos: a) Enfoque pedagógico de la educación socioemocional. b) Técnicas, instrumentos y estrategias de la educación socioemocional y c) Planificación de la educación socioemocional y su impacto en el aprendizaje como se señala en el programa de la asignatura (SEP, 2022a).

Para el caso de la ENSM si bien se destina un semestre en todas las licenciaturas de formación emocional, existe la flexibilidad curricular y es basado en sus necesidades que se opta o no por otro semestre para trabajar dicho aspecto, que como se viene manifestando es de vital importancia en la formación de los futuros docentes debido a que las emociones son fundamentales en el proceso de enseñanza y de aprendizaje,

en primer lugar, el proceso educativo implica la interacción entre personas y, en segundo lugar, porque la identidad personal y profesional de los docentes en muchas ocasiones son inseparables y en el aula se convierten en factores de influencia en la autoestima y en el bienestar personal y social (Cejudo & López-Delgado, 2017, p. 30).

En específico, en la Licenciatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, las asignaturas destinadas a lo emocional son dos (véase la figura 5): a) Desarrollo en la adolescencia y juventud que comprende tres unidades en las que se tratan contenidos relacionados al desarrollo y factores en la adolescencia y juventud además de situaciones de riesgo y prevención. b) Desarrollo emocional que también considera tres unidades para el tratamiento de las emociones desde su origen y definición, así como estrategias para mejorar el bienestar docente.

Reafirmando lo anterior con investigaciones que han señalado la necesidad de desarrollar las competencias emocionales y sociales del profesorado desde la formación inicial, como elemento a considerar en las competencias genéricas (Bisquerra, 2005).

De la misma manera, existen investigaciones que establecen un vínculo entre las competencias sociales y emocionales del profesor y el desempeño a la hora de llevar a cabo los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Jennings & Greenberg, 2009). Por ende, la inclusión de los aspectos emocionales y sociales en las instituciones educativas “debería formar parte del bagaje pedagógico del profesorado, para lo cual es preciso que se constituya un campo de conocimiento relevante en su formación” (Cejudo & López-Delgado, 2017, p. 30). Se debe

evitar a toda costa la idea de que se quiere trabajar los aspectos emocionales y sociales y el docente no cuenta ni con los recursos ni con la formación para realizar tan compleja actividad.

De modo que se establece la premisa que si a mayores competencias emocionales y sociales, parece razonable y lógico establecer que los docentes mostrarán mayor sensibilidad a las situaciones que se presenten en su entorno social y mayor afrontamiento ante las transformaciones.

Tanto los libros de texto como los planes y programas con la NEM precisan la enseñanza de las emociones consideran las situaciones que los individuos viven e incorporan la educación emocional para fomentar una mejor convivencia, los libros de texto abordan emociones básicas como la tristeza, alegría, miedo, enojo, sorpresa y asco, lo que permite identificar y reconocer ciertas emociones con la finalidad de que sea en los planes y programas de estudio donde se incluyan actividades y sesiones donde se enseñe al estudiantado a regular y desarrollar habilidades para una convivencia sana, tomando en cuenta la manera de pensar y las experiencias de cada individuo.

Lo anterior hace importante conocer los programas sintéticos que son documentos oficiales elaborados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México, estos programas resumen los contenidos, aprendizajes esperados y propuestas pedagógicas de cada una de las fases educativas de la NEM cuyo objetivo es proporcionar una guía clara y concisa para los docentes, ayudándoles a planificar y organizar sus clases de manera efectiva, incluyendo información de los temas a tratar, los propósitos de aprendizaje y las estrategias pedagógicas recomendadas para cada nivel educativo, además de ser la orientación para el codiseño de los programas analíticos los cuales se centran en desarrollar habilidades de pensamiento crítico tomando en cuenta el contexto del estudiantado.

En los programas analíticos se incluyen estrategias de enseñanza que permiten al estudiantado recopilar, organizar y analizar datos para tomar decisiones informadas, lo que fomenta la promoción de la investigación y el uso de recursos que ayudan al desarrollo de la capacidad para encontrar soluciones y respuestas al resolver problemas y con ello a evaluar críticamente la información y argumentos encontrados.

5. CONCLUSIONES

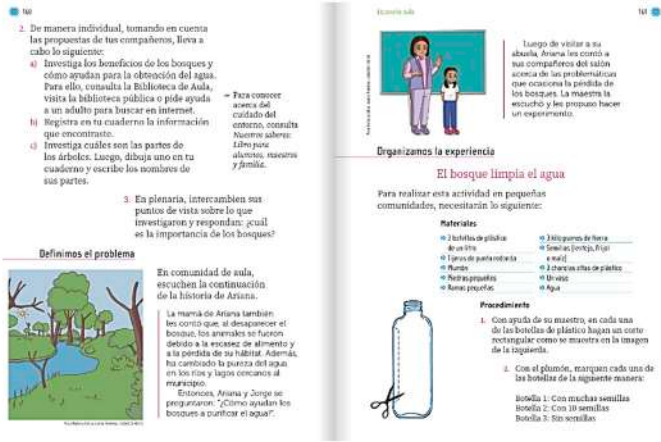
Dentro de la investigación se pudieron llegar a diversas conclusiones, primeramente, se manifiesta que lo acontecido y vivido en la pandemia a causa del Covid-19 sin duda alguna supuso un desafío para la capacidad de adaptación del ser humano, sobre todo cuando nunca había vivido algo similar que le permitiera contar con experiencia para tratar dicha situación. No obstante, las repercusiones antes y después de la pandemia permitieron al sistema educativo mexicano voltear la mirada y priorizar la formación en los aspectos sociales y emocionales, en áreas de que el estudiantado pudiera afrontar y enfrentar cualquier transformación social que se presentase.

En segundo lugar, se establece que las emociones repercuten en las formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aclarando que la forma de enseñanza de las matemáticas en reformas pasadas estuvo basada, en las cifras, en las que regularmente se realizaban múltiples operaciones tan abundantes que los alumnos muchas veces confundían el hacer matemáticas con hacer cuentas, dichas operaciones se presentaban como la parte más activa, pero se realizaban de manera mecánica y el alumno no entendía realmente los conceptos ni los procedimientos solo intentaba repetirlos.

La brecha que existe sólo puede ser superada por una enseñanza que promueva la construcción de conocimientos matemáticos mediante su uso en contextos reales, dejando de lado el carácter únicamente formal que predomina en las escuelas (Inegi, 2010), sin embargo, como lo indican Carraher, et al (2002) para un alumno un uso eficiente de las matemáticas en las prácticas cotidianas no asegura el éxito en las matemáticas formales de un aula.

Un tercer momento de la presente investigación concluye que en la actualidad los libros de texto de educación primaria favorecen el estudio de las emociones y descuidan la didáctica particular de la enseñanza de las matemáticas, no existiendo así un equilibrio entre la enseñanza y aprendizaje de lo emocional y cognitivo (véase la figura 6).

Figura 6. Proyecto de Aula “La importancia del bosque” de Primer Grado de Educación Primaria.



Fuente: Ejemplificación del contenido del Libro Proyecto de Aula de Primer grado de primaria.

Como se observa al final de la página 161, se solicitan tres botellas una con muchas semillas, la segunda con 10 y la tercera sin semillas. En este párrafo se puede favorecer hacia la constitución del número al ser primer año, pues se debe manipular material concreto para su conteo, e incluso no se relaciona la ausencia de semillas con el número cero, ni la cantidad de semillas con la decena.

Hace décadas el rol del profesor en los libros de texto distribuidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP), se centraba en preparar y transmitir información a sus estudiantes, había poca teoría, el profesor explicaba ejemplos y el rol del estudiante era recibir y almacenar esa información, para después aplicarla en ejercicios del mismo tipo, en los que se proponían problemas poco desafiantes y cuyo enunciado presentaba poca variedad, en los cuales no se ponía énfasis en la estructura semántica y la componente sintáctica, en este sentido, la forma de esquematizar era otro elemento que contribuía en la comprensión y representación del problema, es decir se ignoraba la relación entre el libro y variables como el currículo, el profesor y el contexto educativo (Fan, Zhu, Miao, 2013).

En los libros de texto de reformas anteriores se observaba el uso de estrategias superficiales promovidas por los materiales curriculares, se proponían problemas obviando las

clasificaciones según la estructura semántica y regularmente al revisar resultados no se atendían los procedimientos realizados.

Es importante considerar que el libro de texto desempeña un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas influenciadas, por los contenidos y el tipo de problemas presentes en dichos libros de texto escolares de matemáticas, usados de manera directa por el profesor durante su planificación (Aké y Godino, 2018). Sin embargo, los cambios en la sociedad, que incluyen la política, la economía, el desarrollo científico y tecnológico, se derivan en cambios curriculares, es por ello que el estudio y resolución de situaciones o problemáticas sociales y culturalmente significativas sigue planteándose como la vía y la meta para estudiar matemáticas, por lo que los libros de texto deben presentar un tratamiento didáctico que más allá de ser materiales de consulta deben representar una forma de enseñar.

Surgen entonces cuestionamientos sobre la eficacia de los materiales que brinda la SEP a los maestros, sobre la verdadera promoción de las matemáticas como herramientas funcionales en diversos contextos y más aún, sobre la preparación del docente para aplicar problemas cuya solución se logra con la aplicación directa de algoritmos sencillos y que, en su planteamiento, den indicaciones explícitas al alumno sobre cuáles procedimientos matemáticos seguir, además del requerimiento de que investigadores, autores de libros y profesores reflexionemos sobre la clase de problemas con los que nuestros alumnos aprenden y practican nuestra disciplina.

Las matemáticas no son una disciplina independiente con problemas propios; ahora su objeto de estudio debe estar relacionado con los temas transversales: igualdad de género, cuidado de la salud, entre otros, además, en el abordaje de los problemas de estos temas, los conocimientos matemáticos se deben combinar con los saberes de las otras disciplinas (física, biología, etc.) para producir conocimientos y soluciones integrales en dichos temas, autores como García (2017), indican que la relación de interdisciplinariedad permite establecer la formación de los sistemas de conocimientos, hábitos y habilidades de las distintas materias, debido a que están integrados en sistemas que necesariamente deben coordinarse de tal modo que sirvan de base a todas las cualidades sociales significativas.

Por lo anterior, es necesario poner el énfasis en la utilidad y aplicaciones de las matemáticas lo cual propicia su vinculación con los problemas de la realidad y el entorno del estudiantado para que de esta manera las matemáticas tomen significado y el aprendizaje esté centrado en el alumno, todo ello a través del desarrollo del pensamiento matemático que regularmente tiene poca presencia en el aula donde fundamentalmente la disciplina Matemática en forma de conceptos y técnicas y un poco en la solución de problemas, pero estos no alcanzan a ser útiles en la vida del estudiante ni a trascender hacia la escuela ni a la comunidad. Lo anterior debido a que las emociones que expresan los alumnos o estudiantes de educación básica desde que escuchan la palabra “matemáticas” puede favorecer o entorpecer la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos.

En la tradición educativa mexicana, cada vez que se emprende una reforma educativa, la ideología de la innovación se apodera de los planeadores, quienes evitan mirar hacia atrás, como si la retrospcción impidiera generar las condiciones para un mejor aprendizaje, sin embargo, “al hacer de lo novedoso el criterio esencial para valorar las acciones propuestas, se destruyen las posibilidades de éxito de las mismas, y se muestra al mismo tiempo que no es al mejoramiento de la enseñanza a lo que se aspira” (Brousseau, 2000, p. 31).

Es importante hacer mención que la NEM tiene entre sus principios formar estudiantes que emplean el pensamiento crítico gestado a partir del análisis, la reflexión, el

diálogo, la argumentación, la conciencia histórica y el humanismo, los cuales resultan elementos fundamentales del Pensamiento Matemático (PM), en ideas de Brousseau, para cerrar el círculo que lleva de un conocimiento inicial a un saber, se hace indispensable institucionalizar ese saber.

Será tarea del profesor encontrar la manera de integrar los contenidos y los aprendizajes a desarrollar, adecuadamente a los proyectos preestablecidos en los libros de texto o bien generar los propios, los cuales están claramente expresados en los programas sintéticos de cada fase, debido a que al interior de cada libro no hay ninguna organización o secuencialidad, ni tampoco una priorización.

Aunque existe congruencia entre los nuevos libros de texto, es importante identificar cada fase del programa analítico que será desarrollado por parte del estudiantado por ejemplo: 1) En el análisis de datos se les enseñar a recopilar, organizar y analizar información para tomar decisiones argumentadas, 2) En la resolución de problemas se fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de resolver problemas complejos, 3) En la investigación las y los estudiantes usan sus propios recursos para encontrar soluciones y respuestas y 4) en la evaluación crítica se capacita al estudiantado para evaluar críticamente la información y argumentos presentados.

Todo lo anterior con la finalidad de orientar el abordaje de los proyectos y determinar cuáles se van a seguir en el ciclo escolar, tomando en cuenta los problemas de la comunidad y las necesidades del grupo, para que los estudiantes puedan utilizar un lenguaje matemático, así como un lenguaje inclusivo en sus interrelaciones personales, por ello la necesidad de revisar la pertinencia y la articulación de los planteamientos del plan de estudios y, sobre todo, la adecuación a las condiciones concretas en las que se realizan los procesos de enseñanza y aprendizaje, a las particularidades de la enseñanza de los profesores, así como las necesidades, estilos y ritmos de aprendizaje de los estudiantes.

Conviene recordar que son los programas sintéticos de cada grado, y no los libros de texto, los que establecen los contenidos nacionales obligatorios para cada campo formativo, así como su progresión y articulación por procesos de desarrollo según las diferentes fases que conforman el trayecto educativo, los cuales tienen su sustento en los constructos de aprender a aprender, la metacognición, el aprendizaje por descubrimiento, el aprendizaje autorregulado, la enseñanza situada, el aprendizaje comunitario y en los procesos colaborativos de reflexión en y para la acción.

Al examinar y analizar los documentos de educación básica (primaria y secundaria) encontramos que el diseño de los programas sintéticos proporciona a los docentes una guía clara y concisa sobre lo que se debe enseñar y cómo hacerlo de manera efectiva, es por ello que estos programas incluyen una estructura, aprendizajes esperados, estrategias pedagógicas, evaluación y recursos didácticos por lo tanto es una ruta para los docentes asegurando que la educación sea consistente y de alta calidad en todo el país, además permiten adaptar la enseñanza a las necesidades y contextos específicos del estudiantado, promoviendo la educación inclusiva y equitativa.

Por último se establece que los planes y programas de las normales (BENM y ENSM) priorizan la enseñanza como asignaturas; mientras que en educación básica la enseñanza es por proyectos. No obstante, incorporar en el currículo de la ENSM espacios para el desarrollo de competencias socioemocionales implica un cambio en los esquemas académicos convencionales; el profesor en formación debería revisar las creencias y actitudes acerca de sus estudiantes y su forma de aprender y comportarse, estos procesos reflexivos necesitan estar acompañados por sentimientos, vivencias y experiencias que permita contemplar un trabajo

colaborativo, lo cual implica intercambio, cooperación y transformación de la escuela, difícilmente los cursos puntuales realizados a título individual fuera de la práctica pueden contribuir a cambios profundos en la estructura y funcionamiento del sistema escolar, por ello resulta necesario que dicha formación contribuya de forma efectiva a generar prácticas socioemocionales en los centros educativos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a las autoridades de la Escuela Normal Superior de México y de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros por el apoyo brindado para el desarrollo de la presente investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebraización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201. <https://dx.doi.org/10.24844/em3002.07>
- Álvarez, J., Valdés, E., y Curiel, A. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, (9), 9-34. <https://doi.org/10.21555/rpp.v0i9.1826>
- Barrios, F., Pedroso, F., & Gilbert, E. (2022). Enfoque interdisciplinario de la Didáctica de la Matemática en la formación inicial del profesor de Matemática. *Varona Revista Científico-Metodológica*, 4, 1-12
- Bisquerra, A. R. (2003). Educación emocional y competencias básicas para la vida. *Revista de Investigación Educativa (RIE)*, 21(1), 7-43
- Bisquerra, R. (2005). La educación emocional en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 54, 95-114
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. 12(1), 5-38
- Cárdenas, A. (2011). Piaget. Lenguaje, conocimiento y educación. *Revista Colombiana*, 60, 71-91
- Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (2002). *En la vida diez, en la escuela cero*. México. Siglo veintiuno editores
- Cejudo, J., & López- Delgado, M. (2017). Importancia de la inteligencia emocional en la práctica docente: un estudio con maestros. *Psicología educativa*, 23, 29-36. <http://dx.doi.org/10.1016/j.pse.2016.11.001>
- Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (2023). <https://libros.conaliteg.gob.mx/>
- Diario Oficial de la Federación (30 de septiembre 2019). Ley General de Educación. DOF 30-09-2019 <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LGE.pdf>. Encuentros en Psicología Social, 1(2), 252-257
- Fan, L., Zhu, Y. y Z. Miao (2013). Textbook Research in Mathematics Education: Development Status and Directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), pp. 633-646
- García, J. (2012). La educación emocional, su importancia en el proceso de aprendizaje. *Revista Educación*, 36(1), 1-24. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44023984007>
- García, A. (2017). Apuntes acerca de la interdisciplinariedad y la multidisciplinariedad. *EduSol*, 17(2)
- Gil, N. Guerrero, E. Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 4(1), 47-72. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293123488003>
- González, L. (2020). Estrés académico en estudiantes universitarios asociados a la pandemia por COVID-19. Espacio I+D, *Innovación más Desarrollo*, 9(25), 159-179. <https://doi.org/10.31644/IMASD.25.2020.a1>

- Gross, J. (2015). Emotion regulation: current status and future prospects. *Psychological Inquiry*, 26, 1–26
- Hachem, L. (2021). *Matemáticas desde la educación socioemocional*. [Máster de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria, bachillerato, formación inicial y enseñanza de idiomas. Universidad de Almería]. <https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/13840/hachem%20salas,%20laila.pdf?sequence=1%20laila.pdf?sequence=1>”\h
- Hjemdal, O., Friborg, O., Stiles, T., Rosenvinge, J. y Martinussen, M. (2006). Resilience predicting psychiatric symptoms: A prospective study of protective factors and their role in adjustment to stressfull life events. *Clinical Psychology and Psychot-herapy*, 13, 194–201. <http://dx.doi.org/10.1002/cpp.48>
- Ibáñez, N. (2002). Las emociones en el aula. *Estudios Pedagógicos*. 28, 31–45. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=173513847002>
- INEGI (2010), Asistencia escolar. De 6 a 14 años. <https://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/asistencia.aspx?tema=P>
- Imbernon, F. (2006), Actualidad y nuevos retos de la formación permanente”, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 8(2), 1-11
- Jennings, P. A. y Greenberg, M. T. (2009). The Prosocial Classroom: Teacher Social and Emotional Competence in Relation to Student and Classroom Outcomes. *Review of Educational Research*, 79, 491–525. <http://dx.doi.org/10.3102/0034654308325693>
- Larios, E. (2005). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático, de Inés María Gómez Chacón, *Educación Matemática*, 17(1), p. 185-189
- Lazarus, R. (1982) Thoughts on the relations between emotion and cognition, *American Psychologist*, 37, 1019-1024
- López, A. (2016). Estrés académico en maestros en formación de la IByCENECH: Un estudio comparativo entre dos licenciaturas, RECIE. *Revista Electrónica Científica de Investigación Educativa*, 3(1), 453-461
- López Noriega, Myrna Delfina, & Contreras Ávila, Alonso. (2022). El impacto de la pandemia por covid-19 en estudiantes mexicanos de educación media superior. RIDE. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(24), e014. Epub 23 de mayo de 2022. <https://doi.org/10.23913/ride.v12i24.1141>
- Moncada, J., y Gómez, B. (2016), Formación de competencias socioemocionales para la resolución de conflictos y la convivencia. Estudio de caso en la escuela secundaria Sor Juana Inés de la Cruz, Hidalgo, México, *Revista educación y desarrollo social*. 10(1), 112-135, <http://dx.doi.org/10.18359/reds.1451>
- Mora, F. (2013). ¿Qué es una emoción?, *Arbor*, 189(759), 1-6, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/arbor.2013.759n1003>
- Murzynski, J., y Degelman, D. (1996). Body language of women and judgments of vulnerability to sexual assault. *Journal of Applied Social Psychology*, 26, 1617-1626. doi:10.1111/j.1559-1816.1996.tb00088.x
- Ordoñez, M., & Tinajero, A. (2005). *Estimulación temprana*. Madrid España: Cultural.
- Pérez-González, J. (2008). Propuesta para la evaluación de programas de educación socioemocional *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 6(2), 523-545. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293121924014>
- Pérez-González, J. y Pena, M. (2011), Construyendo la ciencia de la educación emocional, *Journal of Parents and Teachers*, (342), 32-35
- Salas-Hernández, J., Guarnizo Vargas, C., Salazar Serrano, L., Murillo Roza, S. (2023). La integración de aprendizajes socioemocionales en el currículo universitario: desafío de innovación *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, 17(1), e1635. <https://doi.org/10.19083/ridu.2023.1635>
- Sánchez, C., & Tobón, S. (2020). Cartografía conceptual de la Inteligencia Emocional para favorecer la Inclusión desde la Socioformación, *Atenas Revista Científico Pedagógico*, 1(49), 20-35

- SEP(s/a). *Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente Educación Socioemocional en el marco de la Nueva Escuela Mexicana*. Educación Básica Fase 3 a 6. México
- SEP (2022a). *Desarrollo socioemocional y aprendizaje. Licenciatura en Educación Primaria*. Plan 2022. Segundo semestre. México
- SEP (2022b). *Desarrollo en la adolescencia y juventud. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Plan 2022. Primer semestre. México
- SEP (2022c). *Desarrollo socioemocional. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Plan 2022. Segundo semestre. México
- SEP (2023). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2022*
- SEP (2023a). *Libro Nuestros Saberes. Grado 1°*. Educación primaria. México
- SEP (2023b). *Libro de Proyectos de Aula. Grado 1°*. Educación primaria. México
- SEP (2023c). *Libro de Proyectos de Escolares. Grado 1°*. Educación primaria. México
- SEP (2023d). *Libro de Proyectos Comunitarios. Grado 1°*. Educación primaria. México
- SEP (2024). *Libro Saberes y pensamiento científico*. Primer grado. Educación Secundaria. México
- SEP (2024a). *Libro de Proyectos*. Primer grado. Educación Secundaria. México
- Tapia-Gutiérrez, C.P, y Cubo-Delgado, S. (2017), Habilidades sociales relevantes: percepciones de múltiples actores educativos *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 9(19), 133-148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m9-19.hsrp>
- Tobón, S. (2018), *Cartografía de las habilidades socioemocionales. Una síntesis desde la socioformación*. Centro Universitario CIFE, <https://cife.edu.mx/recursos/201812/18/cartografia-de-las-habilidades-socioemocionales>



CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA PROFESORA DE MATEMÁTICA EN LA EJEMPLIFICACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN DE RADICALES

SPECIALIZED KNOWLEDGE OF A MATHEMATICS TEACHER IN THE EXEMPLIFYING OF THE DECOMPOSITION OF RADICALS

Nicolás Sánchez Acevedo¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-8790-2919>

Gonzalo Espinoza Vásquez²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4500-4542>

Carlos Segura³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1457-5740>

Luis Carlos Contreras⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0044-2365>

Leticia Sosa Guerrero⁵

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4905-6684>

RESUMEN

Uno de los factores más relevantes que incide en el aprendizaje matemático de los estudiantes es el profesor de matemáticas, específicamente, el repertorio de conocimiento que le permite gestionar la enseñanza y el aprendizaje de manera coherente con los objetivos de enseñanza. Así, el diseño de la enseñanza incluye diversos elementos que interactúan, como recursos, estrategias, currículum, ejemplos, etc., los cuales tienen sentido en el conocimiento del profesor. En este contexto, los ejemplos son un elemento relevante en el aprendizaje de las matemáticas, debido a su versatilidad en la enseñanza de procedimientos, conceptos, demostraciones y estrategias. Sin embargo, las secuen-

1 Facultad de Educación/Facultat de Magisteri, Universidad Central de Chile/ Universitat de València, Ciudad de Santiago, Chile. C.P. 8330601. Correo electrónico: nicolas.sanchez@ucentral.cl

2 Facultad de Educación, Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas, Universidad Alberto Hurtado, Santiago, Chile. C.P. 8340539. Correo electrónico: gespinoza@uahurtado.cl

3 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Valencia, España, C.P. 46022. Correo electrónico: carlos.segura@uv.es

4 Departamento de Didácticas integradas, Facultad de Educación, Psicología y CC del Deporte, Universidad de Huelva, España, Huelva, C.P. 21071, Correo electrónico: lcarlos@uhu.es

5 Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México, C.P. 98066. Correo electrónico: lsoa@uaz.edu.mx



cias de ejemplos intencionadas movilizan de mejor manera aspectos relevantes de un objeto matemático, resaltando los aspectos críticos y no críticos considerados en la teoría de la variación. De esta manera, el objetivo de este trabajo es explorar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la ejemplificación en la ecuación cuadrática, específicamente en la descomposición de radicales. Para ello usamos un estudio de caso instrumental con análisis basados en observaciones de aula y entrevistas semiestructuradas. Los resultados muestran que la selección de ejemplos y secuencias de ejemplos *intencionados* permite que afloren aspectos críticos de los ejemplos, movilizándolo específicamente conocimiento didáctico del contenido en diferentes subdominios: en relación con la enseñanza, las características del aprendizaje y del currículum escolar. En relación con el conocimiento matemático, se identificaron evidencias en el conocimiento de los temas relacionados con los procedimientos y los registros de representación.

Palabras clave: Ejemplificación, Selección y uso de ejemplos, MTSK, Teoría de la variación, Estudio de caso.

ABSTRACT

One of the most significant factors influencing students' mathematical learning is the mathematics teacher, particularly the repertoire of knowledge that enables them to effectively manage teaching and learning in alignment with educational objectives. The teaching design encompasses various interconnected elements, such as resources, strategies, curriculum, and examples, all of which are situated within the teacher's knowledge framework. Among these elements, examples play a crucial role in mathematics learning due to their versatility in teaching procedures, concepts, demonstrations, and strategies. Intentional sequences of examples, however, are particularly effective in mobilizing critical aspects of mathematical objects, emphasizing both critical and non-critical features as outlined in the theory of variation. This study aims to explore the specialized knowledge of mathematics teachers in exemplification, focusing on the quadratic equation, specifically the decomposition of radicals. An instrumental case study methodology was employed, using classroom observations and semi-structured interviews for data collection. The findings reveal that the deliberate selection and sequencing of examples facilitate the emergence of critical aspects, particularly by mobilizing didactic content knowledge across various subdomains, including teaching practices, learner characteristics, and alignment with the school curriculum. Additionally, the results provide evidence of mathematical knowledge related to procedures and representation registers, highlighting the interplay between exemplification and effective teaching practice.

Keywords: Exemplification, Selection and use of examples, MTSK, Variation Theory, Case Study.

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento matemático y el didáctico del contenido pueden ser de diferente naturaleza (Tatto *et al.*, 2008), y dependen de factores como el contexto educativo, los objetivos de enseñanza, los recursos educativos, el currículum escolar, etc. En este sentido, la investigación ha contribuido a la formación de modelos analíticos (p.e. Ball *et al.*, 2008; Carrillo *et al.*, 2018) para comprender el qué y el cómo de este conocimiento es utilizado para la enseñanza. En estos modelos, los ejemplos son uno de los aspectos que emergen como centrales en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Bills & Watson, 2008; Zaslavsky, 2019), y se ha demostrado que este aprendizaje puede ser dirigido conscientemente mediante el uso *cuidadoso e informado* de ejemplos o de secuencias de ejemplos en la ejemplificación de conceptos y procedimientos matemáticos (Figueiredo & Contreras, 2015; Watson & Chick, 2011).

Si bien la selección y el uso de ejemplos para la enseñanza son centrales para *ejemplificar* conceptos, nociones, procedimientos y/o teoremas, no solo basta la selección y uso, sino que la ejemplificación (como práctica consciente) necesita la movilización y el conocimiento de diversos aspectos relacionados con el uso pedagógico de los ejemplos (Adler & Pournara, 2020; Figueiredo & Contreras, 2015). Para que la *ejemplificación* de algún aspecto o tópico matemático sea efectiva, es *imperante* que secuencias de ejemplos, transparencia de un ejemplo, variación e invariancia actúen de manera conjunta y dependiente, con la finalidad de

mostrar los aspectos significativos o críticos que deben ser experimentados por los estudiantes para lograr el aprendizaje (Marton & Pang, 2006).

Diversos trabajos han explorado el conocimiento puesto en juego por profesores de matemáticas en la enseñanza, específicamente en la selección y uso de ejemplos (p.e. Cayo et al., 2024; Chick & Harris, 2007; Sánchez et al., 2024), pero a pesar de estos esfuerzos, pocas han sido las investigaciones que han explorado la ejemplificación y su relación con el conocimiento del profesor de matemáticas (Adler y Pournara, 2020; Figueiredo & Contreras, 2013; Pang et al., 2016) y las que han abordado aspectos de la ejemplificación lo han hecho en contextos de desarrollo profesional para intencionar deliberadamente la ejemplificación (Adler y Pournara, 2020).

Al centrarnos en el tema de los radicales, como parte del contenido del álgebra escolar, encontramos poca investigación al respecto (Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2010; García et al., 2022; Gómez, 2011). Estas investigaciones se han centrado, principalmente, en el tratamiento de los radicales en los libros de texto, el aprendizaje de los radicales mediados por recursos tecnológicos y la enseñanza de radicales relacionados con la geometría. En el caso de los libros de texto, se evidencian algunas omisiones de tipo didácticas relacionadas con los símbolos y la notación, así como de errores y conflictos entre el operador radical y las raíces (en ecuaciones), asumiéndolos como iguales. En cuanto al uso de tecnologías digitales, los resultados han sido prometedores, ya que han permitido apoyar la enseñanza de los radicales y han servido como base para favorecer el diseño e implementación de la enseñanza.

Como se puede evidenciar, el estudio de la selección y uso de ejemplos para la enseñanza y su relación con el conocimiento profundo es un tema que necesita seguir siendo atendido, dado que una adecuada planificación y utilización de ejemplos para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos permitiría intencionarla a través de prácticas conscientes (Kullberg et al., 2017). En relación con el tema de radicales, queda en evidencia que, si bien existe investigación que aporta a dilucidar líneas de acción, en cuanto a su aprendizaje y enseñanza, esta no se ha centrado en la relación entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, la ejemplificación y el tema de radicales para la enseñanza. Esta situación plantea la necesidad de abordar y explorar esta área de investigación, dado que el contenido de radicales, y posteriormente de raíces (Gómez, 2011), es un tema incluido en diversos lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2015; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

En consecuencia, es necesario explorar las relaciones entre el conocimiento del profesor y la ejemplificación en cuanto a la enseñanza de los radicales. En esta línea, Sánchez-Acevedo et al. (2023) y Sánchez et al. (2024) han comenzado a discutir la relación entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, particularmente en el tema de la ecuación y función cuadrática, y la ejemplificación, pero destacando la intencionalidad y consciencia de esta práctica, que es el contexto investigativo donde se inserta esta investigación.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de este estudio es explorar el conocimiento especializado que moviliza una profesora de Matemáticas en la ejemplificación, a partir de una secuencia de ejemplos en la descomposición de radicales cuando enseña la ecuación cuadrática.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

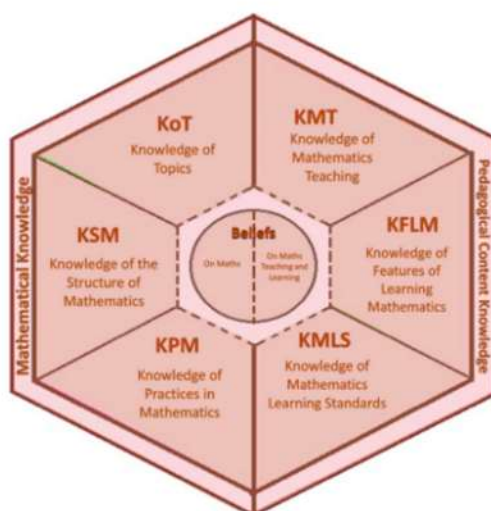
Se describen los elementos teóricos que sustentan este trabajo. El primero de ellos es el modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, y el segundo, la idea de secuencia de ejemplos y la teoría de la variación como parte de la ejemplificación.

2.1 El modelo MTSK

La práctica docente requiere de un conocimiento profundo de la disciplina que se enseña, así como de la toma de decisiones de enseñanza y aprendizaje focalizada en el logro de metas específicas en los estudiantes (Schoenfeld, 2010).

De acuerdo con esto, el modelo analítico *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Figura 1) considera tres dominios que permiten caracterizar el conocimiento del profesor de Matemáticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo et al., 2018): el dominio de Conocimiento Matemático (MK) y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) relacionados exclusivamente con los contenidos matemáticos; y el tercer dominio, de las Creencias sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, que permea tanto el conocimiento disciplinar como el didáctico del contenido en relación con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo et al., 2018).

Figura 1. El modelo MTSK.



Fuente: Tomado de Carrillo et al. (2018).

El dominio del Conocimiento Matemático (MK) se compone de los subdominios:

- *El Conocimiento de los temas (KoT)* se refiere a un conocimiento profundo y fundamentado del contenido matemático. Se trata de conocer el contenido concreto que se pretende que los alumnos aprendan, con un nivel de profundización mayor. Incluye el conocimiento de relaciones intraconceptuales, es decir, relativas a un mismo tema.

- *El Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)* se refiere al conocimiento de las principales ideas y estructura de las matemáticas y de las conexiones entre contenidos, conexiones de simplificación, complejización, transversales y auxiliares.
- *El Conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)*, es el conocimiento de cómo se procede cuando se hacen Matemáticas, su sintaxis; por ejemplo, cómo se define o cómo se demuestra.

El dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se compone de los subdominios:

- *El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)* parte de la necesidad que tienen los profesores de entender cómo piensan sus alumnos al realizar actividades y cuestiones matemáticas (dificultades de aprendizaje y modos de pensamiento), y se centra en cómo se aprenden las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Puede ser un conocimiento fundamentado en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia.
- *El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)* se refiere al conocimiento sobre lo que se establece un estudiante debe aprender y con qué nivel de profundidad. Además del currículo prescriptivo, el conocimiento puede provenir de otros documentos sobre estándares de aprendizaje (o de exámenes o pruebas evaluadoras externas al centro, como podrían ser las pruebas PISA) e investigaciones que ofrecen recomendaciones al respecto.
- *El Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)* lo conforman los conocimientos que posee el profesor sobre representaciones del contenido de cara a su enseñanza. Incluye, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades y su potencialidad en la enseñanza de un tema.

En este caso, los ejemplos para la enseñanza tienen un papel relevante en el MTSK, particularmente en el KMT, pues forman parte de los mecanismos de enseñanza de los que se puede valer el profesor.

2.2 Secuencias de ejemplos y variación

La noción de *ejemplo* ha sido caracterizada por diferentes autores (Bills et al., 2006; Zodik & Zaslavsky, 2008) de acuerdo con diferentes ámbitos (matemáticos y/o de enseñanza). En este trabajo consideraremos que un ejemplo es “un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas características” (Figueiredo, 2010, p. 36).

Conviene señalar que, si se pretende mostrar cierta o ciertas características de un concepto o procedimiento matemático a través de un único ejemplo, dicho aspecto puede quedar invisibilizado. Así, el uso de secuencias de ejemplos intencionados permite resaltar las características del concepto, favoreciendo el aprendizaje de los estudiantes (Figueiredo & Contreras, 2015; Kullberg et al., 2017). Para lograr resaltar aspectos críticos es recomendable proponer combinaciones de ejemplos que dirijan la atención de los estudiantes hacia aquello en lo que se quiere focalizar la atención (Bills et al., 2006). Asimismo, Figueiredo et

al. (2009) mencionan que en las secuencias de ejemplos elaboradas de manera clara se pueden diferenciar dos objetivos diferentes, (i) las que sirven para estimular la generalización de algún concepto matemático y (ii) aquellas que permiten profundizar en la fluidez de cálculos y procedimientos.

La conciencia sobre ejemplos y secuencias de ejemplos está relacionada con la idea de hacer que ocurra el aprendizaje desde una perspectiva relacional y perceptiva (Marton & Booth 1997; Marton & Tsui 2004). En este sentido, Marton & Booth (1997) dieron pie a una nueva forma de ver el aprendizaje de las matemáticas sobre la base de que “aprender consiste en hacer nuevas distinciones; simultáneamente, discernir algo de, y relacionarlo con, un contexto” (Figueiredo, 2010, p.107, citando a Marton & Both, 1997). Esta teoría señala que “Si un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante” (p. 107). La parte del contenido que varía es llamada Dimensión de la variación.

La teoría de la variación se apoya en la idea que el aprendizaje implica visualizar o experimentar aquellos aspectos críticos de un objeto de aprendizaje (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Este objeto de aprendizaje debe proporcionar respuestas a la pregunta ¿Qué se debe aprender? (Kullberg et al., 2017) sobre la base de tres pilares: (1) el contenido, (2) el objetivo educativo y (3) lo que se necesita aprender (aspectos críticos). Por ejemplo, si en una secuencia de radicales $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{16}$ se quiere mostrar la descomposición de radicales, este es el aspecto crítico, el factor r $4 = 2^2$ el invariante y la 1, 2, 3, 4, ... la dimensión de variación.

En este sentido, Kullberg et al. (2017) comentan que la teoría de la variación muestra de manera específica las condiciones que se deben dar para el aprendizaje. Permite justificar el fracaso en el aprendizaje cuando los estudiantes no desarrollan el sentido de lo que se pretendía enseñar, es decir, no han discernido los aspectos críticos en el aprendizaje más que los necesarios para la adquisición del concepto. En este sentido, los autores plantea que:

la idea central de la teoría de la variación es que el discernimiento es una condición necesaria del aprendizaje: qué aspectos a los que prestamos atención o discernimos son de importancia decisiva para la forma en que entendemos o experimentamos el objeto de aprendizaje. Sin embargo, el discernimiento no puede ocurrir sin que el alumno haya experimentado. (p. 560)

En esta teoría, el aprendizaje significa la formación de nuevas relaciones y formas diferentes de aprender, es decir, aprender a ver algo de cierta manera equivale a discernir ciertas características críticas de ese fenómeno y enfocarse en ellas simultáneamente (Marton, 2009).

Esto conlleva que experimentar la variación, permite centrar el foco en aquellos aspectos/características críticas y patrones de variación e invariancia, ofreciendo directrices para el aprendizaje, es decir, que si “un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante” (Figueiredo y Contreras, 2013, p. 48).

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para el desarrollo del objetivo, desde un enfoque cualitativo (Bassegy, 1999), adoptamos un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999), que permite estudiar “la particularidad y la complejidad de un caso singular, para comprender su actividad en momentos relevantes” (Stake, 1999, p. 11), logrando un estudio minucioso y profundo sobre características significativas del objeto en cuestión, que en este trabajo consiste en comprender en profundidad el

conocimiento especializado que moviliza una profesora cuando ejemplifica a partir de secuencias de ejemplos intencionados de la ecuación cuadrática.

3.1 La profesora informante

La elección de la profesora responde a dos motivos relevantes: el primero es su voluntad de participar en el trabajo, y el segundo, su accesibilidad (Loughran et al., 2008). La profesora que participa como informante en la investigación (de seudónimo Jenny), al momento de recolectar la información hacía clases en 3° grado de enseñanza media (16-17 años) en una escuela subvencionada de Chile. Tenía cinco años de experiencia docente y la consideración de participar en la investigación se debió a que fue una de las mejores graduadas de su generación del grado de Licenciatura en Ciencias. Además, ella cursaba un programa de formación pedagógica y disponía con la motivación de perfeccionarse en la enseñanza de la matemática.

3.2 Recolección y análisis de la información

Por medio de la observación no participante (Creswell, 2007) se videograbaron siete clases destinadas a la ecuación cuadrática, que incluyeron todos los temas relacionados con la ecuación cuadrática. En la tercera clase, la profesora enseñó la resolución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula. Como parte de esta tercera clase, se trabajó en la descomposición de radicales como una alternativa al uso de la calculadora. Posterior al análisis de las clases, se aplicaron entrevistas semiestructuradas, las que sirvieron como un instrumento complementario para profundizar en el conocimiento especializado de Jenny, buscando profundizar en aspectos relevantes (Kvale, 2011) de su conocimiento.

Las videograbaciones fueron transcritas para su tratamiento y búsqueda de secuencias de ejemplos que resaltaron características de los aspectos de variación e invarianza. La enseñanza, a partir de ejemplos y secuencias de ejemplos, fue transcrita y dividida en unidades de información, que se corresponden con las declaraciones orales y/o escritas de Jenny, y al referenciarlas, consideramos las líneas transcritas en las que se localiza la evidencia/indicio de conocimiento. De acuerdo con Flores et al. (2014), una evidencia permite afirmar la presencia de un conocimiento del profesor, ya sea superficial o profundo, mientras que un *indicio* es una sospecha de la existencia o no de un conocimiento que emerge por alguna declaración o acto del profesor en el acto de enseñanza; y que necesita información extra para ser corroborado.

Para el análisis de los significados del discurso de Jenny y su conocimiento especializado, usamos la técnica de análisis de contenido (Krippendorff, 1990), considerando las etapas de descripción, análisis e interpretación de los datos (Johnson, et al., 2014). La descripción corresponde a la selección de las unidades de información al transcribir la enseñanza de la descomposición de radicales a partir del uso de la secuencia de ejemplos. En el análisis se identifican las características de las unidades identificadas para describir el conocimiento especializado que moviliza la profesora Jenny. Y en la interpretación, realizamos una lectura conjunta y transversal de las evidencias, fundamentando la comprensión del conocimiento de la profesora.

La validación de la investigación se logró por medio de la triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007), y para el rigor de la investigación seguimos los criterios propuestos por Guba (1983, citado en Dorio et al., 2004) que son: credibilidad, transferibilidad,

dependencia y confirmabilidad. La credibilidad implica dar valor de verdad a la investigación, es decir, que los resultados recolectados se ajusten a la realidad observada en el aula de clases; la transferibilidad se refiere a que los resultados de esta investigación sirvan de base como conocimiento en otros espacios y como referencia investigativa; la dependencia de los resultados se relaciona con su consistencia, y su capacidad de mantenerse estables en el tiempo; y la confirmabilidad implica que la información y los resultados de esta investigación fueron consensuados y discutidos por los investigadores de este trabajo, orientando hacia la objetividad y neutralidad.

4. RESULTADOS

En este escrito nos centramos en una de las secuencias de ejemplos utilizados por Jenny relacionada con la descomposición de radicales. En esta secuencia identificamos el MTSK manifestado por Jenny en relación con la ejemplificación de aspectos críticos de la descomposición de radicales, que se derivan del uso de la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando realizaba la resolución de ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c diferentes de cero.

4.1 Secuencia de ejemplos para la descomposición del radical de la fórmula

Cuando Jenny enseñaba la resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula, junto con los estudiantes, se dio cuenta de que en algunos casos la cantidad subradical no tenía raíz cuadrada exacta, y presentó una secuencia de cuatro ejemplos (que fueron espontáneos) de raíces no exactas para explicar la descomposición. La secuencia de ejemplos que presenta es (a) $\sqrt{8}$, (b) $\sqrt{18}$, (c) $\sqrt{76}$ y (d) $\sqrt{648}$, la que está en orden de gradualidad. Esta secuencia tenía como objetivo la descomposición de los radicales para establecer relaciones con las propiedades de las raíces. Estos ejemplos son usados por Jenny cuando, en la resolución de las ecuaciones cuadráticas, la cantidad subradical no es exacta.

En la entrevista se le pregunta a Jenny por qué muestra este conjunto de ejemplos a los estudiantes y con qué motivo:

Jenny: Para mí tiene que ver con un tema de comprender desde la raíz más prima, de comprender que en el fondo son $2\sqrt{2}$ y si yo por ejemplo pudiese descomponer esa raíz desde la geometría u otra área, lo podría usar, no es que no es válida la $\sqrt{8}$. Quizás también tiene que ver con las pruebas estandarizadas, las pruebas estandarizadas, la solución viene en una solución como la mínima expresión.

A partir de lo que comenta Jenny, identificamos conocimiento sobre formas de representar las radicales de manera diferente pero equivalente (KoT-registros de representación). Usa diferentes ejemplos para mostrar la descomposición de los radicales como una estrategia (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) para que los estudiantes recuerden formas alternativas al expresar una cantidad radical no exacta.

Jenny muestra estos ejemplos, considerando lo que deben saber los estudiantes en las pruebas estandarizadas (KMLS-nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado), pues sabe que dentro de los objetivos del programa de estudio del nivel (3° medio, 16 a 17 años) los estudiantes deberán saber descomponer radicales en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

En el caso del primer radical, $\sqrt{8}$, Jenny pregunta a los estudiantes: “La raíz de ocho ¿De qué otra manera la podemos escribir?”, y un estudiante responde: “Raíz de cuatro por dos”. A partir de la respuesta del estudiante, Jenny explica:

Jenny: Perfecto ¿Qué hacíamos ahí? ¡Muy bien!, y nos quedaba ¿Cierto?, que esto era, dos ¿Raíz de?, dos [Anota $2\sqrt{2}$] ¿Cierto? Porque la raíz de cuatro, la podíamos separar en dos raíces, la raíz de cuatro, por la raíz de dos ¿Cierto? Entonces la raíz de cuatro era dos y nos quedaba dos raíz de dos. ¿Se acuerda de eso forma típica de raíces?

De la respuesta de Jenny identificamos **KoT (procedimientos)**, pues Jenny conoce cómo se lleva a cabo el algoritmo convencional para descomponer radicales no exactos, de modo tal que uno de los factores pueda tener raíz cuadrada exacta y el otro factor sea un número irracional.

Para los siguientes ejemplos, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{76}$, Jenny, procede de forma similar a la anterior. Para el , los estudiantes logran representar el $\sqrt{18}=\sqrt{9 \cdot 2}$, aludiendo a los factores 9 y 2, ante lo cual Jenny valida las respuestas de los estudiantes:

Jenny: Raíz de nueve por dos ¿Cierto? y la forma típica entonces ¿Nos quedaría? raíz de nueve por raíz de dos, que es lo mismo que decir tres raíz de dos, en el fondo el nueve ¿Cierto? tiene raíz exacta... queda multiplicando la raíz de dos [Anota $3\sqrt{2}$] ¿Se acuerda o no se acuerda ahora?

De este fragmento, Jenny muestra **procedimientos (KoT)** para descomponer radicales cuadrados que no son exactos y expresarlos de forma equivalente. En el tercer caso, $\sqrt{72}$, es Jenny quien entrega la forma de expresar la descomposición, debido a que esta no es directa, escribiendo $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2}$, descomposición que finalmente expresa como . De este **procedimiento (KoT)**, Jenny sabe que cuando la cantidad subradical se descompone en factores, uno de ellos debe tener raíz cuadrada exacta y que estos factores se pueden escribir como producto de raíces.

Del cálculo de la última raíz que presenta Jenny ($\sqrt{648}$), lo primero que evidenciamos es **KoT (procedimientos-¿cómo se hace?)**, pues sabe que como algoritmo alternativo se puede proceder vía ensayo y error hasta ir encontrando factores con raíces cuadradas exactas simples (**KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**). Por ejemplo, cuando explica: “Ah por dos [Corrige] ¡Ya! ¿alguno de estos tiene raíz exacta fácil? No, por ahora no me sirve mucho esto, pero podemos ir descomponiendo... si volvemos a poner un dos. ¿Dos por cuánto me da Trescientos veinticuatro? ¿Cuál es la mitad de trescientos?”, lo que alude a ir probando factores para obtener 648. Esto se refleja cuando descompone 648 en $324 \cdot 2$, luego el 324 en $162 \cdot 2$, finalmente menciona “Sí, pero aún hay más números todavía ¡Ya! Y aquí es ir jugando en realidad... el más grande que me va a servir va a ser treinta y seis por dieciocho comprobémoslo, seis por ocho, cuarenta y ocho.

En relación con la selección de la secuencia de ejemplos, Jenny nos responde:

Jenny: fueron ejemplos que emergieron en el momento para profundizar en un concepto, particularmente que se pudieran descomponer de raíces, porque no podían con aquellas no exactas. Notar que acá lo que sí intencioné es que las cantidades subradicales fueran en orden creciente, porque la primera es relativamente asequible descomponerla en , la segunda también es asequible en , y la raíz cuadrada 76 y 648 ya no es tan simple, pero también se descomponen con el 2, lo que además es una forma diferente de mostrar las raíces.

Jenny pone en juego conocimientos sobre la descomposición de radicales no exactos, evidenciándose **KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)**, dado que selecciona ejemplos adecuados para profundizar en el concepto. Así mismo, establece como estrategia de enseñanza una gradualidad en la selección de los ejemplos para profundizar en la comprensión

de la descomposición por dos (**KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**), estrategia de enseñanza que emerge, dado que Jenny conoce posibles **dificultades (KFLM)** de los estudiantes en lo operacional y/o conceptual.

Los ejemplos que usa en orden creciente nos informa de su conocimiento de cómo sus estudiantes aprenden, y con ello establece una relación en la descomposición de radicales y los procedimientos que usan los estudiantes (KFLM-formas de interacción con un contenido matemático). Jenny es también consciente de que los radicales se pueden descomponer como producto de radicales $\sqrt{a \cdot b^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} = b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2}$, donde b es un cuadrado perfecto, conociendo una forma alternativa de expresarlo. Al respecto señala que: “*en el contexto educativo en el que están los estudiantes se hace necesario que ellos logren identificar formas distintas de representar esas raíces cuadradas*”. Esto muestra indicio de conocimientos sobre el papel que tiene la teoría de representaciones semiótica en la enseñanza de los conceptos (*KMT-teorías de enseñanza*).

La secuencia de ejemplos que plantea Jenny al ejemplificar el concepto de radical cuadrado no exacto hace que éstos sean coherentes con el objetivo planteado. En estos casos (en contexto escolar) usa la propiedad de radicales para la descomposición (KoT-definiciones, propiedades y sus fundamentos). Con esta ejemplificación de la idea de descomposición se releva la variación en medio de la invarianza, siendo el aspecto crítico la descomposición por 2 (*KFLM-teorías de aprendizaje*), lo que es manifestado por Jenny al conocer las dificultades de los estudiantes.

En efecto, dado que Jenny considera la descomposición de radicales no exactos como un contenido de cursos anteriores (*KMLS-secuenciación con temas anteriores*), usa como estrategia el ensayo y error (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) para descomponer por dos los radicales (aspecto invariante), es decir, iterativamente va dividiendo por dos para llegar a la cantidad subradical irreducible. Esto lo mostramos en el siguiente fragmento (se muestra el procedimiento de $\sqrt{648}$):

- P : ¡Ya! Busquemos factores que multiplicados me den seiscientos cuarenta y ocho.
- E : Tres veinticuatro.
- P : Trescientos veinticuatro por uno.
- E : ¡No! Por dos.
- P : Ah por dos [Corrige] ¡Ya! alguno de estos ¿Tiene raíz exacta fácil?
- E : No.
- P : No, por ahora no me sirve mucho esto, pero podemos ir descomponiendo... si volvemos a poner un dos. ¿Dos por cuánto me da Trescientos veinticuatro? ¿Cuál es la mitad de trescientos?
- E : Ciento cincuenta.
- P : Ciento cincuenta, la mitad de ¿Veinte? Sería ciento sesenta ¿La mitad de cuatro?
- E : Dos.
- P : Dos. Ciento sesenta y dos [Descompone 648 en $324 \cdot 2$ y luego en $162 \cdot 2$] ¿Sí? Y hasta ahora no me sirve tampoco, pero aquí tengo dos, que podría ser. Dos por dos, cuatro, por ciento sesenta y dos y me da ese seis cuarenta y Ocho, ¿El cuatro me serviría? ...

De la interacción de Jenny con los estudiantes, aflora el aspecto crítico que hace patente en la ejemplificación de los radicales no exactos. Esto se observa en el mecanismo de dividir iteradamente por 2 hasta llegar a una expresión irreducible (KoT-procedimientos). En este caso, identificamos dos dimensiones de variación posible, el factor “a” y el “b” en la cantidad subradical. En el caso de la selección de esta secuencia de ejemplos, donde aparecen aspectos de variación, Jenny centra la atención del estudiante en lo que varía, que es el factor , manteniendo invariante el factor $a = 2$.

En estos dos últimos ejemplos de la secuencia el aspecto invariante no es directo como en los dos primeros ejemplos ($\sqrt{2 \cdot 4}$ y $\sqrt{2 \cdot 9}$) donde 4 y 9 son cuadrados perfectos. En los ejemplos de y al descomponer como producto no resulta un factor que sea cuadrado perfecto de manera directa, lo que lleva a Jenny a seguir dividiendo por dos. Para $\sqrt{76} = \sqrt{2 \cdot 38}$ y luego $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 38} = \sqrt{4 \cdot 19}$ siendo $2 \cdot 2 = 2^2$ el aspecto crítico invariante, y para $\sqrt{648} = \sqrt{2^3 \cdot 81}$ evidenciándose el aspecto invariante.

Aun cuando Jenny no mostró evidencias de conocimiento explícito sobre teorías de aprendizaje (teoría de la variación), moviliza, controladamente, las dimensiones de variación posibles para que los estudiantes experimenten y centren la atención en un aspecto crítico y no en todos a la vez.

La Tabla 1 muestra una síntesis de conocimientos de Jenny en relación con el tema de la descomposición de radicales, como parte de la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Tabla 1. Indicadores de conocimiento movilizado por Jenny.

Dominio	Sub/dominio	Categoría/indicador que Jenny conoce/sabe
MK	KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Conoce la propiedad de la descomposición de radicales de índice par dos $\sqrt{a \cdot b^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} = b \cdot \sqrt{a} (a \geq 0)$. Procedimientos. Sabe los procedimientos habituales para descomponer un radical a una expresión irreducible.
PCK	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Conoce secuencias de ejemplos adecuados para mostrar la descomposición de radicales y profundizar en la comprensión del procedimiento. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Sabe que una estrategia de enseñanza en seleccionar una secuencia de ejemplos de manera gradual en complejidad. <i>Teorías de enseñanza. Podría conocer la teoría de registros de representación semiótica para mostrar diferentes formas de representar los radicales al descomponerlos.</i> Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Sabe que una estrategia de enseñanza es el ensayo y error en la descomposición de radicales.
	KFLM	Fortalezas y dificultades. Conoce posibles dificultades que tienen los estudiantes al descomponer radicales. Formas de interacción con un contenido matemático. Conoce la forma en que los estudiantes proceden en relación con el objeto matemático, graduando la secuencia de ejemplos. <i>Teorías de aprendizaje. Podría conocer elementos de la teoría de la variación en el aprendizaje de los estudiantes, dado que moviliza aspectos críticos de esta teoría.</i>
	KMLS	<i>Secuenciación con temas anteriores. Conocería los contenidos de cursos previos para la enseñanza de la descomposición de radicales.</i> Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado. Sabe que curricularmente la descomposición de radicales es un contenido del nivel de enseñanza que sirve de base para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Fuente: Elaboración propia.



5. CONCLUSIONES

A partir del uso de secuencias de ejemplos intencionadamente seleccionados, se observa que se manifiestan conocimientos especializados en el dominio del conocimiento matemático y didáctico del contenido. La secuencia de ejemplos que utiliza la profesora permite que afloren aspectos críticos (Kullberg et al., 2017) en la enseñanza de la descomposición de radicales, permitiendo que los estudiantes centren su atención en aspectos particulares (variación) en medio de aquellos que son invariantes. Además de esto, se observa que en la selección consciente de ejemplos que realiza la profesora, ella considera aspectos del aprendizaje de los estudiantes (niveles de complejidad). Esta consideración le permite seleccionar ejemplos, centrándose en el aspecto crítico, que es la división de la cantidad subradical por dos.

Tanto en la selección como en el uso de los ejemplos de la secuencia, la profesora manifiesta, en mayor medida, conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), formas de interacción con el contenido matemático y fortalezas y dificultades (KFLM). Esto parece estar en concordancia con el conocimiento curricular de la profesora sobre los contenidos previos (KMLS). Estos conocimientos dan cuenta de su conocimiento sobre los temas, especialmente en cuanto a procedimientos y propiedades.

Es importante resaltar la fuerza que se da entre la selección intencionada y deliberada de ejemplos (consciencia), cuando es claro lo que se quiere ejemplificar (la descomposición por dos), y el conocimiento didáctico del contenido que es movilizado y cómo nutre al conocimiento matemático para la enseñanza. Aun cuando este trabajo aporta en la línea del MTSK y la ejemplificación, creemos que se debe enfocar este trabajo en la formación de profesores, en la misma línea de desarrollo que proponen Adler & Pournara (2020), como también, abrir espacios de desarrollo para el formador de profesores.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

NSA, LSG y LCC concibieron la idea presentada en contexto de una investigación de mayor alcance sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas y ejemplificación. NSA, CS, GEV, LCC y LSG realizaron ajustes en la metodología y el análisis de datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos de la investigación aquí presentada, y que respaldan los resultados y las conclusiones estarán disponibles por NSA, enviando la petición respectiva.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha realizado con el apoyo del programa de formación pedagógica en matemática y Estadística de la Facultad de Educación, dependiente de la Universidad Central de Chile, Santiago, Chile.

The Spanish Government (RTI2018-096547-B-I00) (MECD) and the Research Centre COIDESO (University of Huelva, Spain) supported this research.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos RTI2018-096547-B-I00 y PID2021-1221800B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, J., & Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development*. (pp. 329–353). Sense.
- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2010). Raíces cuadradas y uso de tecnología en el aprendizaje de matemáticas. En *Memorias del XIII Coloquio para la Enseñanza de las Matemáticas Alfonso Nápoles Gándara* (pp. 1–5). Pachuca, México.
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126–154). Prague, Czech Republic: PME.
- Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction, Editorial, *Educational Studies in Mathematics*, pp. 77–79. Recuperado de: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?>
- Cayo, H., Codes, M., & Contreras, L. C. (2024). A mathematics teacher's specialized knowledge in the selection and deployment of examples for teaching sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(3), 784–803.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981
- Chick, H., & Harris, K. (2007, November 25–28). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio In *Proceedings of the 2007 AARE International Educational Research Conference* (Vol. 1, pp. 1–15). Fremantle, Australia. <https://www.aare.edu.au/data/publications/2007/chi07286.pdf>
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative Inquiry and Research Design. Choosing among Five Traditions*. Thousand Oaks, California, Sage.
- Dorio, I., Sabariego, y Massot, I. (2004). Características generales de la Metodología Cualitativa. En A. R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 329–365). Colección Manuales de Metodología de Investigación Educativa. Madrid: La Muralla.
- Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.
- Figueiredo, C.A., Contreras, L.C., y Blanco, L.J. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *ZETETIKÉ*, 17(32), 29–60.
- Figueiredo, C., y Contreras, L.C. (2013). A função quadrática: variação, transparência e duas tipologías de exemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 45–68.
- Figueroa, C., & Contreras, L. C. (2015). Ejemplos y ejemplificación en el aula de matemáticas. In L. Blanco, J. Cárdenas, & A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de*

- profesores de Primaria* (pp. 209–224). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. <http://hdl.handle.net/11162/174225>
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- García, S., Borjón, E., Calvillo, N. J., & Torres, M. (2022). Enseñanza-aprendizaje de la raíz cuadrada con uso de geometría en el nivel bachillerato. *Educación matemática*, 34(3), 352-371. <https://doi.org/10.24844/em3403.13>
- Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.
- Johnson, H.L., Blume, G.W., Shimizu, J.K., Graysay, D. y Konnova, S. (2014) A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(4), 285-311.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido*. Teoría y práctica. Paidós.
- Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Kullberg, A., Runesson, K. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*, 49, 559–569. DOI 10.1007/s11858-017-0858-4
- Loughran, J., Mulhall, P., & Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education*, 30(10), 1301–1320. doi: 10.1080/09500690802187009
- Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F. (2009). *Sameness and difference in learning*. Lecture at the Swedish Research Links Symposium on Phenomenography and Variation Theory, University of Hong Kong, Hong Kong SAR, 1-3 December.
- Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193–220.
- Marton, F., y Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación, Santiago, Chile.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston.
- Pang, M. F., Marton, F., Bao, J. S., & Ki, W. W. (2016). Teaching to add three-digit numbers in Kong Kong and Shanghai: an illustration of differences in the systematic use of variation and invariance. *ZDM Mathematics Education*, 48(4) (this issue). doi:10.1007/s11858-016-0790-z
- Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., y Contreras, L. C. (2024). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *Bolema*, 38, e220140 <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140>
- Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. y Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256-263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Sánchez-Acevedo, N., Segura, C., Contreras, L. C. y Sosa, L. (2024). Relaciones entre conocimiento especializado de las características del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas a partir del uso de ejemplos

- transparentes en la ecuación cuadrática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 481-488). SEIEM.
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.
- Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.
- Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, S.L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual Framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, 43(2), 283-294. doi: 10.1007/s11858-010-0301-6
- Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53(2), 245–255. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001>
- Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165–182.



ANÁLISIS DE LA RELACIÓN ENTRE LA ACTITUD HACIA LA ESTADÍSTICA, EL PENSAMIENTO CRÍTICO Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

ANALYSIS OF THE RELATIONSHIP BETWEEN THE ATTITUDE TOWARDS STATISTICS, CRITICAL THINKING AND ACADEMIC PERFORMANCE

Felipe Santoyo Telles¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3854-9405>

Miguel Ángel Rangel Romero²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1717-1063>

Adriana Lorena Íñiguez Carrillo³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9753-716X>

Neiber Maldonado Suárez⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2053-5232>

RESUMEN

Este artículo analiza la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico, utilizando los promedios de calificaciones del kardex y de la asignatura de estadística. Se realizó una investigación cuantitativa no experimental con diseño transversal, en la que participaron 629 estudiantes universitarios de diversas licenciaturas. Para medir la actitud hacia la estadística se utilizó el Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística (CAHE), mientras que el pensamiento crítico fue evaluado mediante el Cuestionario de Pensamiento Crítico (CPC 2). Los resultados muestran una correlación significativa entre el pensamiento crítico y el rendimiento académico. Además, se evidenció que los estudiantes con una actitud positiva hacia la estadística tienden a desarrollar mejores habilidades de pensamiento crítico, lo que a su vez mejora su rendimiento en la asignatura. Aunque no se encontró una relación directa entre la actitud hacia la estadística y el rendimiento académico, el pensamiento crítico actúa como un mediador clave en esta interacción. Las implicaciones de estos hallazgos sugieren la necesidad

1 Departamento de Ciencias Exactas y Metodologías, Centro Universitario del Sur, Universidad de Guadalajara. Correo felipes@cusur.udg.mx

2 Departamento de Ciencias Exactas y Metodologías, Centro Universitario del Sur, Universidad de Guadalajara. Correo marangel@cusur.udg.mx

3 Departamento de Ciencias Computacionales e Innovación Tecnológica, Centro Universitario del Sur, Universidad de Guadalajara. Correo adriana.carrillo@cusur.udg.mx

4 Estudiante del Doctorado en Psicología con Orientación en Calidad de Vida y Salud en el Centro Universitario del Sur de la Universidad de Guadalajara. Correo neiber.maldonado@alumnos.udg.mx



de fomentar el desarrollo del pensamiento crítico y una actitud positiva hacia la estadística en entornos educativos.

Palabras clave: Actitud hacia la estadística, Pensamiento crítico, Rendimiento académico, Educación Superior.

ABSTRACT

This article examines the relationship between attitudes toward statistics, critical thinking, and academic performance, using students' overall GPA and their grades in statistics. A non-experimental quantitative study with a cross-sectional design was conducted, involving 629 university students from various undergraduate programs. The Attitudes Toward Statistics Questionnaire (CAHE) was used to measure attitudes, while critical thinking was assessed using the Critical Thinking Questionnaire (CPC 2). Results showed a significant correlation between critical thinking and academic performance. Additionally, students with a positive attitude toward statistics were more likely to develop strong critical thinking skills, which in turn improved their performance in the subject. Although no direct relationship was found between attitudes toward statistics and academic performance, critical thinking emerged as a key mediator. These findings highlight the importance of fostering critical thinking skills and promoting positive attitudes toward statistics in educational settings.

Keywords: attitudes toward statistics, critical thinking, academic performance, higher education.

1. INTRODUCCIÓN

En el actual entorno digitalizado, el flujo constante de información ha dado lugar a la sociedad del dato; incluso, posturas filosóficas como el “Dataísmo”, plantean que la acumulación y el análisis de datos pueden proporcionar respuestas a preguntas fundamentales sobre la existencia humana y el funcionamiento del mundo (Miró Quesada Rda, 2022). Es en este contexto en el que la estadística emerge como una herramienta fundamental, pues gracias a sus técnicas es posible comprender y dar sentido a la ubicuidad del dato, competencia fundamental en la vida moderna. En la actualidad, diversos conceptos estadísticos se aplican de forma transversal a distintas áreas de estudio, como las ciencias sociales, biología, geografía, ciencias de la salud, entre otras, lo que plantea el desarrollo de conocimientos tanto por parte del profesor como del estudiante (Santoyo Telles, 2022).

El rendimiento académico de los estudiantes ha sido una preocupación constante en las instituciones educativas, puesto que refleja tanto la adquisición de conocimientos como la capacidad para aplicarlos mediante habilidades cognitivas en distintos contextos. En este marco, la estadística se ha convertido en una disciplina esencial no solo en entornos académicos, sino también en la vida cotidiana. Sin embargo, el estudio de la estadística no es ajeno a desafíos; uno de ellos, es la actitud de los estudiantes hacia esta materia, su capacidad de pensamiento crítico y su impacto en el desempeño académico. Diversas investigaciones han destacado la importancia de la actitud de los estudiantes hacia la estadística, puesto que una percepción positiva puede facilitar el aprendizaje y mejorar el rendimiento académico (Gal et al., 1997; Schau et al., 1995). Por otro lado, se ha observado que estudiantes con actitudes negativas o con respuestas de ansiedad hacia el aprendizaje de los contenidos asociados a la estadística, presentan dificultades en el proceso de aprendizaje, a la vez que un menor rendimiento académico (Onwuegbuzie & Wilson, 2003).

La actitud hacia la estadística se ha definido como un conjunto de creencias, sentimientos y disposiciones que los estudiantes manifiestan hacia esta disciplina, las cuales pueden influir directamente en su motivación y desempeño (Estrada et al., 2011). Esta actitud se entrelaza con el desarrollo del pensamiento crítico, el cual se refiere a la capacidad de analizar, evaluar y sintetizar información de manera lógica y coherente (Facione, 1990). El

pensamiento crítico es crucial en el estudio de la estadística, ya que permite a los estudiantes no solo comprender conceptos teóricos, sino también aplicarlos en la solución de problemas y en la toma de decisiones informadas. Las actitudes, entendidas como el conjunto de predisposiciones y percepciones que influyen las acciones (conformadas por apartados afectivos, cognoscitivos y conductuales), desempeñan un papel fundamental en la manera en que las personas se aproximan y se comprometen ante distintos ámbitos del conocimiento (Lancheros et al., 2007).

Algunos estudios han demostrado que el pensamiento crítico actúa como mediador entre la actitud hacia la estadística y el rendimiento académico. Es decir, los estudiantes con habilidades críticas más desarrolladas, tienen una mayor disposición hacia el estudio de la estadística y, en consecuencia, obtienen mejores resultados académicos (Tempelaar et al., 2007). Esto sugiere que la formación de un pensamiento crítico sólido podría contrarrestar las actitudes negativas hacia la estadística, facilitando un rendimiento académico superior.

En este contexto, el estudio de las actitudes hacia la estadística, así como la formación del pensamiento crítico, permitirá comprender cómo los estudiantes se relacionan con esta área del conocimiento, qué percepciones tienen sobre su utilidad, complejidad y relevancia en sus vidas académicas y profesionales, y cómo estas percepciones pueden influir en su motivación, compromiso y rendimiento en el aula.

La comprensión de estos elementos permitirá diseñar estrategias pedagógicas encaminadas a fomentar una actitud positiva hacia la estadística, con la aspiración de construir entornos de aprendizajes estimulantes, que fomenten la participación y promuevan un mejor rendimiento académico.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Actitud ante la estadística

Auzmendi (1992) plantea que las actitudes pueden estudiarse como constructos, pues se trata de aspectos que no son observables directamente, sino inferidos a partir de elementos como las creencias, los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen. Por lo tanto, es posible partir de la definición de Gal et al. (1997), respecto a que la actitud hacia la estadística se refiere a las percepciones, creencias y sentimientos que los estudiantes tienen sobre la estadística, lo que influye en su motivación y disposición para aprender.

Se ha observado que una actitud positiva hacia la estadística no solo promueve una mayor participación en el proceso de aprendizaje, sino que también incrementa la probabilidad de éxito académico en la materia (Estrada et al., 2011). Por otra parte, estudios como el de Onwuegbuzie & Wilson (2003), mostraron que una actitud negativa hacia la estadística, caracterizada por ansiedad, miedo o frustración, se asocia con un bajo rendimiento académico; esto se debe, en parte, a que las actitudes negativas generan una barrera cognitiva que impide a los estudiantes abordar la materia con la concentración y el esfuerzo necesarios para su comprensión.

En ese sentido, evaluar las actitudes hacia la estadística es el primer paso para identificar las barreras que pudieran limitar el aprovechamiento de los estudiantes de los contenidos de aprendizaje que ofrece esta disciplina. Para su evaluación, Carmona Márquez (2004) identificó 17 instrumentos que miden tanto las actitudes como la ansiedad hacia la estadística.

Entre los más comunes, se encuentran: la *Statistic Attitude Survey* (Roberts & Bilderback, 1980) compuesta por 33 ítems; la *Attitudes Toward Statistics* (Wise, 1985) compuesta por 28 ítems; la *Escala de Actitudes hacia la Estadística* (EAE) (Auzmendi, 1992) constituida por 25 ítems; la *Survey of Attitudes Toward Statistics* (SATS) (Schau et al., 1995) compuesta por 28 ítem. A partir del análisis de propiedades métricas reportadas por estos instrumentos, Ordóñez et al., (2016) diseñaron una nueva escala denominada *Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística* (CAHE) que combina ítems de la EAE y de la SATS y que fue el instrumento empleado en la presente investigación.

2.2 Pensamiento crítico

El pensamiento crítico es otro concepto central en este estudio, ya que permite a los estudiantes no solo aprender los conceptos que se derivan de la estadística, sino también aplicar estos conocimientos en la toma de decisiones y resolución de problemas. Facione (1990) define el pensamiento crítico como el proceso de evaluar y analizar información de manera objetiva, con el propósito de emitir juicios bien fundamentados. Este tipo de pensamiento incluye habilidades como la interpretación, el análisis, la evaluación, la inferencia y la explicación; estas habilidades son esenciales para comprender y aplicar diversos conceptos estadísticos (González, 2021).

A partir de este contexto, es posible plantear que el pensamiento crítico implica cuestionar suposiciones, identificar sesgos, buscar evidencias y considerar diferentes perspectivas antes de llegar a una conclusión. De acuerdo con Halpern (2014) “es la clase de pensamiento que está implicado en la resolución de problemas, en la formulación de inferencias, en el cálculo de probabilidades y en la toma decisiones” (p. 8). El pensamiento crítico es una habilidad esencial en el estudio y la aplicación de la estadística, ya sea para dotar de sentido a los datos, evaluar las fuentes de donde provienen, así como analizar la relevancia y la fiabilidad de los resultados estadísticos.

En el contexto educativo, el pensamiento crítico ha sido identificado como una competencia clave para el éxito académico. En el caso de la estadística, los estudiantes que poseen un mayor nivel de pensamiento crítico tienden a ser más efectivos en la resolución de problemas complejos, lo que impacta positivamente en su rendimiento académico (Tempelaar et al., 2007) *students' prior attitudes toward statistics, measured by the extended Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS*. Esto es especialmente relevante en disciplinas como la psicología y las ciencias de la salud, donde la interpretación de datos estadísticos es esencial para la toma de decisiones tanto clínicas como de investigación.

El pensamiento crítico también ha sido reconocido como un factor mediador entre la actitud hacia la estadística y el rendimiento académico. De acuerdo con Williams (2001) los estudiantes con altos niveles de pensamiento crítico tienen más probabilidades a tener una actitud positiva hacia la estadística, toda vez que tienen la capacidad de identificar la relevancia de aplicar métodos estadísticos a la resolución de problemas prácticos. Esto, a su vez, contribuye a un mayor rendimiento académico, pues el pensamiento crítico les permite abordar los problemas estadísticos con mayor eficacia.

Aunque existen diversos instrumentos para evaluar el pensamiento crítico (Aguilar-Perez et al., 2023; Lina Rodríguez et al., 2023), en esta investigación se utilizó el *Cuestionario de Pensamiento Crítico* (CPC2). Este instrumento, diseñado para estudiantes universitarios, está compuesto por 30 ítems que se responden en una escala tipo Likert de 1 a 5. El cuestionario aborda dos dimensiones principales del pensamiento crítico: a) **dimensión sustantiva**, que se refiere a

las acciones que realiza una persona para fundamentar su punto de vista con razones y evidencias y b) **dimensión dialógica**, que implica el análisis y la integración de puntos de vista divergentes o contrarios al propio, así como la construcción de argumentos razonados para responder a refutaciones y precisar diferencias de perspectiva (Santiuste & Ayala Flores, 2001).

2.3 Rendimiento académico

El rendimiento académico es el resultado del proceso de aprendizaje de los estudiantes, por lo que generalmente se mide a través de exámenes, tareas y proyectos. En el ámbito de la estadística, el rendimiento académico está influido por múltiples factores, entre los que se destacan la actitud hacia la materia y las habilidades cognitivas como el pensamiento crítico. A través de estudios empíricos, se ha observado que los estudiantes con actitudes positivas hacia la estadística, que además presentan altos niveles de pensamiento crítico, tienen mejores resultados en sus evaluaciones (Tempelaar et al., 2007).

Según Biggs, (1999), el rendimiento académico no solo refleja la cantidad de conocimientos adquiridos, sino también la capacidad de los estudiantes para aplicar esos conocimientos de manera efectiva. En este sentido, la estadística representa un desafío particular, ya que requiere tanto una comprensión conceptual como la habilidad para aplicar fórmulas matemáticas y herramientas estadísticas en la resolución de problemas. Las habilidades de pensamiento crítico tienen una fuerte relación tanto con la admisión como con las calificaciones promedio del curso, lo que sugiere su uso potencial como evaluación del desempeño académico (Rivas et al., 2023).

Además, investigaciones previas han mostrado que la ansiedad y las actitudes negativas hacia la estadística son predictores significativos de bajo rendimiento académico (Onwuegbuzie & Wilson, 2003). Esta ansiedad estadística, caracterizada por miedo y estrés al enfrentarse a problemas estadísticos, puede reducir la capacidad cognitiva de los estudiantes y, en consecuencia, afectar su rendimiento en la materia (Chew & Dillon, 2014). Por lo tanto, es fundamental no solo fomentar una actitud positiva hacia la estadística, sino también desarrollar habilidades de pensamiento crítico que permitan a los estudiantes enfrentar los desafíos de la materia con confianza.

En este contexto, el presente artículo tiene como objetivo analizar la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico en estudiantes universitarios. Para ello, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué factores podrían modular la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico de los estudiantes universitarios?

Para abordar este objetivo, se analizó cómo estas variables interactúan, a fin de determinar el papel que desempeña el pensamiento crítico como mediador en esta relación. Además, se discutieron las implicaciones educativas de estos hallazgos para el diseño de estrategias pedagógicas que promuevan una actitud positiva hacia la estadística y el desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes universitarios.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1. Diseño

El desarrollo de esta investigación se realizó bajo el enfoque cuantitativo, mediante un estudio no experimental, con un diseño analítico transversal de alcance (Ato et al., 2013; Coolican, 2018; Santoyo Telles & Maldonado Suárez, 2024).

3.2. Participantes

La muestra estuvo conformada por 379 estudiantes universitarios de diversas licenciaturas que, al momento de la investigación, cursaban la asignatura de estadística en sus respectivos planes de estudio. Participaron 379 personas de 12 diferentes programas educativos, 58% Mujeres y 42 % hombres, el 97% mencionó estar soltero. La edad osciló entre 18 y 25 años, con una media de 19.86 y una desviación estándar de 1.52.

Toda vez que el objetivo de la presente investigación incluye analizar la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico mediante análisis de regresión lineal múltiple, fue fundamental garantizar que el tamaño muestral disponible fuera adecuado para detectar efectos estadísticamente significativos. Por esta razón, se calculó el poder estadístico ($1 - \beta$); con este análisis, fue posible confirmar que, con un tamaño muestral de $n = 379$, se alcanzaba un poder estadístico de $1 - \beta = 1.0$, con un nivel de significancia de $\alpha = .05$; lo que asegura una probabilidad de 100 % de detectar efectos pequeños ($F^2 = .02$), en caso de que éstos existan. Este procedimiento además de garantizar la sensibilidad del análisis para identificar relaciones entre las variables estudiadas, también minimiza la probabilidad de cometer errores tipo II (β), es decir, no detectar un efecto cuando realmente existe. De esta forma, se asegura que las conclusiones obtenidas sean confiables y representativas de la población objetivo (Coolican, 2018; Field, 2018; Santoyo Telles & Maldonado Suárez, 2024).

3.3. Instrumentos

Para evaluar las variables de estudio, se emplearon los siguientes instrumentos:

Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística (CAHE): este instrumento consta de 28 preguntas, de las cuales 9 son positivas y 19 negativas, y se responde mediante una escala tipo Likert con 5 opciones de respuesta (Ordóñez et al., 2016) but there is few consensus regarding its factor structure, requiring greater depth. For that reason, the main goal of the present work is to propose a new test that combines items of SATS (Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio, 1995).

Cuestionario de Pensamiento Crítico (CPC2): este instrumento evalúa diferentes aspectos del pensamiento crítico en dos dimensiones: sustantiva y dialógica (Santiuste & Ayala Flores, 2001). Las dimensiones se centran en habilidades fundamentales del pensamiento, como la lectura, la escritura y la expresión oral. El cuestionario está compuesto por 30 ítems que se responden utilizando una escala tipo Likert con valores de 1 (“totalmente en desacuerdo”) a 5 (“totalmente de acuerdo”).

Rendimiento académico: Para medir esta variable, se consideró el promedio de calificaciones obtenidos por los estudiantes en dos ámbitos: a) la asignatura de estadística; b) el promedio general de todas las materias cursadas por los participantes.

3.4. Procedimiento

La recolección de datos se realizó en abril de 2024, periodo en el que los estudiantes que participaron en la muestra cursaban asignaturas de estadística. Para ello, se utilizó un formulario de Google diseñado específicamente para incluir los instrumentos de evaluación: el Cuestionario de Pensamiento Crítico (CPC2) y el Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística (CAHE), así como el reporte del promedio de calificaciones en la asignatura de estadística y el promedio general.

Previo a su participación, se proporcionó a los estudiantes un formulario de consentimiento informado, que explicaba los objetivos del estudio, la naturaleza voluntaria de su participación y la garantía de confidencialidad en el manejo de los datos. Los participantes completaron el formulario en línea de manera autónoma. Los datos recabados fueron almacenados en una base de datos electrónica, accesible únicamente para los investigadores, respetando las normativas éticas y de confidencialidad vigentes.

3.5. Análisis de datos

Para dar respuesta al objetivo de este estudio, se realizaron análisis estadísticos para evaluar las propiedades psicométricas de los instrumentos, explorar las relaciones entre las variables, determinar diferencias entre los grupos estudiados, así como evaluar la influencia de las variables independientes sobre la variable dependiente. Todos los análisis fueron realizados en los programas estadístico IBM SPSS y AMOS. A continuación, se describen los procedimientos realizados.

En primer lugar, se evaluaron las propiedades métricas de los instrumentos, para garantizar la validez y fiabilidad. Toda vez que ambos instrumentos (Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística y Cuestionario de Pensamiento Crítico) se responden con una escala de respuestas tipo Likert, se realizó un Análisis Factorial Confirmatorio empleando el estimador WLSMV (Weighted Least Square Mean and Variance), que es el método más adecuado cuando los datos no siguen una distribución normal (Li, 2015). Los criterios para evaluar la estructura interna de los instrumentos fueron: $\chi^2/gl < 3$ (Carmines & McIver, 1981); CFI $> .90$ (McDonald & Marsh, 1990); TLI $> .90$ (Bollen, 1989); RMSEA $< .08$ (Browne & Cudeck, 1992); además, se calculó el coeficiente omega de McDonald (ω) para estimar la consistencia interna de los instrumentos (Kalkbrenner, 2023; McDonald, 1999).

Una vez realizado lo anterior, se ejecutaron los análisis de correlaciones mediante el coeficiente de Pearson para evaluar las relaciones entre Pensamiento crítico; Promedio de calificaciones en Estadística y Promedio de calificaciones general. Con este análisis, se buscó identificar asociaciones entre las variables; éste es un método de análisis robusto para describir relaciones entre variables continuas (Coolican, 2018; Díaz Patiño, 2024).

A continuación, para identificar diferencias entre los programas educativos en relación con las variables de estudio, se realizaron análisis de varianza unifactorial (ANOVA). Esta técnica es útil para comparar las medias de más de dos grupos, bajo el supuesto de normalidad y homogeneidad de varianzas. Cuando se identificaron diferencias significativas, se

realizaron análisis *post hoc* utilizando el método *GT2* de Hochberg, que permite evaluar diferencias cuando los grupos son desiguales (Field, 2018; Maldonado Suárez, 2024).

Por último, se realizó un Modelo lineal general univariante para examinar los efectos de múltiples variables sobre el promedio en estadística. Este análisis permitió evaluar el impacto de predictores como el pensamiento crítico, la actitud hacia la estadística, el promedio general y el programa educativo, controlando por efectos cruzados. El ajuste del modelo se evaluó mediante el coeficiente de determinación ajustado (R^2 ajustada), y la significancia de los efectos se determinó a través de los valores de F y sus correspondientes niveles de significancia ($p < .05$) (Coolican, 2018; Field, 2018).

4. RESULTADOS

4.1. Propiedades métricas de los instrumentos de medición

Las propiedades métricas obtenidas de los instrumentos que se emplearon en la presente investigación, mediante el Análisis Factorial Confirmatorio, se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Propiedades métricas de los instrumentos empleados.

	X^2/gf	CFI	TLI	RMSEA I.C. 90%
<i>Nivel de ajuste recomendado</i>	< 3	> .90	> .90	< .08
Instrumentos				
Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística (CAHE)	2.04	.95	.94	.05 (.042, .062)
Cuestionario de Pensamiento Crítico (CPC2)	2.68	.90	.89	.06 (.060, .070)

Notas: X^2/gf : Chi cuadrado dividido por grados de libertad; CFI: Índice de ajuste comparativo; TLI: Índice de Tucker-Lewis; RMSEA: Raíz del error cuadrático medio.

Los resultados presentados en la Tabla 1 indican que los dos instrumentos empleados, muestran un ajuste adecuado. Los valores de X^2/gf , CFI, TLI, RMSEA y SRMR cumplen con los criterios de ajuste recomendados, lo que indica que el modelo teórico propuesto para cada instrumento se ajusta adecuadamente de manera satisfactoria con los datos obtenidos en el estudio.

En cuanto a la fiabilidad, el análisis mediante el coeficiente omega de McDonald (ω) mostró indicadores adecuados para el *Cuestionario de Actitudes Hacia la Estadística (CAHE)* en sus tres dimensiones: Emociones positivas ($\omega = .75$), Emociones negativas ($\omega = .86$) y Utilidad ($\omega = .70$); de igual forma, el factor de segundo orden, denominado Actitud hacia la estadística, presentó un indicador de fiabilidad aceptable ($\omega = .76$). Por otro lado, el *Cuestionario de Pensamiento Crítico (CPC2)* también reportó valores adecuados de fiabilidad. La Dimensión Sustantiva presentó un coeficiente elevado ($\omega = .93$), mientras que la Dimensión Dialógica mostró un indicador adecuado ($\omega = .80$); además, la Escala global presentó un excelente indicador de fiabilidad ($\omega = .94$).

4.2. Análisis de correlaciones

Para identificar asociaciones entre las variables, se realizaron análisis de correlaciones entre las variables Pensamiento Crítico; Promedio en Estadística y Promedio General, como se observa en la Tabla 2.

Tabla 2. Análisis de correlaciones entre el pensamiento crítico, el promedio en estadística y el promedio global.

	1	2	3
Pensamiento crítico	-		
Promedio en Estadística	.256**	-	
Promedio general	.199**	.608**	-

Nota: ** $p < .01$.

El análisis de correlaciones presentó relaciones significativas entre las variables analizadas. El pensamiento crítico presentó una correlación positiva y significativa con el promedio en la materia ($r = .256, p < .01$) y con el promedio general ($r = .199, p < .01$). Esto indica que niveles más altos de pensamiento crítico están asociados con un mejor desempeño tanto en la asignatura de estadística como en el promedio general de calificaciones.

Por otra parte, el promedio en la materia mostró una correlación positiva y fuerte con el promedio general ($r = .608, p < .01$), lo que sugiere que el rendimiento en la asignatura de estadística está estrechamente relacionado con el desempeño global de los estudiantes en todas las materias cursadas.

4.3. Pruebas de diferencias

Se realizaron pruebas de diferencias entre los distintos programas educativos, para cada variable estudiada: Actitud hacia la estadística, Pensamiento crítico, Calificación en estadística y Calificación global. Los resultados se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Pruebas de comparación entre los programas educativos y las variables de estudio.

		AHE	PC	Calificación estadística	Calificación general
	N (%)	M (DE)	M (DE)	M (DE)	M (DE)
Agrobiotecnología	26 (6.9%)	32.65 (10.76)	58.36 (11.15)	82.08 (8.27)	80.65 (5.68)
Agronegocios	51 (13.5%)	41.09(14.03)***	61.71 (13.54)	86.80 (6.36)	89.02 (5.98)
Desarrollo Turístico Sustentable	14 (3.7%)	38.87 (12.42)	61.15 (9.11)	82.79 (6.45)	83.29 (4.60)

		AHE	PC	Calificación estadística	Calificación general
Enfermería	16 (4.2%)	40.70 (9.79)	66.81 (9.07)	87.69 (6.78)	91.02 (3.61)
Médico Cirujano y Partero	42 (11.1%)	29.29 (11.51)	71.70 (11.92)***	91.60 (7.04)***	88.80 (3.74)
Negocios Internacionales	96 (25.3%)	33.14 (10.65)	63.57 (10.70)	91.73 (5.80)***	91.99 (4.45)
Nutrición	11 (2.9%)	37.00 (13.50)	69.91 (19.12)*	85.45 (6.04)	89.36 (4.01)
Periodismo	6 (1.6%)	35.27 (18.45)	65.23 (11.94)	81.33 (7.79)	84.83 (8.57)
Psicología	41 (10.8%)	38.80 (13.04)*	66.34 (15.08)**	89.85 (6.71)	94.18 (3.41)***
Telemática	28 (7.4%)	38.12 (9.91)	57.54 (9.21)	87.29 (7.66)	88.76 (6.30)
Trabajo Social	18 (4.7%)	34.37 (11.32)	61.78 (13.56)	93.44 (6.39)***	94.01 (5.69)***
Seguridad Laboral	30 (7.9%)	37.75 (11.82)	54.68 (16.20)	85.60 (8.20)	88.10 (7.27)

Nota: AHE: Actitud hacia la estadística; PC: Pensamiento crítico; N: recuento para cada grupo; M: media; DE: Desviación estándar * $p < .05$; ** $p < .01$; *** $p < .001$.

El ANOVA unifactorial para examinar las diferencias en la Actitud hacia la estadística (AHE), reveló diferencias significativas entre los grupos ($F(11, 367) = 3.457, p < .001$). El análisis post hoc realizado mediante el método *GT2* Hochberg reveló diferencias significativas entre los programas educativos. En particular, el programa de Agronegocios mostró puntuaciones significativamente más altas que Médico Cirujano y Partero ($\Delta M = 11.79, p < .001$, IC 95 % [3.42, 20.16]), así como respecto a Negocios Internacionales ($\Delta M = 7.95, p < .01$, IC 95 % [0.98, 14.91]). De igual forma, el programa de Psicología obtuvo una puntuación significativamente mayor en comparación con Médico Cirujano y Partero ($\Delta M = 9.51, p < .05$, IC 95 % [0.68, 18.32]). Estos resultados indican sugieren que los estudiantes de Agronegocios y Psicología tienen una mejor actitud hacia la estadística en comparación con los estudiantes del programa de Médico Cirujano y Partero, así como Negocios Internacionales.

Por otra parte, el análisis de diferencias en el Pensamiento crítico (PC), reveló diferencias estadísticamente significativas entre los grupos ($F(11, 367) = 4.657, p < .001$), lo que sugiere que las puntuaciones en pensamiento crítico varían significativamente según el programa educativo al que pertenecen los estudiantes. Para explorar estas diferencias, se aplicaron pruebas post hoc utilizando el método *GT2* de Hochberg. Los resultados mostraron los estudiantes de Médico Cirujano y Partero presentaron mayor puntuación respecto a Agrobiotecnología ($\Delta M = 13.34, p < .01$, IC 95% [2.73, 23.95]), Agronegocios ($\Delta M = 9.98, p < .05$, IC 95% [1.12, 18.84]), Negocios Internacionales ($\Delta M = 8.13, p < .05$, IC 95% [0.26, 15.99]), Telemática ($\Delta M = 14.15, p < .001$, IC 95% [3.78, 24.52]) y Seguridad Laboral ($\Delta M = 17.01, p < .001$, IC 95% [6.85, 27.17]). Por otro lado, los estudiantes del programa de Nutrición también mostraron puntuaciones significativamente mayores en pensamiento crítico en comparación con los de Seguridad Laboral ($\Delta M = 15.22, p < .05$, IC 95% [0.24, 30.21]). De manera similar, los estudiantes de Psicología obtuvieron puntuaciones superiores a las de Seguridad Laboral ($\Delta M = 11.65, p < .01$, IC 95% [1.44, 21.87]). Estos resultados destacan que los estudiantes de Médico Cirujano y Partero tienen niveles significativamente más altos de pensamiento crítico en comparación con la mayoría de los otros programas educativos evaluados. Asimismo,

los estudiantes de Nutrición y Psicología obtuvieron mejores resultados en comparación con los de Seguridad Laboral. Estas diferencias podrían estar relacionadas con las competencias específicas y las demandas curriculares de cada programa, lo que sugiere un campo interesante para futuros estudios sobre el desarrollo del pensamiento crítico en distintos contextos educativos.

También, se analizaron diferencias en el promedio de calificaciones de la asignatura de Estadística entre los distintos programas educativos. El ANOVA mostró diferencias estadísticamente significativas en el promedio obtenido en la materia según el programa educativo ($F(11, 367) = 8.503, p < .001$). El análisis *post hoc* con *GT2* de Hochberg identificó varias diferencias significativas entre diversos programas educativos. Los estudiantes de Medicina obtuvieron promedios significativamente más altos en comparación con los de otros programas: Agrobiotecnología ($\Delta M = 9.52, p < .001$), Agronegocios ($\Delta M = 4.79, p = .05$), Desarrollo Turístico Sustentable ($\Delta M = 8.81, p < .01$), Periodismo ($\Delta M = 10.26, p < .05$) y Seguridad Laboral ($\Delta M = 5.99, p < .05$).

De manera similar, los estudiantes de Negocios Internacionales también obtuvieron promedios significativamente mayores en comparación con otros programas, destacándose frente a Agrobiotecnología ($\Delta M = 9.65, p < .001$), Agronegocios ($\Delta M = 4.93, p < .01$), Desarrollo Turístico Sustentable ($\Delta M = 8.94, p < .001$), Periodismo ($\Delta M = 10.40, p < .05$) y Seguridad Laboral ($\Delta M = 6.13, p < .01$). Por otro lado, los estudiantes de Trabajo Social también mostraron un desempeño significativamente superior frente a otros programas. Su promedio fue mayor que el de los estudiantes de Agrobiotecnología ($\Delta M = 11.37, p < .001$), Agronegocios ($\Delta M = 6.64, p < .05$), Desarrollo Turístico Sustentable ($\Delta M = 10.66, p < .01$), Periodismo ($\Delta M = 12.11, p < .05$) y Seguridad Laboral ($\Delta M = 7.84, p < .01$).

Por último, se analizaron las diferencias en el promedio general de calificaciones entre los diversos programas educativos. El ANOVA mostró diferencias estadísticamente significativas en el promedio general según el programa educativo de los estudiantes ($F(11, 367) = 16.202, p < .001$). El análisis *post hoc* con *GT2* de Hochberg reveló diferencias significativas en el promedio general entre los programas educativos evaluados. En términos generales, los estudiantes de Psicología ($M = 94.18, DE = 3.41$) y Trabajo Social ($M = 94.01, DE = 5.69$) presentaron los promedios más altos, mientras que los estudiantes de Agrobiotecnología ($M = 80.65, DE = 5.68$) obtuvieron los valores más bajos.

En comparación con Agrobiotecnología, se identificaron diferencias significativas con los siguientes programas, que mostraron promedios más altos: Agronegocios ($\Delta M = 8.37, p < .001$), Enfermería ($\Delta M = 10.36, p < .001$), Médico Cirujano y Partero ($\Delta M = 8.15, p < .001$), Negocios Internacionales ($\Delta M = 11.34, p < .001$), Nutrición ($\Delta M = 8.71, p < .001$), Psicología ($\Delta M = 13.53, p < .001$), Telemática ($\Delta M = 8.11, p < .001$), Trabajo Social ($\Delta M = 13.36, p < .001$), y Seguridad Laboral ($\Delta M = 7.45, p < .001$).

Por otro lado, los estudiantes de Agronegocios presentaron promedios significativamente menores en comparación con los estudiantes de Psicología ($\Delta M = 5.16, p < .001$) y Trabajo Social ($\Delta M = 4.99, p < .05$); de igual forma, los estudiantes de Desarrollo Turístico Sustentable presentaron promedios significativamente menores que los estudiantes de Enfermería ($\Delta M = -7.73, p < .01$), Médico Cirujano y Partero ($\Delta M = -5.52, p < .05$), Negocios Internacionales ($\Delta M = -8.71, p < .001$), Psicología ($\Delta M = -10.89, p < .001$) y Trabajo Social ($\Delta M = -10.72, p < .001$).

Los estudiantes de Psicología destacaron por obtener promedios significativamente más altos que los estudiantes de Agrobiotecnología ($\Delta M = 13.53, p < .001$), Agronegocios ($\Delta M = 5.16, p < .001$), Desarrollo Turístico Sustentable ($\Delta M = 10.89, p < .001$), Médico Cirujano y

Partero ($\Delta M = 5.38, p < .001$), Seguridad Laboral ($\Delta M = 6.08, p < .001$) y Telemática ($\Delta M = 5.41, p < .01$). Finalmente, los estudiantes de Trabajo Social, tuvieron promedios más altos que los estudiantes de Agrobiotecnología ($\Delta M = 13.36, p < .001$), Agronegocios ($\Delta M = 4.99, p < .05$), Desarrollo Turístico Sustentable ($\Delta M = 10.72, p < .001$), Médico Cirujano y Partero ($\Delta M = 5.21, p < .05$) y Seguridad Laboral ($\Delta M = 5.91, p < .01$).

4.4. Modelo lineal general univariante

Se realizó un análisis de efectos inter-sujetos mediante un modelo lineal general univariante, para evaluar la influencia de la Actitud ante la estadística, el Pensamiento crítico, el Programa educativo y el Promedio general, sobre el promedio en Estadística. Los resultados se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Modelo lineal general univariante para evaluar la interacción de las variables estudiadas.

Variable	Suma de Cuadrados Tipo III	gl	Media Cuadrática	F	Sig
Modelo Corregido	9604.765	14	686.055	21.543	.000
Intersección	663.024	1	663.024	20.820	.000
Calificación general	4258.452	1	4258.452	133.723	.000
Pensamiento Crítico	233.155	1	233.155	7.322	.007
Actitud ante la Estadística	91.671	1	91.671	2.879	.091
Programa Educativo	1055.095	11	95.918	3.012	.001
Error	11591.657	364	31.845	-	-
Total Corregido	21196.422	378	-	-	-

Nota: gl: grados de libertad; F: Valor estadístico de la prueba F para evaluar la significancia del efecto; Sig.: nivel de significancia estadística asociado al valor de F.

El modelo fue estadísticamente significativo, de modo que explica el 45.3% de la varianza en la variable dependiente ($R^2 = .453, R^2$ ajustada = .432, $F(14, 364) = 21.543, p < .001$). El promedio general fue el predictor más importante en el modelo ($F(1, 364) = 133.723, p < .001$), con un efecto significativo y fuerte; este resultado indica que un mejor desempeño general se asocia consistentemente con un mayor promedio en las materias específicas. El pensamiento crítico también tuvo un efecto significativo sobre el promedio ($F(1, 364) = 7.322, p < .01$); esto indica que mayores niveles de pensamiento crítico están asociados con un mejor desempeño en las materias, incluso después de controlar por el promedio general y el programa educativo. Por otra parte, la Actitud hacia la estadística no alcanzó significancia en el modelo ($F(1, 364) = 2.879, p > .05$); esto indica que, al controlar por las otras variables, la actitud ante la estadística no influye directamente en el promedio de las materias. Por último, el programa educativo tuvo un efecto significativo sobre el promedio en la materia ($F(11,$

364) = 3.012, $p < .01$). Estos resultados sugieren que existen diferencias en el desempeño promedio entre los programas, incluso después de controlar por variables como el pensamiento crítico y el promedio general.

A partir de este análisis, es posible destacar que el Promedio general de calificaciones es el factor más influyente sobre el promedio de calificaciones en Estadística, seguido por el pensamiento crítico y el programa educativo. La actitud ante la estadística no mostró un efecto significativo en este modelo, lo que sugiere que su influencia podría ser indirecto o depender de otras variables. Estos resultados subrayan la importancia de las habilidades cognitivas y el desempeño global en el éxito académico, además de las diferencias entre programas educativos.

5. DISCUSIÓN

El presente estudio tuvo como objetivo analizar la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico en estudiantes universitarios. Los hallazgos principales muestran que el promedio general y el pensamiento crítico son factores significativos que predicen el desempeño en la asignatura de estadística, mientras que la actitud hacia la estadística no mostró un efecto directo significativo.

En primer lugar, destaca que el pensamiento crítico se asocia consistentemente con un mejor desempeño académico (promedio en estadística y general). Esto subraya su importancia como una competencia transversal que debería fomentarse en todos los programas educativos. Este hallazgo coincide con investigaciones previas que destacan al pensamiento crítico como un predictor clave del desempeño académico en disciplinas científicas y técnicas. Por ejemplo, se han encontrado correlaciones significativas entre las habilidades de pensamiento crítico y las calificaciones escolares, particularmente en materias de matemáticas y ciencias (Manasse-ro-Mas & Vázquez-Alonso, 2020). En este mismo sentido, un estudio realizado con estudiantes de secundaria en México identificó una conexión directa entre los niveles de pensamiento crítico y el rendimiento académico (Lucio García & Vázquez Botello, 2018), lo que refuerza la importancia de esta competencia en contextos educativos diversos.

Por otra parte, se identificaron diferencias para la variable Promedio en Estadística, en relación con los programas educativos cursados. Destaca que licenciaturas del área de ciencias sociales y salud como Médico Cirujano y Partero, Negocios Internacionales y Trabajo Social, tuvieron mejores promedios en comparación con áreas técnicas o agroindustriales como Agrobiotecnología o Desarrollo Turístico Sustentable. Estas diferencias podrían estar relacionadas con factores como la estructura curricular, la calidad de la enseñanza y los recursos disponibles

Los hallazgos previamente señalados ofrecen una visión útil para diseñar intervenciones educativas específicas, por ejemplo, fortaleciendo habilidades en programas con menor desempeño. Es importante abordar estas desigualdades diseñando programas educativos más equitativos que consideren las necesidades específicas de los programas con menor desempeño. Por ejemplo, el fortalecimiento de competencias pedagógicas en áreas críticas y el acceso a recursos tecnológicos pueden ser estrategias clave para reducir estas brechas.

Respecto al modelo lineal general univariante, destaca que el Promedio general de calificaciones es el factor más influyente sobre el promedio de calificaciones en Estadística, seguido por el Pensamiento crítico y el Programa educativo. La Actitud hacia la estadística no mostró un efecto significativo en este modelo, lo que sugiere que su influencia podría ser indirecto o depender de otras variables. Esto último podría indicar que su influencia es indirecta

y depende de otros factores, como la motivación intrínseca, las estrategias de aprendizaje empleadas o las características curriculares de los programas educativos. La evidencia sobre las actitudes hacia la estadística entre estudiantes universitarios no es concluyente, probablemente debido a la naturaleza dinámica y multifactorial del proceso de enseñanza-aprendizaje, pues factores como las actitudes, la asimilación de experiencias previas, la formación académica previa y las habilidades del docente, interactúan de forma compleja.

Estudios previos han señalado que los estudiantes suelen abordar los cursos de estadística con predisposiciones negativas, percibiéndolos como complejos y poco interesantes (Muñoz San Roque, 2002). La exposición previa a la estadística en la educación secundaria también parece influir de manera favorable, al fomentar una mayor afinidad hacia la materia y, de forma indirecta, contribuir al éxito académico (Bologna & Vaiman, 2013). Las actitudes hacia la estadística tienden a deteriorarse a lo largo de los años de estudio, siendo más negativas entre estudiantes sin formación previa en la materia (Comas et al., 2017). Además, las investigaciones han identificado perfiles de estudiantes según sus actitudes: algunos presentan actitudes desfavorables con baja ansiedad, otras actitudes positivas con alta ansiedad, y otros se caracterizan principalmente por altos niveles de ansiedad hacia la estadística (Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016).

Una de las fortalezas de este estudio es el uso de instrumentos con propiedades psicométricas sólidas, lo que garantiza la fiabilidad y validez de los datos obtenidos. Además, el modelo estadístico empleado permitió un análisis integral de las variables estudiadas. Sin embargo, entre las limitaciones destaca el diseño transversal, que no permite establecer relaciones causales entre las variables. Asimismo, la muestra estuvo conformada por estudiantes de un contexto educativo particular, lo que podría limitar la generalización de los resultados a otras poblaciones.

Por lo anterior, futuros estudios podrían explorar cómo la actitud hacia la estadística influye en el desempeño académico a través de variables mediadoras, como la motivación intrínseca o el uso de estrategias de aprendizaje específicas. Además, puede resultar de relevancia realizar estudios longitudinales para evaluar cómo estas variables evolucionan a lo largo del tiempo y en distintos contextos educativos. Finalmente, una exploración cualitativa podría complementar estos hallazgos, proporcionando una perspectiva más profunda sobre cómo los estudiantes experimentan la enseñanza de la estadística y el desarrollo de pensamiento crítico en diferentes contextos educativos.

6. CONCLUSIONES

Este estudio aporta evidencias sobre la influencia del pensamiento crítico en el desempeño académico, mostrando que estudiantes con mayores niveles de esta competencia obtienen mejores resultados tanto en materias específicas, como estadística, como en su promedio general. Este hallazgo resalta la necesidad de considerar el pensamiento crítico como una competencia transversal en la formación educativa, independientemente de la disciplina.

Además, las diferencias encontradas entre programas educativos ponen de manifiesto que los contextos curriculares, las metodologías de enseñanza y las demandas específicas de cada área influyen significativamente en el desarrollo de habilidades cognitivas y en el rendimiento académico. Programas como Médico Cirujano y Partero, Negocios Internacionales y Psicología demostraron desempeños destacados en pensamiento crítico y calificaciones en estadística, lo que podría atribuirse a currículos diseñados para promover análisis reflexivo y habilidades aplicadas. Por el contrario, programas como

Agrobiotecnología o Seguridad Laboral enfrentan desafíos que podrían estar relacionados con recursos limitados, enfoques pedagógicos tradicionales o una menor percepción de relevancia de las competencias analizadas.

La actitud hacia la estadística, aunque no mostró un efecto directo significativo en el desempeño, sigue siendo un aspecto crítico para considerar. Este resultado sugiere que la percepción de utilidad, accesibilidad y relevancia de la estadística puede tener un impacto indirecto, posiblemente mediado por la motivación o el interés de los estudiantes. Estrategias pedagógicas que conecten la estadística con problemas reales y relevantes para cada disciplina podrían ser clave para mejorar esta actitud y, en consecuencia, el rendimiento.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Se declara lo que cada persona de la autoría desarrolló en el trabajo. Cada persona se abrevia con la inicial del nombre, iniciales de apellidos. Por ejemplo:

FST, MRR y AIC concibieron la idea presentada. FST y MRR desarrolló la teoría. FST, MRR y AIC adaptaron la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. FST y NMS analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por FST a través de felipes@cusur.udg.mx previa solicitud razonable.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar-Perez, P., Cruz-Covarrubias, L. P., Aguilar-Cruz, P. D., & Magaña-Jáuregui, C. I. (2023). Análisis del pensamiento crítico en estudiantes de una universidad pública mexicana. *Cultura, Educación y Sociedad*, 14(1), 125–144. <https://doi.org/10.17981/cultedusoc.14.1.2023.07>
- Ato, M., López, J., & Benavente, A. (2013). Un sistema de clasificación de los diseños de investigación en psicología. *Anales de Psicología*, 3, 1038–1059. <https://www.redalyc.org/pdf/167/16728244043.pdf>
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Mensajero.
- Biggs, J. (1999). Teaching for Quality Learning at University. Assessing for learning quality: II. Practice. *Teaching for Quality Learning at University, January 2003*, 165–203.
- Bologna, E. L., & Vaiman, M. (2013). Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en Estadística en la carrera de Psicología. *Probabilidad Condicionada: Revista de Didáctica de La Estadística*, 2, 91–103. <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770239&info=resumen&idioma=SPA>
- Carmona Márquez, J. (2004). Una Revisión De Las Evidencias De Fiabilidad Y Validez De Los Cuestionarios De Actitudes Y Ansiedad Hacia La Estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5–28. <https://doi.org/10.52041/serj.v3i1.539>
- Chew, P. K. H., & Dillon, D. B. (2014). Statistics Anxiety Update: Refining the Construct and Recommendations for a New Research Agenda. *Perspectives on Psychological Science*, 9(2), 196–208. <https://doi.org/10.1177/1745691613518077>



- Comas, C., Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2017). Study of attitudes toward statistics in psychology students. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(57). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a23>
- Coolican, H. (2018). *Research Methods and Statistics in Psychology*. Routledge.
- Díaz Patiño, D. G. (2024). Relaciones bivariadas: correlaciones. In F. Santoyo Telles & N. Maldonado Suárez (Eds.), *Análisis de Datos en Psicología* (pp. 157–168). Editorial Universidad de Guadalajara. <https://doi.org/10.32870/9786075812847>
- Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' Attitudes Towards Statistics. *New ICMI Study Series*, 14(June), 163–174. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_18
- Facione, P. A. (1990). Critical Thinking : A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction Executive Summary “ The Delphi Report. *The California Academic Press*, 423(c), 1–19. http://www.insightassessment.com/pdf_files/DEXadobe.PDF
- Field, A. (2018). *Discovering Statistics using SPSS* (2 Edition). SAGE Publications Ltd.
- Gal, I., Ginsburg, L., & Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. *The Assessment Challenge in Statistics Education*, 1997(October), 37–51. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref>
- Halpern, D. (2014). Thought and Knowledge An Introduction to Critical Thinking. In *Paper Knowledge . Toward a Media History of Documents* (Vol. 7, Issue 2).
- Lancheros, Lady, Marconi, L., Manrique, M., & Mendivelso, M. (2007). Conceptos básicos acerca de las pruebas de actitud. *Avances En Medición*, 5(1), 163–167.
- Li, C. (2015). Confirmatory factor analysis with ordinal data : Comparing robust maximum likelihood and diagonally weighted least squares. *Behavior Research Methods*, 936–949. <https://doi.org/10.3758/s13428-015-0619-7>
- Lina Rodríguez, R., Naveros Gonzales, Y., & Paola Rodríguez, M. (2023). Habilidades de pensamiento crítico y autoeficacia para investigar en estudiantes universitarios. *Revista ConCiencia EPG*, 8(1), 12–23. <https://doi.org/https://doi.org/10.32654/ConCiencia.8-1.2>
- Lucio García, B., & Vázquez Botello, A. (2018). Relationship between critical thinking and academic achievement among senior high school students. *Educar*, 54(2), 411–427. <https://doi.org/10.5565/rev/educar.768>
- Maldonado Suárez, N. (2024). Pruebas de comparación paramétricas. In F. Santoyo Telles & N. Maldonado Suárez (Eds.), *Análisis de Datos en Psicología* (1a Ed., pp. 91–117). Editorial Universidad de Guadalajara. <https://doi.org/9786075812847>
- Manassero-Mas, M. A., & Vázquez-Alonso, Á. (2020). Las destrezas de pensamiento y las calificaciones escolares en educación secundaria: Validación de un instrumento de evaluación libre de cultura. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 48, 33–54.
- Miró Quesada Rda, F. (2022). EL DATAÍSMO COMO IDEOLOGÍA The dataist as an ideology. *Ius Inkarri*, 11(12), 85–104. <https://doi.org/10.59885/iusinkarri.2022.v11n12.04>
- Muñoz San Roque, I. (2002). *Actitudes hacia la estadística y su relación con otras variables en alumnos universitarios del área de las ciencias sociales* [Universidad Pontificia Comillas]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=106022>
- Onwuegbuzie, A. J., & Wilson, V. A. (2003). Statistics Anxiety: Nature, etiology, antecedents, effects, and treatments--a comprehensive review of the literature. *Teaching in Higher Education*, 8(2), 195–209. <https://doi.org/10.1080/1356251032000052447>
- Ordóñez, X. G., Romero, S. J., & De Miguel, C. R. (2016). Cuestionario de actitudes hacia la estadística (Cahe): Evidencias de validez y fiabilidad de las puntuaciones en una muestra de alumnos de educación. *Bordon*, 68(4), 121–136. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2016.41826>

- Rivas, S. F., Saiz, C., & Almeida, L. S. (2023). The Role of Critical Thinking in Predicting and Improving Academic Performance. *Sustainability (Switzerland)*, 15(2), 1–10. <https://doi.org/10.3390/su15021527>
- Roberts, D. M., & Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40(1), 235–238. <https://doi.org/10.1177/001316448004000138>
- Santiuste, V., & Ayala Flores, C. L. (2001). *El pensamiento crítico en la práctica educativa*. Fugaz.
- Santoyo Telles, F. (2022). La enseñanza de la estadística en el contexto de la sociedad del dato: desafíos y reflexiones. *Journal de Ciencias Sociales*, 1(18), 88–106. <https://doi.org/https://doi.org/10.18682/jcs.vi18.4338>
- Santoyo Telles, F., & Maldonado Suárez, N. (2024). *Análisis de Datos en Psicología*. Editorial Universidad de Guadalajara. <https://doi.org/10.32870/9786075812847>
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L., & Vecchio, A. Del. (1995). The Development and Validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868–875. <https://doi.org/10.1177/0013164495055005022>
- Tempelaar, D. T., Van Der Loeff, S. S., & Gijsselaers, W. H. (2007). A Structural Equation Model Analyzing the Relationship of Students' Attitudes Toward Statistics, Prior Reasoning Abilities and Course Performance. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 78–102. <https://doi.org/10.52041/serj.v6i2.486>
- Vilà Baños, R., & Rubio Hurtado, M. J. (2016). Actitudes hacia la Estadística en el alumnado del grado de Pedagogía de la Universidad de Barcelona. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 14(1), 131. <https://doi.org/10.4995/redu.2016.5766>
- Williams, B. (2001). Developing critical reflection for professional practice through problem-based learning. *Journal of Advanced Nursing*, 34(1), 27–34. <https://doi.org/10.1046/j.1365-2648.2001.3411737.x>
- Wise, S. L. (1985). The Development and Validation of a Scale Measuring Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45(2), 401–405. <https://doi.org/10.1177/001316448504500226>



PROYECTOS EN MATEMÁTICAS CON ATENCIÓN A LAS PROBLEMÁTICAS ESCOLARES

MATHEMATICS PROJECTS WITH ATTENTION TO SCHOOL-RELATED PROBLEMS

Jesús Antonio Larios Trejo¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2207-003X>

RESUMEN

Este trabajo consistió en la recopilación y aplicación de proyectos escolares a nivel secundaria, alineados con los principios de la Nueva Escuela Mexicana. Esta reforma educativa pone énfasis en situar al estudiante y su comunidad en el centro de la enseñanza, con el propósito de fomentar un enfoque educativo más contextualizado y relevante. Por ello, resulta fundamental atender las problemáticas identificadas por los estudiantes en su entorno inmediato. En respuesta a esta necesidad, el presente documento expone dos propuestas de proyectos que abordaron problemáticas reales del Estado de Colima. Estos proyectos tienen como objetivo vincular las matemáticas con otras asignaturas, como ciencias (física, química y biología) y ciencias sociales (formación cívica y ética), sin descuidar la formación integral del alumno, y las artes. Ambas propuestas se implementaron en dos escuelas secundarias y demostraron resultados favorables en el desarrollo de habilidades tanto matemáticas como transversales. La integración de diversas disciplinas permitió que los estudiantes no solo adquirieran competencias académicas, sino que también desarrollaran una mayor conciencia de su entorno social y natural. De esta manera, estas iniciativas contribuyen a la visión de formar ciudadanos críticos y comprometidos con su comunidad, al mismo tiempo que refuerzan las habilidades matemáticas para su educación y vida cotidiana.

Palabras clave: Proyectos educativos, problemáticas del contexto, matemáticas, vinculación, disciplina.

ABSTRACT

This work consisted of the compilation and application of school projects at the secondary level, aligned with the principles of the New Mexican School. This educational reform emphasizes placing the student and their community at the center of the teaching process, with the purpose of fostering a more contextualized and relevant educational approach. Therefore, it is essential to address the issues identified by students in their immediate environment. In response to this need, this document presents two project proposals that addressed real-world problems in the State of Colima. These projects aim to connect mathematics with other subjects, such as sciences (physics, chemistry, and biology) and social sciences (civic and ethical education), while also incorporating the student's integral development and the arts. Both proposals were implemented in two secondary schools and showed favorable results in developing both mathematical and transversal skills. The integration of various disciplines allowed students not only to acquire academic competencies but also to develop a greater awareness of their social and natural surroundings. In this way, these initiatives contribute to the vision of forming critical and committed citizens while simultaneously reinforcing mathematical skills essential for their education and daily life.

¹ Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima, Colima, México, 28070. Correo electrónico: jesus_larios@ucol.mx



Keywords: Educational projects, contextual problems, mathematics, linkage, discipline.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la Secretaría de Educación Pública a nivel federal ha promovido un enfoque educativo basado en proyectos cuyo objetivo principal es generar un impacto positivo en las comunidades al abordar las problemáticas que estas enfrentan. Este enfoque busca fomentar una enseñanza más contextualizada y relevante, donde los estudiantes no solo adquieran conocimientos teóricos, sino que también apliquen lo aprendido para resolver situaciones reales. Bajo esta premisa, se ha decidido que los proyectos se centren en las problemáticas que los propios alumnos puedan identificar en su entorno inmediato. Este tipo de trabajo promueve el desarrollo de habilidades críticas, creativas y de resolución de problemas, al tiempo que fortalece el sentido de pertenencia y compromiso de los estudiantes con su comunidad. De esta manera, se busca que los proyectos no solo contribuyan al aprendizaje, sino que también generen un cambio significativo en la realidad social, económica o ambiental que rodea a los alumnos.

Colima es un estado pequeño ubicado en la región oeste de México, que ha enfrentado un alarmante incremento en los índices de inseguridad y violencia en los últimos años. Este problema ha alcanzado proporciones críticas, ya que no solo afecta a la población general, sino además a las comunidades escolares y al entorno social. Según los registros más recientes, Colima ha reportado 743 homicidios dolosos, además del hallazgo de varias fosas clandestinas, lo que lo posiciona entre los estados más afectados por la violencia en todo el país. En 2022, Colima fue clasificado como el estado con el mayor índice de inseguridad y violencia, el mayor índice de seguridad y violencia, posicionamiento muy preocupante. El “Ranking 2022 de las 50 ciudades más violentas del mundo” muestra que Colima registra 181.94 homicidios por cada 100,000 habitantes, una cifra extremadamente alta que refleja la magnitud del problema.

Esta situación no solo afecta a las calles, sino que también se infiltra en las escuelas, de forma que impacta la vida educativa y emocional de los estudiantes. El entorno violento y la inseguridad en el estado crean un ambiente de temor e incertidumbre, lo que afecta el rendimiento académico y la convivencia en las instituciones educativas. Esto genera una urgente necesidad de tomar acciones para combatir esta/la problemática.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) señala que la exposición prolongada a la violencia puede tener graves repercusiones en la salud mental de los jóvenes, como llevarlos a adoptar comportamientos de alto riesgo que afectan su bienestar físico y emocional. Entre estos comportamientos se incluyen el consumo de tabaco, el abuso de alcohol y drogas, y la participación en relaciones sexuales sin protección, lo que incrementa el riesgo de infecciones de transmisión sexual como el VIH (OMS, 2022). Además, la exposición continua a la violencia puede aumentar la propensión a padecer trastornos mentales y emocionales como la depresión, que en casos extremos puede conducir al suicidio.

Este tipo de exposición no solo afecta la salud mental, sino que también incrementa el riesgo de enfermedades crónicas como enfermedades del corazón, diabetes y ciertos tipos de cáncer, debido al estrés prolongado y la adopción de hábitos de vida poco saludables (OMS, 2022). La violencia, por lo tanto, no solo impacta a nivel individual, sino que también tiene consecuencias sociales, como el aumento del crimen y el deterioro del tejido social. Es crucial

atender esta problemática para prevenir tanto los problemas de salud como los conflictos sociales que pueden derivar de la violencia prolongada en la vida de los jóvenes.

Mediante la presente investigación se diseñaron dos proyectos enfocados en atender problemáticas específicas en dos secundarias del estado de Colima. La primera escuela, la Escuela Secundaria General Manuel Álvarez, turno matutino, cuenta con 18 grupos y alrededor de 600 estudiantes. Primero se realizó la evaluación del contexto escolar en el consejo técnico, espacio donde la comunidad de docentes del plantel comenta cuáles son las características de los alumnos durante una fase intensiva al inicio del ciclo escolar y, posteriormente, mes a mes, mediante reuniones el último viernes de cada mes. Tras esta evaluación se detectó que la problemática principal en esta institución es la falta de responsabilidad, tanto en el cumplimiento de las actividades académicas como en el comportamiento general de los estudiantes. Esto ya que el rendimiento académico de los alumnos estaba siendo afectado por notas bajas y se presentaban situaciones de ausentismo, falta de compromiso y apatía hacia el trabajo, sumado a una preocupante situación de conformismo. Esta situación fue definida como *responsabilidad deficiente*, entendida como la falta de voluntad de los alumnos para comprometerse con sus tareas escolares y su entorno social.

En la escuela los maestros señalaron que “los estudiantes no asumen la responsabilidad de sus acciones diarias ni muestran interés por colaborar o ayudar en actividades colectivas” (González, 2023, p. 32). Esta problemática no solo afecta el desempeño académico, sino que también interfiere con el desarrollo de habilidades cívicas y sociales. Según estudios previos, la falta de responsabilidad en la juventud puede conducir a una falta de compromiso con la sociedad en el futuro, lo que puede desencadenar actitudes apáticas hacia la participación ciudadana y la convivencia social (Pérez, 2022). Por ello, en el consejo técnico se acordó que el proyecto educativo se enfocaría en el desarrollo de la responsabilidad, tanto individual como social, a través de actividades que fomenten el trabajo en equipo, el compromiso y la empatía.

El segundo proyecto se implementó en la Escuela Secundaria General Jesús Reyes Heróles, turno vespertino, donde se detectó una problemática más grave y urgente: la violencia. Esta violencia se presenta tanto dentro como fuera de la escuela; destacan casos de *bullying*, consumo de drogas y agresiones físicas y verbales entre los estudiantes. Según el equipo directivo y docente, la situación ha alcanzado niveles alarmantes, con “varios incidentes reportados semanalmente que involucran peleas físicas y conflictos entre alumnos” (Martínez, 2023, p. 51). Estos incidentes no solo han creado un ambiente hostil y peligroso dentro de la escuela; también han afectado el rendimiento académico y la convivencia escolar.

El *bullying* es uno de los problemas más graves en esta institución. Se ha observado un incremento en los casos de acoso físico y psicológico entre estudiantes, lo que ha generado miedo y ansiedad entre los alumnos. Según un informe reciente, el “bullying tiene un impacto devastador en la autoestima y la salud mental de las víctimas, muchas de las cuales llegan a sufrir depresión, ansiedad y bajo rendimiento escolar” (López, 2022, p. 18). Además, el consumo de drogas se ha convertido en un problema recurrente, con varios estudiantes involucrados en el uso de sustancias ilícitas dentro y fuera de la escuela. Estas conductas violentas y riesgosas reflejan la necesidad urgente de intervención para mejorar el clima escolar y fomentar una cultura de paz y respeto.

Ante estas problemáticas, el proyecto en la Secundaria General Jesús Reyes Heróles se centró en la prevención de la violencia y la promoción de habilidades socioemocionales. A través de talleres de concientización, actividades grupales y programas de mentoría, se buscó reducir los niveles de agresión entre los estudiantes, así como promover la empatía y generar un entorno escolar más seguro. Como señala García (2021), “la prevención de la violencia en

las escuelas requiere un enfoque integral que involucre tanto a estudiantes como a maestros y padres de familia” (p. 27).

Los proyectos fueron diseñados para abordar problemas específicos en cada una de las escuelas atendidas mediante la promoción de valores como la responsabilidad, el respeto y la empatía. Mientras que en la Escuela Secundaria Manuel Álvarez se trabajó en desarrollar una mayor conciencia de responsabilidad en los alumnos, en la Secundaria Jesús Reyes Heróles el enfoque se centró en la erradicación de la violencia y el fomento de una convivencia pacífica.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Para el desarrollo de este proyecto se revisaron diferentes referentes teóricos y conceptuales que permiten establecer un marco sólido en torno a lo que constituye un proyecto educativo y las habilidades que se pueden desarrollar, particularmente en el área de las matemáticas. La noción de proyecto educativo implica más que la simple realización de actividades; se trata de una herramienta clave dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizada por las escuelas con la finalidad de atender problemáticas específicas que surgen en su entorno inmediato. Según señala la Nueva Escuela Mexicana (NEM), el objetivo de los proyectos escolares es proporcionar a las instituciones educativas la libertad y capacidad de generar estrategias propias que permitan no solo la resolución de los problemas que afectan a la comunidad escolar, sino que también considera las desarrolladas a nivel escolar y áulico, sino también la prevención de futuras dificultades.

Es importante resaltar que los proyectos educativos no son estáticos; por el contrario, requieren la participación de toda la comunidad escolar para garantizar su éxito. Como menciona Bolívar (2018): “la implicación de los diferentes actores en el proceso educativo, incluyendo padres, maestros, alumnos y personal administrativo, es fundamental para que el proyecto tenga un impacto real en la formación integral de los estudiantes” (p. 76). Esta visión integral de la educación es clave en la formación de comunidades de aprendizaje que promuevan el desarrollo de competencias tanto académicas como sociales.

En el área de las matemáticas, los proyectos educativos pueden desempeñar un papel crucial para el desarrollo de habilidades específicas, tales como la resolución de problemas, el razonamiento lógico y la capacidad de pensamiento crítico. García y Martínez (2020) argumentan que “los proyectos educativos en matemáticas no solo permiten a los estudiantes comprender los conceptos teóricos de manera más profunda, sino que también fomentan la aplicación práctica de estos conocimientos a situaciones reales, lo que refuerza su comprensión y utilidad” (p. 45). Así, las matemáticas se convierten en una herramienta para la vida, que va más allá del salón de clases.

Además, un aspecto central que destaca la NEM es la necesidad de contextualizar los proyectos educativos de acuerdo con las características y necesidades específicas de cada comunidad escolar. Esto significa que los proyectos no deben ser replicados de manera uniforme en todas las escuelas, sino que deben adaptarse a las realidades sociales, culturales y económicas de cada grupo de estudiantes. Como señala Pérez (2019), “la personalización de los proyectos educativos garantiza que se aborden de manera efectiva los desafíos únicos de cada comunidad, lo que permite un aprendizaje más significativo y pertinente para los estudiantes” (p. 98). Esta personalización, además, promueve una mayor conexión entre la escuela y su entorno al involucrar a las familias y a la comunidad en el proceso educativo, lo que refuerza el sentido de pertenencia y colaboración.

Debemos de tener presente que los proyectos educativos, tal como se plantean en el marco de la Nueva Escuela Mexicana, representan una estrategia fundamental para abordar las problemáticas específicas que enfrentan las comunidades escolares. Al involucrar a toda la comunidad educativa y adaptar los proyectos a las necesidades particulares de cada grupo, se crea un entorno propicio para el aprendizaje significativo, especialmente en áreas como las matemáticas, donde se desarrollan habilidades clave para el desarrollo cognitivo y social de los estudiantes.

Aunque muchos de los proyectos se desarrollan en comunidad, hay que recordar que los proyectos pedagógicos, según Méndez (2001),

buscan desarrollar aprendizajes individuales o colectivos, a partir de la correlación entre los ejes temáticos de los programas de estudio y la resolución de problemas que surjan de la vida cotidiana del estudiantado, de manera tal que se dé un proceso de construcción a partir del cual se generen resultados que se pueden visualizar con la presentación de una investigación, un video, variadas representaciones artísticas (obras de teatro, murales, pinturas, canciones, poemas). (p. 5)

Sin duda alguna, se busca vincular los aprendizajes con la vida cotidiana del estudiantado, lo que permite un proceso de construcción del conocimiento significativo. Al integrar la resolución de problemas reales y las expresiones creativas que los alumnos logran tener, se fomenta y fortalece un aprendizaje tanto autónomo e individual como colectivo, el cual trasciende fuera del aula. Esto refuerza la idea de que la educación debe ser dinámica y contextualizada para generar resultados tangibles y relevantes para los alumnos. Aunado a lo anterior, se establece por parte de Guerrero y Terrones (2003) que

los proyectos permiten a los alumnos desarrollar competencias, así como habilidades específicas para planificar, organizar y llevar a cabo una tarea común en entornos reales. Así, se organizan en equipos de trabajo, asumen responsabilidades individuales y grupales, realizan indagaciones o investigaciones, solucionan problemas, construyen acuerdos, toman decisiones y colaboran. (p. 53)

Morejón (2011) plantea que el “proyecto educativo es una forma de organización del aprendizaje en la que maestros, maestras, estudiantes y familia buscan, en conjunto, solución a un problema de su interés, preferiblemente con relevancia social, mediante un proceso activo y participativo” (p. 34). Esta definición destaca la importancia de la colaboración y la implicación de diversos actores en la educación, pues enriquece el proceso de aprendizaje. La metodología de los proyectos educativos no solo involucra a los estudiantes, sino que también fomenta la participación de la familia y la comunidad en la búsqueda de soluciones. Así, este enfoque participativo promueve el desarrollo de habilidades individuales y fortalece la cohesión comunitaria.

Al considerar la adolescencia como una etapa crucial en el desarrollo humano, es fundamental entender que los adolescentes se enfrentan a una amplia gama de situaciones y decisiones que impactan su crecimiento personal y académico. Este periodo de la vida es especialmente relevante para el desarrollo de competencias fundamentales, como las habilidades matemáticas. Arriaga (2001) sostiene que la habilidad matemática es una construcción social que permite a las personas buscar y utilizar conceptos, propiedades, relaciones y procedimientos matemáticos necesarios para resolver problemas. Este enfoque señala que la matemática no es simplemente un conjunto de reglas abstractas, sino una herramienta que ayuda a comprender y resolver problemas del mundo real.

Tobón (2010) también destaca la importancia de los proyectos educativos al señalar que “todo proyecto busca abordar problemas en el contexto, y en ese sentido es la estrategia más integral para la formación y evaluación de las competencias” (p. 01). Los proyectos educativos

no solo se enfocan en la enseñanza de conocimientos teóricos, sino que también promueven la aplicación de estos conocimientos a situaciones prácticas, lo que refuerza la comprensión y el desarrollo de competencias esenciales, como la capacidad de resolver problemas, trabajar en equipo y aplicar el conocimiento en situaciones reales.

2.1 La matemática educativa y los proyectos

En el contexto de la educación matemática, el enfoque en proyectos adquiere una importancia particular. Constantemente, los profesores de matemáticas indican a los estudiantes que lleven a cabo la transición de un lenguaje común a un lenguaje algebraico, ya que es uno de los aprendizajes clave que deben desarrollar en la educación secundaria. Esta transición es fundamental para desarrollar la competencia de modelar, es decir, transformar un problema del mundo real a un modelo matemático que permita analizar y entender mejor el entorno. Según Montiel (2017), “el análisis matemático permite predecir el comportamiento de eventos climatológicos no deseados” (p. 62). Este ejemplo ilustra cómo las matemáticas no solo son útiles para resolver problemas abstractos, sino que también tienen aplicaciones prácticas en la vida cotidiana, como la predicción de fenómenos naturales.

El enfoque de proyectos educativos fomenta tanto el aprendizaje individual cuanto las competencias colectivas, como el trabajo en equipo, la comunicación efectiva y la colaboración para la resolución de problemas. Según Morejón (2011), el proceso activo y participativo que caracteriza a los proyectos educativos permite a los estudiantes desarrollar una comprensión más profunda de los problemas que enfrentan y encontrar soluciones que sean tanto creativas como efectivas. Este enfoque es particularmente relevante en el contexto de las matemáticas, donde la resolución de problemas requiere no solo conocimientos técnicos, sino además la capacidad de pensar críticamente y de manera colaborativa.

Desde una perspectiva educativa, es fundamental reconocer que la matemática, lejos de ser una disciplina aislada, realmente es una herramienta para comprender el mundo. Como se mencionó, la capacidad de hacer modelos matemáticos a partir de situaciones reales es una competencia clave que permite a los estudiantes entender fenómenos complejos y predecir comportamientos en diversas áreas, desde la economía hasta las ciencias naturales. Según García (2019), “el proceso de modelización matemática no solo facilita la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también permite a los estudiantes aplicar estos conceptos en contextos reales, lo que refuerza su utilidad y relevancia” (p. 83).

Este enfoque integrador de la educación matemática es esencial para preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos del mundo moderno. En lugar de ver las matemáticas como una serie de reglas y fórmulas que deben memorizarse, los estudiantes aprenden a utilizarlas como herramientas para resolver problemas reales. Esto no solo mejora su comprensión de la matemática, sino que también les permite desarrollar habilidades críticas, como el pensamiento analítico, la resolución de problemas y la toma de decisiones.

La metodología de los proyectos educativos también fomenta el desarrollo de habilidades interpersonales como la comunicación, el liderazgo y la colaboración. Estos proyectos permiten a los estudiantes trabajar en equipo, compartir ideas y encontrar soluciones conjuntas a los problemas. Según Díaz (2020), “los proyectos educativos fomentan un entorno de aprendizaje colaborativo en el que los estudiantes aprenden no solo de sus profesores, sino también de sus compañeros, lo que enriquece el proceso de aprendizaje y promueve el desarrollo de competencias sociales” (p. 67). Esta colaboración es especialmente importante en el

contexto de las matemáticas, donde la resolución de problemas a menudo requiere la combinación de diferentes perspectivas y enfoques.

Además, el enfoque en proyectos permite a los estudiantes conectar lo que aprenden en la escuela con su vida cotidiana. Esto no solo hace que el aprendizaje sea más significativo, sino que también les ayuda a desarrollar una comprensión más profunda y duradera de los conceptos matemáticos. Según Santos (2018), “cuando los estudiantes pueden ver cómo los conceptos matemáticos se aplican a su vida diaria, están más motivados para aprender y son más propensos a retener lo que han aprendido” (p. 94).

El enfoque de proyectos educativos también es una estrategia efectiva para la evaluación de competencias. En lugar de evaluar a los estudiantes únicamente a través de exámenes y pruebas escritas, los proyectos permiten a los docentes evaluar una amplia gama de habilidades, entre ellas la capacidad de trabajar en equipo, la resolución de problemas, la creatividad y la capacidad de aplicar el conocimiento en situaciones reales. Según Tobón (2010), “la evaluación basada en proyectos es una forma más holística de medir el aprendizaje, ya que permite a los docentes evaluar tanto las competencias académicas como las habilidades interpersonales” (p. 1).

Por lo tanto, este tipo de proyectos no solo promueven el aprendizaje de los estudiantes, sino que también proporcionan a los docentes una herramienta valiosa para evaluar el progreso de los estudiantes de manera más completa. Al enfocarse en la aplicación práctica de los conocimientos, los proyectos permiten a los docentes ver cómo los estudiantes están utilizando lo que han aprendido para resolver problemas reales, y esto les proporciona una visión más clara de sus habilidades y competencias.

Como señala Pérez (2019), “la matemática educativa debe ser vista como una herramienta para la vida, no solo como un conjunto de conocimientos abstractos, sino como una disciplina que nos ayuda a entender y resolver problemas en el mundo que nos rodea” (p. 102).

Visto lo anterior, se puede afirmar que los proyectos educativos son una metodología eficaz para promover el desarrollo de competencias tanto individuales como colectivas. Al involucrar a toda la comunidad escolar y fomentar la participación activa de los estudiantes, los proyectos no solo mejoran el aprendizaje, sino que también fortalecen las habilidades sociales y la capacidad de resolver problemas. En el contexto de la educación matemática, los proyectos permiten a los estudiantes aplicar los conceptos matemáticos a situaciones reales, lo que no solo mejora su comprensión, sino que también les ayuda a desarrollar habilidades críticas para su vida futura.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

El trabajo realizado siguió la metodología de proyectos educativos, de forma que se estructuró en varias fases para asegurar un proceso de aprendizaje significativo y orientado a la resolución de problemas reales. El proyecto principal, “Sembrando Vida”, se implementó durante los meses de noviembre, diciembre 2023, enero y febrero del 2024, con un enfoque centrado en el desarrollo de habilidades algebraicas y la resolución de ecuaciones cuadráticas. Este proyecto forma parte del Plan de Desarrollo de Aprendizaje (PDA), cuya finalidad es integrar los conocimientos matemáticos con situaciones del entorno de los estudiantes. Los objetivos del estudio, los métodos, los instrumentos utilizados y las técnicas aplicadas se detallan a continuación.

Desde el enfoque metodológico, este trabajo se alinea con el enfoque constructivista, que busca que los estudiantes construyan su conocimiento mediante la interacción con su entorno y la resolución de problemas reales. Vygotsky (1978) afirma que el aprendizaje es un proceso social, donde la interacción con los compañeros y la guía del docente facilitan el desarrollo de nuevas competencias. En este caso, los proyectos educativos permiten a los estudiantes aplicar los conocimientos matemáticos en la práctica, lo que fomenta un aprendizaje más significativo y contextualizado.

El tipo de investigación utilizado es el de investigación-acción, dado que no solo se busca observar el comportamiento de los estudiantes, sino intervenir directamente en el proceso educativo para generar mejoras tanto en el aprendizaje como en la comunidad. Esta metodología es adecuada para contextos escolares donde la acción educativa puede generar un impacto directo en la vida de los estudiantes y su entorno inmediato (Carr y Kemmis, 1986). La investigación-acción se caracteriza por ser cíclica; es decir, implica un proceso continuo de planificación, acción, observación y reflexión.

3.1 Objetivos del Estudio

- Los objetivos del proyecto “Sembrando Vida” son múltiples. En términos de contenido matemático, el proyecto busca desarrollar las siguientes competencias específicas en álgebra:
 - Representar algebraicamente áreas que generan una expresión cuadrática.
 - Resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $Ax^2+Bx+C=0$ $Ax^2 + Bx + C = 0$ utilizando factorización y la fórmula general.
 - Aplicar el álgebra para resolver problemas cuyo planteamiento sea una ecuación cuadrática.
 - Modelar y resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante distintos métodos (sustitución, igualación, etc.).

Los objetivos del proyecto “Imágenes que prevén” son diversos, de igual manera, pero en términos de contenido buscan que el alumno:

- Visualice los puntos en el plano cartesiano, conociendo sus elementos.
- Realice ajustes y reproduzca imágenes que lo lleven a una reflexión sobre su situación de violencia; tanto si la ejerce como si está pasando por ella.

Además, los objetivos generales incluyen lo siguiente:

- Fomentar la responsabilidad social y comunitaria entre los estudiantes, guiándolos para que identifiquen problemas en su entorno y propongan soluciones que mejoren su calidad de vida.

- Promover el aprendizaje interdisciplinario, vinculando los conocimientos de matemáticas con otros campos, como la biología y la ecología, a través de la investigación sobre plantas locales.
- Desarrollar competencias transversales como el trabajo en equipo, la investigación, la toma de decisiones y la comunicación efectiva.

Se emplearon varios métodos para llevar a cabo el proyecto, de los que destacó el método de proyectos como el eje central de la intervención educativa. Este método se caracteriza por estar orientado a la resolución de problemas concretos que emergen de la realidad de los estudiantes. Según Morejón (2011), los proyectos educativos “fomentan un aprendizaje activo y participativo, donde estudiantes, maestros y familias trabajan juntos para encontrar soluciones a problemas de interés común” (p. 34).

Dentro de las técnicas pedagógicas utilizadas, se aplicaron:

- **Lluvia de ideas:** En la fase inicial del proyecto, se llevó a cabo una sesión de lluvia de ideas en la que los estudiantes identificaron los problemas de su comunidad, tales como la contaminación, la falta de cuidado de los espacios públicos y la inseguridad.
- **Investigación documental:** Los estudiantes investigaron sobre las plantas nativas de la región, así como sobre los procesos de germinación y crecimiento. Esta fase fomentó el desarrollo de habilidades de búsqueda, análisis y síntesis de información.
- **Debate y toma de decisiones:** En la fase de discusión, los estudiantes participaron en debates para decidir qué acciones podían llevar a cabo para mejorar su comunidad, surgiendo de este proceso la idea de “Sembrando Vida”, que se centraba en la mejora de los espacios públicos mediante la siembra de plantas.
- **Modelización matemática:** Los alumnos utilizaron el álgebra para representar y modelar los datos que obtuvieron durante la fase de investigación, tales como el tiempo de crecimiento de las plantas y los espacios necesarios para su desarrollo.

3.2 Instrumentos y Procedimientos

Para medir el progreso de los estudiantes y la efectividad del proyecto se utilizaron diversos instrumentos de evaluación.

Cuestionarios iniciales: Al inicio del proyecto se aplicó un cuestionario a los estudiantes con preguntas indagatorias sobre su comunidad, tales como: “¿qué problemas ves en tu colonia?”, “¿cómo te sientes en la escuela?”, “¿qué hace falta para estar bien en tu comunidad?”. Estas preguntas ayudaron a establecer una línea base sobre las percepciones de los estudiantes.

Bitácoras de trabajo: Durante el desarrollo del proyecto los estudiantes mantuvieron una bitácora donde registraron sus avances e incluyeron la investigación sobre las plantas y los cálculos algebraicos realizados.

Observación directa: Se empleó la técnica de observación directa para evaluar la participación activa de los estudiantes durante las distintas fases del proyecto, así como su capacidad para trabajar en equipo y resolver problemas.

Evaluación por rúbricas: Para la evaluación final del proyecto se utilizó una rúbrica que evaluó tanto los aspectos matemáticos (resolución de ecuaciones cuadráticas, modelización de sistemas de ecuaciones) como el compromiso social y el trabajo colaborativo.

3.3 Contexto y Entorno

El contexto en el que se desarrolló este proyecto es una escuela secundaria situada en una comunidad urbana con diversos problemas sociales, como la contaminación, la inseguridad y el descuido de los espacios públicos. La escuela está compuesta por estudiantes de bajos recursos económicos, lo que hace que la responsabilidad social y el cuidado del entorno sean temas de suma relevancia.

El proyecto “Sembrando Vida” no solo tuvo un impacto en el aprendizaje académico de los estudiantes, sino que también les permitió desarrollar un sentido de responsabilidad hacia su comunidad. A través de la participación activa y la colaboración, los estudiantes adquirieron competencias matemáticas, así como habilidades sociales y valores fundamentales, como el respeto por el medio ambiente y la importancia de trabajar en equipo para lograr un bien común.

3.4 Fases del Proyecto

El proyecto “Sembrando Vida” se estructuró en tres fases:

- Fase 01. Elementos previos: Durante el mes de octubre se identificó la problemática principal: la falta de responsabilidad social entre los estudiantes y la poca atención al cuidado de los espacios públicos. En esta fase, se realizaron preguntas exploratorias para que los estudiantes reflexionaran sobre su entorno.
- Fase 02. Interrogantes: En esta etapa, los estudiantes debatieron sobre cómo podrían mejorar su comunidad, y se llegó a la conclusión de que la siembra de plantas frutales, de flores y hortalizas podría ser una solución viable. Los alumnos investigaron las características de las plantas locales, incluyendo los tiempos de germinación y los requisitos del tipo de suelo.
- Fase 03. Aplicación: Finalmente, los estudiantes trajeron semillas de diversas plantas y comenzaron el proceso de siembra, aplicando los conocimientos matemáticos adquiridos para modelar el crecimiento de las plantas. En sus cuadernos, trazaron tablas con los valores donde registraron el crecimiento de las plantas y el tiempo necesario para su desarrollo. La Tabla 1 muestra un ejemplo de la tabla de llenado.

Tabla 1. Ejemplo de tabla de llenado.

	X (tiempo)	Y (altura)
Planta 1		
Planta 2		
Planta 3		

Fuente: Elaboración propia.

El registro de crecimiento se llevó a lo largo de todo el periodo. Durante las tres primeras semanas se estuvieron llevando las plantas por parte de los alumnos, cuando las plantas superaron el tamaño óptimo para ser transportada, se establecieron en un espacio específico.

Fase 04. Presentación: Consistió en la presentación de los proyectos, primeramente, en el aula, y posteriormente a la comunidad escolar en ambientes abiertos tales como la junta de padres de familia, donde ellos debían argumentar qué habían encontrado y cómo era el crecimiento de la planta. Tras la presentación de los estudiantes, estos autoevaluaron su trabajo realizado considerando elementos como la argumentación y la exposición realizada. De igual manera, entregaron su trabajo escrito con la guía mostrada en la Tabla 2.

Tabla 2. Guía del proyecto.

Proyecto “Sembrando vida”

Elementos que de contener el proyecto

- a) Portada con los datos de la institución / nombre del alumno/ nombre del profesor y materia.
- b) Introducción de una cuartilla de lo que se trabajó en el proyecto.
- c) Desarrollo del proyecto

- 1) Investigación de 5 cuartilla de las diversas plantas que se utilizaron en su proyecto de sembrando vida considerando los elementos matemáticos de las plantas como:
 - Tiempo de crecimiento de la planta.
 - Tiempo de vida de la planta.
 - Periodo de acuerdo al clima y cuidado.
- 2) Diario de 10 revisiones de la planta las cuales se estuvieron registrando en su cuaderno (1 hoja por registro)
 - Pasar en limpio
 - Colocar los dibujos que se realizaron y el registro de la misma.
- 3) Graficar el crecimiento de la planta en un gráfico poligonal

Ejemplo

Año	Valor
Año 1	\$15.00
Año 2	\$17.50
Año 3	\$14.00
Año 4	\$9.00
Año 5	\$14.50
Año 6	\$13.50
Año 7	\$19.50
Año 8	\$18.50
Año 9	\$23.00
Año 10	\$16.50

- 4) Investigar que es una ecuación lineal y cuadrática traer mínimo 5 ejemplos de cada una de ellas. (5 cuartillas mínimo)
- d) Conclusión de la actividad donde describan que aprendieron sobre el proyecto en la parte matemática y especificar que se realizó, y como impacta en la responsabilidad ambiental, y personal.
- e) El trabajo se entregará de manera formal el día 29 de febrero del presente año en carpeta o engargolado, con todos los elementos solicitados.
- f) Terminar con la firma de padre o madre de familia quien da fe del proyecto y del cuidado de la planta

Fuente: Elaboración propia. Las mismas fases se emplearon para ambos proyectos.

4. RESULTADOS Y REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados del proyecto “Sembrando Vida” muestran que la mayoría de los alumnos lograron un aprendizaje significativo al integrar conceptos matemáticos con actividades prácticas relacionadas con la mejora de su comunidad. Uno de los principales indicadores de éxito fue el entusiasmo demostrado por los estudiantes al participar activamente en cada fase del proyecto. Los alumnos se involucraron tanto en la investigación sobre las plantas locales como en la aplicación de conocimientos algebraicos para modelar y predecir el crecimiento de las especies sembradas.

Durante las actividades se pudo observar que los estudiantes desarrollaron habilidades críticas en matemáticas, como la resolución de ecuaciones cuadráticas y la modelización de sistemas de ecuaciones mediante su aplicación a situaciones reales. El uso de estas herramientas les permitió comprender cómo los conceptos abstractos que se aprenden en el aula tienen una utilidad práctica en la vida cotidiana. Al abordar problemas comunitarios como el descuido de los espacios públicos y proponer soluciones concretas, los alumnos también fortalecieron competencias sociales y de trabajo en equipo.

Un aspecto sobresaliente del proyecto fue la constante reflexión sobre el proceso, lo que permitió a los estudiantes no solo consolidar los aprendizajes, sino también identificar áreas de mejora tanto en lo académico como en lo social. Los alumnos, mediante el debate y la toma de decisiones, adquirieron una mayor conciencia de su entorno y del impacto de sus acciones en la comunidad.

El proyecto logró sus objetivos académicos y, además, fomentó el compromiso social y la responsabilidad ambiental entre los estudiantes, quienes comprendieron la importancia de ser actores de cambio en su comunidad. Esto evidenció un proceso de aprendizaje integral que fue más allá de los contenidos curriculares tradicionales.

4.1 Evidencia del trabajo realizado

Figura 1. Proyecto “Sembrando vida”.



Fuente: Fotografía tomada de los proyectos de los alumnos.

Figura 2. Proyecto Imágenes que prevén.

Fuente: Fotografía tomada de los proyectos de los alumnos.

Entre las habilidades más significativas que los alumnos desarrollaron a lo largo del proyecto, destacan las siguientes:

Investigación y redacción: Los estudiantes realizaron una investigación exhaustiva sobre las plantas nativas de su estado, recopilando información sobre los ciclos de germinación y las características del suelo necesario para su crecimiento. Mientras, en el segundo proyecto los alumnos pudieron analizar los tipos de violencia que podían llegar a sufrir, así como cada uno de los agentes, lo que llevó a que algunos de los participantes se vieran reflejados en las dinámicas tratadas. Este proceso no solo fortaleció sus habilidades de búsqueda y análisis de información, sino que también los impulsó a mejorar su capacidad de redacción, lo que contribuye al campo formativo de Lenguajes. La redacción clara y precisa de sus hallazgos les permitió comunicar eficazmente los resultados obtenidos, lo que también incrementó su habilidad para organizar ideas de manera coherente.

Argumentación y graficación: A lo largo del proyecto, los alumnos tuvieron la oportunidad de presentar sus ideas y defender sus puntos de vista, tanto en debates como en la planificación del proyecto. La capacidad de argumentar de manera lógica y fundamentada es esencial en el desarrollo del pensamiento crítico, de forma que contribuye al campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico. Además, al graficar los datos obtenidos en sus investigaciones, como el crecimiento de las plantas en función del tiempo, los estudiantes lograron una comprensión más profunda de las representaciones matemáticas, por lo que se fortaleció su pensamiento analítico, sumado a que lograron diseñar imágenes en los planos cartesianos mediante la unión de puntos.

Representación, recolección de datos y análisis de información: El proyecto involucró una fase significativa de recolección de datos, en la que los estudiantes registraron información sobre las plantas y crearon tablas para analizar su crecimiento. Estos datos fueron luego representados mediante modelos matemáticos, lo que permitió a los alumnos visualizar cómo

las ecuaciones lineales y cuadráticas pueden aplicarse a situaciones reales. Estas actividades también se alinean con el campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico, pues ayudan a los estudiantes a desarrollar competencias en análisis de datos y resolución de problemas.

Además de estas habilidades, el proyecto estuvo directamente vinculado a los Planes de Desarrollo de Aprendizaje (PDA) relacionados con la ubicación de puntos y el manejo de ecuaciones lineales y cuadráticas. Los estudiantes no solo aprendieron a resolver ecuaciones de manera abstracta, sino que también aplicaron estos conocimientos para modelar y resolver problemas que surgieron durante la planificación y ejecución del proyecto, lo que contribuyó significativamente a su aprendizaje práctico y contextualizado.

La cuestión de la inseguridad ciudadana es una realidad que se vive en el estado, y esta es una de las primeras propuestas que se plantean para atender problemáticas mediante proyectos que vinculen el área de las matemáticas con problemáticas reales. Debemos aceptar que este enfoque permite que los estudiantes vean la matemática no como un conjunto de conocimientos abstractos, sino como una herramienta poderosa para resolver desafíos concretos en su comunidad. Los problemas ambientales, como la falta de cuidado de los espacios públicos o la contaminación, pueden abordarse a través de proyectos matemáticos que, además de mejorar las competencias académicas de los estudiantes, promuevan un mayor sentido de responsabilidad social.

Con base en estos resultados, se está construyendo un manual de actividades que integre proyectos similares a “Sembrando Vida” e “Imágenes que prevén”. Este manual estaría diseñado específicamente para estudiantes de educación secundaria, con la intención de ofrecerles una guía estructurada que les permita vincular los conceptos matemáticos con problemáticas locales. Al incluir actividades prácticas y contextualizadas, el manual fomentará el aprendizaje de las matemáticas y ayudará a los estudiantes a desarrollar competencias interdisciplinarias y transversales, como la investigación, la argumentación, el análisis de datos y la resolución de problemas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

JALT concibió la idea presentada, adaptó la metodología a este contexto, creó las secuencias, realizó las actividades y recopiló los datos.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, JALT, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Secundarias Manuel Álvarez Turno Matutino, y la Secundaria Jesús Reyes Heróles Turno Vespertino, que abrieron las puertas para poder desarrollar estos proyectos, y principalmente a los adolescentes que participaron y desarrollaron con ánimo y buena actitud las actividades.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arriaga, M. (2001). Estrategias constructivistas para mejorar la habilidad del razonamiento en solución de problemas. Universidad Autónoma de Nuevo León. <http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1020147469.PDF>
- Bolívar, A. (2018). Comunidades de aprendizaje: un enfoque integral en la educación. Ediciones Educativas.
- Carr, W. y Kemmis, S. (1986). Teoría crítica de la enseñanza. Morata.
- Díaz, M. (2020). Aprendizaje colaborativo en proyectos educativos. Ediciones Pedagógicas.
- García, F. (2019). Modelización matemática en contextos reales. Editorial Académica.
- García, F. y Martínez, L. (2020). Proyectos educativos en matemáticas: teoría y práctica. Editorial Académica.
- García, S. (2021). Prevención de la violencia escolar: Estrategias efectivas. Editorial de Ciencias Sociales.
- González, M. (2023). Educación y responsabilidad social en adolescentes. Editorial Educativa.
- Guerrero, L. y Terrones, D. (2003). Repertorio de estrategias pedagógicas. PROMEB, Piura.
- López, P. (2022). Bullying en el ámbito escolar: Consecuencias y prevención. Ediciones Humanas.
- Martínez, J. (2023). Violencia en las escuelas: Un estudio de caso en Colima. Editorial Académica.
- Méndez, Z. (2001). Aprendizaje y cognición. Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- Montiel, D. (2017). Modelo matemático para la evaluación de peligros naturales mediante información geográfica. *Telemática*, 16(1), 60-80. <https://www.redalyc.org/pdf/784/78455666004.pdf>
- Morejón Cárdenas, N. (2011). Los proyectos educativos en las universidades: La inclusión del propio estudiante como centro de los proyectos educativos. Ediciones Educativas.
- Morejón, A. (2011). Proyectos educativos: Una metodología participativa. Ediciones Educativas.
- Organización Mundial de la Salud. (2022). Violence and health. World Health Organization.
- Pérez, L. (2019). Matemática educativa: una herramienta para la vida. Editorial Matemática.
- Pérez, L. (2022). Responsabilidad cívica en la educación secundaria: Un reto actual. Instituto de Investigación Educativa.
- Pérez, M. (2019). Personalización y contexto en los proyectos educativos. Ediciones Pedagógicas.
- Santos, E. (2018). Motivación y aprendizaje en la educación matemática. Ediciones Pedagógicas.
- Secretaría de Educación Pública. (2022). Lineamientos de la Nueva Escuela Mexicana. Secretaría de Educación Pública.
- Tobón, S. (2010). El modelo por competencias en las prácticas docentes: Hacia escenarios significativos de vida. Conrrumbo.
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.



DISEÑO DE UNA TAREA FENOMENOLÓGICA PARA LA EXPLORACIÓN DEDUCTIVA DE LA REGLA DE LA CADENA EN VARIAS VARIABLES

DESIGN OF A PHENOMENOLOGICAL TASK FOR DEDUCTIVE EXPLORATION OF THE CHAIN RULE IN SEVERAL VARIABLES

Eduardo Emiliano Muñoz Ortiz¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7828-5016>

Priscilla M. Angulo Chaves²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-2757-2136>

Carlos Robles Padilla³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-2875-0428>

Axcel Picado Piedra⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-3046-3196>

RESUMEN

Se presenta una ruta para el diseño de una tarea fenomenológica matemática y se expone el análisis realizado de una implementación, en el contexto del curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II, sobre la regla de la cadena en varias variables, usando la metodología de *Design Thinking*, considerando la teoría de Escenarios de Aprendizaje de Carroll y basado en los Principios de Diseño de Matos. Con el diseño del problema propuesto en la tarea, se buscó alcanzar una mejor comprensión de jerarquía y las relaciones entre las variables involucradas que favoreció la consolidación del *procept* asociado al teorema de la regla de la cadena en varias variables acorde a lo expuesto por Tall. Como la tarea proporcionó un contexto cercano al área disciplinar, propició que el estudiantado identificara la composición de funciones en varias variables y que tomara sentido al diagrama de árbol de dependencias entre las variables, útil en la aplicación del teorema.

Palabras clave: Regla de la cadena multivariable, Tarea fenomenológica, Escenarios de Aprendizaje, Principios de Diseño, Procept.

1 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: eduardo.munos@ucr.ac.cr

2 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: priscilla.angulo@ucr.ac.cr

3 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: carlos.roblespadilla@ucr.ac.cr

4 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: axcel.picado@ucr.ac.cr



ABSTRACT

In this document a route for the design of a mathematical phenomenological task is presented. For exemplify, we make an analysis of its implementation, in the context of the course MA-1022 *Cálculo para Ciencias Económicas II* focused on the chain rule in several variables. Our theoretical background is the Design Thinking methodology, considering the theory of Carroll's Learning Scenarios and based on Matos's Design Principles. With the design of the problem proposed in the task, we sought to achieve a better understanding of hierarchy and the relationships between the variables involved, which favored the consolidation of the *procept* associated with the chain rule theorem in several variables according to Tall. As the task provided a context close to the disciplinary area, it allowed students to identify the composition of functions in several variables and to make sense of the tree diagram of dependencies between variables, useful in the application of the theorem.

Keywords: Multivariable Chain Rule, Phenomenological Task, Learning Scenarios, Design Principles, Procept.

1. INTRODUCCIÓN

Como parte de la planificación de un curso universitario, los y las docentes suelen consultar referencias bibliográficas para considerar elementos metodológicos e insumos para la evaluación; sin embargo, en dichas referencias es difícil encontrar conceptos apropiadamente contextualizados para poblaciones específicas, y esto suele ser más notorio a medida que se aborda conocimiento matemático avanzado.

De manera específica en el ámbito de las Ciencias Económicas, Mejía (2010) citado por Puig et al. (2015, p. 414) indica que:

el mejor análisis matemático es aquel que, durante su desarrollo ha sido capaz de enriquecer nuestra concepción intuitiva del fenómeno hasta el nivel suficiente para encontrar lógica la solución obtenida. Se debe lograr que los estudiantes entiendan la importancia de lo que aprenden para su profesión y apliquen estos contenidos en la solución de problemas modelados, del contexto económico. De esta manera se desarrolla la intuición matemática en el análisis de fenómenos económicos.

Esto evidencia la necesidad de desarrollar herramientas que permitan la elaboración de tareas debidamente contextualizadas, por lo tanto, se establece como objetivo el proponer una ruta para el diseño de tareas fenomenológicas que consideren elementos del contexto en su enunciado, y que faciliten la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos desde un enfoque exploratorio.

Con esa finalidad, en este artículo se expone una guía para la elaboración de tareas y se muestra un ejemplo del diseño e implementación de una tarea fenomenológica contextualizada en Ciencias Económicas sobre la regla de la cadena en varias variables, donde se buscó que el estudiantado comprendiera la estrategia de derivar composición de funciones en varias variables y, en consecuencia, el reconocimiento de la utilidad del diagrama de árbol.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

En esta sección se abordan los elementos teóricos que fundamentan la propuesta de diseño. En primer lugar, se describe qué es el *Design Thinking* como metodología de enseñanza y aprendizaje. Seguidamente, se presenta el pensamiento matemático avanzado, así como la fundamentación matemática de la regla de la cadena en varias variables. Se presentan ejemplos de cómo se aborda el tema en diversos libros de texto y, finalmente, se comentan algunas barreras de aprendizaje que presentan los y las estudiantes cuando aprenden sobre el tema.

2.1. Design Thinking

El *Design Thinking* (DT) ha sido implementado anteriormente por gran variedad de autores, recientemente en sus estudios metodológicos para el aprendizaje significativo, Izquierdo Izquierdo et al. (2022, p. 3) se refiere de la siguiente manera:

El DT aplicado en el aula, se puede concebir como una metodología centrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado integrando las necesidades o dificultades que plantea este en la asimilación de conceptos académicos con su capacidad para resolver y afrontar problemas con el fin de conseguir los objetivos didácticos de cualquier rama del conocimiento.

Para Gasca (2015), citado por Latorre-Coscolluela et al. (2020), uno de los puntos más importantes de esta metodología establece de carácter indispensable la conexión entre el pensamiento racional y lógico con el intuitivo, cuya finalidad consiste en la exploración de diferentes soluciones válidas, al procurar que las personas estudiantes no solo apliquen procesos dados con anterioridad.

Para este aprendizaje exploratorio, el *Design Thinking* se centra en tres fases específicas: introducción y presentación de una tarea, trabajo autónomo por parte de los estudiantes y discusión colectiva con una síntesis formativa. Dividiendo el trabajo de esta forma, se promueven las técnicas y desarrollo de competencias, se incentiva la participación y el intercambio de ideas críticas, así como la investigación constante con el fin de aprender a crear soluciones para problemas en diferentes contextos (Aguirre-Villalobos et al., 2023, p. 522).

2.1.1. Principios de escenario de aprendizaje

Carroll (2000) plantea la necesidad de estudiar cómo se transforma el sistema relacional del cual aprende el individuo para mejorar el aprendizaje meta aprovechando las interacciones entre los diferentes conceptos, los procesos, el contexto y los objetivos de las personas participantes. Por lo que concibe al *escenario* como el espacio dinámico en el cual las relaciones casuales entre objetos se integran y generan otro estado relacional. Los escenarios podrían involucrar situaciones muy diversas. Entonces, se puede guiar el aprendizaje de las personas considerando el diseño de escenarios orientados al aprendizaje.

Además, menciona que los métodos de diseño de actividades de aprendizaje poseen cinco retos usuales que se evidencian en su aplicación, para lo cual los escenarios de aprendizaje tienen ventajas o razones que facilitan su abordaje, tal y como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Retos de diseño y ventajas del uso de escenarios de aprendizaje según Carroll.

Retos del diseño	Ventajas del uso de escenarios de aprendizaje
Debe haber espacio para meditar las acciones que se realicen	<i>Reflexión inducida:</i> En un escenario de aprendizaje se propicia la reflexión crítica y profesional. Este proceso reflexivo es espacio para conceptualizar elementos teóricos presentes estudiados.
Las situaciones interactivas son fluidas	<i>Concreto y flexible:</i> Los escenarios tienen objetivos específicos, ofreciendo una solución constructiva por medio de una actividad colaborativa fluida. La construcción parcial de las actividades es planeada de tal forma que guía fluidamente mediante su flexible completación.
Las decisiones de los participantes podrían generar muchas posibilidades que deben ser contempladas en el mismo diseño	<i>Múltiples perspectivas:</i> El carácter participativo del escenario propicia la interacción desde distintas perspectivas y conceptualizaciones matemáticas de cada participante.
Enseñar conceptos técnicos requiere de un diseño técnico	<i>Genérico y categorizable:</i> El diseño puede incluir situaciones suficientemente abstractas. Integran al estudiantado, sin enfocarse en intereses particulares. Se puede categorizar mediante las relaciones casuales que contempla el escenario, lo que favorece su adaptación en cada versión.
Algunos factores externos pueden obstaculizar la aplicación del diseño	<i>Orientación al trabajo:</i> Los escenarios propician las interacciones mediante el trabajo secuencial en el cual se establecen los conceptos. Así, se involucran las personas participantes, las mismas construyen y utilizan el escenario.

Fuente: Adaptado de "Five reasons for scenario-based design" por J. Carroll, 2000, *Interacting with Computers*, 13(1), p. 43-60.

Por su parte, Piedade et al (2018) indica que en el diseño de los escenarios de aprendizaje se deben considerar seis principios orientadores del diseño los cuales se sintetizan y exponen en la tabla 2.

Tabla 2. Principios orientadores del diseño de escenarios de aprendizaje según Matos.

Principios de diseño	Descripción
Diseño participativo	Es indispensable que el escenario propicie el diálogo explícito y la colaboración entretenida entre estudiantes, investigadores, diseñadores, profesores, visitantes, y demás personas que puedan estar influyendo.

Principios de diseño	Descripción
Contexto y necesidades	Los escenarios deben contemplar las necesidades percibidas por la persona docente que contemplen las necesidades e intereses de las personas estudiantes. Esto debe adaptarse al contexto de las mismas personas, considerando su adaptación a las tecnologías y tecnicismos.
Dinámica experimentación-reflexión	El escenario debe realizar un desenvolvimiento paulatino entre sus fases, algo que las actividades acuerpan, propiciando en cada quien la reflexión sobre las experiencias. Así pues los escenarios son espacios constructivos y mutables. Por esto es necesario su revisión y adaptación continua.
Pensamiento y aprendizaje	Los escenarios deben generar situaciones desafiantes que evoquen el pensamiento crítico de las personas participantes, obteniendo aprendizajes derivados de estas experiencias reflexivas.
Tecnologías y sugerencias	Las herramientas técnicas y andamiajes son muy útiles orientando las situaciones, ya que apoyan a la consolidación de relaciones conceptuales necesarias para el aprendizaje buscado.
Nuevos retos para la consolidación de otros	La consolidación de retos va de la mano de los objetivos de aprendizaje, desarrollarlos en diferentes etapas permite la integración de información en el estudiantado, mediante experiencias colaborativas estimulantes.

Fuente: Adaptado de "Cenários de aprendizagem como estratégia de planificação de aulas na formação inicial de professores: o exemplo da área de informática" por J. Piedade, A. Petro y J. F. Matos, 2018, *Educação e Tecnologias: professores e suas práticas*, p. 11-36.

2.2. Pensamiento matemático avanzado

Tall (1996) expone dos tipos de pensamiento matemático avanzado requeridos en la educación universitaria. En primera instancia la *extensión de técnicas* matemáticas, mediante el cual la persona estudiante emplea conceptos vistos previamente en el colegio. Por otro lado, el pensamiento matemático universitario implica una *reconstrucción y formalización* que inicia desde ideas anteriores para consolidar a los nuevos conceptos.

En el caso de la población estudiantil universitaria de primeros años, esta se encuentra habitualmente en un nuevo proceso de reconstrucción conceptual de lo aprendido previamente en el colegio. Esto relativiza la concepción del proceso cognitivo que conlleva la adquisición de pensamiento matemático avanzado ya que se resalta la dinámica entre la persona docente, que posee una visión madurada de los objetos matemáticos, y la situación contextual del estudiantado, que se involucra con sus conceptualizaciones matemáticas previas.

Además, Tall (1996) propone el esquema de desarrollo cognitivo de las personas estudiantes, en lo que se destaca en la primera etapa la exposición a representaciones desde diferentes marcos de referencia: numéricas, simbólicas, gráficas.

En la aplicación de la tarea propuesta en este artículo se busca generar un escenario, en el mismo se pretende que la población estudiantil ejercite la conceptualización de elementos matemáticos, mediante una participación en el proceso de análisis de tablas y construcción de gráficas, expresiones de lenguaje técnico y contextualizado. De esta manera, el escenario busca una experiencia constructiva, enriquecida por varios marcos de referencia, que constituye la conceptualización del procedimiento involucrado en la regla de la cadena.

Lo anterior acompaña al establecimiento cognitivo en los estudiantes de algo que podríamos llamar *procept* de la regla de la cadena. En esta perspectiva, Gray y Tall (1991, p. 73), definen *procept* como “la combinación entre proceso y concepto, en el que el procedimiento y el objeto se representan por el mismo simbolismo. Así, el símbolo de un *procept* puede evocar un proceso o un concepto”.

Además, teniendo en cuenta que este objeto matemático es parte del estudio que se realiza en el Análisis Matemático, tanto en Tall (2004) como en Tall y Mejía (2004) se expone una comprensión de los objetos desde la teoría de tres mundos. A considerar: mundo personalizado o personificado, mundo proceptual, mundo formal. De ahí que, la enseñanza de la regla de la cadena en varias variables se puede ubicar en el segundo mundo, donde la reconstrucción de los conceptos se alcanza a través de una secuencia de diferentes experiencias.

Sanmartín (2023) aclara que

El hecho de no pensar flexiblemente en símbolos como procesos y conceptos hace que el estudiante sea incapaz de pensar matemáticamente. Esta situación lo ubica en una posición regresiva donde prevalece la memoria, que puede funcionar en ciertos problemas; pero que en general produce un grado creciente de incompreensión en etapas sucesivas debido a que es más difícil coordinar procesos que manipular conceptos. Así, el estudiante que no reflexiona, le resulta complejo el aprendizaje de la matemática porque se ve obligado a usarla y le es más difícil ya que no ha adoptado un pensamiento flexible para comprenderla. (p.47)

2.3. Regla de la cadena en varias variables

Esta subsección muestra los conceptos técnicos del cálculo de derivadas usando regla de la cadena, basados teóricamente en el libro de Stewart et al. (2021). En primera instancia recordamos el teorema de regla de la cadena en una sola variable:

Teorema 1. Regla de la cadena en una variable real.

Si $g: D \rightarrow A$ y $f: A \rightarrow B$ son funciones de variable real derivables en todo su dominio, entonces, la composición $f \circ g: D \rightarrow B$ también es una función derivable y se puede calcular en cada $x \in D$ con la fórmula:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x). \quad (1)$$

Al aplicar esta formulación es necesario dominar el cálculo de derivadas de funciones más simples que $f \circ g$, pues se necesitan calcular las derivadas de las funciones f y g , además es necesario tener más familiaridad sustituyendo correctamente la composición de funciones pues involucra la evaluación de f' en el valor numérico $g(x)$.

Estos conceptos se extienden a varias variables (x_1, x_2, \dots, x_n) en vez de x , por esto debe especificarse la variable x_i respecto a la cual se calcula la derivada, sin embargo, en la notación de (1) se sobreentiende x como la variable de derivación, entonces, conviene usar otro tipo de notación para el teorema multivariable donde sí se especifica la variable respecto a la cual se deriva. Al emplear la notación de Leibniz en la que se indica explícitamente la variable de derivación podemos reescribir la fórmula de (1) como:

$$\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad (2)$$

Esta notación es un poco más similar a la que se utiliza en las derivadas parciales que se emplean en varias variables. Aunque, la notación solamente es una guía en la escritura. Alguien podría escribir para $f(x) = x^2 - 2x^3$ y $g(x) = \text{sen}(x)$ la expresión:

$$(f \circ g)'(x) = [2\text{sen}(x) - 6\text{sen}^2(x)] \cdot [\text{cos}(x)],$$

sin utilizar ninguna de las notaciones anteriores como intermediaria.

Aprender a implementar correctamente el teorema de regla de la cadena multivariable implica el manejo de conceptos previos como el de función y composición en varias variables, derivada parcial, e incluso, campos escalares. Pero, dependiendo de los objetivos de aprendizaje, en la introducción de un método para el cálculo de la derivada multivariable suelen omitirse algunos detalles. Si se desea enunciar este teorema en forma general sería necesario especificar condiciones topológicas sobre el dominio de la función a derivar, para lidiar con los cálculos en los puntos de la frontera, por lo que si se denota \mathfrak{R} como el conjunto de los números reales, y al elemento típico de \mathfrak{R}^m como el vector de $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, el teorema puede enunciarse como sigue:

Teorema 2. Regla de la cadena en varias variables reales.

Considere f, g funciones derivables en todo su dominio. Definidas respectivamente, sobre conjuntos abiertos de la forma $g: D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow A \subseteq \mathfrak{R}^k$ y $f: A \subseteq \mathfrak{R}^k \rightarrow B \subseteq \mathfrak{R}$. Sean g_1, g_2, \dots, g_k campos escalares tales que:

$$g(X) = (g_1(X), g_2(X), \dots, g_k(X))$$

entonces, la composición $f \circ g: D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow B$ está bien definida y es una función derivable respecto a cada una de las variables en $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La derivada respecto a la variable x_m , $m \in \{1, 2, \dots, k\}$, evaluada en el vector $x_0 \in D$ está dada por:

$$\frac{d(f \circ g)}{dx_m}(x_0) = \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_m} + \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial g_2(x_0)}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial g_k(x_0)}{\partial x_m} \quad (3)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial \alpha_r}$ es la derivada parcial de f respecto a la coordenada r -ésima del \mathfrak{R}^k .

Observe que en el lado derecho de la fórmula (3) se agrega varias veces la expresión colocada en (2) especificando en cada caso la variable de derivación que corresponde, hasta incluir todas las posibles dependencias desde f a la variable x_m pasando por cada g_k . Es decir, la regla de la cadena en multivariable involucra realizar varias veces el teorema de variable única la regla que se hacía en una variable, pero respecto a cada dimensión del espacio dominio de $f \circ g$.

2.4. Abordaje de la regla de la cadena en varias variables en libros de texto arbitrados

En los libros de texto que habitualmente son utilizados para abordar la regla de la cadena en varias variables encontramos distintas formas de introducir el cálculo de derivadas parciales y la regla de la cadena, especialmente porque los objetivos de aprendizaje de cada libro pueden ser específicos para algún área o por los temas previamente estudiados.

En el libro de Stewart (2018, pp. 937-942) se realiza una introducción relativamente paulatina, ya que se presenta el teorema en tres casos, los cuales involucran cada vez más variables y dependencias entre ellas. Después de cada caso se realizan ejemplos posteriores. En el primer caso se establece la derivada de $Z = f(g(t), h(t))$ respecto a la variable t . Luego, en el segundo caso se plantea la fórmula de derivada de una función Z y se calculan las derivadas $\frac{dz}{ds}$ y $\frac{dz}{dt}$. En el tercer caso se presenta el teorema general. Es importante resaltar que el libro acompaña con ejemplos de aplicaciones y cálculos directos, además de que se apoya en el diagrama de árbol para acompañar la explicación.

En Larson y Edwards (2023), se introduce la regla de la cadena mediante la presentación del teorema, inicialmente en dos variables independientes s, t de las cuales dependen variables $x(s, t)$, $y(s, t)$ y a su vez se asume la dependencia de una variable $w = f(x, y)$. Se presenta una pequeña demostración, pero es referencial, es decir, no se desarrollan muchos detalles teóricos en esta parte, las intuiciones las desarrolla con ejemplos posteriores al enunciado. También es importante destacar que el diagrama de árbol se presenta como esquematización de la regla de la cadena en dos variables, por esto el diagrama acompaña al enunciado del teorema, pero no se utiliza más. Luego, se generaliza el teorema, pero no se presenta como enunciado, más bien, como comentario a partir del cual se realiza un ejemplo de tres variables

Otro caso distinto es la forma de abordarlo en Ardón Chávez (2020) en donde se realiza de una forma muy directa, no aparece la regla de la cadena como un teorema, lo que es usual en los libros de cálculo, se presenta como una definición utilizando solamente dos variables independientes y en seguida realizan ejemplos con variables explícitas. Por medio de cuatro ejemplos aborda el tema.

Por otro lado, el libro de Lang (1990) lo presenta de una manera distinta, particularmente porque previo a la regla de la cadena en varias variables se estudian vectores, con lo que se define el gradiente:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right),$$

y el producto escalar de vectores. Si $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ y $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ se define:

$$X \cdot Y = (x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_k) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_k \cdot y_k.$$

Luego, con estas definiciones podemos plantear la regla de la cadena para una función real derivable $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ y un campo escalar $C(t) = (x(t)_1, x(t)_2, \dots, x(t)_k)$, el cálculo de:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f(C(t)) \cdot C'(t).$$

De esta forma la notación que se utiliza es análoga a (1) lo cual permite mantener una familiaridad con la expresión vectorial, sin embargo, esto no contempla los casos más generales de varias variables, en particular, no abarca el caso que expone este documento con variables s y t , este caso es útil para modelar la dinámica de sustitución entre algunos productos demandados.

2.5. Barreras de aprendizaje

La regla de la cadena en una variable es un tema que genera dificultad en su comprensión por involucrar el concepto de composición de funciones (Valdivia y Parraguez, 2015), por ello, uno de los principales retos a los que se enfrentan los estudiantes a la hora de transitar entre funciones de una a varias variables es comprender que ahora pueden existir múltiples dependencias entre nuevas variables, de modo que, deben tener la capacidad de visualizar la composición de funciones a nivel multidimensional para poder establecer las conexiones de dependencia entre las variables.

Otro reto importante, es tener la flexibilidad cognitiva para cambiar rápidamente el enfoque de la variable con la respecto a la cual se está calculando la derivada parcial, pues deben considerar solo esta como una variable y las demás verlas como constantes, sin embargo, este proceso se debe repetir para cada una de las variables utilizadas. Es frecuente que al inicio esto implique un reto importante, el cual debe estar superado para efectuar apropiadamente la derivación con regla de la cadena.

Por otra parte, como el estudiantado conoce la regla para funciones de una variable, logran establecer una conexión a nivel de fórmula con la multiplicación de las derivadas parciales de una misma variable, sin embargo, comprender y justificación el origen de la suma de los productos anteriores, genera confusión porque no existe en la derivación de funciones de una variable una fórmula con la cual puedan establecer una analogía.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La presente propuesta de diseño de una tarea fenomenológica es producto de una investigación de índole cualitativo, implementada en el curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II en la Universidad de Costa Rica durante el I ciclo del 2023, en la cual se realizó un estudio del *procept* matemático asociado a la regla de la cadena en varias variables mediante la metodología *Design Thinking*.

El estudio fue desarrollado en el contexto del proyecto de docencia titulado *Desarrollo profesional en Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral para personas docentes de Matemática de la UCR*, del cual los investigadores fueron partícipes, con una duración de 16 semanas, y en el que se llevó a cabo momentos de exploración teórica para establecer la planificación del escenario de aprendizaje.

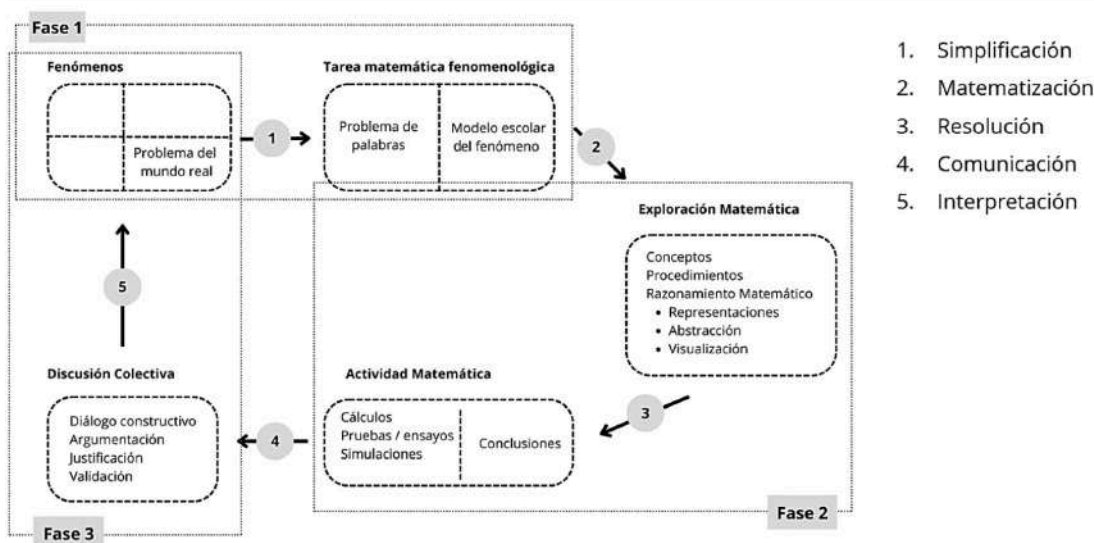
En las diferentes sesiones el equipo investigador logró consensuar el tema y diseñar la tarea correspondiente. Además, se logró definir el momento y la forma en que fue aplicada, por lo que el estudio se llevó a cabo en 4 grupos de 40 estudiantes cada uno, mediante equipos conformados entre 3 a 5 participantes. Tres de los cuatro docentes investigadores tenían al menos un grupo a cargo del curso MA-1022, lo cual facilitó la inserción al aula para la recolección de las evidencias del trabajo de campo realizado.

Para determinar la relación entre las variables, se propuso una tarea escolar basada en el modelaje, mediante regresión lineal multivariable, de una situación del entorno considerando datos empíricos de la venta de combos de pollo frito y pizzas, cuya relación se estableció con base en las cantidades y precios de estos productos.

En este estudio se planteó la siguiente conjetura de formación-aprendizaje, que orientó la toma de decisiones en el diseño de la propuesta: *Desde la resolución de un problema contextualizado en el área de Ciencias Económicas las personas estudiantes explorarán e identificarán una estrategia para ordenar las variables involucradas, que contribuye a dar significado y deducir la estrategia del diagrama del árbol para aplicar la regla de la cadena en la derivación de funciones en varias variables.*

En esta propuesta se expone un diseño de cómo elaborar una tarea fenomenológica matemática acorde al ciclo fenomenológico escolar expuesto por Gutiérrez-Fallas (2024) en la figura 1.

Figura 1. Ciclo fenomenológico escolar.

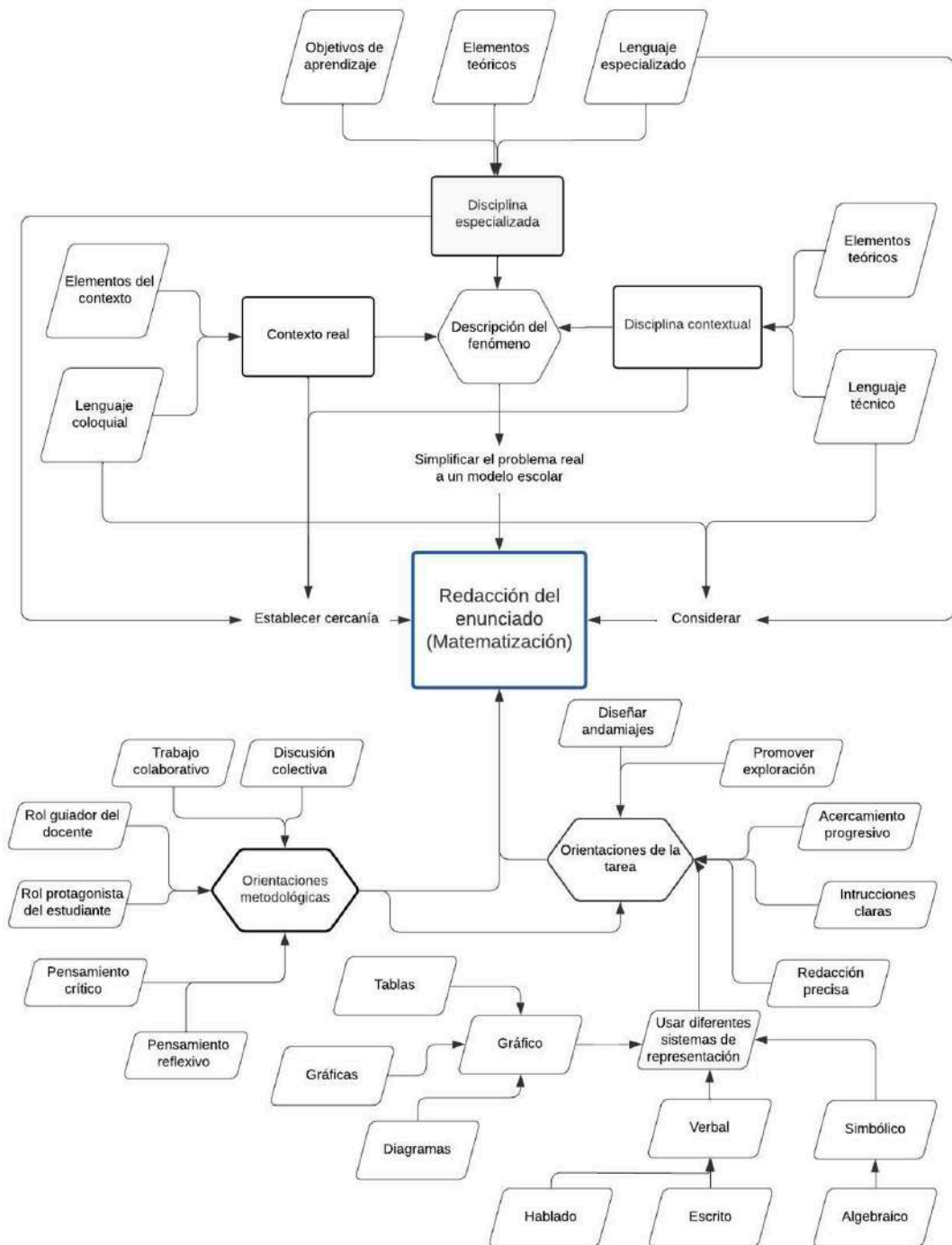


Fuente: De "Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática.", por L. F. Gutiérrez-Fallas, 2024, *Revista Ibero-Americana de Estudios em Educação*, 3(n. esp. 2), p. 11.

Según Gutiérrez-Fallas (2024), el ciclo fenomenológico escolar se compone de tres fases dentro de las cuales se distinguen cinco procesos fundamentales; sin embargo, el objeto de esta propuesta se centra en el abordaje y construcción de la primera fase, compuesta por los procesos de simplificación y matematización.

A continuación, proponemos una ruta a seguir, tal y como lo muestra la figura 2, para la elaboración de tareas fenomenológicas de índole matemático, y de manera paralela se expone una adaptación concreta del diseño de una tarea matemática sobre la exploración deductiva de la regla de la cadena en variables en el curso MA1022.

Figura 2. Diagrama de flujo para la elaboración de una tarea fenomenológica.



Fuente: Elaboración de los autores.

En concordancia con lo expuesto en la figura 2 se establecen cuatro etapas para el diseño de una tarea matemática de carácter fenomenológico, las cuales se describen a continuación.

Etapa 1. Descripción del fenómeno.

Esta primera etapa es esencial para la construcción de la tarea ya que busca la comprensión del fenómeno real, para lo cual se debe explorar el contexto real, la disciplina contextual y la disciplina especializada.

La exploración, indagación y comprensión del contexto real en el cual se sitúa el ente matemático, permite la identificación de necesidades, obstáculos, estrategias de abordaje, fortalezas y sobre todo elementos del lenguaje coloquial que son cercanos al estudiantado y que en conjunto permiten apropiarse del contexto. Además, se deben conocer los conceptos propios de la disciplina contextual que están asociados a la temática general de la tarea, además de comprender e incorporar una adecuada apropiación del lenguaje técnico correspondiente.

El tercer elemento involucrado corresponde a tópicos propios de la disciplina en que se va a implementar la tarea, e incorpora tanto conceptos específicos que van en concordancia con los objetivos de aprendizaje de la tarea como elementos propios del lenguaje especializado de dicha disciplina.

Estos tres elementos aportan insumos importantes para el estudio de un fenómeno presente en el mundo real, por lo tanto, es necesario anotar y especificar los elementos del contexto que se van a implementar en la tarea.

El ejemplo específico de esta propuesta está situado en el ámbito de las ciencias económicas por lo que es importante entender que en el mundo real existen empresas que dependen del mercado para establecer sus relaciones de oferta y demanda, que a su vez permiten el establecimiento de precios y la determinación de cantidades de producción de los diferentes productos y que conllevan a la determinación de los ingresos, costos y utilidades respectivas.

En el caso particular del problema de la tarea, está ambientado en una soda restaurante especializada en la venta de pollo frito y pizza, un tipo de negocio muy conocido en Costa Rica.

Adicionalmente, el propósito de la tarea busca la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables por lo que se extraen del contexto global los elementos del lenguaje expuestos en la Tabla 3 que son insumos importantes para la elaboración de la tarea y que permiten una descripción del fenómeno.

Tabla 3. Elementos del lenguaje involucrados en la descripción del fenómeno.

Lenguaje	Elementos principales
Contexto real	Soda, combo de pollo frito, combo de pizza, producto estrella, cliente, dueño.

Lenguaje	Elementos principales
Disciplina contextual	Ecuación de demanda, ecuación de oferta, precio de venta, utilidad, tasa de cambio, velocidad de variación, producción, venta.
Disciplina especializada	Derivada, variable independiente, variable dependiente, composición de funciones, regla de la cadena, cálculo en varias variables.

Fuente: Elaboración de los autores.

Otro insumo importante son los datos suscitados de una exploración rápida de los precios en el mercado de los productos propuestos para el problema, esto con la intención de establecer cierto grado de cercanía con el contexto de la tarea propuesta.

Tabla 4. Datos exploratorios del mercado.

Precio del combo de pollo frito "s"	Precio del combo de pizza "t"	Cantidad de combos de pollo frito "x"	Cantidad de combos de pizza "y"	Utilidad Total "U"
2700	3900	63	217	3462979
2700	4100	87	202	5402220
2900	4000	38	240	1205810
2900	4200	62	225	3604872
3000	4200	44	240	1922749
3000	4500	79	217	5192282
2800	3900	45	232	1859728
2800	4200	81	210	5123756

Fuente: Elaboración de los autores.

Etapa 2. Redacción del enunciado.

Esta etapa tiene la intencionalidad de lograr una matematización del problema, es decir, lograr traducir o simplificar el problema del mundo real del fenómeno a un modelo escolar, por lo que se deben considerar diferentes principios.

En primera instancia es indispensable reconocer la relevancia del lenguaje en la elaboración del enunciado y se deben considerar elementos o expresiones del entorno real (lenguaje coloquial), de la disciplina contextual (lenguaje técnico) y de la disciplina especializada orientadora de la tarea (lenguaje especializado), para poder establecer puentes que crean una cercanía entre el estudiante y el constructo particular.

En el ejemplo propuesto, para la construcción del problema de la tarea se busca contextualizar el contenido matemático con el saber económico y especialmente con el contexto real, por lo que la redacción del problema usa fórmulas y expresiones matemáticas, pero a su vez considera algunos conceptos propios del ámbito económico, abonado a una situación familiar o similar a una situación que está presente en el entorno del estudiante.

Para efectos de la propuesta, en relación con el ámbito matemático es importante que las funciones involucradas tengan un comportamiento cercano al contexto o la situación real de la cual se extraen y que sean acordes o análogas a ejemplos o ejercicios presentes en los diferentes textos arbitrados y sobre todo que respeten el quehacer matemático, por lo que con base en los datos exploratorios del mercado mediante regresión lineal se determinan funciones que modelan el comportamiento de dichos datos, las cuales son incorporadas en la redacción del enunciado del problema de la tarea y se exponen en la Tabla 5.

Tabla 5. Criterio de funciones involucradas en el problema introductorio

Función	Variables independientes	Criterio
Cantidad de combos de pollo frito “x”	Precio del combo de pollo frito “s” Precio del combo de pizza “t”	$x(s, t) = 95 - 0,185s + 0,12t$
Cantidad de combos de pizza “y”	Precio del combo de pollo frito “s” Precio del combo de pizza “t”	$y(s, t) = 105 + 0,15s - 0,075t$
Utilidad total	Cantidad de combos de pollo frito “x” Cantidad de combos de pizza “y”	$U(x, y) = -\frac{x^3}{25000} - \frac{3x^2}{100} + 496xy + 450x + 508y - 3455000$

Fuente: Elaboración de los autores.

Finalmente, en la redacción del enunciado se deben considerar las orientaciones metodológicas definidas de manera previa y respetar las orientaciones de la tarea que la definen y complementan.

Etapa 3. Orientaciones de la tarea.

Son elementos preponderantes que deben ser considerados al momento de elaborar la tarea y tienen el propósito de promover la exploración del tema y un acercamiento progresivo al objeto de aprendizaje, por lo que se valora todo el proceso de su resolución y no solo el producto final, por lo tanto, se deben incluir instrucciones claras y una redacción por etapas precisas y relacionadas entre sí.

Adicionalmente, de manera paralela al diseño del problema se debe prever la elaboración de un andamiaje que fomente la autorregulación y el acercamiento o comprensión progresiva del contenido implícito en la problemática estudiada.

En este contexto el uso de diferentes sistemas de representación en la redacción del problema y en la confección de los andamiajes es de suma importancia ya que permite una mejor comprensión de este.

En el ejemplo concreto propuesto, el diseño de la tarea propicia un acercamiento progresivo y una exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables, adicionalmente se brindan andamiajes en tres líneas: preguntas generadoras, tablas y figuras con situaciones particulares que buscan una mejor comprensión del problema y que se utilizan únicamente si son necesarios y de manera progresiva, tal y como se muestra en la tabla 6, tabla 7 y figura 3.

Tabla 6. Ejemplo de preguntas generadoras como andamiaje para su implementación en la tarea de exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables.

Andamiaje	Ejemplo
Frases o preguntas generadoras	<ol style="list-style-type: none"> 1. Recuerde que la tasa de cambio o la velocidad está directamente relacionada a la función derivada. 2. Recuerde que si una función varía respecto a cierto elemento es porque dicho elemento corresponde a la variable independiente. 3. ¿De qué variables depende la función utilidad? 4. ¿De qué variables depende la cantidad de combos de pollo? 5. ¿De qué variables depende la cantidad de combos de pollo? 6. Complete, visualice y analice las tablas y figuras.

Fuente: Elaboración de los autores.

Las frases o preguntas generadoras incentivan el pensamiento crítico y reflexivo, propician la apropiación de conceptos nuevos mediante el análisis de la información dada y a través de la relación con conocimientos previos, se elaboran de manera previa y se usan solamente en caso de ser necesarias.

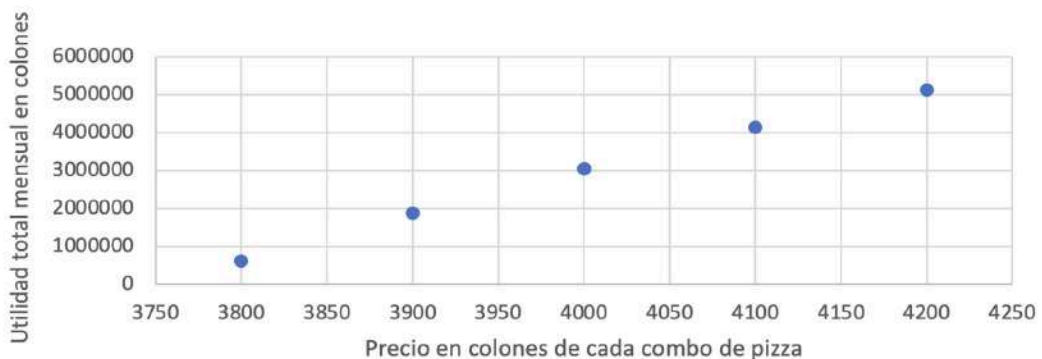
Tabla 7. Ejemplo de una tabla como andamiaje para el estudio de la utilidad total mensual cuando el precio de cada combo de pollo frito se mantiene constante y se varía el precio de cada combo de pizza.

Precio de cada combo de pollo frito “s”	Precio de cada combo de pizza “t”	Cantidad de combos de pollo frito “x(s,t)”	Cantidad de combos de pizza “y(s,t)”	Utilidad Total “U(x,y)”
2800	3800			
2800	3900			
2800	4000			
2800	4100			
2800	4200			

Fuente: Elaboración de los autores.

En la tabla 7 se muestra un ejemplo de andamiaje, pero su éxito está ligado a la implementación de varias tablas en las que se fija el precio del pollo frito y se estudia el comportamiento de la utilidad al variar el precio de la pizza. Además, de otras tablas donde se fija el precio de la pizza y se estudia el comportamiento de la utilidad al variar el precio del pollo frito esto con la intencionalidad de mostrar que, aunque la función de utilidad depende de la cantidad de pollo y pizza vendidos, el modelo realmente depende del precio los combos de pollo frito y de pizza, mostrando la mediante la relación de dependencia entre las variables como se da una composición de funciones de varias variables.

Figura 3. Ejemplo una gráfica de andamiaje que muestra la utilidad mensual respecto al precio de cada combo de pizza, donde cada combo de pollo frito vale ₡2800.



Fuente: Elaboración de los autores.

De manera similar a la intencionalidad de las tablas de andamiaje, mediante varias gráficas de andamiaje se puede mostrar de manera visual el comportamiento de la utilidad al variar el precio del combo de pizza y del pollo frito.

Finalmente, el uso de diferentes sistemas de representación en la elaboración del enunciado y de los andamiajes permite una mejor comprensión del fenómeno real y por ende de la tarea.

Etapa 4. Orientaciones metodológicas.

Las orientaciones metodológicas deben ser consideradas en la elaboración de las orientaciones de la tarea y en la elaboración del enunciado, por lo que están presentes durante la implementación de la misma y tienen el propósito de promover la discusión colectiva y el diálogo constructivo para la construcción de los aprendizajes.

Es importante mencionar que bajo estas orientaciones el diseño de la tarea promueve el trabajo colaborativo, el pensamiento crítico y reflexivo, el papel protagónico del estudiante como responsable principal de la apropiación de sus aprendizajes y un papel de orientador o mediador de los aprendizajes por parte del docente.

Adicionalmente, mediante la discusión y el análisis de los elementos de la tarea propuesta se busca el reconocimiento de la importancia de la relación de dependencia entre las variables y por ende la composición de funciones que converge en la deducción de la regla de la cadena en varias variables.

Finalmente, para el ejemplo concreto de la tarea propuesta y considerando la ruta de diseño expuesta se establece el siguiente enunciado.

“Considere la siguiente situación:

En un reciente estudio, el dueño de “Soda La Favorita” logró identificar que un alto porcentaje de sus utilidades mensuales están directamente relacionadas con la producción y venta de dos de sus productos estrella, cada combo de pollo frito, cuya variable es “x” y cada combo de pizza, cuya variable es “y”, los cuales se venden en combos tanto de manera independiente como combinados, según el gusto de cada cliente.

De este modo, la utilidad total de “Soda La Favorita” en término de estos productos, se establece como:

$$U(x, y) = -\frac{x^3}{25000} - \frac{3x^2}{100} + 496xy + 450x + 508y - 3455000$$

Si de manera complementaria, dicho estudio revela que la ecuación de demanda del pollo frito está determinada por $x(s, t) = 95 - 0,185s + 0,12t$, y la ecuación de demanda de la pizza corresponde a $y(s, t) = 105 + 0,15s - 0,075t$, donde “s” es el precio de venta de un combo de pollo frito y “t” corresponde al precio de venta de un combo de pizza.

- Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a $\phi 2800$ y cada combo de pizza a $\phi 4000$.
- Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a $\phi 3000$ y cada combo de pizza a $\phi 4500$.

- (c) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pollo frito.
- (d) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pizza”.

3. RESULTADOS

Posterior al diseño de la tarea que se construyó, junto con el escenario de aprendizaje, se implementó en cuatro grupos de MA1022, por lo que se presentan algunas fotografías que permiten respaldar el análisis de este apartado. Como punto de partida, el enunciado de la tarea permitió que las personas estudiantes identificaran la dependencia de la función utilidad de la soda respecto a los precios de los combos del pollo frito y de pizza.

A través de la discusión en subgrupos y el intercambio de ideas, los estudiantes lograron realizar las partes (a) y (b) sin dificultad, donde primero debían sustituir los valores de s y t en las ecuaciones de demanda para obtener la cantidad de combos requeridos, posteriormente les fue necesario sustituir estos valores en la ecuación de utilidad para encontrar el monto en colones, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4. Evidencia de la resolución de la tarea por parte de un equipo de estudiantes..

"Soda la favorita"

Pollo frito = X
 Combo Pizza = Y

$$U(x, y) = \frac{-x^2}{25000} - 0,03y^2 + 496xy + 450x + 508y - 3455000$$

Demanda del Pollo
 $Y(s, t) = 95 - 0,185s + 0,12t$
 Demanda Pizza
 $Y(s, t) = 105 + 0,15s - 0,075t$

s : Precio pollo
 t : Precio pizza

a) $X(2800, 4000) = 95 - 0,185 \cdot 2800 + 0,12 \cdot 4000$
 $X(2800, 4000) = 57$
 $Y(2800, 4000) = 105 + 0,15 \cdot 2800 - 0,075 \cdot 4000$
 $Y(2800, 4000) = 225$

$U(57, 225) = \frac{-(57)^2}{25000} - 0,03(225)^2 + 496(57)(225) + 450(57) + 508(225) - 3455000$
 $U = 3044623,842$

b) $X(3000, 4500) = 95 - 0,185 \cdot 3000 + 0,12 \cdot 4500$
 $X(3000, 4500) = 80$
 $Y(3000, 4500) = 105 + 0,15 \cdot 3000 - 0,075 \cdot 4500$
 $Y(3000, 4500) = 217,5$

$U(80, 217,5) = \frac{-(80)^2}{25000} - 0,03(217,5)^2 + 496(80)(217,5) + 450(80) + 508(217,5) - 3455000$
 $U = 5320450,333$

c) $\frac{dU}{ds} = 3 \left(\frac{-x^2}{25000} \right) - 496y + 450$
 $\frac{dU}{ds} = 2(0,03)y + 496x + 508$

Fuente: Elaborado por un grupo de estudiantes.

Adicionalmente, la figura 4 nos muestra cómo algunos estudiantes tuvieron dificultades en la realización de las partes (c) y (d), ya que se observa que este equipo calculó la derivada de la función utilidad con respecto a las dos variables involucradas x y y , sin embargo, no continuaron con el proceso de derivar respectivamente las funciones de demanda, y más aún, no lograron establecer la conexión entre la derivación de las tres funciones. En conclusión, el principal obstáculo observado en la mayoría de los grupos fue obtener la tasa de cambio de la utilidad a partir de la relación de dependencia entre las variables intermedias.

En esta etapa, como parte del andamiaje, los diferentes equipos fueron guiados por el docente a través de preguntas claves que motivaron la reflexión. En la tabla 8, se muestra un extracto del intercambio de ideas entre el profesor y un estudiante.

Tabla 8. Extracto de interacción entre el profesor Eduardo Muñoz (P) y un estudiante (Es).

P	¿Qué pasa con la utilidad, de qué depende la utilidad, que cosas afectan para que la utilidad aumente o disminuya?
Es	Los precios
P	¿De quién?
E	Del pollo y la pizza
P	Ajá, entonces, en realidad, aunque la función dice que depende de la cantidad de pollo y de la cantidad de pizza, en realidad, ¿de quién está dependiendo?
Es	De los precios
P	Exacto, eso es lo que está marcando el comportamiento.

Fuente: Elaboración de los autores.

Otro elemento que ayudó a establecer la relación de dependencia entre las variables fue el uso de andamiajes en forma de tablas y gráficas, en concordancia con el principio orientador de diseño *tecnología y sugerencias* descrito en la tabla 2 y la primera etapa del esquema de desarrollo cognitivo expuesto por Tall (1996), tal y como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Evidencia del trabajo colaborativo de un grupo de estudiantes.

Fuente: Elaboración de los autores.

Durante la aplicación de los andamiajes algunos estudiantes construyeron de manera verbal el diagrama de árbol que establece la relación de dependencia entre las variables. Incluso, lograron realizar una descripción escrita de dicha relación de dependencia, como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Respuesta a la parte c de la pregunta, dada por un grupo de estudiantes.

c) La utilidad depende plenamente de como varia el precio del pollo, si este aumenta y los precios de la pizza varían, la utilidad

Fuente: Elaborado por un grupo de estudiantes.

Durante esta parte de la actividad se evidenció un análisis participativo y una reflexión colectiva en los diferentes equipos, lo cual es propio de la cualidad *reflexión inducida* de los escenarios de aprendizajes descrita en la tabla 1 y el principio de aprendizaje *dinámica experimentación-reflexión* expuesto en tabla 2.

Luego, de manera dialéctica, los estudiantes y el docente establecen, usando el lenguaje coloquial presente en el enunciado, una representación de la relación de dependencia entre las variables y la composición de las funciones de varias variables involucradas, como se ejemplifica en la tabla 9.

Tabla 9. Extracto de la interacción entre la profesora Priscilla Angulo (P) y un estudiante (Es).

P	Entonces, necesitamos sacar la tasa de cambio de la utilidad con respecto a la demanda y la demanda con respecto al...
Es	Precio
P	Al precio ok. Eso fue lo que la mayoría logró identificar, pero no sabían cómo hacerlo Una manera de hacerlo es tomar las ecuaciones de la demanda y sustituirlas en...
Es	La utilidad
P	¿Pero qué pasaba?
E	Que quedaba extenso.
P	Exacto, quedaba muy extensa esa derivada. Ahora bien, para que no quede tan extenso, qué vamos a hacer. Vamos a aplicar lo nuevo que estamos viendo hoy. Una estrategia que nos va a ayudar a resolver de forma más eficiente este tipo de ejercicios.

Fuente: Elaboración de los autores.

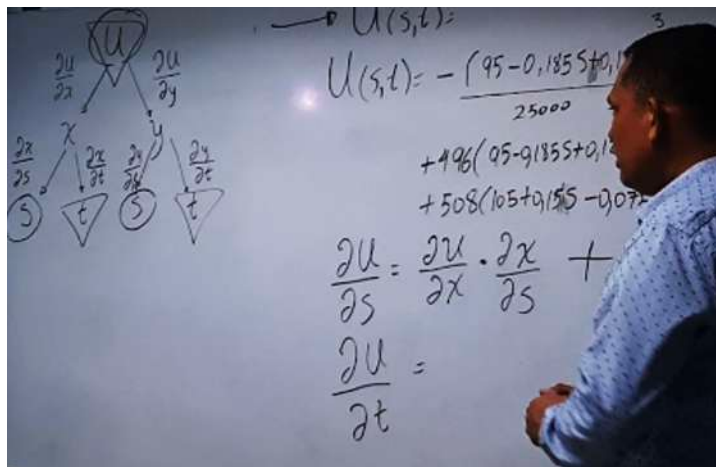
Del extracto anterior, se observa que los estudiantes comprenden la noción de sustituir una ecuación en la otra, pero también lograron identificar que, si el ejercicio se realizaba de esa forma, el proceso para derivar y simplificar quedaba muy extenso. Entre los comentarios que se escucharon en la discusión, un estudiante mencionó:

Profe, me rehúso a creer que esto haya que calcularlo así, tiene que existir un método más rápido para resolverlo.

Posteriormente, esta representación verbal se traduce a una representación gráfica por medio de la construcción grupal de un diagrama de árbol que involucra la implementación intencional de diferentes símbolos, formas geométricas y colores, para la identificación y diferenciación de las variables y la dependencia entre las mismas, esto evidencia que la tarea considera los principios de diseño descritos en la tabla 2 y la presencia de la ventaja *concreto* y *flexible* del uso de escenarios de aprendizaje mencionada en la tabla 1.

En la figura 7 se pueden observar, al lado izquierdo de la pizarra, el diagrama de árbol construido con los elementos simbólicos mencionados anteriormente, y al lado superior derecho de la pizarra se encuentra parte del cálculo tedioso como consecuencia de la sustitución directa de las ecuaciones de demanda en la ecuación de utilidad.

Figura 7- Representaciones de la regla de la cadena en varias variables construidas en la clase.

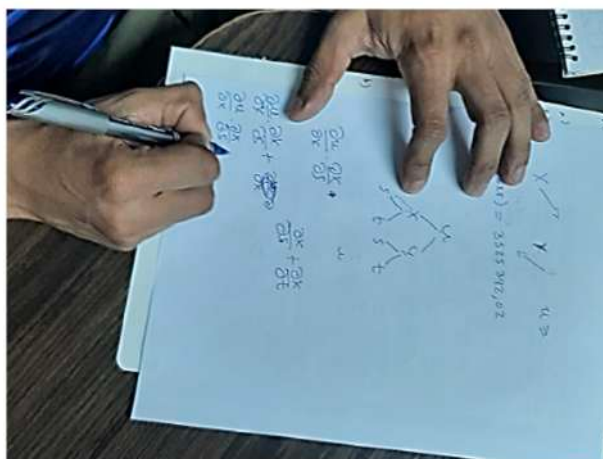


Fuente: Fotografía tomada por el autores.

Finalmente, se realizó la construcción de una expresión algebraica que permitió estimar la tasa de cambio de la función utilidad. En este proceso se realizó una lectura interpretativa de los símbolos y gráficas previamente hechas, de manera que sus relaciones se establecen algebraicamente con el fin de dar solución completa al ejercicio.

En particular, en la clase del profesor Eduardo Muñoz, a manera de cierre se brindó un espacio para que los estudiantes completaran la tarea, donde se evidenció una apropiación del *procept* ya que lograron construir y utilizar el diagrama de árbol correspondiente en la determinación de la tasa de cambio de la función utilidad respecto al precio del combo de pollo y el combo de pizza, tal y como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Construcción del diagrama de árbol por un grupo de estudiantes.



Fuente: Fotografía tomada por el autor.

4. CONCLUSIONES

Esta propuesta presentó una estructura base para el diseño de tareas fenomenológicas orientadas al aprendizaje y la activación del pensamiento matemático avanzado. Como vimos en los principios de diseño, en cada escenario de aprendizaje, es indispensable una interacción atenta con las personas estudiantes, es decir, el contexto en que se trabaja debe ser contemplado en cada implementación. Para el caso de la tarea elaborada, se buscó que el enunciado fuese cercano a los estudiantes mediante la adaptación del contexto. Debido a que en el curso previo se estudiaron las funciones en el ámbito económico, pero en una sola variable, se consideró que los criterios de las funciones, descritas en el enunciado de la tarea particular, presentaran un formato que active en el estudiantado un razonamiento inducido por simbologías previamente trabajadas.

Un aspecto importante que se destaca de la gestión de esta clase es la introducción y desarrollo de la temática *Regla de la cadena en varias variables* de una forma distinta a la que usualmente se presenta en los cursos de cálculo. Al realizarlo de esta forma, el estudiantado es dotado de un espacio de observación, en el cual puede entretejer sus conceptos previos, y así intuir una mecánica estructural propia, en sustentación del *procept* de regla de la cadena en varias variables. Este momento de *reflexión inducida* permite fortalecer la *relación-conexión* entre las variables y las funciones. Lo anterior se verificó ya que en la mayoría de los subgrupos de estudiantes lograron elaborar un mapa mental del diagrama de árbol utilizado en la regla de la cadena en varias variables, inclusive pudieron expresarlo verbalmente sin una representación simbólica en sí. Esto es muy enriquecedor pues permite que el estudiante se apropie del *procept* y que el aprendizaje es producto de su involucramiento. Tal y como menciona Carrol (2000, p. 55) "*Designers are not just making things; they are making sense*". Es decir, mientras se esté implementando un escenario de aprendizaje, el diseño debe considerarse una herramienta que acompaña atentamente a las personas estudiantes para que, mediante una experiencia sensorial intencionada, tengan la oportunidad de *intuir* las relaciones conceptuales meta.

Además, la implementación del trabajo en equipos propició un ambiente favorable en la clase, pues esto les permitió intercambiar ideas con sus compañeros y discutirlos en el proceso de creación de estas; incluso, se logró observar que identificaron y controlaron los procesos que estaban desarrollando. Por mencionar, en ocasiones el valor de la utilidad les resultó ser muy elevado y, en consecuencia, reiniciaban el proceso. El principio de *diseño participativo* reduce en esta parte: se dio mucho movimiento cognitivo durante la implementación ya que fue una clase llena de motivación con un lenguaje cercano al estudiantado y con mucha dialéctica entre los pares y el docente. Por este lado resalta el valor de las *múltiples perspectivas* propias de los escenarios de aprendizajes que se detalla en la tabla 1 de los elementos conceptuales.

Es importante indicar que el diseño y la implementación de estas tareas no es algo definitivo, sino que de acuerdo con la metodología *Design Thinking* está sujeta a cambios o mejoras en concordancia con el principio *genérico y categorizable* por lo que se pueden hacer ajustes a medida que se aplica en diferentes momentos. Por ejemplo, luego de dos aplicaciones de la tarea se identificaron los siguientes obstáculos: duraban mucho en la resolución de la parte (a) y la parte (b), había deficiencias en la comprensión lectora y la necesidad de reforzar algunos conceptos previos. De este modo, se hicieron ajustes en las siguientes implementaciones de la tarea para enfrentar dichos obstáculos.

Adicionalmente, en el ciclo lectivo siguiente, el coordinador y docente de la cátedra Carlos Robles, logró aplicar una modificación del diseño, basada en la discusión y análisis de la experiencia y resultados obtenidos en la primera implementación, incorporando de manera intencional las siguientes acciones:

1. Incorporar preguntas de comprensión lectora, para que cada estudiante interiorice el contexto modelado por la tarea.
2. Dividir la tarea en cuatro momentos secuenciales, cada uno con tiempo establecido según la meta requerida, para potenciar el trabajo en equipo.
3. Realizar una plenaria grupal después de cada momento, para garantizar que cada equipo tenga las herramientas necesarias para avanzar al siguiente momento.
4. Solicitar únicamente la tasa de cambio con respecto a uno de los combos de comida, con el fin de ajustar el tiempo destinado para la realización de la tarea según el horario disponible en la clase.

Como recomendación para futuras aplicaciones de la tarea sobre regla de la cadena en varias variables, se sugiere un enfoque más interactivo mediante el uso de herramientas tecnológicas donde se puedan modelar en clase los criterios de las diferentes funciones con base en datos concretos recolectados con anterioridad.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

EEMO elaboró una primera versión del enunciado de la tarea, elaboró el diseño para la elaboración de una tarea fenomenológica y el diagrama de flujo correspondiente, propuso la estructura de los elementos conceptuales.

EEMO y CRP elaboraron una primera versión del abordaje metodológico.

APP y PMAC elaboraron una primera versión de los elementos conceptuales

EEMO, PMAC y CRP implementaron la tarea en su clase.

APP tradujo y sintetizó elementos teóricos de los principios de escenarios de aprendizaje, pensamiento matemático avanzado, abordaje de la regla de la cadena en varias variables.

PMAC elaboró una primera versión del apartado de resultados, realizó la edición final del formato de la publicación.

CRP elaboró una primera versión del pensamiento matemático avanzado, desarrolló la primera versión de las barreras de aprendizaje y la primera versión de las conclusiones.

Todos los autores participaron en la lectura, revisión, redacción, edición y aprobación de la versión final.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por EEMO, PMAC, CRP y APP previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica por incentivar la investigación y la formación continua de los docentes.

Al Dr. Fabián Gutiérrez Fallas, porque su liderazgo en el curso de docencia del Cálculo Diferencial e Integral fue fundamental para el desarrollo de la experiencia que se presentó en este artículo.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguirre-Villalobos, E. R., Guzmán, C., y González, L. (2023). Metodología Design Thinking en la enseñanza universitaria para el desarrollo y logros de aprendizaje en arquitectura. *Revista de Ciencias Sociales*, XXIX(2), 509-525.
- Ardón Chávez, G. A. (2020). *Cálculo II*. McGraw-Hill.
- Carroll, J. (2000, 1 de setiembre). Five reasons for scenario-based design. *Interacting with Computers*, 13(1), 43-60. [https://doi.org/10.1016/S0953-5438\(00\)00023-0](https://doi.org/10.1016/S0953-5438(00)00023-0)
- Gasca, J. (2015). Design Thinking. Afrontar los retos con la actitud de un diseñador. *Leaners Magazine*, 8, 22-25. <http://www.leanersmag.com/docs/publicaciones/08-design-acting/design-thinking.pdf>
- Gray, E. y Tall, D. (1991). *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. Mathematics Education Research Centre University of Warwick. <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991h-gray-procept-pme.pdf>
- Gutiérrez-Fallas, L.F. (2024, 20 de julio). Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara*, 19(esp.2), 1-24. <https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18999>
- Izquierdo, M. I., Calero, C. G., y Lázaro, D. G. (2022). Design Thinking, una metodología para fomentar el aprendizaje significativo. *Revista Ingeniería Industrial*, 21. <https://doi.org/10.22320/S07179103/2022.01>
- Lang, S. (1990). *Cálculo*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Larson, R. y Edwards, B. (2023). *Cálculo de varias variables*. Cengage.
- Latorre-Coscolluela, C., Vázquez-Toledo, S., Rodríguez-Martínez, A. y Liesa-Orús, M. (2020). Design Thinking: creatividad y pensamiento crítico en la universidad. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 22, e28, 1-13. <https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e28.2917>
- Piedade, J., Pedro, A. y Matos, J. F. (2018). Cenários de aprendizagem como estratégia de planificação de aulas na formação inicial de professores: o exemplo da área de informática em A. Moser, M. S. C. Alencastro y R. O. Dos Santos (Eds.), *Educação e Tecnologias: professores e suas práticas* (pp. 11-36). Artesanato Educacional.
- Puig, O., Diéguez, R., y Torrecilla, R. (2015, octubre-diciembre). Regularidades de la formación matemática en carreras universitarias de Ciencias Económicas. *Multiciencias*, 15(4), 410-416. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90448465007>
- Sanmartín, R. (2023). El Pensamiento Matemático Avanzado en el contexto de la Educación Media Superior. *Revista ISCEEM*, 1(2). <http://revista.isceem.edu.mx/index.php/revista/article/view/8>
- Stewart, J., Clegg, D. y Watson, S. (2021). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. CENGAGE.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemática para el análisis económico*. Prentice Hall.
- Tall, D. (1996). *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. <https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>
- Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29-33.
- Tall, D. y Mejía, J. (2004, julio). *Reflecting on Post-Calculus-Reform*. [Plenaria]. International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Dinamarca. <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004b-tall-meija-icme.pdf>
- Valdivia Sepúlveda, C. y Parraguez González, M. (2015). Un modelo cognitivo para la comprensión profunda de la regla de la cadena. *Paradigma*, 36(2), 146-176. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000200008&lng=es&tlng=es



FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA. UN EXPERIMENTO DE DISEÑO BASADO EN MODELOS DE LONGITUD

FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA.
UN EXPERIMENTO DE DISEÑO
BASADO EN MODELOS DE LONGITUD

Ivette Anel Delgado Valdez¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-1514-114X>

Luis Manuel Aguayo Rendón²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-78977223>

Lorena Alejandra Medina Hernández³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-3932-8374>

RESUMEN

En este estudio se investigó la viabilidad de un Experimento de Diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista con el objetivo de reconocer los objetos mentales que los alumnos desarrollan al trabajar las fracciones en un contexto de longitud, específicamente en la recta numérica. El análisis que aquí se presenta es resultado de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, aplicada en alumnos de quinto grado de una escuela en la Ciudad de México, que evidencia resultados favorables para que los estudiantes modifiquen sus esquemas respecto de su pensamiento fraccionario multiplicativo el cual es desarrollado al iterar fracciones unitarias de manera que puedan reconocer cuando una fracción es menor, igual o mayor a la unidad de referencia. Los hallazgos sugieren que el trabajo con la comparación de fracciones en un contexto de medición, específicamente de longitud, resulta una entrada viable para el trabajo con los números racionales y los posteriores saberes matemáticos más complejos, por ejemplo, el álgebra.

Palabras clave: Recta numérica, fracciones, experimento de diseño, pensamiento multiplicativo.

1 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: ivette.delgado8@hotmail.com

2 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: laguayo@upn.mx

3 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: lorealwera@gmail.com



ABSTRACT

This study investigated the feasibility of a Design Experiment framed in Realistic Mathematics Education with the objective of recognizing the mental objects that students develop when working with fractions in a length context, specifically in the number line. The analysis presented here is the result of a Hypothetical Learning Path, applied to fifth grade students in a school in Mexico City, which shows favorable results for students to modify their schemes regarding their multiplicative fractional thinking, which is developed by iterating unit fractions so that they can recognize when a fraction is less than, equal to or greater than the unit of reference. The findings suggest that working with fraction comparison in a measurement context, specifically length, is a viable entry point for work with rational numbers and subsequent more complex mathematical knowledge, e.g., algebra.

Keywords: Number line, fractions, design experiment, multiplicative thinking.

1. INTRODUCCIÓN

Los números racionales, específicamente los fraccionarios, han sido objeto de estudio en las últimas décadas por la relación que tienen con otros conceptos y áreas matemáticas, incluida el álgebra al considerar que las formas de pensar con fracciones son algebraicas (Hackenberg y Lee, 2015). Sin embargo, los estudios que hasta ahora se han elaborado sobre el concepto de fracción coinciden en reconocer que los alumnos experimentan dificultades al trabajar con dicho objeto matemático.

En tanto que la forma en que los estudiantes entienden las fracciones tiene relación con lo que pueden hacer y aprender posteriormente en la escuela, es necesario analizar las dificultades más importantes que se presentan en su aprendizaje.

Se ha encontrado que la comprensión del concepto de fracción no es una tarea sencilla para quienes la aprenden ni para aquellos que intentan enseñarlo, esto derivado de la polisemia que tiene dicho concepto; en una investigación hecha por Fandiño (2005) se pudo reconocer a la fracción como la parte de un todo (en contexto continuo o discreto), cociente, razón, operador, como probabilidad, en los puntajes, medida, punto de una recta, porcentaje, en el lenguaje cotidiano. “De la literatura internacional emerge claramente un primer problema notable, no sólo terminológico sino también matemático” (Fandiño, 2009, p.101), la diversidad de significados que asignamos a la fracción hace aún más difícil su enseñanza; qué y por dónde comenzar.

Es importante señalar que en la Educación Básica en México, como en muchos países de Latinoamérica y el mundo, la interpretación de fracciones más importante es la acuñada por Kieren (1988) en la cual reconoce a estos números como parte de los números racionales que se interpretan a través de diversos significados, a saber: parte-todo, cociente, medida, razón y operador. Es a partir de esta interpretación que encontramos otra de las dificultades presentes en la comprensión de las fracciones, pues al buscar que los alumnos construyan las nociones de todos estos significados, se espera que de alguna manera logren relacionarlos como un *megaconcepto*, lo que se considera como verdadero desafío para los docentes.

Usualmente el primer acercamiento de los alumnos con las fracciones se da mediante el significado parte-todo, en situaciones donde un todo se divide en partes iguales de las cuales se toma una o varias de esas partes, las situaciones más frecuentes tienen que ver con un pastel o una pizza divididos en rebanadas iguales (Cortina, 2014; Melquiades-Martínez et al., 2022). Freudenthal (1983) considera que la fracción como fracturador es algo convincente y de fascinante concreción, pero también que es fenomenológicamente muy restringido porque tiene pocos fenómenos o situaciones en los que se puede utilizar y, aunque esta condición

brinda una cierta sencillez para comprender el origen de la fracción, termina siendo una limitante para que pueda construir otras nociones ligadas a este objeto matemático, “es razonable que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales” (Cortina et al., 2013, p. 7).

En la idea de tantos de tantos como se explicó anteriormente, la fracción está concebida obligatoriamente dentro de un entero, esto implica que la fracción se comprenda como algo menor o igual a la unidad (m veces $1/n$ únicamente ≤ 1). Esto no resulta un problema mientras se interprete $3/7$, pero cuando se involucran números fraccionarios como $7/3$ no se le encuentra sentido a tomar siete cosas de tres (Thompson y Saldanha, 2003). En su mayoría los alumnos comprenden las fracciones propias pero no tienen los mismos resultados al reflexionar en torno a las fracciones impropias; porque resulta incomprendible tomar más partes de las que tiene el entero.

No obstante las dificultades que genera las formas que predominan en la enseñanza de las fracciones están vinculadas a las ideas de parte-todo en contextos continuos (con modelos de área); esta forma de ir generando representaciones en los alumnos provoca que las interpreten a través de esquemas sumativos, “pensar en $1/n$ como ‘una de n partes’ es pensar en fracciones aditivamente” (Thompson y Saldanha, 2003, p.24); esto implica que el primer *tantos* debe estar incluido en el segundo *tantos* y que como resultado no podríamos hablar de una fracción que no tienen nada en común.

La introducción de las fracciones mediante modelos de área, además de las dificultades ya mencionadas, arrastra consigo un obstáculo para comprender y ubicar las fracciones en la recta numérica y reconocer la densidad (números entre dos números) y magnitud (tamaño) de los números racionales. En un estudio hecho por González-Forte y Fernández (2024) encontraron que 25% de alumnos de un quinto grado no sitúan de manera correcta $1/2$ dentro de la recta numérica y un 11% de ellos dejan en blanco la consigna al no reconocer cómo hacerlo. Las evidencias de su estudio remarcan la necesidad de trabajar fracciones y números decimales a través de distintas representaciones de un mismo número racional a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria.

Así mismo en un estudio realizado por Melquiades-Martínez et al. (2023) se evidenció que más de la mitad de los alumnos en la investigación tienen facilidad para ubicar fracciones propias (entre 0 y 1) mientras que la mayoría muestra dificultades para ubicar las fracciones impropias ya que no son capaces de identificar el intervalo en que se ubica dichas fracciones. En el mismo estudio se reconoce que uno de los errores que se comenten con mayor frecuencia es la no partición congruente de la recta.

En este artículo observamos las dificultades que tienen los alumnos para ubicar los números racionales, e incluso los naturales, dentro de una recta numérica. Partimos del supuesto que estas dificultades son generadas por el tipo de representación visual que utilizan los profesores (áreas) para explicar y resolver problemas con fracciones, respecto de esto Lee (2017) señala la importancia de reconocer las unidades de referencia y sus representaciones como un punto de partida en contextos de medición dando oportunidad de que surjan los esquemas multiplicativos que permiten escribir y resolver ecuaciones a medida de que los estudiantes avancen en el álgebra (Hackendberg y Lee, 2015).

Ahora bien, para resolver las dificultades que genera la enseñanza que inicia con el significativo parte-todo y reconociendo las implicaciones a futuro (el tránsito de la aritmética al álgebra) que esto conlleva, entre los años 2006-2008 un equipo de investigadores estructuró

un experimento de diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista que proporciona heurísticas de diseño para encontrar e interpretar el aprendizaje matemático.

En tanto que la enseñanza de las fracciones es un objeto matemático difícil de concretar en la educación primaria, este equipo diseñó una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) centrada en la idea de número comparador de Freudenthal (1983), el objetivo fue generar herramientas para que el docente desarrolle la enseñanza de las fracciones en el contexto de medida. La TEDE diseñada incluye seis prácticas matemáticas que permitirían al alumno comprender las fracciones unitarias, propias e impropias hasta el punto en que las puedan ubicar dentro de una recta numérica, desde una perspectiva multiplicativa y no aditiva.

En este trabajo se analizan los resultados de la cuarta práctica en la que se pretende que los alumnos identifiquen fracciones que son mayores, menores o iguales a una medida dada a partir de la iteraciones de la unidad de referencia, se pretende que reconozcan por ejemplo que $5/2$ es mayor a dos unidades pero menor a tres. Para ello se echa mano de una nueva herramienta, la recta de medición que hace referencia a la recta numérica, específicamente se analiza la manera como las acciones del docente permiten que los alumnos desarrollen razonamientos para reconocer las fracciones impropias más allá de la unidad de referencia.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS/ ELEMENTOS CONCEPTUALES/ ELEMENTOS HISTÓRICOS

La Educación Matemática Realista (EMR) es creada por Hans Freudenthal con la idea no de enseñar matemáticas sino de *reinventar las matemáticas* mediante la matematización del mundo real (Cobb, et al., 2008). Proponer un cambio en la manera tradicional de enseñar las matemáticas fue la base de las investigaciones de Freudenthal, con ellas pretendía alejarse de la teoría de los objetivos operacionales, de los test estructurados y de las teorías constructivistas de Piaget.

Desde las ideas de la EMR se asume que la escuela invierte el orden natural del trabajo matemático, esto es olvida que los matemáticos parten de problemas para encontrar una solución, por ello la escuela debería recrear la actividad del matemático y en el aula *jugar a ser matemáticos*, en ese sentido Freudenthal (1983) acuña el concepto de fenomenología didáctica para subrayar que el material que los estudiantes matematizan debería ser real para ellos, ya sea tangible o imaginable.

La fenomenología didáctica es la base para el desarrollo de una Educación Matemática Realista que busca alejarse de la idea de que para adquirir cierto contenido se debe partir de su enseñanza abstracta y posteriormente aplicarlo, por ejemplo para enseñar la longitud se piensa que primero debe inculcarse el concepto de longitud y posteriormente ver su aplicabilidad en múltiples ejercicios. La fenomenología didáctica postula un enfoque diferente, propone “empezar por observar los fenómenos que solicitan ser organizados y, desde ese punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización (Freudenthal H. , 1983).

El objetivo de una investigación fenomenológica didáctica es encontrar situaciones problema a partir de las cuales se puedan generalizar situaciones para abordar la enseñanza de un determinado objeto matemático y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización. En este sentido Gravemeijer (2000) señala que las matemáticas deben ser enseñadas como un proceso de matematización, como una forma de organizar la realidad y la disciplina matemática, se trata de hacer más matemáticamente pues “la matemática como actividad humana es una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de

una disciplina” (Gravemeijer, 2000, p.3). Desde esta perspectiva debe tratarse a la propia actividad matemática como materia prima para una reflexión en la que se incluyen no sólo temas de la realidad, sino también temas matemáticos. Siguiendo el sentido de esta idea la pregunta es ¿cómo estructurar una educación matemática en la que convergen la realidad y la matemática misma?

De acuerdo con Freudenthal (1983), la respuesta se encuentra en la amalgama que forman la reinención guiada, la matematización progresiva (Treffers, 1987), los niveles de aprendizaje (Van Hiele) y la fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983), estas ideas sustentan esta corriente didáctica y a partir de ellas nacen los principios de la EMR.

Principios de la EMR

Para comprender mejor el sentido de la Educación Matemática Realista en el marco del proceso de enseñanza y aprendizaje, Bressan et al. (2004) mencionan los principios sobre los cuales se fundamenta esta teoría, a saber:

Principio de actividad. La matemática se considera una actividad humana que se aprende haciéndola y lo fundamental no es aprender algoritmos, sino el proceso de algoritmización; no es aprender álgebra, sino la actividad de algebrizar; no es aprender las abstracciones sino la acción de abstraer (Freudenthal, 1991).

Principio de Realidad. Matematizar significa organizar la realidad para comprenderla, la realidad significa que las matemáticas deben ser realizables, imaginables y razonables, sobre ello señala Freudenthal, “...yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en cierto escenario” (Freudenthal, 1991, p. 17).

Principio de Reinención. La reinención es un proceso en el que el conocimiento matemático formal puede ser reconstruido para generar uno nuevo.

Principio de Niveles. La matematización sobre la realidad y sobre la actividad matemática es progresiva (Treffers, 1987), va del conocimiento informal, al preformal y luego al formal. En este proceso los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión.

Principio de Interacción. Las matemáticas son una actividad social y por ello los estudiantes deben tener la oportunidad de mostrar sus estrategias e invenciones a otros (Santamaría, 2006).

Principio de Interconexión (estructuración). Existe una interrelación entre los contenidos matemáticos de varios ejes curriculares, por ello no pueden ser tratados como entidades separadas, esta interrelación debe ser tomada en cuenta, los contenidos de diversos ejes de aprendizaje deben entrelazarse en las situaciones problemáticas (Santamaría, 2006).

Estos principios ayudan al profesor a orientar su práctica pero también permiten analizar las acciones que se despliegan en el aula y comprender la manera como los alumnos matematizan los objetos matemáticos y el papel del docente para que ello se se logre.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Esta investigación tiene como base la metodología del *Experimento de diseño* que nace bajo la influencia de Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble (2003), el tipo de estudio más frecuente en este marco son los experimentos de enseñanza en los que participa un investigador-docente, alumnos e investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

El experimento de enseñanza es una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre la teoría educativa, los artefactos diseñados y la práctica en la que se pone a prueba una Teoría Hipotética de Aprendizaje para promover el aprendizaje de los estudiantes y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje para definir lo que debe hacer el docente para alcanzar los objetivos de aprendizaje (Luna y Aguayo, 2021). Es importante resaltar que el análisis de un experimento de enseñanza no es un proceso que tenga fin, es un ciclo donde la planeación, ejecución y análisis dan lugar a un rediseño que puede ser tomado en cuenta para futuras investigaciones con diversas variables, las recurrentes puestas a prueba y sus correspondientes análisis, generarán una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que incluye los objetivos del experimento de enseñanza y los medios didácticos para procurarse.

El experimento que aquí se analiza propone una TEDE para la enseñanza de la fracción como medida, se puso a prueba en la escuela primaria «República de Tanzania» del municipio de Iztacalco, Cd. de México, en un quinto grado con 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres). La TEDE consta de seis prácticas matemáticas (ver Tabla 1) que se trabajaron en 26 clases de 90 minutos, cada sesión se videograbó, se transcribió y se analizó. Aquí se presenta el análisis de la cuarta práctica, cuyo objetivo era lograr que los alumnos ubicaran fracciones en una recta numérica.

Tabla 1. TEDE para el trabajo con fracciones.

Práctica	Herramientas
1. Se interpreta un número entero como medida, que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad. <i>Comprender la medición como la iteración de una unidad.</i>	Tije, tiras de papel, tijeras
2. Se reconoce y compara el tamaño relativo de una subunidad de medida. <i>Comparar fracciones unitarias</i>	Tije, cilindros de papel, tijeras
3. Se interpretan las fracciones como medidas que resultan de iterar una subunidad de medida, se comparan fracciones con la unidad. <i>Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual que la unidad</i>	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras
4. Se interpretan las fracciones como medidas que pueden ser menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. <i>Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces</i>	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica
5. Se interpretan las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces. <i>Multiplicar una fracción por un número entero</i>	Recta numérica
6. Se interpretan las fracciones como medidas de longitud menores, iguales o mayores a un medio. <i>Establecer igualdades y desigualdades con un medio</i>	Recta numérica

Fuente: Descripción de objetivos y herramientas dentro de la TEDE. Fuente: elaboración propia.

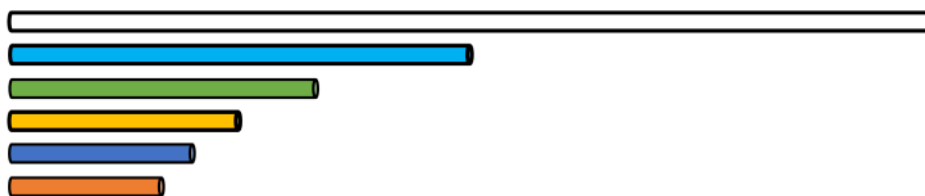
En la presente investigación se analizan los resultados encontrados en la práctica cuatro, los cuales son resultado de un trabajo previamente abordado con los alumnos, que se

realizó para re-estructurar los esquemas sumativos en torno a las fracciones y complementarlos con esquemas multiplicativos, en donde “el nuevo esquema puede considerarse como una reorganización del esquema anterior” (Steffe, 2002, p. 1) para permitir comprender el objeto fracción como algo que puede ser iterado x veces, aun más allá de la unidad de referencia, además de comprender cómo las representaciones lineales (recta numérica) apoyan el razonamiento fraccionario multiplicativo necesario para avanzar en matemáticas más complejas.

El significado de la fracción como *punto en la recta numérica* (Fandiño, 2009) emerge en la actividad cuando el estudiante identifica entre qué números naturales consecutivos se ubica la fracción, además esta actividad contribuye a la comprensión de una partición congruente de la misma recta y puede ayudar a los alumnos a representar y resolver problemas de aplicación. Dentro de los resultados se muestra que el uso de la TEDE descrita anteriormente favorece estos aspectos y permite al alumno operar con la recta numérica con mayor facilidad respetando las peculiaridades de la ejecución de las consignas.

En correspondencia con el principio de realidad de la EMR, todas las prácticas se contextualizan en una una narrativa que cuenta la historia de un pueblo antiguo (los Ajacay) que requerían realizar mediciones para fabricar sus productos, para ello utilizan como unidad de referencia, la vara de Kía o *Tije* (de aproximadamente 24 cm de largo) y como subunidades al *pequeño* de a dos ($1/2$), *pequeño* de a tres ($1/3$), *pequeño* de a cuatro ($1/4$) (ver Figura 1).

Figura 1. El Tije y los pequeños de 2, 3, 4, 5 y 6



Fuente: Elaboración propia.

Nota. El Tije está en blanco. El pequeño de a dos (azul) mide $1/2$ del Tije y necesita iterarse dos veces para ser igual que él. El pequeño de tres (verde) mide $1/3$ del Tije y necesita iterarse tres veces para ser igual que él. Fuente. Cortina, (2014).

El objetivo de las tres prácticas matemáticas era permitir que los alumnos crearan objetos mentales en torno a la unidad de referencia (Tije), nociones de fracciones unitarias (pequeños) y objetos mentales para la interpretación de fracciones unitarias e impropias; esto bajo los esquemas multiplicativos a través de la iteración.

4. RESULTADOS/DISCUSIONES

En la cuarta práctica matemática se pretendía que el docente ayudara al alumno a comprender la relación entre la unidad, las partes y el todo dentro de una recta numérica y así poder comparar fracciones y determinar su tamaño relativo sin dejar de reconocer que la unidad, las partes y el todo son independientes unos de los otros, lo cual permite su comparación.

Para lograr el objetivo de esta práctica el docente involucra a los alumnos en el uso de la recta numérica, entendida como un segmento dividido en partes iguales donde el todo es la recta y cada segmento es una unidad, lo que la convierte en algo definido, continuo y con estructura lineal que permite la reflexión más allá de la clásica equipartición del pastel (área) (Valenzuela et al., 2016). En este caso el docente busca la creación de la recta a partir de la iteración del *Tije* para que los alumnos reconozcan que al igual que las subunidades (*pequeños*), la unidad también se puede iterar sin restricciones. Al trabajar con la recta numérica uno de los aspectos fundamentales es que se reconozca una partición congruente a partir del reconocimiento de la unidad de referencia.

Al respecto Lee (2017) identifica estas unidades de referencia como uno de los componentes más importantes del razonamiento fraccionario al considerar que “una unidad es una estandar para la medición, que podría ser un todo o una parte...las unidades de referencia son unidades que se necesitan cuando los números están incluidos en el problema” (p.329); para ello es indispensable la construcción de la recta numérica a partir del reconocimiento de una unidad de referencia.

Advertir las bondades de usar la recta numérica en el experimento de enseñanza obliga al docente a buscar la manera de crear esta herramienta sin que parezca arbitraria ya que como lo menciona Cobb (2003), hay que generar escenarios que permitan identificar la necesidad de utilizarla para resolver las problemáticas que se proponen. Para instaurar la recta como herramienta, en el siguiente fragmento se puede observar que el maestro parte de cierta problemática. Cabe aclarar que en todos los fragmentos se utilizan nombres ficticios para los alumnos.

Maestro: *¡Imagínense!, imagínense que fuéramos a hacer tiras para todo el quinto “A” y cada quien hiciera su traje con cincuenta tiras (señala al pizarrón), que midieran así, ¿cuánto nos tardaríamos haciéndolo?*

Alumnos: *Uuuuy ... Como medio año ... Como tres meses.*

Maestro: *¿Se les ocurre alguna forma en la que lo podrían hacer más rápido sin tener que medir cada una?*

Ana Corina: *primero ponemos una tira y después la repetimos.*

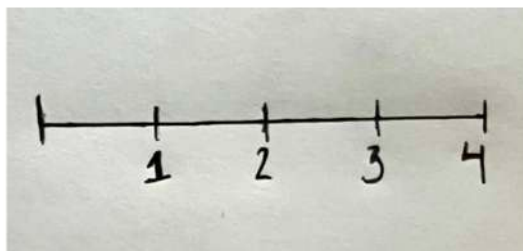
En este momento, la reinención guiada en tanto principio de la EMR, juega un papel importante en la clase, pues el docente tendrá que guiar a los alumnos hacia la idea de recta numérica para que la utilicen sin que esa actividad se descontextualice de la realidad de los *acajays*. Es importante recordar que este tipo de actos del maestro ayudan al desarrollo de la TEDE porque brindan al alumno herramientas útiles para participar en el proceso de matematización, es decir para comparar las medidas con la unidad de referencia y la fracción con unidad iterada, es decir 2 o 3 varas (Bressan et al., 2016).

Como se puede observar en el siguiente fragmento, en la conversación colectiva (principio de interacción) el maestro utiliza las aportaciones de los alumnos para marcar la segmentación en la recta numérica, lo que servirá de herramienta para comparar fracciones en las que se iteraron dos o más unidades, “ya que los números en la recta numérica vacía comenzarían para derivar su significado en un marco de relaciones numéricas para los estudiantes” (Gravemeijer et al., 2003, p. 59); es por eso que en ese momento de la clase el docente ve la necesidad de recordar lo qué significa cada una de las marcas y pide al alumno que esgrima una justificación.

Maestro: *A ver, explícanos Esteban, ¿cómo se usaría la recta de medición entonces?*

Esteban: (Señalando cada división de la recta). Aquí sería un Tije, aquí dos, aquí tres y aquí cuatro.

Figura 2. La recta segmentada.



Fuente: Elaboración propia basada en el trabajo de los niños.

La actividad que ha guiado el maestro permite que los alumnos reconozcan cada uno de los segmentos como unidades contiguas (*Tijes*) que componen un todo (la recta), lo cual hace de la recta una herramienta ideal para la comparación de fracciones, incluso aquellas mayores a la unidad de referencia. Sobre el respecto, Steffe (2002) señala que utilizar la recta para identificar la iteración de unidades y subunidades resulta un buen elemento que facilita la enseñanza y la comprensión de longitudes.

Aunado a esto, la creación de la recta numérica permite al alumno identificar la importancia de las unidades de referencia y sus representaciones “porque el uso de la longitud (a diferencia del área) exige una atención más explícita a la coordinación y distribución de las unidades” (Lee, 2017, p.233). Con este tipo de prácticas se prevé que los estudiantes identifiquen la congruencia en la segmentación de la recta como una condición indispensable de ésta, además de abonar a su esquema multiplicativo a partir de la iteración de la unidad de referencia.

Siguiendo el sentido de la matematización que los alumnos han desarrollado en torno a la iteración de las fracciones para su ubicación sobre la recta, el docente propone señalar la posición de dos fracciones $5/2$ y $15/4$. Los resultados y los argumentos de los alumnos nos permiten advertir el logro de los objetivos de la práctica.

En un primer momento, en la argumentación de los alumnos describen una forma de solución que da cuenta de su conocimiento acerca de los esquemas multiplicativos fraccionarios, Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos consideren a la fracción con propiedades multiplicativas y no sumativas, pues la fracción tiene sus raíces en las nociones proporcionales que implican x número de veces la unidad, en este caso los *pequeños*. Este conocimiento se hizo evidente en los alumnos desde las primeras sesiones, cuando comprendieron que podían iterar la subunidad tantas veces fuera necesario, incluso más allá de la unidad de referencia.

Ana: (Está frente al pizarrón y empieza a explicar).

Maestro: A ver Ana ¿qué hizo?

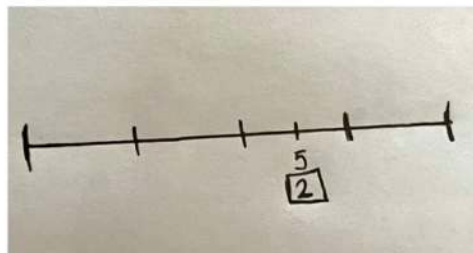
Ana: Fui contando.

Maestro: ¿Fuiste contando?, ¿desde dónde?

Ana: (Indica en el pizarrón desde dónde contó).

Maestro: ¿Desde aquí?, ¿hasta dónde contaste?, uno, dos, tres, cuatro y cinco. A ver (comienza a hacer marcas en el pizarrón) ¿cómo le iría contando?, hasta aquí, ¿cuánto habría sido?

Figura 3. Ubicación de $5/2$ en la recta.



Fuente: Elaboraciones de los niños.

Como se puede observar, Ana ubica correctamente en la recta a $5/2$ porque reconoce que para lograrlo es necesario iterar cinco veces el *pequeño* de dos, para cumplir dicho objetivo hubo de utilizar los pequeños de manera física; en primer lugar advertimos que identifica que el tamaño del pequeño necesario (toma el que equivale a $1/2$) y reconoce que debe iterarlo cinco veces (como lo indica el numerador), sin embargo no emplea un discurso que nos permita considerar que ha creado un objeto mental sólido antes la situación planteada.

Cuando se reconoce la importancia de las conversaciones colectivas (principio de interacción) en el desarrollo de la TEDE se busca que a partir de la participación de todos los alumnos de la clase, la respuesta de un alumno a determinada tarea permita evocar en los otros las nociones que sobre el inverso multiplicativo han desarrollado y la manera como este saber les ayuda a ubicar la fracción dada dentro de la recta:

Donatello: Porque dos veces el pequeño de a dos es un Tije y yo lo hice igual que Jacinto. En un Tije ya eran dos, aquí también dos y aquí nomas uno (señalando la recta).

Donatello expresa la relación que existe entre el tamaño del *pequeño* de a dos con el *Tije* al reconocer la relación recíproca de tamaño relativo, es decir identifica las fracciones unitarias como resultado de multiplicar la subunidad por un número entero, por ejemplo en la narrativa de los *acajay* un *Tije* es dos veces el *pequeño* de a dos que es la mitad de un *Tije* ($1/2$). Por esta razón puede determinar que en dos *Tijes* se ha iterado cuatro veces el *pequeño* de a dos ($4/2$) y que para alcanzar la medida solicitada ($5/2$) sólo hace falta una iteración más, de esta manera puede reconocer la ubicación de $5/2$ y comprender que esta fracción es mayor que dos unidades pero menor que tres. Con esta actividad la intención es que los alumnos puedan conceptualizar la medida en términos multiplicativos (al iterar) y matematicen esas ideas con la noción del tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003) para interpretar una fracción impropia de forma natural.

Cuando se ubican fracciones en la recta numérica se puede comprender que es posible ubicar más de una fracción en un mismo segmento e incluso en un mismo punto (fracciones

equivalentes), esta comprensión, que puede lograrse con el trabajo de esta TEDE, posibilita que los alumnos identifiquen intervalos en la recta que son longitudes iguales, es decir la unidad de referencia es congruente y provoca la reflexión de dicha partición; los argumentos de los alumnos dan cuenta de la importancia de trabajar con las fracciones desde un esquema multiplicativo, el cual otorga sentido a las representaciones a través de los modelos de longitud, tales como la recta.

Maestro: *Vamos a oír a Lupita, voz bien fuerte*

Lupita: *(Señalando división por división) Aquí son cuatro, aquí tenemos otros cuatro, son ocho...*

Maestro: *Ajá.*

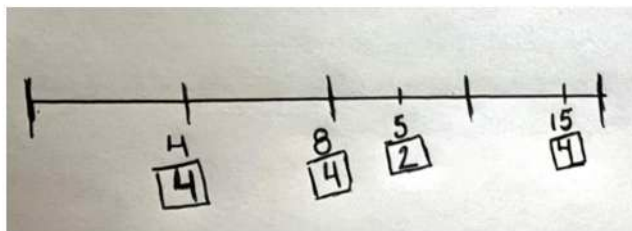
Lupita: *Si le sumas estos cuatro, son doce.*

Maestro: *Ajá.*

Lupita: *No sé*

Maestro: *¿Y de ahí qué hacemos? Ahí llevamos doce, ¿podemos contar tres más? (comienza a medir con un Tije, sobre la recta), ¿podemos medir tres más? (sigue marcando las divisiones en la recta) Uno, dos, tres... Ok, ¿quién más lo hizo como Lupita?*

Figura 4. Las iteraciones de $\frac{1}{4}$ en la recta.



Fuente. Elaboraciones de los niños.

A pesar de que Lupita establece que $\frac{12}{4}$ es una longitud igual a tres *Tijes* (unidades iteradas) reconoce que para llegar al punto solicitada no debe hacerse una iteración más, puesto que sobrepasará la fracción solicitada, es decir reconoce que $\frac{15}{4}$ es mayor a tres unidades pero menor a cuatro.

Con lo anterior se evidencia la importancia que los alumnos vean a la fracción como un número que es capaz de cuantificar y que, a la par, puede ser menor, igual o mayor que la unidad de referencia; las explicaciones que los alumnos brindan al momento de justificar cómo determinan la ubicación de la fracción en la recta nos da un panorama muy preciso de lo que los alumnos han logrado aprender y de los objetos mentales que han llegado a desarrollar.

Así mismo, se puede observar que los saberes sobre la fracción como medida, previamente reinventados, les sirven para ubicar números fraccionarios en la recta y reconocer cada

segmento como una unidad que, dependiendo de la fracción trabajada, guarda relación como inverso multiplicativo, es decir el alumno es capaz de reconocer que cuatro veces el *pequeño* de a cuatro es la misma medida que un *Tije* y por la iteración considera natural, que una fracción pueda ser mayor a la unidad, es por eso que Lupita puede expresar que en un *Tije* hay cuatro *pequeños*, en dos hay ocho y en tres hay doce, lo cual muestra sus saberes en relación a cada segmento de la recta (unidad) y su capacidad para ubicar a la fracción.

Sobre esta actividad Valenzuela et al., (2017) subrayan las múltiples ventajas de trabajar con la recta y en este caso podemos apreciar que los alumnos perciben de manera sencilla las fracciones impropias puesto que pueden realizar una iteración de unidades y subunidades sin restricciones y además, a través de ésta pueden comparar fracciones por la posición que ocupan en la recta (objetivo planteado en la quinta práctica matemática de la TEDE).

De la misma manera consideramos el uso de la recta numérica como un elemento indispensable en el desarrollo del razonamiento fraccionario (Lee y Hackenberg, 2014; Steffe, 2002), resulta ser una forma viable para abordar las fracciones basándonos en un juicio cuantitativo pues se considera que las fracciones constituyen una cantidad medible.

5. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio investigó los resultados en la aplicación de un Experimento de Diseño cuyo objetivo permitiría que los educandos mejoraran en torno de su pensamiento fraccionario multiplicativo a partir del trabajo en un contexto de longitud; los resultados obtenidos dan cuenta de la viabilidad de implementar nuestro experimento al observar la manera en que los alumnos se involucran con las prácticas, específicamente la cuarta.

El trabajo con la recta numérica permitió al alumno comparar fracciones, reconocer cuáles son menores, mayores o iguales a la unidad de referencia, también le ha permitido participar en la segmentación de dicha recta numérica a partir del reconocimiento de la unidad de referencia, este último aspecto es detectado como una de las mayores dificultades para los alumnos al trabajar con la recta numérica.

De la misma manera reconocemos que el trabajo con la fracción debe iniciarse dejando de lado los contextos del significado parte-todo y priorizar aquellos donde este objeto matemático pueda concebirse como independiente de la unidad de referencia; en este sentido el experimento que trabajamos basándonos en la Educación Matemática Realista es una oportunidad para considerar a la fracción desde un ángulo diferente con la finalidad de facilitar el trabajo en aspectos más complejos de ésta y con posteriores conceptos matemáticos.

Este estudio es el preámbulo para posteriores investigaciones donde se pueda vincular el pensamiento fraccionario multiplicativo con aspectos más complejos de la fracción, como los relacionados con equivalencias y fracciones aritméticas, así como del álgebra misma (Hackenberg y Lee, 2015).

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

IADV como parte de un equipo de investigación para el análisis retrospectivo del experimento de diseño desarrolló la fundamentación teórica, participó en la estructura de la metodología y sus actividades y analizó los datos recabados. Los otros autores (LAMF y LMAR) constituían el Comité Asesor del Trabajo Final de Doctorado de IADV (sustentado

en el presente estudio), por lo que participaron en la discusión de los resultados, la revisión y aprobación la versión final de esta publicación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la autora de correspondencia IADV, previa solicitud.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bressan A., Zolkower B., y Gallego M. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Presentado en la Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática, Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista. Bases teóricas. GPDM.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *American Educational Research Journal*, 32, 9-13. <http://www.jstor.org/stable/3699928>
- Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique* (pp. 105-124). <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276>
- Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.
- Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 25 años 270-284. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854014.pdf>
- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Editor Magisterio.
- Freudenthal H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The.
- Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría del currículo. *Revista de estudios curriculares*, 32 (6), 777-796. <https://doi.org/10.1080/00220270050167170>
- González-Forte, J. y Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA*, 18(2), 131- 160. <https://doi.org/10.3102/00028312032001009>
- Hackenberg, A. & Lee. (2015). Relationships Between Students' Fractional Knowledge and Equation Writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(2), 196-243. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.2.0196>
- Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En Hiebert Y Behr (Eds.), *Number concepts and Operations on the Middle Grades*. (pp. 162-181). EUA: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.
- Lee, M. (2017). Flexibilidad de los docentes en formación con unidades de referencia para resolver un problema de división de fracciones. *Educ Stud Math* 96 , 327-348. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9771-6>



- Lee, M. y Hackenberg, A. (2014). Relaciones entre conocimiento fraccionario y razonamiento algebraico: el caso de Willa. *Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas*, 12(4), 975–1000.
- Luna, C y Aguayo, L.M. (2021). El experimento de diseño. Una alternativa metodológica para la investigación y la innovación. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas educativas*. (PP. 325-342). Taberna Librería Editores.
- Melquiades-Martínez, M., Salgado-Beltrán, G. y García-García, J. (2023). La fracción como punto en la recta numérica en el saber de estudiantes de quinto grado de Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 114, 63-81.
- Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda* [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue]. <https://docplayer.es/12979482-La-contextualizacion-de-la-matematica-en-la-escuela-primaria-de-holanda.html>
- Steffe, L. P. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños con conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática*.
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds), *Investigación complementaria de los Principios y estándares para las matemáticas escolares* (pp. 95-114). Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9>
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. & Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1-20.
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D., y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Objeto mental fracción de alumnos de secundaria con problemas de absentismo escolar. 227-242.



ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA EN SITUACIONES DE CRECIMIENTO POBLACIONAL EN LA ESCUELA SECUNDARIA

ANALYSIS OF DIDACTIC SUITABILITY IN POPULATION GROWTH SITUATIONS IN SECONDARY SCHOOL

Claudio Rodríguez¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-8054-2620>

Ricardo Fabián Espinoza²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8921-6956>

RESUMEN

Este estudio se enfoca en la valoración de una práctica didáctica llevada a cabo con estudiantes de Educación Secundaria de Argentina. Tal valoración se realiza a partir de la noción de idoneidad didáctica, constructo teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la instrucción matemática. A través de actividades basadas en la modelización de problemas de crecimiento poblacional, se evalúa la comprensión de los estudiantes de la función logística mediante la aplicación de un instrumento de indagación, el que fue refinado y validado mediante un riguroso proceso que incluyó la aplicación de elementos teóricos del EOS y la valoración de pares académicos. Los resultados muestran que una enseñanza con alta idoneidad didáctica no solo mejora el aprendizaje, sino también la motivación de los estudiantes. Además, la modelización matemática con funciones logísticas puede ser una herramienta poderosa para enriquecer el currículo escolar y fomentar un aprendizaje más significativo en relación con el empleo de situaciones reales.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, idoneidad didáctica, función logística, crecimiento poblacional, modelización.

ABSTRACT

This study focuses on the assessment of didactic practices carried out with secondary school students in Argentina. The assessment is based on the notion of Didactic Suitability, a theoretical and methodological construct of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (EOS). Through activities based on the modeling of population growth problems, students understanding of the logistic function is evaluated using an inquiry instrument, which was refined and validated through a rigorous process that included theoretical elements of the EOS and peer

1 Departamento de Ciencias Ambientales y Aplicadas, Universidad Nacional Scalabrini Ortiz, San Isidro, Buenos Aires, República Argentina, C. P. 1643. Correo electrónico: csrodriguez@unsanisisidro.edu.ar

2 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Corrientes, República Argentina, C. P. 3400. Correo electrónico: rrfespinoza@exa.unne.edu.ar

review by academics. The results show that teaching with high didactic suitability not only improves learning but also enhances student motivation. In addition, mathematical modeling with logistic functions can be a powerful tool to enrich the school curriculum and foster more meaningful learning using real-world situations.

Keywords: Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. Didactic Suitability. Logistic Function. Population Growth. Modeling.

1. INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo se dirige al análisis de la comprensión lograda por estudiantes de la escuela secundaria cuando se promueve en ellos un proceso de modelización, basado en la resolución de problemas reales. Para ello, se elaboró y validó un instrumento de indagación que contiene una muestra de problemas relacionados con el crecimiento poblacional. El Ministerio de Educación Argentina señala la importancia de reconocer que la modelización,

desempeña un papel fundamental dentro del campo de la práctica matemática, ya que implica la habilidad de identificar las relaciones pertinentes y las variables involucradas, seleccionar representaciones adecuadas, utilizar las propiedades adecuadas para justificar los procedimientos empleados, analizar y reinterpretar resultados a la luz de un problema original planteado, entre otras bondades. Este reconocimiento resalta la importancia de considerarla como un componente esencial en el proceso de producción matemática, permitiendo abordar de manera efectiva situaciones desafiantes y ampliando las posibilidades de comprensión y resolución de problemas (*Núcleos de aprendizaje prioritarios*, 2004-2012, p. 18).

A lo largo del trabajo reportado se presentan aportes a la enseñanza de la matemática que fomentan la reflexión y el análisis crítico en torno a las siguientes cuestiones:

- la selección de situaciones de crecimiento poblacional y la función logística, como un aporte significativo de clases de problemas para implementar en la clase de matemática;
- el diseño y validación del instrumento de indagación, desarrollado mediante un riguroso proceso de evaluación y validación (elaboración, implementación preliminar, exploración áulica, análisis y recomendaciones por parte de pares expertos, reelaboración y nueva implementación) para recopilar datos relevantes que respalden los objetivos planteados;
- el análisis ontológico y semiótico basado en el EOS, haciendo énfasis particular en la idoneidad didáctica del trabajo de estudiantes en clases con situaciones decrecimiento poblacional.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

El EOS tuvo sus inicios en la Universidad de Granada de la mano de Juan Díaz Godino y sus colaboradores. Se compone de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) y la Teoría de las Configuraciones Didácticas (TCD).

Para el EOS, la didáctica debe dar respuesta a dos demandas: comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y guiar estos procesos. Para cumplir con la primera demanda son necesarias herramientas que posibiliten la descripción, interpretación y

explicación de los procesos educativos a partir de investigaciones teóricas. Estas permitirían el desarrollo de marcos teóricos aplicables al estudio de los procesos mencionados, originando la ampliación de los marcos. En el caso de la segunda demanda, resulta necesario realizar una valoración de los procesos, y con base en esto, proponer mejoras (Pochulu, 2015).

En relación con su denominación, el aspecto ontológico deriva del análisis de la existencia o inexistencia de entidades u objetos. Respecto del aspecto semiótico, este se ocupa de descubrir y analizar la verdadera significación que los objetos o entidades poseen, su relevancia y cómo se interrelacionan, entre otras particularidades.

Godino, Batanero y Font (2009) referencian a Steiner *et al.* (1984) para definir que el fin de la didáctica de las matemáticas, como disciplina de investigación, se halla en el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje y el desarrollo de programas que apunten a mejorarlos.

Como encuadre teórico fundamental de este trabajo se adopta la noción de idoneidad didáctica, constructo del EOS particularmente importante para la valoración de situaciones didácticas, en permanente estado de uso y refinamiento en la comunidad académica.

2.2 La noción de Idoneidad Didáctica y sus facetas

El concepto de idoneidad didáctica hace referencia a la medida en que un proceso de enseñanza cumple con ciertas cualidades que lo hacen ser considerado como eficiente o apropiado para lograr que los estudiantes puedan comprender los conceptos personales (aprendizaje) y los conceptos establecidos por la institución (enseñanza), teniendo en cuenta las situaciones y recursos disponibles en su entorno (Godino, Batanero y Font, 2020. Godino y Burgos, 2020).

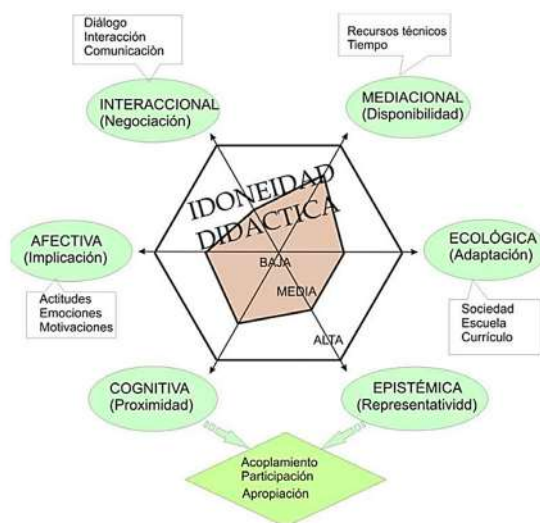
Esto implica la coordinación coherente y sistémica de seis facetas de idoneidad relacionadas con los aspectos intervinientes en un proceso de enseñanza (Godino *et al.*, 2009):

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado en que los conceptos institucionales implementados coinciden con un concepto de referencia.
- Idoneidad ecológica, está relacionada con la adaptación del proceso de estudio al plan educativo de la institución, la escuela y la sociedad, considerando las influencias del entorno en el que se lleva a cabo.
- Idoneidad cognitiva, se refiere a cuánto se ajustan los conceptos implementados a la capacidad de aprendizaje de los estudiantes y a la cercanía entre los conceptos personales adquiridos y los conceptos deseados.
- La Idoneidad afectiva expresa la participación y el interés del alumnado en el proceso de enseñanza.
- Idoneidad interaccional, se refiere a cuánto las configuraciones de enseñanza implementadas y su interconexión permiten abordar y resolver posibles conflictos de comunicación que surgen durante el proceso de enseñanza.
- Finalmente, la idoneidad mediacional se refiere al nivel de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La noción de idoneidad didáctica junto con sus seis facetas proporciona pautas para determinar la relevancia en un proceso de instrucción matemática. Un hecho didáctico se considera relevante si ofrece información práctica valiosa acerca del avance del proceso, y si se relaciona con cualquiera de las facetas de idoneidad previamente definidas.

La idoneidad de un proceso de estudio pretendido, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales, se representa como un hexágono regular. El irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas luego de un proceso de estudio implementado. En la base se sitúan las idoneidades epistémica y cognitiva, ya que se considera que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos (Godino, 2011).

Figura 1. Idoneidad didáctica.



Fuente: Godino (2011, p. 6).

2.2 Indicadores de Idoneidad Didáctica

Para Godino (2011) y Aroza *et al.* (2016), los indicadores de idoneidad didáctica constituyen herramientas clave para evaluar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en función de la teoría de la idoneidad didáctica, desarrollada dentro del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Estos indicadores permiten analizar y medir, de manera más objetiva y sistemática, cómo los elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje se alinean con los objetivos pedagógicos y las expectativas de desarrollo cognitivo y afectivo de los estudiantes.

Es posible encontrar tablas con indicadores de idoneidad; las mismas no se expondrán, pero pueden encontrarse en Godino (2011). Se detallan los principales indicadores de idoneidad didáctica, los cuales se utilizan para evaluar y mejorar las prácticas educativas:

- **Indicadores Epistémicos.** Estos indicadores valoran el grado de representatividad y coherencia de los significados institucionales que se enseñan en relación con los

significados de referencia. Se centran en la adecuación de los contenidos matemáticos seleccionados y su pertinencia en función de los objetivos curriculares.

- **Indicadores Cognitivos.** Evalúan en qué medida las actividades y contenidos propuestos están dentro de la zona de desarrollo potencial de los estudiantes; es decir, si se ajustan a sus capacidades cognitivas actuales y promueven un aprendizaje efectivo.
- **Indicadores Interaccionales.** Se enfocan en la calidad de las interacciones que ocurren en el aula, tanto entre el docente y los estudiantes como entre los propios estudiantes. Estos indicadores buscan identificar si el proceso de enseñanza fomenta la participación activa y el debate constructivo, y si se abordan y resuelven los conflictos semióticos que surgen durante el aprendizaje.
- **Indicadores Mediacionales.** Miden la adecuación de los recursos materiales y temporales disponibles para el desarrollo de la enseñanza, como el uso de tecnologías educativas, la calidad de los materiales didácticos, y la distribución del tiempo en las actividades de aprendizaje.
- **Indicadores Afectivos.** Estos indicadores valoran el grado de implicación emocional y motivacional de los estudiantes durante el proceso de estudio. Se trata de analizar si las actividades propuestas generan interés, motivación y una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- **Indicadores Ecológicos.** Se centran en la coherencia entre el proceso educativo y el contexto institucional, social y cultural en el que se desarrolla. Estos indicadores valoran si la enseñanza está alineada con el proyecto educativo del centro y responde a las necesidades y características del entorno.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Diseño de Investigación

La investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, utilizando la metodología de investigación de diseño. Este enfoque es particularmente adecuado para estudios en educación, ya que permite explorar cómo las intervenciones educativas pueden mejorar la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes.

Para indagar sobre estas características resulta importante establecer lo que Cobb *et al.* (2003) definen como un experimento de diseño: consiste en una metodología de investigación educativa que implica la creación y prueba de intervenciones educativas innovadoras. Las mismas estarían basadas en el diseño de instrumentos de indagación para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Estos experimentos se llevan a cabo en contextos educativos reales y se basan en la iteración y la revisión sistemática para desarrollar teorías de aprendizaje de dominio específico.

Asimismo, en semejanza con lo planteado por Rivas (2014) esta exploración es de carácter cualitativa, puesto que reúne las siguientes características propias de estos estudios:

- se usa un proceso inductivo (explorar, describir y luego generar perspectivas generales);
- la técnica para recolectar datos es la revisión de documentos;
- se fundamenta en una perspectiva interpretativa; y, por último,
- no pretende generalizar de manera probabilística los resultados.

Cabe destacar que los indicadores de la idoneidad didáctica adoptados no pretenden constituirse en una categorización exhaustiva. Tampoco perseguimos el interés de una generalización de tipo estadística, aplicable a otros contextos. Tales indicadores cumplen el propósito de aportar al análisis y valorar la implementación del instrumento de indagación en las aulas.

3.2 Población y Muestra

La muestra consistió en 14 estudiantes de quinto año de Secundaria del Instituto Cervantes en Boulogne Sur Mer, una institución educativa ubicada en la provincia de Buenos Aires. Representaron un grupo típico en términos de diversidad de antecedentes académicos y habilidades matemáticas. El estudio se realizó en el marco del curso de Matemática regular, con el apoyo de sus docentes.

El Instituto Cervantes fue seleccionado por su compromiso con la innovación educativa y su interés en implementar nuevas estrategias pedagógicas para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Los estudiantes participantes tenían una base sólida en matemáticas, habiendo cubierto previamente temas como funciones exponenciales y logarítmicas. Esto les proporcionó un contexto adecuado para la introducción de la función logística y su aplicación en la modelización de problemas de crecimiento.

3.3 Validación del instrumento y puesta en práctica

El instrumento de indagación utilizado en este estudio fue diseñado para evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la función logística y su aplicación en la modelización del crecimiento poblacional. El instrumento incluye una serie de situaciones-problema seleccionados para explorar diferentes aspectos de la función logística, como la identificación de la capacidad de carga, la interpretación de la tasa de crecimiento y la comparación entre crecimiento exponencial y logístico.

Las actividades se diseñaron para ser contextualizadas y relevantes, utilizando ejemplos de crecimiento poblacional de especies animales y humanas donde el crecimiento está limitado por recursos. Este enfoque permite a los estudiantes visualizar cómo los conceptos matemáticos se aplican a problemas reales, y les ayuda a desarrollar una comprensión más profunda y significativa.

Cada actividad fue diseñada para abordar específicamente una o más de las facetas de la idoneidad didáctica. Por ejemplo, una actividad requería que los estudiantes ajustaran los parámetros de la función logística para modelizar el crecimiento de una población de ciervos en una isla limitada por recursos, y fue diseñada para evaluar la faceta epistémica, ya que requería una comprensión profunda de cómo la capacidad de carga afecta la forma de la curva

de crecimiento. Otra actividad, que involucraba la discusión en grupo y la presentación de diferentes modelos a la clase, fue diseñada para evaluar la faceta interaccional, pues fomentaba la colaboración y el intercambio de ideas.

Previamente a los encuentros donde se trabajó con el instrumento, se realizaron reuniones con la docente a cargo de la cátedra con el objetivo de diseñar las clases previas. En dichas charlas se profundizó sobre aspectos referentes al uso de herramientas como el software GeoGebra para la resolución de las consignas, el correcto uso de las calculadoras, la importancia del intercambio entre pares, tanto de los procedimientos como de los argumentos, con el objetivo de generar espacios de debate sobre las resoluciones, la validación de las conjeturas, y otros aspectos.

Cabe destacar que, el instrumento llevado al aula no implicó para los alumnos una resolución individual, únicamente, sino en el ámbito de clases bajo el acompañamiento de los investigadores y la docente a cargo. Dichos espacios de trabajo estuvieron caracterizados por:

- la resolución de manera individual y grupal;
- la exposición de procedimientos y posterior debate entre pares;
- el uso de herramientas tecnológicas (*smartphones, tablet, notebook*, GeoGebra);
- la repetición de preguntas por parte de los docentes, con el fin de promover la reflexión en los alumnos;
- la exposición de las conclusiones por parte de los estudiantes;
- la institucionalización a partir de los procedimientos y argumentos expuestos.

A continuación, se presentan las actividades que componen el instrumento de indagación:

Actividad Nro. 1:

A comienzos del siglo pasado se introdujeron en la Patagonia Argentina numerosas especies de animales como el ciervo colorado. Éste fue traído desde Europa alrededor de 1906 a la provincia de La Pampa y liberado en 1924 en la zona cordillerana. Progresivamente fue expandiendo su hábitat.

Si en una isla, en la que no se registró presencia de estos animales, se colocaron 100 ejemplares de ambos sexos teniendo una tasa de crecimiento poblacional anual del 10%, es decir, que el primer año habría 10 ciervos más, el segundo 11 más que el anterior y así sucesivamente.

a- Establecer una función que describa dicho crecimiento, ¿Qué tipo de función representa el crecimiento de dicha población?

Si en otra isla en la que tampoco se registraba presencia de dicha especie se implantaron 100 ciervos colorados, en este caso, la función que modeliza el crecimiento de la población de ciervos es la función logística:

$$CL(t) = \frac{1\ 000}{1 + 9 \cdot e^{-0,09 \cdot t}}$$

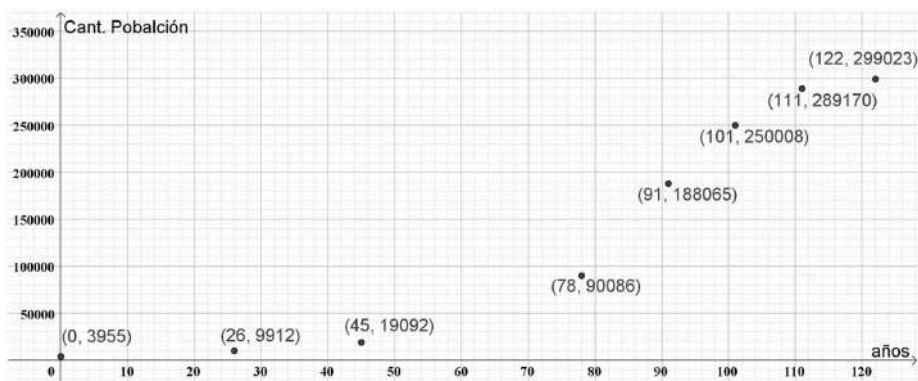
A partir de la comparación entre ambos modelos, responder:

b- Las poblaciones descritas por $CE(t)$ y $CL(t)$, ¿tendrán un límite superior? Si es así, indique cuál es en cada caso.

c- ¿Cuál de los dos modelos funcionales se aproxima más a un modelo de la realidad? Explique y fundamente los motivos de su elección.

Actividad Nro. 2:

El primer censo de población realizado en nuestro país fue en 1869, durante la presidencia de Domingo Faustino Sarmiento. En base a los acuerdos internacionales, la Constitución actual de la Nación Argentina y la legislación vigente, se estipula que deben realizarse cada 10 años. Esto se cumple desde 1960, a excepción del 1990 y 2000 (postergados por un año, por razones presupuestarias) y el de 2020 (postergado por la pandemia de COVID-19). La siguiente distribución de puntos muestra la cantidad de población a lo largo de los censos realizados en el distrito de San Isidro, provincia de Buenos Aires, donde se considera a al año 1869 como $t=0$:



a- Usar la presentación de GeoGebra “Crecimiento poblacional de San Isidro” (<https://www.geogebra.org/m/vsr8zqnb>) para encontrar una función logística que se aproxime a la mayor cantidad de puntos del modelo mencionado.

b- Si, según información oficial, para los años 2.001, 2.010 y 2.020 había 291.505, 292.878 y 292.224 respectivamente, ¿la función encontrada sigue siendo válida? ¿Por qué?

c- ¿Cuál será el dominio e imagen para la función encontrada en el graficador? ¿Dicho dominio e imagen se relacionan con la situación real planteada? Justificar su respuesta.

Actividad Nro. 3:

La gráfica de la función logística $f(x) = \frac{a}{b+c \cdot e^{kx}}$ es una curva continua con forma de S que se puede aplicar en distintos crecimientos poblacionales. A partir de lo mencionado y la presentación de GeoGebra “Parámetros de la Función Logística” (<https://www.geogebra.org/m/swunf9qg>) que muestra la variación de los parámetros y, responder:

a- ¿Para qué valores de a , b , c y k la curva cumple con las condiciones mencionadas?

¿De qué parámetros depende la población inicial? ¿y el límite de población?

c- A nivel mundial, uno de los modelos matemáticos que describe el crecimiento poblacional está dado por la función $PM(t) = \frac{73,2}{6,1+5,9 \cdot e^{-0,02 \cdot t}}$ donde $t=0$ se corresponde con el año 2000 y la población $P(t)$ se mide en miles de millones de personas. ¿Cuál fue la población inicial?

Considerando la función $PM(t)$ del ítem c, si para valores de muy grandes el término $5,9 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ se aproxima a cero, determinar el valor del denominador. ¿Cuál será la población límite? A partir de lo analizado, elabore una fórmula que permita anticipar dicho límite.

En cuanto a las fases de la investigación, podemos decir que la **primera fase** consistió en la elaboración de un marco institucional de referencia establecido mediante configuraciones epistémicas ligadas al crecimiento poblacional a partir de la modelización de funciones logísticas. Se establecieron problemas que abarcaran una cantidad de conceptos significativos.

Luego de una exhaustiva revisión de antecedentes, diseños curriculares, documentos ministeriales y libros de texto, llevada a cabo en el primer semestre de dicho año, se generó un cuestionamiento respecto al uso de funciones exponenciales para representar situaciones de crecimiento poblacional, en contraposición con la función logística.

La falta de cotas superiores en los crecimientos exponenciales y la mayor cercanía a la realidad por parte de los crecimientos logísticos -que sí tienen en cuenta los recursos finitos del medio que rodea a una situación determinada- resultó llamativo. Por tal motivo, se optó por la elaboración de un instrumento enfocado solo en estas últimas.

Con las actividades presentadas en el documento se buscó establecer un espacio de reflexión, así como de elaboración de conjeturas y redes conceptuales por parte de los estudiantes. Es importante mencionar que la función logística no es un contenido específico que se encuentre en dichos documentos, pero se puede desprender como un caso relacionado con las funciones exponenciales. Estas pueden encontrarse en el quinto capítulo de la investigación.

La **primera fase** llevó a la elaboración de una nueva versión que fue implementada como prueba piloto; esto dio inicio a la **segunda fase** y fue de gran ayuda para la recolección de datos previos, la mejora del análisis *a priori*, una aproximación más cercana al tiempo de resolución por parte de estudiantes, la reestructuración de las consignas y la implementación de recursos tecnológicos que apuntaran a generar actividades más ricas y reflexivas en la versión final.

De una prueba piloto se pudieron establecer una aproximación más real de los tiempos de resolución, cantidad de estudiantes, recursos materiales y tecnológicos, así como características de la población y del espacio de trabajo.

Luego de la aplicación piloto y de los datos recolectados a partir del análisis de los sistemas de prácticas implementados por los participantes, y del estudio *a posteriori* de los datos recolectados, se determinó la incorporación de recursos tecnológicos como el software GeoGebra para el trabajo de las consignas. Es en esta etapa y, a partir de las modificaciones, que dio inicio la **fase tres**.

Se buscó generar una herramienta de recolección de datos con consignas consistentes, que abarcará la mayor cantidad de conceptos, donde intervinieran distintos lenguajes, que fuera variada en procedimientos y permitiera generar argumentos reflexivos más sólidos.

Por otro lado, se elaboró una tabla exhaustiva que orientara a los pares expertos en cuáles aspectos considerar para su evaluación. Las construcciones que se utilizarían en cada situación-problema se subieron a la página de GeoGebra (solo accesible para los evaluadores del instrumento).

La **cuarta fase** se situó luego de la evaluación y devolución hecha por los pares expertos. Se realizó una corrección posterior de las consignas y de los recursos tecnológicos incorporados en la prueba piloto. Esto permitió generar la versión final del instrumento de indagación.

La **quinta fase** consistió en la administración de la versión final del instrumento. Los recursos tecnológicos que se implementaron fueron accesibles tanto desde *netbook* como desde celulares en línea. Esto permitió que todos los estudiantes tuvieran acceso sin inconvenientes, y la fácil manipulación de los archivos elaborados.

Luego de la aplicación final se realizó el análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes a partir del instrumento de recolección de datos implementado (**sexta fase**).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En los siguientes apartados se realiza un análisis y valoración de los indicadores de idoneidad didáctica en relación con las producciones obtenidas de los estudiantes, luego de haber implementado la versión final del instrumento de indagación.

Respecto de la interacción entre facetas, por una cuestión de extensión del presente artículo no se realizará la valoración de la misma. Por otro lado, se exponen las tablas de manera parcial; es decir, no se presentarán todos los indicadores utilizados en la investigación con la finalidad de no superar dicho límite.

Según Godino *et al.* (2006), la valoración de la idoneidad didáctica es un proceso complejo, ya que implica diversas dimensiones estructuradas en distintas componentes. Cabe destacar que tanto unas como las otras no son observables directamente, por lo que es necesario inferirlas a partir de indicadores empíricos.

El criterio de calificación fue cualitativo y se rigió por la categorización realizada por Rivas (2014), quien estableció tres grupos: idoneidad baja, si el porcentaje de indicadores alcanzados era menor al 40%; idoneidad media, cuando el valor se encontraba entre el 40% y el 70%; e idoneidad alta, si el porcentaje era mayor o igual al 70%.

4.1 Análisis y valoración de la Idoneidad Epistémica

En relación con la faceta de idoneidad epistémica, se comparten algunos de los indicadores que se tuvieron en cuenta en la investigación en la Tabla 1.

Tabla 1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica.

Componentes	Indicadores
Situaciones-Problemas	<ul style="list-style-type: none"> - Conforman una variedad de clases de problemas para 5o año de la Escuela Secundaria y los profundiza al incorporar a la Función Logística como un eje central de trabajo. - Se incluyen problemas significativos del mundo real que puedan ser desarrollados por medio del proceso de resolución de problemas estadísticos. - Se promueve el uso de problemas abiertos (de tipo heurístico) que admiten el uso de estrategias variadas de resolución - Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de crecimiento poblacional.
Lenguajes	<ul style="list-style-type: none"> - El planteamiento de las situaciones-problema se realiza de manera coloquial, simbólica o gráfica, adaptándose a la naturaleza específica de la actividad. - El nivel de lenguaje utilizado se adecua a los destinatarios, aunque es importante tener en cuenta que algunas representaciones simbólicas pueden plantear dificultades para la resolución de las actividades propuestas.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> - Se fomenta la generación de procedimientos, propiedades y argumentos. - Se promueve la comprensión emergente de la función logística a través del análisis del crecimiento poblacional. - Se introduce el concepto clave del crecimiento poblacional y el uso de funciones matemáticas para su modelado.
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> - Se promueve el razonamiento y la demostración como una actividad fundamental de la actividad matemática. - Se fomentan maneras de justificar acordes al nivel de los estudiantes.
Relaciones	<ul style="list-style-type: none"> - En las situaciones propuestas, los objetos matemáticos primarios se relacionan entre sí y se sustentan en la resolución de los problemas planteados.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 9).

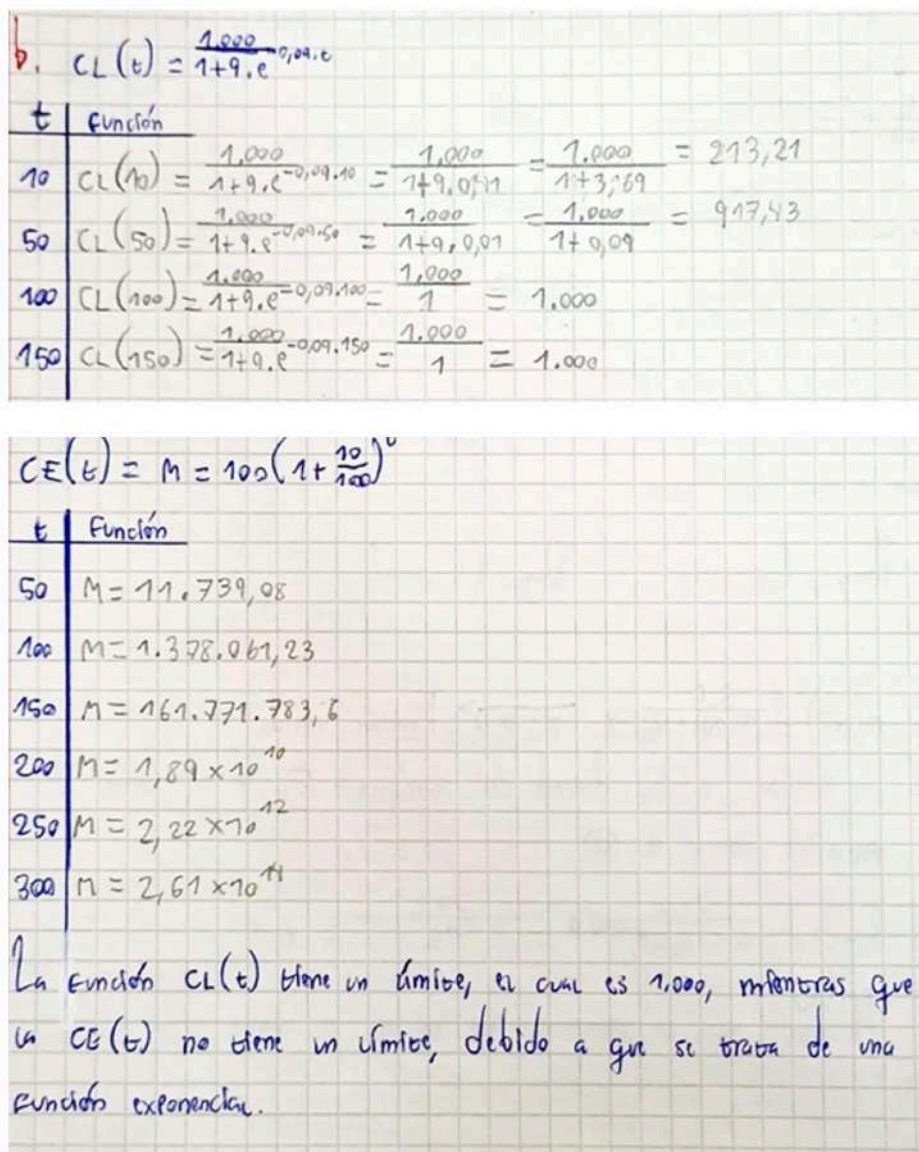
Según Castillo *et al.* (2022), desde una mirada pragmática del EOS los significados se definen a partir de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos que movilizan a una persona respecto de situaciones-problema.

En relación con las *situaciones-problema* propuestas en el instrumento de recolección de datos, las mismas tocan la temática del crecimiento poblacional desde una función novedosa (la función logística) respecto de la que habitualmente se trabaja en la Escuela Secundaria (función exponencial). Más allá de esto, la mirada con la que se elaboraron dichas situaciones se enmarca en los Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios (IPAP, 2018), el *Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática* (MOA, 2019), el *Diseño Curricular de Matemática para Nivel Secundario* (2011) y los Núcleos de Aprendizaje

Prioritarios (NAP). Estos documentos oficiales plantean la necesidad de modelizar situaciones internas y externas a la matemática.

Respecto del *lenguaje* y, con base en lo planteado por los pares expertos que analizaron el instrumento, se contempló que los problemas se pudieran resolver ya sea desde procedimientos numéricos, teóricos o gráficos. Se pudo observar en las producciones vestigios de trabajos que abarcan varios tipos de lenguaje, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Ejemplo de desempeño a nivel tabular y coloquial.

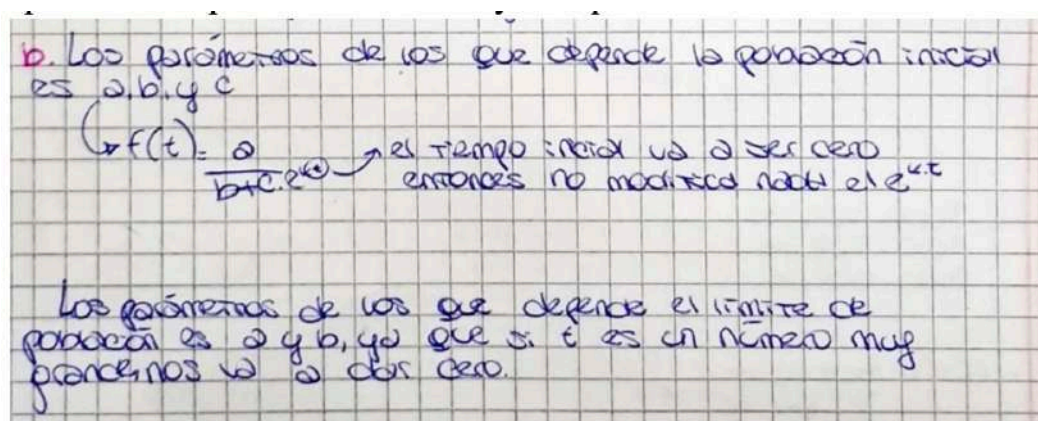


Fuente: Elaboración propia.

Acerca de las reglas, se contemplaron cuestiones como que los conceptos, proposiciones y procedimientos surgieran de manera intuitiva y luego se fueran formalizando a lo largo de la segunda y tercera situación. Los niveles de dificultad fueron progresivos y secuenciados, de forma que el primer problema permitiera generar aproximaciones cognitivas que ayudaran en los siguientes.

En cuanto a los indicadores para *argumentos*, se incorporaron y adaptaron aquellos que permiten analizar si se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. En la Figura 3 se pueden observar procesos argumentales respecto de la tercera situación, en relación con el armado de una fórmula general que permita determinar la población inicial. Esta aproximación se enmarcaría en lo indicado dentro de los NAP al establecerse la importancia de la validación de conjeturas y afirmaciones de carácter general mediante propiedades matemáticas.

Figura 3. Ejemplo de desempeño a nivel tabular y coloquial.



Fuente: Elaboración propia.

4.2 Análisis y valoración de la Idoneidad Ecológica

Los indicadores en relación con la faceta ecológica fueron los que se comparten a continuación en la Tabla 2.

Tabla 2. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica.

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	<ul style="list-style-type: none"> - Los contenidos implicados en las prácticas matemáticas no son explícitamente parte del diseño curricular. Sin embargo, en el marco legal utilizado se hace referencia al estudio de situaciones en contextos reales, lo que conduce a trabajar con la Función Logística como un concepto emergente al analizar situaciones donde intervengan crecimientos poblacionales.

Componentes	Indicadores
Apertura hacia la innovación didáctica	<ul style="list-style-type: none"> - En la elaboración del instrumento, fue preponderante la necesidad explícita de los NAP, IPAP, MOA, etc., de trabajar con modelos matemáticos relacionados con situaciones de contextos reales. Por ello, se trabaja con actividades que incluyen datos extraídos de fuentes verídicas en mayor o menor medida. - La innovación también se evidencia en la integración de nuevas tecnologías (ordenadores, TIC, etc.) en el instrumento, las cuales cumplen con criterios de pertinencia y se vuelven esenciales para el desarrollo de los problemas.
Adaptación socio-profesional y cultural	<ul style="list-style-type: none"> - Se establecen conexiones entre los contenidos con diferentes contextos de la vida cotidiana (situaciones-problema basadas en casos reales).
Educación en valores	<ul style="list-style-type: none"> - La elaboración de los problemas que componen el instrumento de indagación está en consonancia con la mirada del diseño curricular para Matemática (5o. año). - Se pone en el centro de las preocupaciones el desafío de lograr la inclusión y la permanencia con el objetivo de que los y las estudiantes finalicen la educación obligatoria, asegurando los conocimientos y las herramientas necesarias para cumplir los tres fines de este nivel de enseñanza: la formación de ciudadanos y ciudadanas, la preparación para el mundo del trabajo y para la continuación de estudios superiores. - Se apela a una visión de los jóvenes como sujetos de acción que puedan tener una mirada crítica y reflexiva del medio que los rodea. Esta búsqueda puede evidenciarse en las distintas actividades que se proponen en cada situación-problema.
Conexiones intra e interdisciplinarias	<ul style="list-style-type: none"> - Los contenidos del instrumento se vinculan con otros contenidos intra e interdisciplinarios, ya que la función logística se presenta como una herramienta para el análisis de crecimientos poblacionales en diferentes campos, tales como la economía y la epidemiología. - El modelo logístico de crecimiento poblacional tiene aplicaciones en la biología y la ecología, lo que permite analizar la evolución de poblaciones con recursos limitados. - Se destaca la relevancia del modelo logístico en la toma de decisiones basadas en datos reales a través de prácticas de laboratorio y simulaciones.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 14).

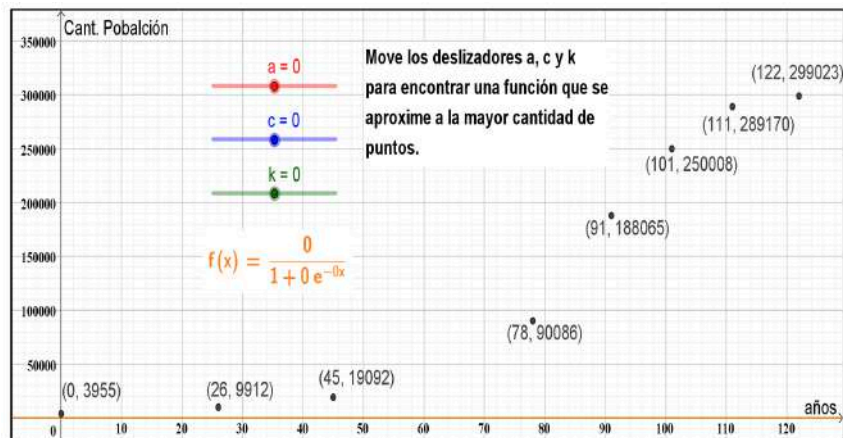
Como se mencionó anteriormente, los objetivos y contenidos propuestos en el plan de formación concuerdan parcialmente con los incluidos en el *Diseño Curricular* (2011), ya que no se hace mención explícita de la Función Logística en sentido estricto. Sin embargo, es posible considerarla como un contenido que se desprende de la Función Exponencial. También se hace referencia a los crecimientos poblacionales, por lo que un enfoque comparativo tendría sentido.

Más allá de la ausencia del contenido *función logística*, el instrumento se desarrolló a partir de lo sugerido por los NAP, IPAP, MOA, etc., en relación con la importancia de trabajar con modelos matemáticos relacionados con situaciones de contextos reales.

Respecto al tercer indicador que se presenta en la tabla, las construcciones hechas con GeoGebra (ver Figura 4) fueron evaluadas según los criterios de pertinencia elaborados por Barreiro (2017). Especialmente, los criterios ligados a favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas, con el propósito de evitar que la validez se base únicamente en la mera respuesta por parte de la computadora; y la imprescindibilidad de las Tecnologías de la Información y

de la Comunicación (en adelante TIC), ya que se hace referencia a situaciones donde el uso de la tecnología no solo facilita, sino que es necesario para comprender ciertas regularidades matemáticas.

Figura 4. Construcción realizada para la segunda situación-problema.



Fuente: Elaboración propia.

El instrumento de indagación buscó un proceso de instrucción basado en valores democráticos y el pensamiento crítico, en línea con la visión del artículo 3 de la *Ley de Educación Nacional*, que fomenta la construcción de una sociedad justa, la afirmación de la soberanía e identidad nacional, el fortalecimiento del ejercicio de la ciudadanía democrática, el respeto a los derechos humanos y libertades fundamentales, y el impulso al desarrollo económico-social.

4.3 Análisis y valoración de la Idoneidad Cognitiva

En este apartado se analizan los indicadores que permiten valorar si el alumno establece conexiones entre los diferentes objetos matemáticos y sus correspondientes significados. Los mismos pueden observarse en la Tabla 3.

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva.

Componentes	Indicadores
<p>Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - El análisis del marco legal en el que se sustenta esta investigación (diseño curricular provincial, NAP, IPAP, MOA, etc.) permite determinar que los estudiantes poseen -o deberían poseer- los conocimientos previos para realizar las situaciones-problema propuestas. - El uso de GeoGebra u otras herramientas tecnológicas para la visualización y manipulación de funciones puede favorecer la construcción de conceptos. - Los contenidos pretendidos tienen una dificultad accesible en sus diversas componentes.

Componentes	Indicadores
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> - Socializar las producciones de cada estudiante a medida que avanzan en la resolución de las situaciones-problema fomentando los procesos de discusión, avance y reflexión de las prácticas realizadas. - Definir actividades de ampliación o refuerzo.
Aprendizaje (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	<ul style="list-style-type: none"> - Se promueve la comprensión y competencia en los contenidos propuestos en la faceta epistémica. - Se busca determinar el nivel de comprensión alcanzada por los estudiantes. - Se apunta a analizar el sistema de prácticas operativas y discursivas implementadas en un proceso de instrucción para luego valorar la idoneidad didáctica alcanzada por los alumnos, respecto del crecimiento poblacional en relación con la Función Logística, y determinar las relaciones entre los seis objetos primarios.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 10).

En el instrumento de indagación se parte del trabajo con un modelo exponencial para luego construir el logístico. Por otro lado, dada la alta cantidad de producciones resueltas, se podría considerar que la dificultad estuvo en relación con los saberes previos de los estudiantes y las construcciones de GeoGebra potenciaron el desarrollo de conjeturas.

En consecuencia, los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes y el nivel de dificultad de los contenidos pretendidos cumplen con los tres indicadores propuestos para esta componente. Esto se puede visualizar en la Figura 5a y 5b, a modo de ejemplo, donde distintos estudiantes relacionaron la actividad propuesta con la fórmula de interés compuesto.

Figura 5a. Análisis de los saberes previos (respuesta desde un lenguaje coloquial).

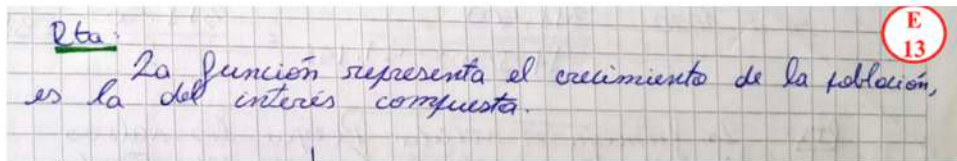
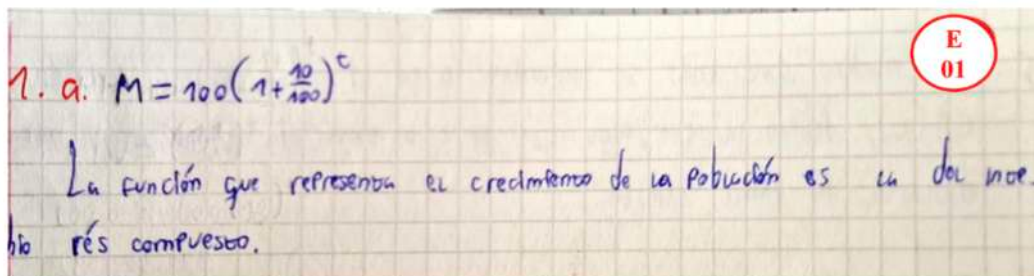


Figura 5b. Análisis de los saberes previos (respuesta desde un lenguaje coloquial y simbólico).



Fuente: Elaboración propia basada en el trabajo de los estudiantes.

4.4 Análisis y valoración de la Idoneidad Afectiva

A continuación, en la Tabla 4 se especifican los indicadores que se tuvieron en cuenta a nivel de la faceta afectiva dentro de la investigación.

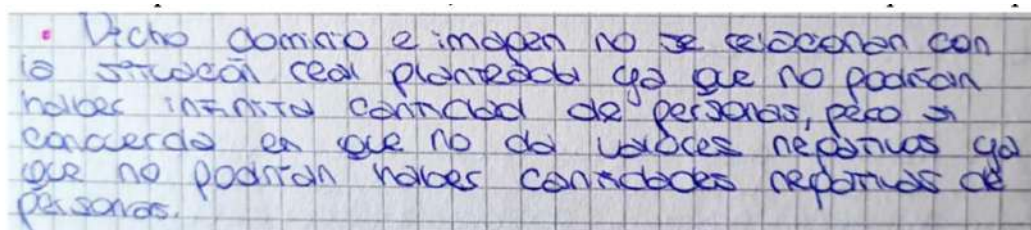
Tabla 4. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva.

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> - Se tiene en cuenta el carácter motivacional de los problemas incentivando la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> - Se invita a una participación crítica y reflexiva, haciendo énfasis en la responsabilidad al momento de resolver el instrumento. Se resalta la importancia de plasmar todo lo que se considere pertinente (argumentos, procedimientos, conjeturas, etc.) al momento de la resolución de las situaciones propuestas. - Se favorece una actitud positiva hacia el trabajo colaborativo. - Se promueve la lectura y uso crítico de la información. - Se apoya la argumentación en situaciones de igualdad.
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> - Se fomenta la curiosidad en los alumnos, afianzando su aprecio por las matemáticas a partir de la presentación de situaciones-problemas significativos que buscan resolver situaciones reales. - Se estimula la confianza y seguridad en sí mismo para la resolución de tareas matemáticas.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 11).

Si bien no se hace referencia al carácter motivacional de los problemas, el primer indicador está incluido ya que se incentiva el uso de situaciones reales en el instrumento de indagación. Más allá de esto, no es posible observar la repercusión del mismo en la vida cotidiana y profesional. Dadas las características empíricas de los indicadores, la inferencia de éstos se tomó de las prácticas operativas y discursivas obtenidas (Figura 6).

Figura 6. Ejemplo de cumplimiento de un indicador en relación con los intereses y necesidades.



Fuente: Elaboración propia.

4.5 Análisis y valoración de la Idoneidad Interaccional

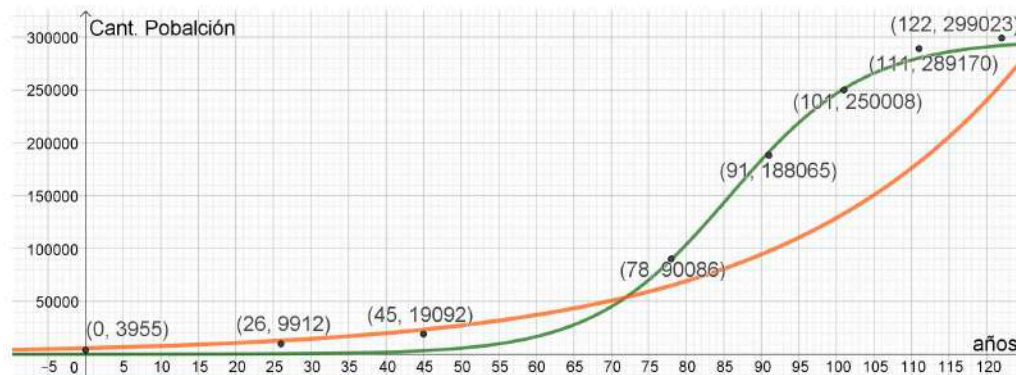
En esta faceta se abordan cuestiones que refieren a la interacción entre el docente-estudiante, entre estudiantes, su autonomía y, por último, si su evaluación resulta ser formativa. Los indicadores elaborados y trabajados en la investigación son los presentados en la Tabla 5.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional.

Componentes	Indicadores
Interacción docente-discente	<ul style="list-style-type: none"> - Se emplean una variedad de recursos retóricos y argumentativos que involucren a estos últimos, proporcionando indicaciones, y respondiendo preguntas. Respecto al uso de GeoGebra, se dispone de computadores para visualizar las construcciones correspondientes, y también se les da la opción de acceder a ellos desde el celular de forma online. - Se fomenta la discusión y colaboración en las instancias de diálogo. - Se contemplan momentos para la presentación de los objetivos, la metodología didáctica y los modos de evaluación.
Interacción entre alumnos	<ul style="list-style-type: none"> - Se da la posibilidad de debatir en pequeños grupos, y al finalizar las resoluciones se realiza una puesta en común por parte de los estudiantes, a los que se les invita a compartir las producciones realizadas. - A medida que se realiza cada actividad, se busca lograr consensos entre las distintas elecciones que se van tomando en cada grupo de trabajo.
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> - De acuerdo con las particularidades de la actividad, se pretende que los estudiantes se responsabilicen por resolver todas las situaciones propuestas. Esto implica exponer soluciones y argumentarlas, hacer conjeturas, emplear diversas herramientas para generar planteos razonables, establecer conexiones y comunicar sus hallazgos.
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> - Dadas las características de la aplicación, se analizan las producciones de los estudiantes luego de resolver las situaciones-problema del instrumento.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 12.).

La aplicación del instrumento se realizó de forma clara y organizada, enfatizándose en los conceptos clave del tema. Las aplicaciones realizadas previas a la puesta en práctica final permitieron observar si el vocabulario utilizado era accesible al nivel de escolaridad en el que se aplicaba; además, si las ilustraciones eran las indicadas en relación con su calidad gráfica y finalidad. En versiones anteriores de este instrumento se presentaba la siguiente gráfica para la actividad ligada al crecimiento poblacional en la ciudad de San Isidro (ver Figura 7).

Figura 7. Imagen utilizada en versiones preliminares del instrumento.

Fuente: Elaboración propia.

Luego del riguroso proceso por el que pasó el instrumento, se decidió que, en lugar de la imagen estática, los alumnos aplicarían el software GeoGebra para obtener una aproximación propia, de manera que se fomentaran procesos de debate entre pares dentro del aula y mayor autonomía de trabajo.

4.6 Análisis y valoración de la idoneidad mediacional

Finalmente, se comparten los indicadores de idoneidad para la faceta mediacional en la Tabla 6.

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional.

Componentes	Indicadores
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	<ul style="list-style-type: none"> - Se posibilita el uso de calculadoras para realizar operaciones en los ítems donde se necesita analizar las funciones en valores específicos. - Se permite el uso de ordenadores o celulares con acceso a internet para la manipulación de las herramientas elaboradas con GeoGebra.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	<ul style="list-style-type: none"> - La resolución de las situaciones del instrumento se llevará a cabo dentro del horario de clases designado para Matemáticas, con una duración estimada de dos horas. Se considera que este período de tiempo es adecuado para completar la actividad. - Dadas las características del instituto, se contempla que está en excelentes condiciones en términos de disponibilidad de espacio, distribución de los alumnos y comodidad de los bancos. - Se favorece una iluminación óptima dado que la aplicación se realizará durante la mañana.

Componentes	Indicadores
Tiempo (de enseñanza colectiva; tiempo de aprendizaje)	<ul style="list-style-type: none"> - El tiempo es suficiente para la enseñanza pretendida. - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos en general.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 13).

En el proceso de instrucción se pudieron observar los cinco primeros indicadores propuestos en el marco epistémico de referencia para los indicadores que conforman esta componente.

El uso de celulares para el trabajo con GeoGebra fue la herramienta elegida por la mayoría de los estudiantes, y el uso de las calculadoras fue muy efectivo. Esto se pudo visualizar de forma empírica el día de la aplicación.

En consecuencia, la idoneidad mediacional es alta, al cumplir con cinco de los siete indicadores propuestos.

4.7 Análisis de la idoneidad entre facetas

Este apartado se centra en dar a conocer los indicadores que involucran conexiones entre facetas. Los mismos fueron parcialmente tomados de Rivas (2014):

- (1) epistémica-ecológica, se destaca la importancia de incorporar tanto problemas matemáticos como extra-matemáticos, para modelar fenómenos físicos y sociales;
- (2) epistémica-cognitiva, la resolución de problemas se considera el método primordial para la construcción de conocimientos matemáticos, al mismo tiempo que se promueve el empleo de procesos metacognitivos;
- (3) epistémica-interaccional, se propone que el docente debe fomentar formas de justificación accesibles para los estudiantes y modelar el lenguaje matemático, al mismo tiempo que se sugiere su asistencia para el manejo efectivo de las representaciones;
- (4) epistémica-mediacional, se sugiere prestar atención a las argumentaciones asociadas al uso de GeoGebra;
- (5) afectiva-mediacional, se reconoce el valor de las TIC como un elemento de equidad, motivación y herramienta para atender mejor a estudiantes con necesidades especiales;
- (6) Finalmente, la interaccional-mediacional, que sugiere la integración de las TIC en procesos de evaluación formativa.

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad entre facetas.

Componentes	Indicadores
Epistémica-ecológica	<ul style="list-style-type: none"> - Se propone el planteamiento y resolución de problemas en contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos. - Se emplean las representaciones para modelizar e interpretar fenómenos biológicos, sociales y matemáticos, en relación con las dinámicas de crecimiento poblacional.
Epistémica-cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> - Se promueve controlar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas. - Se tienen en cuenta las representaciones escritas como parte del aprendizaje y no solo como herramientas de comunicación.
Epistémica-interaccional	<ul style="list-style-type: none"> - Se contempla la ayuda del profesor para el dominio eficaz de las representaciones (tablas, gráficos, fórmulas, etc.).
Epistémica-mediacional	<ul style="list-style-type: none"> - Se presta atención a los argumentos asociados a la manipulación del GeoGebra.
Afectiva-mediacional	<ul style="list-style-type: none"> - Se incorpora el uso de TIC como herramientas para contribuir a la igualdad dentro de la clase mediante el acceso a las construcciones en línea. - Se emplea GeoGebra como un elemento motivacional para hacer matemática.
Interaccional-mediacional	<ul style="list-style-type: none"> - Se integran las TIC en procesos de evaluación formativa.

Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 15).

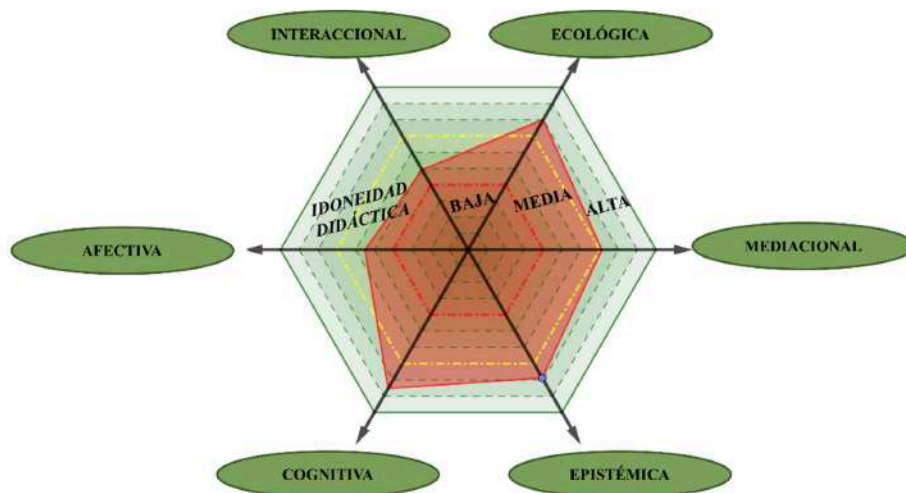
5. CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio destaca la importancia de integrar la modelización en la enseñanza de la matemática en la Escuela Secundaria, utilizando funciones logísticas para ofrecer una comprensión más precisa de los fenómenos de crecimiento poblacional. Los resultados subrayan que una enseñanza con alta idoneidad didáctica no solo mejora la comprensión matemática, sino que también fomenta un mayor interés y motivación entre los estudiantes.

Del trabajo realizado por los alumnos, luego de la aplicación del instrumento de indagación ligado a la modelización de crecimientos poblacionales mediante la función logística, se desprende que la experiencia tuvo un alto grado de idoneidad dado que se lograron cumplir una amplia variedad de indicadores (ver Figura 8).

Es importante destacar que los hexágonos que representan los procesos de instrucción implementados son irregulares, ya que es poco probable que todos los criterios alcancen el mismo nivel, mientras que en un proceso ideal todos deben tener el grado máximo. Se destaca que en todas las facetas se alcanzó un cumplimiento de los indicadores medio o alto.

Figura 8. Idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado.



Fuente: Elaboración basada en Godino (2011, p. 6).

Los hallazgos pueden servir de base para futuras investigaciones en lo que respecta al análisis de idoneidad, en otros contextos, involucrando otros objetos matemáticos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

CR y RFE concibieron la idea presentada. Adaptaron la metodología al contexto del estudio, crearon los modelos y recopilieron los datos. CR analizó los datos. Ambos autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo final.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por los autores correspondiente, CR y RFE previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Cervantes y a la docente a cargo del grupo de trabajo, Lic. Mariana Pagano.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *Aires*, 6(1), 1-29.
- Barreiro, P. (2017). Criterios para valorar el uso de nuevas tecnologías en la clase de Matemática. En M. Rodríguez (Coord.), *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (2da ed., pp. 71-94). Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Castillo Céspedes, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48. <https://www.scielo.br/jep/a/NXbLBWFwzFpFTSp97gYRjsh/?lang=es>
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13. https://www.researchgate.net/publication/244457271_Design_Experiments_in_Educational_Research
- Diseño Curricular para la Educación Secundaria 5o año: Matemática-Ciclo Superior. (2011). C. Bracchi y M. Paulozzo (coord.). Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.
- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME). Brasil
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. (Versión ampliada y revisada de *The ontosemiotic approach to research in mathematics education*. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (12) 127-135, por J. D. Godino, C. Batanero y V. Font, 2007). https://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El Enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 12(2), 47-59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (7-9 de septiembre de 2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). España. <https://ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf>
- Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020)*, 51, 80-106.
- Ley Nacional de Educación N° 26.206 2006*(art. 3) Argentina.
- Ministerio de Educación Argentina. (2004-2012). *Núcleos de aprendizaje prioritarios: Campo de Orientación General, Ciclo Orientado Educación Secundaria*. Consejo Federal de Educación. Argentina.
- Ministerio de Educación Argentina. Secretaría de Innovación y Calidad Educativa. (2019). *Indicadores de progresión de los aprendizajes*. Argentina.
- Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2019). *Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en matemática*. Argentina.
- Pochulu, M. (2015). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En M. D. Pochulu, M. A. Rodríguez (Comp.), *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, 63-90. Editorial Universitaria de Villa María.
- Rivas Catricheo, H. R. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~batanero/documentos/Tesis_HRivas.pdf



MATEMÁTICAS EN CUBA: ENSEÑANZA, INVESTIGACIÓN, AVANCES Y RETOS: Una visión en el contexto de América Latina

MATHEMATICS IN CUBA:
TEACHING, RESEARCH, PROGRESS AND CHALLENGES:
A vision in the context of Latin America

Lilliam Alvarez Díaz¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5600-5714>

María Cristina González Dosil²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0044-7529>

Dunia Reyes Abreu³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9395-0106>

Rosa Alicia Cárdenas Puig⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-3740-4143>

Oscar Domínguez Escobar⁵

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-5200-1477>

Fatma Vega Jadur⁶

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9398>

RESUMEN

El presente artículo ofrece un panorama sobre la enseñanza de la matemática en Cuba, abordando el contexto, buenos resultados y logros, así como obstáculos y deficiencias aún por vencer. Ya que, si bien se han registrado avances, persisten numerosos desafíos. En esta contribución se presentan aspectos que abordan desde la formación de los maestros de Matemática durante más de seis décadas y la atención a niños con talentos, hasta las múltiples acciones y logros en la enseñanza de la matemática fuera de la escuela, por vías extra-escolarizadas. Aunque en Cuba, y es justo reconocerlo, ha habido avances en medio de un contexto complicado y crisis mundiales e internas, queda aún

1 Academia de Ciencias de Cuba, email: lilliamalvarezdiaz@gmail.com

2 Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, email: cristinagd@ucepv.edu.cu

3 Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, email: duniara@ucepv.edu.cu

4 Empresa de Medios informáticos y audiovisuales, CINESOFT, email: rosaalicia1612@gmail.com

5 Metodólogo de Matemática de la Dirección General de Educación, Administración Provincial Holguín. email: oscarde3.14@gmail.com

6 Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, email: fvjadur@gmail.com



mucho por hacer y compartir, sobre todo en el ámbito centroamericano y caribeño.

Palabras claves: enseñanza de la matemática, formación de maestros de Matemática, vías no formales de enseñar matemática.

ABSTRACT

The present article provides an overview of mathematics education in Cuba, addressing the context, successes, and achievements, as well as obstacles and shortcomings that still need to be overcome. While progress has been made, many challenges remain. This contribution presents aspects ranging from the training of Mathematics teachers for more than 6 decades, the attention to children with talents, to the multiple actions and achievements in the teaching of Mathematics outside the School, through extra-curricular channels. Although in Cuba, and it is fair to recognize this, there has been progress amid a complicated context and global and internal crises, there is still much to be done and shared, especially in the Central American and Caribbean regions.

Keywords: teaching of mathematics, training of Mathematics teachers, non-formal ways of teaching Mathematics.

1. INTRODUCCION

La educación en Cuba, pública y laica, como sistema y atención priorizada a nivel nacional y gubernamental, comienza a tener un fomento y desarrollo a partir de 1959, y así mismo la enseñanza de la matemática. En poco más de seis décadas hay mucho que compartir, tanto grandes avances comparados con los países de nuestra región, como retrocesos, rectificaciones y medidas para sobreponernos a la grandes crisis mundiales e internas como las que atravesamos hoy en día, sobre todo en la esfera económica que impacta directamente a la educación.

Desde la UNESCO se emiten y publican reportes y boletines sobre las amenazas que implica la desescolarización. La directora general Azoulay (UNESCO, 2024) ha expresado:

El costo mundial de la desescolarización y de las carencias educativas es vertiginoso: 10 billones de dólares al año. Y a estas consideraciones económicas se añaden importantes estragos sociales. El mensaje que transmite este informe de la UNESCO es claro: la educación es una inversión estratégica, una de las mejores inversiones posibles para los individuos, las economías y el conjunto de la sociedad. Hago un llamamiento a nuestros Estados Miembros para que velen por que este derecho universal se convierta lo antes posible en una realidad para todos los seres humanos.

En el contexto de América Latina y el Caribe existen muchos informes, incluidos de la UNESCO, reportes, investigaciones, publicaciones sobre cuál es la prioridad y el estado actual de la Enseñanza de la Matemática en nuestra Región. Valga resaltar los Reportes del Consejo internacional para las ciencias, ISC, en cuanto a colocar la Enseñanza de la Matemática como prioridad central, al mismo nivel de las investigaciones sobre cambios climáticos o los estudios de la biodiversidad o energías renovables (Felmer P. 2015) y (Alvarez L. 2014)

A esta reflexión hay que añadir que sin matemáticas no hay desarrollo posible, y que enseñar Matemática es una obligación para los países en vías de desarrollo “Las Matemáticas son imprescindibles para la resolución de problemas”. La aversión a las Matemáticas entre los jóvenes requiere esfuerzos amplios y creativos para fomentar las habilidades y crear conciencia de su valor para la sociedad (Álvarez, 2015).

Primero, hay que decir que Cuba es un país muy singular, por su posición geográfica y condiciones históricas, económicas, sociales con grandes metas de inclusión y equidad. En Cuba se ejecutan acciones y se monitorean periódicamente los 17 Objetivos de Desarrollo sostenible, de la Agenda 2030, en particular el objetivo 4: “Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos”.

En este artículo presentamos cómo es la formación de los maestros de Matemática, un breve recuento histórico en más de seis décadas de planes de estudios elaborados a partir de las demandas de un país que aspira al desarrollo. La formación continua de los egresados de la Licenciatura en Matemática hacia grados científicos como maestrías y doctorados se presenta como un componente fundamental hacia la excelencia del profesorado en general.

Compartimos, además, como elemento importante del artículo, las vías no formales de enseñanza-aprendizaje de la matemática fuera del currículo escolar, fuera de las aulas que se emplean en Cuba. Sin tratar de ser exhaustivos, mostramos formas lúdicas digitales con las experiencias cubanas desde una empresa fundada al efecto, para la creación de medios informáticos y audiovisuales, llamada CINESOFT.

También incluimos la labor durante décadas de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación para el fomento y la promoción de la Matemática y como complementos del proceso enseñanza-aprendizaje extraescolar. Ilustramos con el desempeño de los estudiantes cubanos en Olimpíadas, pruebas UNESCO como el ERCE y reflexionamos sobre lo mucho que se ha hecho, pero también sobre lo mucho que aún falta.

Son muy importantes estos estudios comparativos sobre la enseñanza de las matemáticas en nuestra región porque “proporcionan una medida de las normas de calidad de los sistemas educativos, de sus debilidades, fortalezas y oportunidades. En ese sentido, se vuelve necesario abrir las puertas de las universidades y generar lazos de amistad académica entre los países de la región Centroamericana para crear procesos de diálogo, reflexión y comparación de las diferentes estrategias y formar profesores con experiencias enriquecedoras. Los países centroamericanos no están aislados, es posible crear vínculos y potenciar la región a partir de las experiencias que se viven en cada país” tal como se expresa en (Turcios Carrasco, 2023).

2. FORMACIÓN DE LOS MAESTROS DE MATEMÁTICA: LICENCIATURA EN EDUCACION

La formación de profesores, en especial para la asignatura Matemática, ha constituido objetivo esencial en la política educacional en Cuba a partir del año 1959 y hasta la actualidad. Con el objetivo de formar profesores cada vez más capacitados para el ejercicio de la profesión, se han diseñado varios planes de estudio, siempre vinculados a las peculiaridades de cada momento histórico y necesidades del desarrollo de la sociedad cubana. Para el logro de este propósito es fundamental que se garantice que los maestros adquieran las herramientas necesarias para cumplir con éxito el encargo que les asigna la sociedad. Con el objetivo de facilitar la comprensión de las peculiaridades de la formación de los profesores de matemática en Cuba, se han considerado diferentes períodos en correspondencia con las condiciones que dieron origen a los diferentes planes de estudio.

2.1 Los diversos planes de estudio de la carrera Licenciatura en Educación Matemática en Cuba y sus exigencias para el desarrollo de las habilidades profesionales pedagógicas

Desde 1959, la formación de profesores de matemática en Cuba ha pasado por diferentes etapas muy relacionadas con las exigencias de la sociedad, hasta llegar en la actualidad al Plan de estudio “E” con el que se forman los profesores de esta especialidad en la carrera Licenciatura en Educación Matemática. La evolución en el tiempo de la formación de este cuerpo docente requiere del análisis y caracterización de los diversos planes de estudio y sus exigencias para el desarrollo de las Habilidades Profesionales Pedagógicas (HPP).

Veamos aquí una sistematización de las peculiaridades de los diferentes planes de estudio para la formación de profesores de matemática, diseñados desde 1959 (MINED, 1977, 1982, 1990; MES, 2016; Reyes y Rodríguez, 2018).

Primer período desde 1959 hasta 1972: Los primeros planes

El año 1959 significó un cambio rotundo para el pueblo cubano en todas las esferas de la vida. La Revolución triunfante encontró un país sumido en la pobreza y con una situación alarmante en todos los órdenes, particularmente en la educación. La existencia de más de un millón de analfabetos, de seiscientos mil niños sin escuelas y, contradictoriamente, alrededor de diez mil maestros desempleados, constituye solo un pálido reflejo de la situación existente. Las acciones de la Revolución para transformar radicalmente esta situación fueron inmediatas: se crearon miles de aulas, se inició la formación de maestros voluntarios, se decretó la nacionalización de la enseñanza y se llevó a cabo la Campaña de Alfabetización de 1961. Se inició así la obra educacional de gran magnitud que distingue a Cuba.

El acceso gratuito de toda la población a los diferentes niveles educacionales permitió que muchos maestros pudieran tener un aula, por primera vez, para poder ejercer su profesión. Sin embargo, no fue suficiente la cantidad de profesores para poder cubrir todas las aulas, por lo que hubo que tomar diversas medidas como el llamado a voluntarios para ejercer como maestros (Rodríguez, 2014). Surgió entonces un nuevo problema: la necesidad de superación de los maestros y voluntarios, la formación de nuevos educadores para los diferentes niveles de enseñanza y la inexistencia de planes de estudio, programas y textos adecuados. Para enfrentar la tarea de garantizar un maestro para cada aula, se crearon las Escuelas de Maestros Primarios y el Instituto de Superación Educacional (ISE), destinado a la capacitación y perfeccionamiento del personal docente y los maestros voluntarios.

En 1964 se crearon los tres primeros Institutos Pedagógicos: Enrique José Varona en La Habana, Félix Varela en Las Villas y Frank País en Oriente, como dependencias de las universidades, lo cual trae consigo el inicio de la solución a estos problemas. Una de las ideas más importantes y trascendentales llevadas a la realidad en el Instituto Pedagógico fue la inclusión de la práctica docente temprana en las carreras, con lo que se vincularon dos objetivos: resolver una necesidad de profesores del país y contribuir a una mayor y más efectiva formación de cualidades y habilidades profesionales propias de un maestro, mediante el enfrentamiento de las realidades tanto docentes como sociales del país.

Los primeros planes de estudio fueron elaborados para formar profesores para los subsistemas de Educación Secundaria Básica y Secundaria Superior. Se crearon de esta manera la Carrera Profesoral de Secundaria Básica y la Carrera Profesoral de Secundaria Superior. En esta etapa se formaron profesores con un doble perfil: Matemática-Física y

Matemática-Educación Laboral para la Secundaria Básica. Reyes y Rodríguez (2018), al referirse a estos planes de estudio, destacaron las principales razones por las que sufrieron transformaciones; entre ellas se encuentra la falta de experiencia, lo que provocó la necesidad de realizar modificaciones en la marcha a los proyectos originales. Además, señalan que los Institutos Pedagógicos han funcionado siempre en proporción a las demandas educacionales del país y, por ello, no solamente han tenido que modificar con frecuencia sus planes de estudio, cuando ha sido preciso adaptarlos a esa dinámica, sino que han trabajado simultáneamente con muchos planes de estudio.

La década de los setenta trajo consigo profundas transformaciones en la formación de profesores de Matemática. Entre 1971 y 1972 se crearon los Cursos para Trabajadores en una primera variante de encuentros quincenales, con el objetivo de superar a los profesores de la enseñanza media que ejercían sin el título idóneo para este nivel. Estos cursos se desarrollaron por la modalidad de Cursos Dirigidos con una duración de cinco años y prepararon a los matriculados con un nivel equivalente al de la Carrera Profesoral de Secundaria Superior. En 1972 se abrió una segunda modalidad de Curso para Trabajadores: los Cursos Vespertinos Nocturnos de nivel Básico, en los que ingresaban maestros primarios y de nivel Superior.

Segundo período, 1972 hasta 1977. Crecimiento demográfico

La estabilidad lograda en el país durante los primeros años de la Revolución, los logros en educación y salud, entre otros factores, propiciaron un crecimiento de la población infantil –*el baby boom*– que debía ingresar a la Secundaria Básica a partir del curso 1972-1973. Se necesitaba un número creciente de profesores para asumir la docencia en las Escuelas Secundarias Básicas en el Campo, de reciente creación. Se trataba de Secundarias básicas e Instituto preuniversitarios o bachilleratos con sistema de becas y construidos fuera de los núcleos urbanos.

En 1972, el gobierno realizó un llamado a los jóvenes estudiantes de Secundaria Básica para incorporarse al Destacamento Pedagógico Universitario Manuel Ascunce Domenech al concluir el 10o grado, y asumir la docencia en estos centros educacionales mientras estudiaban la carrera profesoral. La respuesta fue significativa: miles de jóvenes de todo el país se incorporaron al destacamento en sus cinco contingentes, durante los cursos 1972-1973 hasta 1976-1977. Para estos estudiantes se creó un nuevo plan de estudio que contempló, por primera vez, la formación de un único profesor de matemática para la Enseñanza Media y para la Enseñanza Media Superior en las Filiales Universitarias dirigidas desde el Instituto Pedagógico.

Con una duración de cinco años, una sesión enseñando en las escuelas en el campo y la otra recibiendo clases diariamente, los jóvenes en este plan se graduaban como profesores de matemática para la Enseñanza General Media. Su formación se complementaba con un Curso de Ampliación por estudios dirigidos, con una duración de dos años, que les permitía obtener el título de Licenciados en Educación en la Especialidad de Matemática. Tal y como sucedió con los planes de estudio anteriores, cada año se realizaron modificaciones, especialmente a partir del tercer contingente. Estas modificaciones incorporaron nuevos contenidos que permitieron a los estudiantes-profesores abordar los nuevos planes de estudio que se estaban implementando en la Secundaria Básica.

En 1975 la Tesis sobre Política Educacional en Cuba planteó la tarea de unificar los planes de formación de profesores. Además, se hacía necesario elevar la calidad de la formación de profesores para la enseñanza media. Debido a esto se tomaron dos decisiones importantes

“...la transformación de los Institutos Pedagógicos en Institutos Superiores Pedagógicos (Centros de Educación Superior independientes) y la estructuración de nuevos planes de estudios de Licenciatura en Educación” (Santana, 1998, p. 33). En la segunda mitad de la década de los años setenta, con la adecuación de los planes y programas de estudio, comienza el Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación en Cuba. Como parte de este perfeccionamiento, se transforma el Instituto de Superación Educacional (ISE) en Instituto de Perfeccionamiento Educacional (IPE). Asimismo, los Institutos Pedagógicos se independizan de las Universidades, de forma que pasan a ser Institutos Superiores Pedagógicos (ISP).

Tercer período, entre 1977 y 1982. Plan de estudio A

El Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona se constituyó oficialmente el 31 de enero de 1977, y ocupó diversos espacios de la histórica Ciudad Escolar Libertad, en el municipio Marianao. Coincidiendo con el primer año del Curso de ampliación para los graduados del Primer Contingente del Destacamento Pedagógico Manuel Ascunce Domenech, se inició en el curso 1977-1978 el Plan de estudio A para formar licenciados en Educación en la Especialidad de Matemática, con una duración de cuatro años y al que ingresaron los estudiantes graduados de preuniversitario. En el curso 1978-1979 comenzó la variante del Plan de estudio A por estudios dirigidos, con una duración de seis años, para los profesores en ejercicio no titulados.

Cuarto período, de 1982-1990. Se desarrolla el Plan de estudio B

El Plan B se inició en el curso 1982-1983. Con una duración de cinco años, este plan se caracterizó por lograr, por primera vez, una concepción de las prácticas pedagógicas desde los primeros años, así como por una elevada carga de información científica. Por primera vez, aparece un modelo del especialista, aunque no fue un instrumento de trabajo de los docentes, quienes apenas lo conocían. La formulación de los objetivos se perfila en tres niveles: conocer, saber y saber hacer, y se comienza a utilizar el lenguaje de habilidades profesionales para identificarlas en organizativas, constructivas y cognitivas. Este plan solo aventaja al anterior en que se logra una concepción de las prácticas pedagógicas desde los primeros años, por lo que propició espacios para la formación de las habilidades profesionales pedagógicas; sin embargo, aún no se dedicaba la atención necesaria a la formación y el desarrollo de estas habilidades.

La necesidad de profesores para la enseñanza media condujo a la creación de un plan emergente de formación de profesores de Matemática, Química y Física en el curso 1984-1985. A este curso se incorporaron maestros primarios graduados de las Escuelas Pedagógicas, quienes recibieron una preparación intensiva para asumir la docencia en las secundarias básicas y culminaron sus estudios de Licenciatura en Educación en el curso para trabajadores.

A finales de la década de los ochenta se presentan algunos factores objetivos, tales como:

- Cambios de la estructura y el contenido de la Educación General Politécnica y Laboral.
- Aumento de la introducción de la Computación en los niveles medio y superior.

- Necesidad de reducir la estructura de especialidades en correspondencia con el desarrollo económico-social, los que condicionan la necesidad de efectuar otro perfeccionamiento de los planes de estudio” (Santana, 1998, p. 34).

Quinto período, de 1990 a 2003. Planes de estudio C y C modificado

En el curso 1990-1991 comienza a desarrollarse el Plan de estudio C para la formación de licenciados en Educación en las especialidades de Matemática y Computación. Este plan se elaboró para cumplir con las exigencias planteadas por las necesidades económico-sociales referidas (de aquí la consideración del doble perfil) y para lograr una integración adecuada de lo académico, lo laboral y lo investigativo. El componente laboral se erige como la columna vertebral de este plan de estudio. Los ajustes que se realizaron a este plan de estudio fueron numerosos. Entre los más importantes destacan la eliminación de algunas asignaturas, reelaboración de programas de asignaturas y disciplinas, y ajustes en el tiempo de algunas disciplinas. A partir de este momento este plan fue reconocido como el Plan de estudio C ajustado o modificado.

Diversas necesidades conllevaron a la realización de transformaciones sustanciales en la educación, como es la urgencia de reducir el número de alumnos por grupo en las diferentes enseñanzas, además de las propias transformaciones que se venían produciendo a lo interno de la formación de docentes, condujeron a cambios más profundos que tuvieron lugar en esos años como fue la universalización de la Educación Superior Pedagógica, lo cual permitió que los jóvenes tuvieran mayores oportunidades de acceso a este nivel de educación (Colectivo de autores MP-D, 2010, p. 5) En este período se crearon las Sedes municipales como parte del proceso de universalización de la Educación Universitaria, por lo que la mayor parte de los estudiantes de la carrera pasaron a estos centros. Aunque no se contaba con profesores que estuvieran lo suficientemente preparados para desarrollar las asignaturas del Plan de estudio y se presentaban dificultades para su preparación metodológica porque simultaneaban esta labor con la docencia en sus centros de trabajo en las Educaciones Media y Media Superior u ocupaban cargos de dirección en los diferentes niveles del MINED, se consideró un logro el haber podido mantener abierta la carrera en estas condiciones excepcionales.

Otros ajustes al plan de estudio en este período estuvieron relacionados con la salida de los estudiantes a la práctica laboral responsable desde los primeros años de la carrera, para cubrir la docencia en las Escuelas Secundarias Básicas y Preuniversitarios, ante el éxodo de profesores por las difíciles condiciones económicas en que se vio sumido el país.

Sexto período, de 2003 hasta el 2010. Un perfil más amplio

El plan de estudio de la Licenciatura en Educación Especialidad Ciencias Exactas se inició en el curso 2003-2004, para la formación de profesores en las especialidades Matemática, Física e Informática en la Educación Media Superior. Se concibió realizar esta formación en un período de cinco años. El primer año se diseñó intensivo y concentrado y, a partir de segundo año, las asignaturas se desarrollaron en tres bloques en las primeras ediciones del plan. Posteriormente, se organizaron en dos semestres.

En todos los casos se partió de la elaboración del Modelo del profesional de la Educación, y se definieron un conjunto de disciplinas comunes, a saber: las correspondientes a la Formación General, los Fundamentos Ideológicos de la Educación y los Fundamentos

Científicos de la Educación (Colectivo de autores MP-D, 2010). El plan mantuvo en vigencia la estructuración del Plan de estudio C adecuado con respecto a los componentes académico, laboral e investigativo.

La educación cubana había iniciado un proceso de grandes cambios, fundamentalmente en la Educación Secundaria Básica, que se conoce como la Tercera Revolución Educacional:

“Hoy se trata de perfeccionar la obra realizada, partiendo de ideas y conceptos enteramente nuevos. Hoy buscamos lo que a nuestro juicio debe ser y será un sistema educacional que se corresponda cada vez más con la igualdad, la justicia plena, la autoestima y las necesidades morales y sociales de los ciudadanos en el modelo de sociedad que el pueblo de Cuba se ha propuesto crear”. (Castro, 2002)

Asociado a estas transformaciones educacionales de los últimos años, surgió un nuevo modelo de profesor, el Profesor General Integral (PGI) con un currículo que transcurrió fundamentalmente en la práctica educativa. Allí, la escuela representada en sus tutores tuvo la misión de guiarlo en su condición de microuniversidad, hasta la cual se extendió el recinto de las universidades como parte del proceso de universalización, que pretendía llevar a todo el territorio nacional la educación universitaria.

Séptimo período, de 2010 hasta 2016. Plan de estudio D

A inicios del 2010 se consideró necesario pasar de un profesor de Ciencias Exactas que se responsabilice con el desarrollo de tres asignaturas, incluida la Informática en el nivel medio superior, a un profesor de Matemática y Física, tanto para la Educación Media Básica como para la Superior, que tuviera en cuenta también las peculiaridades del trabajo con los adolescentes, tal y como se hacía anteriormente en la carrera de Profesores Generales Integrales que ahora desaparece en este periodo.

Con este perfil se pretende formar un profesional con una preparación político-ideológica y científico-metodológica que le permita dirigir el proceso educativo y, en particular, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la Física con un enfoque interdisciplinario, en que se tengan en cuenta las relaciones con la ciencia, la tecnología, la sociedad y el medio ambiente en el contexto nacional (Colectivo de autores MP-D, 2010). En el curso 2010-2011 se inició una cuarta generación de planes de estudio, que genéricamente se denominó Plan de estudio D. En este plan se introdujeron diversas transformaciones para la formación de profesores de Matemática y Física para las Educaciones Media y Media Superior.

Entre las principales modificaciones destacan las siguientes: la flexibilidad de los planes, la creación de un Currículo Base, contenidos propios, espacio optativo o electivo, introducción de nuevos métodos que garantizarían el autoaprendizaje, la formación investigativa laboral con carácter básicamente investigativo, profesional, o una combinación de ambas formas. Además, se dio un amplio y generalizado empleo de las TIC y fortalecimiento de la formación social y humanística a partir de la introducción de contenidos relacionados con la historia de Cuba, la historia de la profesión, la cultura medioambiental y la ética, que se integraron a las disciplinas del plan de estudio. Es a partir del Plan “D” que se retoma lo mejor de las experiencias acumuladas a lo largo de estos años, se incorporan aportes de las Ciencias pedagógicas como exigencias del Modelo del profesional, y se contextualizan en la estructuración del programa de la disciplina integradora Formación Laboral Investigativa, de la Licenciatura en Educación, Matemática-Física. La concepción desarrolladora del aprendizaje y la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje, el enfoque investigativo de la práctica preprofesional pedagógica, y las exigencias nacionales e internacionales para la acreditación

de las carreras universitarias y la calidad de los sistemas nacionales de educación constituyen rasgos esenciales tomados en consideración en la concepción de este programa de disciplina (Francisco, 2011).

Octavo período, 2016 hasta la actualidad. Plan de estudio E

Las experiencias obtenidas en el desarrollo de estos planes de estudio revelan que se ha logrado un incremento en la calidad de la formación; no obstante, se consideró necesario continuar trabajando en el perfeccionamiento del modelo de formación de perfil amplio. Esto con el fin de fortalecer la educación durante toda la vida y la formación integral de los estudiantes mediante un proceso docente educativo que priorice el aprendizaje y la formación de habilidades para la gestión del conocimiento. Ello ha conducido al inicio de un nuevo período, con la elaboración del nuevo Plan de estudio E para la Licenciatura en Educación Matemática, en el cual se ha tenido en cuenta, además, la tendencia mundial a acortar los estudios para obtener un título universitario y dar una respuesta más rápida a las demandas sociales y a la necesidad de estimular el ingreso a las carreras pedagógicas.

La diferencia esencial con el plan anterior radica en que, en este plan, la formación de profesores de Matemática se desarrolla por separado de la de profesores de Física. Por otra parte, se fortalecen el papel rector de la Disciplina Principal Integradora Formación Laboral Investigativa y las relaciones entre el pregrado y el posgrado, y se incrementa el tiempo que se dedica a la autogestión el conocimiento, con el fin de perfeccionar el desempeño de los profesionales que se forman. La implementación de este plan se inició en el curso 2016-2017, con una duración de cuatro años de estudios en las modalidades de Curso Diurno, y cinco años para el Curso por Encuentros. En él se asumen como premisas fundamentales el proceso de formación continua de los profesionales, que se desarrolla desde la formación de pregrado, la preparación para el empleo y la formación de postgrado; para el continuo incremento de la calidad de la formación y el logro de un profesional integral.

2.2 Disciplinas curriculares en la Licenciatura en Educación Matemática

A partir de la concepción de los Planes D y E, en las carreras universitarias se trabaja con tres tipos de currículo:

- Currículo base, que incluye las disciplinas que las Comisiones Nacionales de Carreras consideran que deben ser abordadas por la carrera en todas las universidades. En este órgano se elabora el programa de la disciplina y se precisa la cantidad de horas que se asignan a cada una de ellas. La derivación en asignaturas, la elaboración de los programas y la asignación del tiempo se realiza en cada universidad, sobre la base de sus características propias.
- Currículo propio, que se compone de asignaturas seleccionadas por la carrera en cada universidad, sobre la base de sus necesidades y potencialidades. La cantidad de horas que se asignan a cada asignatura propia es también decisión de cada universidad, sobre la base del tiempo asignado al currículo propio en la Comisión Nacional de Carrera. Estas asignaturas deben ser cursadas por todos los estudiantes.

- Currículo optativo/electivo, integrado por asignaturas que selecciona cada estudiante a partir de las propuestas que hace la universidad, y que pueden incluir asignaturas que se imparten en otras universidades. El total de tiempo que se dedica a estas asignaturas en el plan del proceso docente se determina por la Comisión Nacional de Carrera y cada asignatura debe cumplir con este tiempo.

Compartimos en la Tabla 1 la relación de las asignaturas correspondientes al currículo base del Plan D y del Plan E vigente y solo para el curso regular diurno.

Tabla 1. Asignaturas del currículo de la Licenciatura en Educación Matemática en Cuba.

Asignaturas del Plan “D”, carrera de 5 años vigente hasta 2017	Asignaturas del Plan “E”, carrera de 4 años, actual
Práctica Integral de la Lengua Española	Formación Pedagógica General
Práctica de la Lengua Inglesa	Fundamentos Básicos de la Matemática
Informática Educativa	Álgebra
Formación Pedagógica General	Geometría
Fundamentos de la Matemática Escolar	Análisis Matemático
Fundamentos de la Física Escolar	Probabilidades y Estadística
Didáctica de la Matemática	Física
Didáctica de la Física	Formación Laboral Investigativa
Análisis Matemático	Marxismo Leninismo
Álgebra	Historia de Cuba
Geometría	Preparación para la defensa
Física General	Educación Física
Probabilidades y Estadística	+ Currículo propio
Educación Física	+ Currículo optativo/electivo
Educación Artística	
Formación Laboral Investigativa	
Marxismo Leninismo e Ideario martiano	
Historia de Cuba	
Preparación para la Defensa	
Reflexión y debate	

Fuente: Elaboración propia.

2.3 Matrículas 2017-2024 para la Licenciatura en Educación Matemática-Física y Licenciatura en Educación-Matemática

La satisfacción de las demandas de profesores de Matemática, que exige la educación masiva de adolescentes y jóvenes, continúa siendo una asignatura pendiente para la carrera, pues no se ha logrado la incorporación esperada. En la Tabla 2 se presenta cómo se ha comportado la matrícula en estas dos licenciaturas, Matemática y Matemática-Física, en los últimos cursos académicos.

Tabla 2. Estudiantes formados en la carrera en los últimos 5 años.

Curso	Curso diurno	urso por Encuentros (5 años)	urso por Encuentros (4 años)	Total
2017-2018	324	220	70	614
2018-2019	213	193	83	489
2019-2020	174	200	43	417
2021- 2022	202	311	44	557
2022-2023	240	211	36	487
Total	1153	1135	276	2 564

Fuente: Datos de la Comisión Nacional de la carrera Licenciatura en Educación Matemática.

Siendo la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona la más grande y líder en la formación de maestros del país, la cantidad de profesores que forma no es suficiente en absoluto. Cabe señalar que las matrículas y egresados del curso 2023-2024 han sido similares.

2.4 La Lengua Española

La Lengua Española es una asignatura esencial en el currículo de la educación general; su aporte fundamental consiste en el desarrollo de la capacidad de comunicación en forma oral y escrita de los educandos, en la contribución a la formación y expresión del pensamiento, así como en la adquisición inicial y posibilidad de disfrute de la belleza artística y del caudal de conocimientos que ha atesorado la humanidad gracias a la palabra. La comprensión de significados constituye un componente central en la clase de lengua, ya que es la base para el aprendizaje del resto de las asignaturas. Además, se añade que para los educandos con discapacidad intelectual la mejor manera de aprender es comprender de ahí el importante lugar del proceso de la comprensión para su desarrollo, lo que demanda un proceso de enseñanza- aprendizaje que responda a estas exigencias y necesidades; sobre todo si se encuentran en condiciones de inclusión: Si no lees, escribes e interpretas bien el español, no puedes entender y aprender Matemáticas

3. LA FORMACIÓN POSGRADUADA DE LOS MAESTROS DE MATEMÁTICA, INVESTIGACIÓN Y GRADOS CIENTÍFICOS

Es necesario reseñar que en Cuba existen programas y proyectos de investigación, desarrollo e innovación, que convocan e incorporan a centenares de maestros, también de Matemáticas, y que durante las últimas décadas se han formado como Maestros y Doctores en Ciencias. Concebir la formación del profesorado como un proceso continuo, sistemático y organizado significa entender que la formación del profesorado abarca toda la carrera. El modelo del profesional para el Plan E debe ser la fuente orientadora para que la carrera establezca seguimiento al graduado. Se consideran tres etapas para la formación del profesional: la formación inicial, que se desarrolla en el pregrado; la preparación para el empleo, y la formación posgraduada, que incluye cursos de posgrado, especialidades, maestrías y doctorados.

La carrera de Matemática de la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona (UCPEJV) ha incorporado —además de la docencia de las disciplinas, los colectivos de año y la atención a la práctica docente desde la formación inicial— el uso del “Modelo del profesional para el Plan E” (Colectivo de autores 2016) como fuente orientadora de su labor científico-metodológica. De esta manera se puede desarrollar de forma armónica el seguimiento a sus egresados. Así, al graduarse los estudiantes poseen una limitada experiencia en el desempeño de sus funciones profesionales. De 1o a 3er año su práctica laboral se realiza en una escuela asignada un día a la semana o durante una semana en el semestre. Posteriormente, en el 4o año combinan la atención a un grupo docente con el desarrollo de sus asignaturas en la universidad. La escuela a su vez, apoyada por la universidad, debe realizar un trabajo sistemático que refuerce la autonomía del egresado y lo ayude en su desempeño profesional.

La preparación para el empleo, como segunda etapa de la formación continua de los maestros, es concebida y ejecutada en las instituciones educativas. Su propósito es continuar desarrollando en el recién egresado los modos de actuación profesional relacionados con su desempeño profesional pedagógico. En esta etapa el estudiante asume un rol protagónico, en un estadio cualitativamente superior y se denomina graduado o egresado. En este momento, la mayor responsabilidad es de los organismos empleadores mediante la atención directa de los tutores, quienes son profesores de la escuela asignada, seleccionados por sus resultados de trabajo para acompañar y orientar al egresado en el cumplimiento de sus funciones como docente del claustro.

Para la escuela cubana es un reto la selección de tutores para atender a los profesores egresados, debido a que algunas de las escuelas no cuentan con profesores experimentados en la asignatura, En el caso de muchas otras, a los posibles maestros tutores se les dificulta encontrar tiempo y espacio en el sobrecargado horario escolar. Para contribuir a la calidad del trabajo que se realiza en esta etapa, la carrera designa profesores que visitan sistemáticamente las escuelas y contribuyen a complementar las limitaciones que puedan tener los tutores para la atención de los egresados.

La tercera etapa de la formación continua de los profesionales de la educación, graduados de la Licenciatura en Educación, incluye el desarrollo de cursos de posgrado, proyectos de investigación, maestrías y doctorados. El desarrollo de cursos de posgrado se realiza a partir de las solicitudes de las direcciones generales provinciales de educación, y los temas que predominan se relacionan con la profundización en la didáctica de la matemática y el uso de las TICs, especialmente GeoGebra.

En la década de los años 90 se inició en la Facultad de Ciencias de la UCPEJV el primer programa de maestría, con la Maestría en Didáctica de la Matemática, dirigida a

profundizar en temas propios de la matemática y su enseñanza. A esta le sucedió la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas (Colectivo de autores, 2006), diseñada para el dominio de los fundamentos teóricos y metodológicos para la labor investigativa dirigida a la solución de problemas reales inherentes a la dirección de la enseñanza de la Matemática, la Física, la Computación y las Ciencias Exactas dentro del ámbito escolar de la Educación Secundaria Básica, Media Superior y Superior, bajo un enfoque interdisciplinario. Se desarrollaron tres ediciones entre los años 2006 y 2014; de ella egresaron 25 maestrantes, de los cuales 14 fueron mujeres y 11 hombres.

A partir del 2017 y hasta la actualidad, se desarrolla la Maestría en Educación Matemática (Colectivo de autores, 2015), que aspira a formar un egresado que sea capaz de actuar como un docente-investigador en los centros educativos de nivel medio y en las instituciones de nivel superior de formación de docentes. Igualmente, que esté preparado para aplicar en su vida profesional los conocimientos sobre investigación pedagógica en el área de la Educación Matemática, teniendo en consideración los adelantos de la ciencia y la práctica educativa, además de desarrollar en sus estudiantes hábitos, habilidades, convicciones y actitudes acordes a la sociedad cubana. Cuenta hasta el momento con 27 egresados: 14 mujeres y 13 hombres. Paralelamente, se trabaja en la formación doctoral, en la cual se han obtenido excelentes resultados que se manifiestan en la formación de 22 doctores a partir de 2015, entre los cuales se cuentan diez extranjeros; ocho procedentes de Angola, uno de Colombia y una mujer de Ecuador. De los 12 cubanos, 5 son mujeres y 7 hombres.

Finalmente, podemos concluir que los resultados presentados demuestran que la formación continua de los profesores de Matemática está concebida desde las tres etapas de la formación, y los resultados de su implementación permiten valorar positivamente dicha concepción en la UCPEJV. Sin embargo, consideramos que aún resta un arduo trabajo para poder garantizar un óptimo desempeño de los profesores de Matemática en todo el país (Gil, 2019; Colectivo de autores, 2023).

4. ENSEÑANDO Y APRENDIENDO MATEMÁTICAS POR VÍAS NO FORMALES

En este apartado compartimos vías no formales de enseñanza-aprendizaje de la matemática fuera del currículo escolar; es decir, fuera de las aulas. Sin tratar de ser exhaustivos, mostramos experiencias con formas lúdicas digitales con las experiencias cubanas desde una empresa fundada al efecto, llamada CINESOFT. También incluimos aquí la labor durante décadas de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC), y sus vínculos con la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA), en particular para la divulgación de la matemática.

4.1 Las vías no formales en el aprendizaje en Cuba

La concepción de Cuba sobre el aprendizaje y la enseñanza por vías no formales toma como referente la concepción definida por la UNESCO (2024), donde se expresa que este es un proceso institucionalizado, intencionado y planificado, como parte de una formación complementaria de la adquirida en el marco del sistema formal para todas las edades, donde además señala que su generalidad es diseñada en forma de seminario o talleres.

Sin duda, esta concepción se encuentra en correspondencia con las aspiraciones y objetivos de la Agenda 2030, ya que brinda la posibilidad de oportunidades a todos y todas para enriquecer su acervo cultural, y constituye una manera de incidir positivamente en las cualidades personales, sociales y profesionales de los entes de la sociedad.

Conocemos y valoramos las experiencias óptimas que tienen otros países con los museos de ciencias, los centros o parques para enseñar ciencias de manera interactiva e inmersiva, pero que requieren importantes inversiones que un país empobrecido y en crisis económica no puede asumir. Liderados por el Grupo de promoción de la Academia de Ciencias de Cuba, hemos desarrollado festivales de ciencias en parques abiertos por todo el territorio nacional desde hace más de dos décadas. En estos festivales se muestran experimentos interactivos con el lema de “aprender jugando”, con los propios estudiantes participando con sus experiencias en los círculos de interés, sociedades científicas estudiantiles, y las instituciones desde sus Cátedras de Cultura científica, las Brigadas técnicas juveniles, etc. Así, las limitaciones económicas y sociales que sufre Cuba no han impedido desarrollar y multiplicar vías modernas de enseñar ciencia fuera de las aulas, con creatividad, compromiso y buena voluntad de maestros, científicos y sociedades científicas. En particular, compartimos un breve panorama sobre la aplicación de las transformaciones digitales que el contexto global exige y que contribuyen en gran medida a ampliar las vías no formales de enseñanza y aprendizaje para la sociedad en su conjunto.

Cuba, para contribuir al cumplimiento de los objetivos trazados en la Agenda 2030, aplica en la actualidad el tercer perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, perfeccionamiento que va más allá de modificaciones, curriculares y metodológicas. El mismo propone, de manera institucionalizada, planificada, intencionada y ajustada al desarrollo de la sociedad cubana, actividades complementarias e integradoras a favor de elevar las competencias y destrezas de niños, niñas, adolescentes y jóvenes. El tercer perfeccionamiento, como está concebido, permite ampliar las posibilidades de tiempo para la realización de las actividades complementarias, como nuevas formas de organización donde participan de manera activa los educandos, la comunidad científica, la familia y los entes locales en la realización de conferencias, seminarios, concursos, festivales o ferias de ciencias y talleres, entre otras.

4.2 Experiencia cubana en el uso de la informática y las comunicaciones como vías no formales para el aprendizaje de la matemática

En correspondencia con las nuevas oportunidades a los procesos de apropiación social del conocimiento que el desarrollo —social, integral, sostenible— necesita, y con la evolución alcanzada por la tecnología y las comunicaciones, Cuba cuenta con una empresa de medios informáticos y audiovisuales del Ministerio de Educación llamada CINESOFT, que cuenta con la multiplataforma CubaEduca | Portal Educativo Cubano (<https://www.cubaeduca.cu/>), con una oferta sostenida de productos, ajustables a diferentes contextos y condiciones de aprendizajes, a los cuales los usuarios pueden acceder libremente.

Especialmente, las actividades con contenido matemático diseñadas para la multiplataforma abarcan desde la primera infancia hasta la enseñanza media superior. La página contiene diferentes tipos de juegos, estrategias, recursos audiovisuales, videos y otras actividades en correspondencia con los requerimientos de las diferentes edades. Así, todas las actividades fueron concebidas con una estructura didáctica, que permite la interacción, la autorregulación del aprendizaje y la apropiación de nuevos conocimientos, por lo que constituye un complemento del aprendizaje formal. Además de los materiales con los que cuenta la

multiplataforma, existen productos como juegos de dominó para los distintos niveles y recursos multimediales.

Por otra parte, el creciente acceso y el potencial de las redes sociales han sido aprovechados para hacer llegar el conocimiento matemático a ambientes diferentes. De esta forma, desde el año 2017 el profesor Néstor del Prado Arza —Miembro de Honor de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación— lidera una columna en el sitio Cubadebate donde publica semanalmente acertijos matemáticos creativos y recreativos, relacionados con la vida cotidiana, personalidades de la matemática, hechos y fechas históricas y otras curiosidades. En este sitio se intercambian valoraciones con los usuarios sobre los procedimientos y formas de actuar para llegar a las soluciones de las situaciones cotidianas propuestas, las cuales se hacen extensivas en Facebook (Del Prado Arza, 2024).

A pesar de las difíciles condiciones de conectividad en Cuba, país miembro de la Unión de matemáticos de América Latina y el Caribe, igualmente fue invitada y participó virtualmente con los docentes y educandos de la enseñanza media en las actividades que se desarrollaron, como charlas, cursos y otras presentaciones. Más recientemente, y como parte de las celebraciones por el Día Internacional de las Matemáticas, educandos de las enseñanzas primaria, media y de formación de maestros formaron parte de los talleres de preparación y el encuentro de juegos matemáticos, como parte del Proyecto de Pares de Escuela auspiciado por la Fundación Simons.

5. EL ROL DE LA SOCIEDAD CUBANA DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Todas las sociedades científicas tienen como misión central promover y divulgar su ciencia y estimular a aquellos que la desarrollan y hacen avanzar con su labor docente, científica y profesional. Mostraremos en breves pinceladas e imágenes, la labor de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC), que durante todo el año realiza actividades relevantes para la superación e incremento de maestros y maestras de Matemáticas, así como su aporte a la formación y orientación vocacional de los estudiantes hacia esta ciencia y carreras tanto docentes como científicas.

Concurso por la Cultura Matemática

La SCMC convoca anualmente a este concurso de alcance nacional, dirigido a los educandos de todos los niveles, donde se relaciona la matemática con diferentes manifestaciones artísticas como el dibujo, la literatura, la plástica, entre otras. El mismo permite el desarrollo de la creatividad, así como la búsqueda de conocimientos interdisciplinarios. La Figura 1 muestra fotografías del Acto de premiación de este Concurso, del año 2023, celebrado en el Aula Magna de la Universidad de La Habana.

Figura 1. Fotografías del Acto de premiación del Concurso por la Cultura Matemática 2023.



Fuente: Elaboración propia.

Proyecto Delta

Este proyecto es liderado por miembros de la Sociedad y se desarrolla en teatros de la capital, con una frecuencia semanal. Se realizan espectáculos interactivos dedicados a promover la ciencia, la tecnología y el humor, con especial énfasis en la matemática. Asimismo, se presentan elementos de la matemática relacionados con el interés del público. Se puede acceder a su transmisión por Facebook.

Jornadas dedicadas a la matemática

En las jornadas (tres ediciones) se visitan centros culturales como museos, bibliotecas, teatros y se realizan conversatorios con la población que asiste, donde los integrantes del Proyecto Delta muestran las investigaciones realizadas por estudiantes que evidencian la presencia de la matemática en la vida cotidiana.

Intercambio con estudiantes

En institutos preuniversitarios urbanos y los vocacionales de Ciencias exactas (Bachilleratos), se han realizado actividades de orientación vocacional con conferencias de científicos relevantes, paneles de profesionales egresados que regresan a compartir su crecimiento como docentes e investigadores, y además se han impartido cursos de modelación matemática.

Club Matemática y creatividad, Neuroactivos

La Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona y su delegación de la SCMC convocan a este Club semanalmente en horario extra (sábados) con el propósito de

orientar vocacionalmente a los niños y adolescentes que gustan de las Matemáticas. También, con el fin de atender al talento matemático en edades inferiores a los 15 años de forma diferenciada, en correspondencia con sus características psicológicas y su entorno de desarrollo., Los participantes desarrollan una diversidad de actividades haciendo uso de herramientas informáticas y otros medios de aprendizaje.

Puertas abiertas de la Academia

De conjunto con la Academia de Ciencias de Cuba se convocan a charlas o conversatorios en el Paraninfo de esta institución, dedicadas a la matemática, donde participan estudiantes de la enseñanza media y también sus maestros. De igual modo, participan estudiantes de las Universidades y Facultades pedagógicas de formación de maestros, vecinos de la localidad de La Habana vieja donde radica la Academia, con el propósito de recibir orientación vocacional con la presencia de prestigiosos científicos nacionales e invitados internacionales.

Olimpiada nacional “Luis Campistrous”

En coordinación con el Centro de Estudio de Matemática para las Ciencias Técnicas (CEMAT), el Instituto de Ciencias Básicas (ICB) y la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echevarría (CUJAE) se convoca a participar a los estudiantes de los niveles primario, medio y medio superior. Se trata de rendir un merecido homenaje al fallecido maestro de matemática, Doctor Luis Campistrous. autor de numerosos textos, artículos y promotor del rigor en la enseñanza de esta ciencia, . El objetivo del concurso es desarrollar el gusto, el pensamiento creativo y fomentar la continuidad hacia la formación matemática y estimular la participación de los educandos en otros concursos, competencias, olimpiadas nacionales e internacionales. Ver Figura 2.

Figura 2. Fotografía de estudiantes para maestros de Matemática ganadores del Concurso “Luis Campistrous”.



Fuente: Elaboración propia.

5.1 Concurso GEOM@T

Auspiciado por la empresa de medios audiovisuales e informáticos (CINESOFT) y la Sociedad Cubana de Matemática y Computación por los 15 años de la constitución del Día del Matemático Cubano y el 15 aniversario del Portal CubaEduca, se convocó al primer concurso dirigido a educandos de todos los niveles A través de la herramienta informática GEOGEBRA, se permitió desarrollar la creatividad y reflejar los elementos matemáticos identificados en cuentos y películas. Para la recepción de los trabajos se utilizó la vía WhatsApp. Por su valor, las sociedades matemáticas de Colombia, Salvador y Brasil solicitaron su extensión a esos países.

Una propuesta didáctica para actividades complementarias de Matemática en la Educación Media con la utilización del GeoGebra

La propuesta didáctica que presentamos permite elevar la preparación de los profesores de Matemática de la Educación Media para el tratamiento de contenidos de la asignatura con la utilización del Software GeoGebra. El diseño de programas complementarios con el objetivo de ejercitar y profundizar contenidos matemáticos, desde un basamento teórico-metodológico, favorece que el estudiante participe activamente y sea protagonista en la exploración y búsqueda de propiedades y relaciones del nuevo objeto de aprendizaje.

Se trata de que el propio alumno realice transformaciones que les facilite identificar diferentes casos que se pueden presentar en la obtención de conceptos y sus definiciones, teoremas y demostraciones. También, ejercicios que impliquen aplicar, construir y formular conjeturas sobre el comportamiento de los elementos nuevos que pueden aparecer en los casos que se están presentando, así como la presencia de nuevas relaciones entre dichos elementos. Estos rasgos lo convierten en un proceso de aprendizaje desarrollador. En este artículo se sugiere cómo GeoGebra, un asistente matemático, puede enriquecer la enseñanza y el aprendizaje en entornos dinámicos.

Sabemos que el impetuoso desarrollo de las tecnologías de la información (TIC) ha influido directamente en la educación matemática. En particular, GeoGebra, un asistente matemático dinámico para todos los niveles educativos que se puede instalar en computadoras, móviles y tabletas para trabajar los siguientes núcleos matemáticos: geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo. En el aprendizaje de la matemática, los medios tecnológicos favorecen una penetración más profunda en el contenido que se estudia mediante una actividad matemática experimental, de búsqueda del conocimiento y establecimiento de conexiones; sin embargo, también contribuyen a activar y motivar a los estudiantes, tal y como se señala en Álvarez *et al.* (2014), citados por Medina *et al.* (2019).

En Cuba, desde el curso 2004-2005 se pusieron en vigor los lineamientos o ideas claves para el trabajo metodológico de la asignatura Matemática, válidas para los diferentes subsistemas de educación, que precisan el enfoque metodológico general de esta y, por ende, los métodos y procedimientos para la dirección del proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Una idea clave expresa: utilizar las tecnologías, incluidas las de la informática y la comunicación, con el objetivo de adquirir conocimientos y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos. Los programas complementarios son una de las formas de organizar las actividades establecidas por el currículo institucional; no son una reproducción del programa de la asignatura, sino una ampliación y profundización. La utilización de GeoGebra da una nueva posibilidad a los estudiantes para adquirir o profundizar en el sistema de conocimientos y habilidades de la

matemática con mayor motivación. GeoGebra ha ganado popularidad en todo el mundo, y en la actualidad existe una gran comunidad de profesores e investigadores que trabaja con este software. Cuba también posee un proyecto en la UCPEJV, en el que contribuye con nuevos materiales del tercer perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación. Ahora bien, ¿qué beneficios aportan las herramientas de GeoGebra? Los estudiantes pueden:

- Visualizar conceptos abstractos.
- Representar conexiones conceptuales.
- Experimentar con las matemáticas.

Los profesores pueden:

- Realizar materiales educativos estáticos (imágenes, protocolos de construcción) o dinámicos (demostraciones dinámicas locales, *applets* en páginas web).

¿Qué formas de trabajo aportan las herramientas del GeoGebra para los estudiantes?

- Los estudiantes utilizan GeoGebra como herramienta para la resolución y comprobación de ejercicios, así como la exposición de contenidos.
- Los estudiantes elaboran *applets* mediante impulsos del profesor para arribar a conclusiones sobre un contenido.

Se considera que GeoGebra es un recurso tecnológico que puede ser utilizado en el aprendizaje, y que debe ser incluido en la planificación de una clase como material didáctico para el desarrollo de actividades.

A continuación, compartimos un ejemplo de propuesta didáctica como ilustración, para los profesores de matemática, de cómo se puede planificar el tratamiento de un contenido matemático con GeoGebra en los programas complementarios.

- Programa complementario de Matemática séptimo grado:
- La geometría y GeoGebra

Objetivo:

Esbozar y construir figuras geométricas planas a partir de sus propiedades y relaciones, que les permita el desarrollo de la representación e imaginación espacial, para que se les facilite la búsqueda de la idea de solución de una situación problémica intra o extra-matemática y la adecuada utilización de GeoGebra.

Contenido de aprendizaje: Construcciones geométricas elementales (Construcción de las mediatrices en un triángulo con el asistente matemático GeoGebra)

Se ejecuta la construcción con GeoGebra paso a paso y el profesor realiza preguntas.

Introducción: *Andy, un estudiante de séptimo grado observó que en la conocida señal internacional de PARE está dibujada una circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo, Mírala tú también en la figura siguiente, y seguro te preguntarás ¿cómo podría construirse una circunferencia así?*

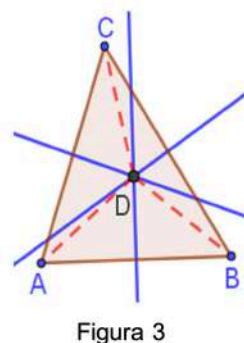
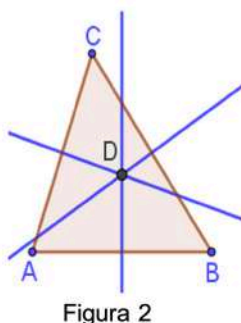
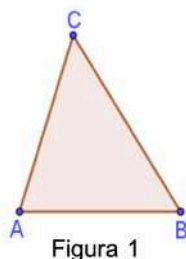


El profesor les pregunta a los estudiantes la definición de mediatriz, seguidamente les indica que tracen en la vista gráfica un segmento y tracen la mediatriz a dicho segmento. ¿Qué propiedad tiene la mediatriz de un segmento? (Los estudiantes responderán: todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos).

En relación con la motivación, el profesor podría preguntar: ¿se cumplirá alguna propiedad si trazamos las mediatrices de los lados de un triángulo? ¿Se cortarán en un mismo punto? (Los estudiantes emitirán diferentes respuestas).

El profesor orientará el objetivo de la actividad.

- Uso de GeoGebra: Construcción de las mediatrices en un triángulo.
- Con la herramienta **Polígono**, trazar un triángulo ABC en la vista gráfica (figura 1).
- Con la herramienta **Mediatriz**, trazar la mediatriz de cada uno de los lados del triángulo ABC.
- Con la herramienta **Intersección**, determina el punto de intersección de las mediatrices y obtener el punto D, como se muestra en la figura (figura 2).



- Observa la figura 2: ¿Será posible encontrar alguna relación entre el punto D y los vértices del triángulo ABC?
- Exploración y descubrimiento: Varía con la ayuda del puntero, la posición de los vértices del triángulo ABC y analiza si observas alguna regularidad entre D y los vértices del triángulo. (Si el estudiante no llega a conclusiones, se le sugiere que tracen los segmentos \overline{AD} , \overline{BD} y \overline{CD} [figura 3]).

¿Será posible encontrar alguna relación entre estos segmentos?

Si el estudiante no llega a conclusiones, se miden las distancias \overline{AD} , \overline{BD} y \overline{CD} con la herramienta *Distancia* y llegan a la conclusión de que son iguales las distancias.

¿Se cumplirá siempre esta relación entre las longitudes de los segmentos \overline{AD} , \overline{BD} y \overline{CD} ? Varía, con la ayuda del puntero, la posición de los vértices del triángulo ABC para poder responder esta pregunta.

El profesor puede continuar, “jugar con el puntero”, formular otras preguntas y concluir que el triángulo ABC está inscrito en la circunferencia o que la circunferencia está circunscrita al triángulo ABC y que el punto D recibe el nombre de *circuncentro*. Por tanto, ya los alumnos estarían en condiciones de responder la interrogante que planteó Andy.

Solo se expone este ejemplo como muestra de cómo GeoGebra permite desarrollar la creatividad de los estudiantes en la búsqueda y descubrimiento de los conocimientos objeto de aprendizaje. La aplicación de GeoGebra en las instituciones educativas mostró resultados muy positivos. Los estudiantes experimentaron un mayor aprendizaje en Matemática y hubo masividad en la participación de los estudiantes en el concurso Geom@t.

La fotografía que aparece a continuación (ver Figura 3) refleja los resultados que se van obteniendo en el desarrollo de actividades de aprendizaje; ilustra a los cuatro ganadores del Concurso Geom@t en el año 2023 junto a su profesora.

Figura 3. Fotografía de cuatro ganadores del Concurso Geom@t 2023.



Fuente: Elaboración propia.

Los educadores se encuentran ante una concepción didáctica nueva que cambia completamente la forma de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Este enfoque es muy importante por el carácter activo del estudiante durante el aprendizaje, lo significativo del contenido matemático para él, así como los aspectos motivacionales que intervienen en todo el proceso en función de buscar relaciones y dependencias, variar condiciones y considerar analogías.

5.2 Estimulando a las maestras e investigadoras de Matemática desde la Sociedad Cubana de Matemática y Computación de la Academia de Ciencias de Cuba

En el imaginario social, la maestra de Matemática (en femenino) es la figura capital de la enseñanza de Matemática en primaria y secundaria. En la mayoría de nuestros países latinoamericanos cada vez son más las mujeres maestras de matemáticas, las graduadas de las Escuelas Normales, las licenciadas en Educación, y a ellas les debemos mucho agradecimiento y el traslado del anonimato al reconocimiento. En el pasado VI Simposio Internacional de Matemática Educativa (VI SIME, 2023) celebrado en Costa Rica, propusimos y fue acogida con gran interés una sesión sobre *Inolvidables Maestras matemáticas de América Latina y el Caribe*, con intervenciones de Costa Rica, República Dominicana, México, El Salvador y Cuba. Se pusieron en los primeros planos historias de maestras de Matemáticas, quienes fueron visibilizadas y mostradas como ejemplos y modelos a seguir. Fue un consenso generalizado la necesidad de brindar estos estímulos y reconocimientos a nivel local, nacional, regional y hacer sistemáticos estos encuentros y espacios donde se hable de Matemática Educativa. Compartimos en Convocatoria (VII SIME, 2025) temas muy interesantes sobre obstáculos, estereotipos, metáforas y conceptos de género en torno al tema de las mujeres en las ciencias, así como breves reseñas de sus biografías, incluidas mujeres matemáticas, las cuales son tratadas en el libro *Ser mujer científica o morir en el intento* (Álvarez, 2015).

Desde la Academia de Ciencias de Cuba y la Sociedad Cubana de Matemática y Computación se otorgan desde hace 20 años los Premios “Sofia Kovalievskaja” para mujeres en las ciencias básicas y en matemáticas, cada dos años, a nivel nacional y con el auspicio de la Fundación Sofia Kovalievskaja de EE. UU. Sofia Kovalievskaja, (consultar referencias para más información) fue una muy relevante mujer matemática rusa, primera Doctora en el Siglo XIX y con aportes fundamentales a la Teoría de las Ecuaciones diferenciales parciales.

Las premiadas con el Premio “Sofia Kovalievskaja” en el año 2023 fueron las siguientes:

1. La mejor Tesis de Maestría: M. Sc. Lisset Suárez Plasencia.
2. El mejor Doctorado: Dra. C Iliana Pérez Pupo.
3. La Investigación más destacada, Premio Academia de Ciencias de Cuba: Dra. C. Victoria Hernández Mederos.
4. Trabajo docente y de investigación de toda una vida: Dra. C. Concepción Valdés Castro.

La Sociedad Cubana de Matemática y Computación ha tenido una muy importante misión de integrar a toda la comunidad cubana, docente y de investigación, y ha desarrollado una fuerte actividad de promoción de la matemática en Cuba. Otorga, además, los Premios bianuales Pablo Miquel y Merino a la investigación matemática más relevante a nivel nacional, y organiza y convoca los congresos bianuales internacionales de la SCMC.

6. EL TRABAJO CON ALUMNOS TALENTOS

Una de las acciones que contribuyen al desarrollo de habilidades matemáticas es la participación de los estudiantes, de cualquiera de las enseñanzas, en actividades que promuevan el desarrollo de su pensamiento lógico, el uso de su imaginación y la capacidad de desarrollar su intelecto, tales como concursos, olimpiadas, sociedades científicas, entre otras. El trabajo con alumnos talentos en las diferentes asignaturas está reflejado en la Resolución Ministerial 91/2007, así como en los diferentes programas de estudio de las asignaturas.

Para llevar a cabo esto, se estructura el trabajo que se debe realizar con los estudiantes desde los concursos de bases, o sea en todas las escuelas, hasta eventos nacionales e internacionales. Sin embargo, no siempre se logra la motivación suficiente en los estudiantes para su participación en este tipos de eventos extraescolares en la asignatura Matemática. Un estudio exploratorio realizado permitió evidenciar que, a pesar de contarse en el país con documentos actualizados sobre la preparación para concursos de Matemática, no se cuenta con suficiente cantidad de profesores preparados en estos temas, por lo que muchos estudiantes con talento en las matemáticas se pierden en su paso por la escuela. En los centros educacionales no suelen dedicarle espacio a la preparación de concurso, de forma que se delega solamente a la vocación de algunos profesores. Todos estos aspectos inciden negativamente en la formación de los futuros profesionales con alta calificación.

Por otra parte, el trabajo con los estudiantes concursantes suele ser agotador, tanto para el entrenador como para los estudiantes, debido a que el programa de concurso de los niveles superiores, dígase preuniversitario, suelen estar cargados de una cantidad considerable de contenido, precisamente por el hecho de que no se realiza un trabajo intencionado desde grados anteriores con esos estudiantes. Estas limitaciones permiten identificar que no siempre los estudiantes tienen la preparación suficiente para enfrentarse a concursos y olimpiadas de matemática. Como se mencionó, esta circunstancia se da principalmente por la carencia de profesores entrenadores, escuelas que en ocasiones no brindan espacios para la preparación de estudiantes con potencialidades en la asignatura Matemática, y la poca bibliografía existente en los centros educacionales sobre el tema.

Cuba en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas

Las Olimpiadas de Matemáticas son competencias extracurriculares en la disciplina, que han tenido un crecimiento vertiginoso en los últimos años. La atención educativa a los estudiantes talentosos constituye hoy día uno de los grandes desafíos que plantea la sociedad a la calidad de la educación; se trata de una verdadera exigencia dentro de una escuela auténticamente comprometida con principios tan esenciales como la excelencia educativa y la apertura a la diversidad.

Estas competencias se celebran con la finalidad de alcanzar varios objetivos; a saber, la búsqueda y estimulación del talento para las matemáticas en los jóvenes que aún no han ingresado al Sistema de Educación Superior, el intercambio de experiencias entre los profesores de la especialidad y la creación de problemas novedosos y atípicos que permitan despertar interés por el estudio de la disciplina. En general, como menciona una recomendación de la UNESCO declarada en 1989, para apoyar el talento y la iniciativa científica entre la juventud.

Cuba tiene una larga trayectoria en los concursos y olimpiadas de Matemática tanto regionales como mundiales. Es una tradición realizar concursos de esta asignatura en todos los niveles de enseñanza, comenzando por la propia escuela, el municipio, la provincia y a

nivel nacional. Un equipo especializado por cada provincia prepara a los estudiantes que vencen cada una de estas etapas y conforman la preselección nacional que compite a nivel internacional.

Las Olimpiadas de Matemática en Cuba comenzaron en 1968. En el año 1971 Cuba participó por primera vez en la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), y fue el primer país de América en participar en estos eventos. Los precursores de la participación cubana fueron los distinguidos profesores Luis Davidson San Juan y Raymundo Reguera Vilar. Manteniendo el legado de estos precursores, profesores de Matemática de los diferentes niveles educativos desde décadas atrás han estado desarrollando la importante labor de preparar a estudiantes para la participación en concursos y olimpiadas. Esta tarea siempre ha traído implícita un alto grado de compromiso, sacrificio y amor por la profesión y la enseñanza de esta ciencia.

Para todos los entrenadores de concursos la preparación de sus estudiantes es un reto. La preparación y el entrenamiento para enfrentar ejercicios que no son los que tradicionalmente aparecen como contenido de escuela tiene que ser consciente y sistemática. Por eso, en muchas ocasiones la preparación se realiza en horarios extraescolares, lo que implica compromiso y sacrificio por parte de entrenadores y concursantes. Por otra parte, es amplia la literatura que existe con ejercicios variados para la preparación de los estudiantes por edades y niveles de enseñanza; sin embargo, la experiencia alcanzada por los entrenadores de Matemática y sus discípulos hace que estos ejercicios se ordenen teniendo en cuenta los contenidos que se evalúan en estos eventos.

Con la preparación de los estudiantes para participar en este tipo de evento se propicia el desarrollo de habilidades en la resolución de ejercicios típicos para ellos. Los estudiantes que tienen aptitudes sobresalientes para el aprendizaje de la matemática y otras ciencias son capaces de solucionar ejercicios por diferentes vías, y en ocasiones estas son aún más novedosas que las planteadas por sus entrenadores. Los estudiantes ponen a prueba su ingenio y capacidad de razonamiento lógico en cada una de las respuestas a los problemas que se le presentan.

Una posible distribución de los contenidos por abordar en esta preparación es la que se presenta, resultado de la propuesta de trabajo presentada por el equipo de profesores entrenadores pertenecientes al Club Matemática y Creatividad Neuroactivos. Este equipo está integrado por profesores de diferentes instituciones educativas, liderado por la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.

La idea de realizar este trabajo surge a partir de una sucesión de acciones encaminadas al entrenamiento de estudiantes para su participación en concursos y olimpiadas matemáticas a nivel nacional e internacional en la capital. La misma se inició con la preparación de profesores entrenadores de concurso en la enseñanza media. Posteriormente, comenzó un distinguido proyecto con estudiantes de secundaria básica para entrenarlos para participar en las olimpiadas de mayo y la Olimpiada Iraní de Geometría, el cual tuvo gran aceptación por parte de los participantes y contribuyó a que se mejoraran los resultados de la capital en los concursos nacionales.

Actualmente, en Cuba se desarrolla un nuevo proyecto dirigido a la preparación de los alumnos con talento en las Matemáticas desde la enseñanza primaria, de 1o a 6o grado. Para la preparación de los estudiantes se propone que se desarrolle en ciclos, de manera tal que en cada ciclo se aborden las cuatro áreas presentadas a continuación.

Combinatoria y razonamiento lógico: Se abordan los principios, técnicas y estrategias de resolución de problemas. Organizar la información (tablas de doble entrada, dibujar

figuras y diagramas), búsqueda de patrones, formular un problema equivalente, modificar el problema, escoger la notación efectiva, explotar la simetría, división en casos, trabajo hacia atrás, argumentar por contradicción, principio de Dirichlet (principio de las casillas), considerar casos extremos, alternación, partición en parejas, invariantes (paridad, aritmética modular y coloraciones).

Geometría: Se trabaja con los elementos básicos de la geometría plana: punto, segmento, recta. Formas de determinar una recta. Rectas paralelas y perpendiculares. Ángulos agudos, rectos, llanos y obtusos. Ángulos adyacentes, sus propiedades. Ángulos opuestos por el vértice, sus propiedades. Ángulos entre paralelas, sus propiedades. Ángulos complementarios y ángulos suplementarios. Ángulos de lados respectivamente paralelos. Ángulos de lados respectivamente perpendiculares. Construcciones fundamentales con regla y compás.

Triángulos: Desigualdad triangular, rectas y puntos notables del triángulo; las propiedades de los puntos notables, teorema de Pitágoras. Generalización del teorema de Pitágoras, teorema de las alturas, teorema de los catetos, teoremas sobre la bisectriz de un ángulo interior y exterior de un triángulo, teoremas sobre la mediana relativa a un lado de un triángulo. Cálculo de la longitud de la mediana, la bisectriz o la altura en función de las longitudes de los lados del triángulo. Concurrencia. Colinealidad.

Teoría de los Números: Algoritmo de la división. Número par e impar, su representación. Resultados en operaciones de cálculo con números de igual (y diferente) paridad. Números consecutivos. Números pares (e impares) consecutivos. Divisor de un número. Múltiplo de un número. Descomposición polinómica de un número. Números primos y números compuestos. Números primos entre sí o primos relativos. La sucesión de los números primos es infinita. La Criba de Eratóstenes para hallar los números primos. Criterios de divisibilidad. Divisores de un número. Descomposición factorial de un número. Cantidad de divisores de un número.

En la lista de referencias se pueden consultar los resultados históricos de los estudiantes cubanos que han competido en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas comparados con algunos países de América Latina y el Caribe, según la International Mathematical Olympiad (IMU). En los resultados de la 65ª Olimpiada Internacional de Matemáticas del 2024, en la que participaron más de 100 países, los primeros lugares los ocuparon no solo países desarrollados como Estados Unidos o Reino Unido, sino también otros; por ejemplo, China, la India, República de Corea, Singapur, y otros de menos desarrollo.

Como docentes, resaltamos la importancia, la relevancia para los estudiantes, los maestros y para el país que tiene participar en las Olimpiadas. Adicionalmente, reflexionar que a veces el nivel de desarrollo económico no es directamente proporcional al buen lugar que se ocupa en los resultados de las Olimpiadas de Matemática. Aunque los países latinoamericanos y caribeños no tienen lugares cimeros en otras áreas, sí se observan ubicados por encima de países desarrollados y europeos. Por ejemplo, Brasil por encima de Canadá, y el mismo Brasil, México y Perú por encima de Alemania. Cuba ocupó el lugar 68 en el 2024.

Veamos a continuación, en la Tabla 3, específicamente el caso de Cuba y su presencia en la Olimpiada Internacional de Matemática. Hemos colocado solo algunos años, no todos, para ilustrar la excelente preparación y logros de los alumnos cubanos provenientes de los institutos preuniversitarios de ciencias exactas (bachilleratos especiales para estudiantes de buenos resultados docentes con un sistema de becas e internos cinco días a la semana).

Tabla 3. Cuba en las Olimpiadas de Matemática (1981-2024).

AÑO	LUGAR	ORO	PLATA	BRONCE	Mención de honor
1981	18	-	1	-	-
1987	24			2	
1989	22		1	2	3
1993	36		1	1	1
1999	27		1	4	
2001	26	1	1	3	
2005	52			3	1
2007	87			1	
2008	81		1		
2009	65			1	
2010	85		1		
2019	89				2
2022	100				1
2023	104				1
2024	72		-	-	5

Fuente: International Mathematical Olympiad (s.f).

La joven Sofía Albizu Campos es la única cubana medallista de Oro en una Olimpiada Internacional de Matemáticas: la que tuvo lugar en el año 2021.

Figura 4. Fotografía de Sofía Albizu, cubana medallista en la IMO del 2021.

Fuente: Rodríguez (2021).

7. CUBA EN LAS PRUEBAS DE MATEMÁTICA DE LA UNESCO, GRADOS 3º Y 6º DE LA ENSEÑANZA PRIMARIA

Compartimos en este artículo lo que se describe respecto a Cuba en el *Reporte Ejecutivo del Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE 2019)*, elaborado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), de la Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO), cuyo enlace podrá ser consultado en la lista de referencias.

En estas pruebas que realiza la UNESCO de forma gratuita, a diferencia de las pruebas Pisa, participan de América Latina y el Caribe cuatro mil escuelas, de forma que se le realizan los exámenes a 160 mil estudiantes. Se les examina en Lectura, Matemáticas y Ciencias, y los países participantes en el 2019 fueron Argentina, Brasil, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Rep. Dominicana y Uruguay.

La prueba de Matemática, al igual que el resto de las pruebas, se fundamenta en el análisis de los currículos de los países participantes. De este análisis curricular consideran como relevante la resolución de problemas y la construcción de un conocimiento que implica analizar, reflexionar y descubrir estrategias para resolver problemas concretos y reales (UNESCO, 2020). La prueba evalúa los siguientes dominios de conocimientos:

- Números y operaciones.
- Geometría.
- Magnitudes y medición.
- Estadística.
- Patrones y álgebra.
- A nivel de procesos cognitivos, la prueba de Matemática contempla tres grupos de habilidades: Reconocimiento de objetos y situaciones, Resolución de problemas simples y Resolución de problemas complejos y modelamiento matemático.

En Matemática tercer grado, Cuba obtuvo el puntaje promedio más alto entre los países participantes. Los tres países que presentan un mayor porcentaje de estudiantes sobre el Nivel I son Cuba (75%), Perú (70,7%) y Brasil (69%), como se observa en la Figura 5. En el caso de Matemática en 6º grado, la proporción promedio de estudiantes de la región que alcanza el Nivel III es muy baja (17,4%). Estos estudiantes son al menos capaces de resolver problemas que requieren interpretar información en diversos formatos, incluyendo tablas y gráficos; recurrir a dos o más operaciones aritméticas; estimar áreas y perímetro; calcular adiciones y sustracciones de fracciones (con el mismo denominador), e identificar relaciones de perpendicularidad y paralelismo en el plano, entre otros 17 aspectos.

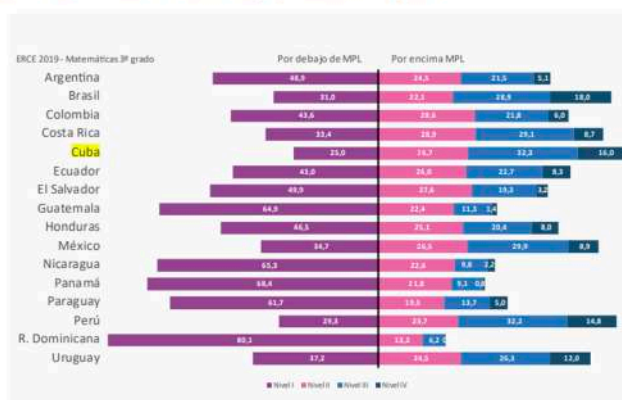
Si bien se verifican variaciones de rendimiento entre los países, para todos ellos el logro en el área de Matemática en 6º grado representa un desafío, pues la proporción de estudiantes que logra el nivel de desempeño esperado es menor que la que no lo logra.

Figura 5. Gráfico con puntaje promedio de la región en Matemática 3er grado.

1 de cada 2 estudiantes de la región está por sobre el nivel I

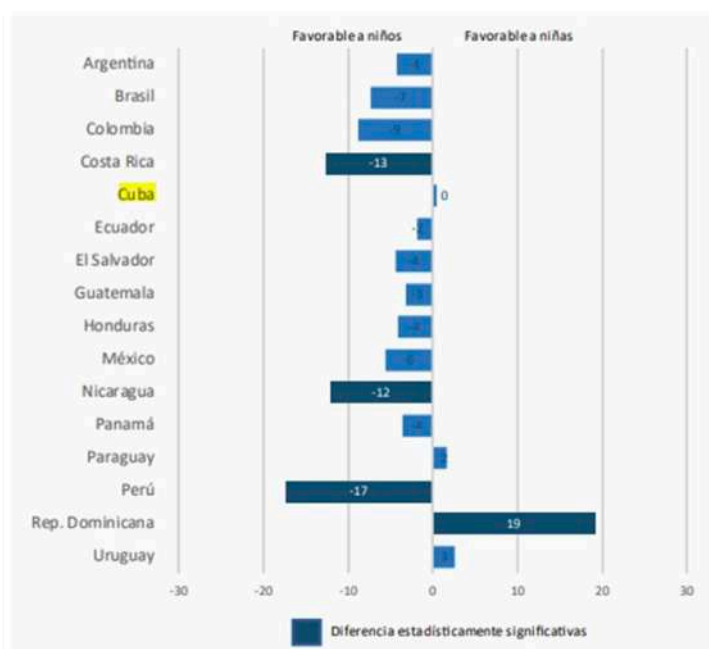
698 Puntaje promedio de la región en Matemática 3° grado

Gráfico 7. Distribución de los niveles de logro para Matemática 3° grado



Fuente: UNESCO (2021).

Mientras la mayor distancia entre los puntajes promedio de países es de aproximadamente 127 puntos en 3^{er} grado y de 123 puntos en 6^o grado, al interior de los países puede llegar a 297 puntos en 6^o grado, como es el caso de Cuba, y 273 puntos en 3^{er} grado, como en el caso de Brasil. El país que muestra mayor dispersión interna es Cuba; es decir, entre escuelas urbanas, de provincias y rurales para la prueba de Matemática de 6^o grado. Esto representa una valoración negativa en la que se debe trabajar y trazar estrategias. Es interesante mostrar que, en las pruebas de Matemática, la mayor parte de los países no presenta diferencias por sexo, y cuando se presentan, estas son favorables a los niños, excepto en República Dominicana en 3^{er} y en 6^o, donde las niñas aventajan a sus compañeros, y le siguen Uruguay, Paraguay y Cuba con casi equidad. En los demás países las pruebas las dominan los varones.

Figura 6. Gráfico con diferencia de resultados por género.

Fuente: UNESCO (2021).

Tanto en las Olimpiadas internacionales, iberoamericanas, panamericanas o nacionales, como diferentes concursos y competiciones de Matemática, en general son los varones los que lideran los mejores resultados y obtención de premios. De ahí la importancia crucial de estimular a las niñas, que constituyen el 50% de los talentos para esta ciencia y la ciencia en general. No solo en Matemática aparecen estas brechas de género, sino en otras ciencias también como en Física. Por eso se trabaja con mucha intencionalidad el enfoque de género, para la motivación y el desarrollo profesional de las mujeres en las carreras STEM.

8. CONSIDERACIONES FINALES

Hemos tratado de reflejar, en síntesis, el trabajo realizado por Cuba en relación con la enseñanza de la matemática en este importante proceso en el desarrollo de una sociedad donde han primado, como líneas de trabajo, la investigación y la búsqueda de estrategias oportunas para dar respuestas a cada uno de los retos que el contexto y el necesario desarrollo han ido demandando.

La formación de profesores, en especial para la asignatura de Matemática, ha constituido objetivo esencial en la política educativa de la Revolución cubana, desde sus primeros años hasta la actualidad. Con el objetivo de formar profesores cada vez más capacitados para el ejercicio de la profesión, hemos mostrado el diseño de los planes de estudio, siempre vinculados a las peculiaridades de cada momento histórico y necesidades del desarrollo de la sociedad cubana.

El éxito de un plan de estudio radica en que los egresados de una carrera demuestren en la práctica que poseen las herramientas necesarias para el ejercicio docente y que están

preparados para continuar su desarrollo a lo largo de la vida. En el caso de la formación de profesores, la adquisición y el desarrollo de las habilidades profesionales constituyen premisas esenciales para el perfeccionamiento de la educación en todos los niveles de enseñanza.

Se concluye, además, que en los últimos 30 años ha habido un notable fomento de la investigación y desarrollo en la formación continua de los egresados de la Licenciatura en Matemática. Ha sido creciente el número de graduados de maestrías y doctorados, tanto de profesores cubanos como extranjeros (con planes ofrecidos por la UCPEJV). Sin embargo, aún hay deficiencias en cuanto a la carga docente y la asignación de tutores, cuestiones que aún son retos por enfrentar.

En cuanto a las vías no formales para enseñar, aprender y fomentar una cultura matemática en la población cubana, se han creado bases, infraestructuras y especialistas en la materia desde diferentes instituciones. Asimismo, se han sembrado “semillas”, lideradas en más de dos décadas desde la Academia de Ciencias de Cuba, la Cátedra de Cultura Científica, universidades, extensión universitaria, etc. No obstante, queda mucho por hacer.

Se analizó profundamente y se concluyó en el Informe de Cuba como resultado del ERCE 2019, sobre la necesidad de una intensificación de la formación profesional inicial y del trabajo metodológico, así como de otras formas de formación permanente de los docentes de Matemática cubanos, lo cual es válido para la formación de los maestros de esta región de América central.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de las Doctoras Silvia Navarro y Teresa León, del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación de Cuba, por su interés y apoyo, sugerencias a la autoría y referencias para el contenido de este artículo.

REFERENCIAS

- Álvarez, M. Almeida, B. y Villegas, E. (2014): *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos*. Editorial Pueblo y Educación, Cuba.
- Álvarez, L. (2015). *Ser mujer científica o morir en el intento*. Librería Virtual Cuba. <https://www.libreriavirtual-cuba.com/ser-mujer-cientifica-o-morir-en-el-intento>
- Álvarez, L. (2015). Lilliam Álvarez Díaz: Las matemáticas son imprescindibles para la resolución de problemas I TWAS.
- Asad, I. (2024, 16 de agosto). *La desescolarización y las carencias educativas cuestan 10 billones de dólares al año a la economía global*. UNESCO. https://www.unesco.org/es/articulos/la-desescolarizacion-y-las-carencias-educativas-cuestan-10-billones-de-dolares-al-ano-la-economia?hub=343&mc_cid=9e56355d2a&mc_eid=5476c81593
- Castro, F. (2001). *Discurso en el acto de graduación 1er Curso de Formación*. Cuba.
- Colectivo de autores, (2010). *Modelo del Profesional Plan de Estudio “D”*. Carrera de Licenciatura en Educación Matemática - Física. Cuba.
- Colectivo de autores. (2016). *Modelo del Profesional Plan de Estudio “E”*. Carrera de Licenciatura en Educación Matemática. Cuba.
- Colectivo de autores. (2006). *Programa de la Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas*. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.

- Colectivo de autores. (2015) *Programa de la Maestría en Educación Matemática*. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.
- Colectivo de autores. (2023). *Caracterización de la formación y desarrollo de las habilidades profesionales pedagógicas en la formación inicial y permanente de los profesionales de la educación matemática*. Proyecto Dulce María Escalona, Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.
- Dávila, Y., Bermúdez, F. Santrayll, D., Leyva, Y. y Caballero, E. (2023). *Gestión de la multiplataforma educativa Cubaeduca para la generación de los contenidos que demanda la nueva realidad de la escuela cubana*.
- Del Prado, N. (s.f.). Artículos de Néstor del Prado. *Cubadebate*. <http://www.cubadebate.cu/autor/nestor-del-prado/>
- Reyes, D., González, C. y López, E. (2024). *La preparación de estudiantes con talento en las matemáticas desde el Club Neuroactivos*. XII Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias, XVII Taller Internacional sobre la enseñanza de la Física, Cuba.
- Ferrer, S. (2012). La primera profesora, Sofya Kovalevskaya (1850-1891). *Mujeres en la Historia*. <https://www.mujeresenlahistoria.com/2012/10/la-primera-profesora-sofya-kovalevskaya.html?fbclid=IwAR0bMg-1KimXsFMIdceelZhKdQIIS21GDusz1f9vDm2oLV71StcYOKAtIw-E&m=1>
- Francisco, L. (2011). *Programa de asignatura Disciplina Principal Integradora Formación Laboral Investigativa*. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.
- Gil, C. (2019). *Experiencia de la carrera de Matemática de la U.C.P. Enrique J Varona en la atención al egresado*. XIII Encuentro Taller científico-metodológico de la Cátedra Dulce M. Escalona. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona.
- International Mathematical Olympiad. (s.f.). Resultados. <https://www.imo-official.org/results.aspx>
- International Mathematical Olympiad. (s.f.) 65a OIM 202, resultados de país. https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2024
- MINED. (1977). *Plan de estudio A de la carrera Matemática en los ISP*. Editorial Pueblo y Educación.
- MINED. (1982). *Plan de estudio B de la carrera Matemática en los ISP*. Editorial Pueblo y Educación.
- MINED. (1990). *Plan de estudio C de la carrera Matemática-Computación*. Editorial Pueblo y Educación.
- Ministerio de Educación Superior. (2016). *Documento Base para el diseño de los planes de estudios "E"*.
- Ministerio de Educación Superior. (2016). *Modelo del profesional Plan de estudio E, Carrera Lic. En Educación Matemática*.
- Miranda T. (2011). *Perfeccionamiento de la formación inicial de los profesionales de la educación*. Evento Pedagogía 2011. Cuba.
- Reyes, D., González, P. y López, A. (2018). Aportes e impacto [Compendio en opción al grado científico de Doctor en Ciencias]. Cuba.
- Reyes, D. (2024). *La preparación de estudiantes con talento en las Matemáticas desde el Club Neuroactivos*. XII Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias.
- Reyes, D. y Rodríguez, J. (2018). Los diversos planes de estudio de la carrera Licenciatura en Educación Matemática y sus exigencias para el desarrollo de las habilidades Profesionales Pedagógicas. *Órbita Científica*, 101(24).
- Reyes, D. (2024). XII Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias. XVII Taller Internacional sobre la enseñanza de la Física. Cuba.
- Rodríguez, J., González, C, García (2018). La formación de profesores de Matemática en la Universidad de Ciencias pedagógicas Enrique José Varona.

- Rodríguez, K. (2021, 17 de agosto). La historia de Sofía, una matemática de oro. *Cubadebate*. <http://www.cubadebate.cu/especiales/2021/08/17/la-historia-de-sofia-una-matematica-de-oro/>
- Santana, H. (1999). *La validación en la Licenciatura en Educación Carrera Matemática y Computación en el período 1992-97* [Tesis de maestría]. Cuba.
- UNESCO. (2021). *Los aprendizajes fundamentales en América Latina y el Caribe Evaluación de logros de los estudiantes Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE 2019); Resumen ejecutivo*. Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.
- UNESCO. (s.f.). Aprendizaje a lo largo de toda la vida – Nuestro enfoque. Instituto de la UNESCO para el Aprendizaje a lo Largo de Toda la Vida (UIL). <https://www.uil.unesco.org/es/unesco-instituto/mandato/aprendizaje-largo-de-vida?hub=14>



CARRERA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, SEDE DE OCCIDENTE: ¿QUÉ HA PASADO EN LOS ÚLTIMOS QUINCE AÑOS?

MATHEMATICS PRESERVICE TEACHERS PROGRAM, WESTERN CAMPUS: WHAT HAS HAPPENED IN THE LAST FIFTEEN YEARS?

Norman Noguera Salgado¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4912-8446>

María Fernanda Vargas González²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2618-2995>

Ana Patricia Maroto Vargas³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8505-1557>

RESUMEN

El propósito de este ensayo es analizar las conclusiones contenidas en la referencia Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con salida lateral al profesorado: Pasado y futuro en la Sede de Occidente, de Ulate et. al (2009). En ese trabajo, entre otras cosas, se hizo un recuento histórico de la carrera Enseñanza de la Matemática en la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica, su impacto en las instituciones de secundaria en la región de Occidente, así como estudio de las principales fortalezas y debilidades de la carrera hasta 2008. En esta nueva entrega, se examinan las conclusiones emitidas entonces, a la luz de los hechos históricos que han marcado a la carrera en los últimos quince años.

Palabras claves: Formación docentes en matemática, descentralización académica, regionalización, enseñanza de la Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this essay is to analyze the conclusions included in the publication Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con salida lateral al profesorado: Pasado y futuro en la Sede de Occidente, from Ulate et. al (2009). In that article, among other things, a historical account was made of the Mathematics Teaching degree program at the Occidental Campus of the University of Costa Rica, its impact on secondary institutions in the Western region, as well as a study of the main strengths and weaknesses of the program until 2008. In this new work, the

1 Universidad de Costa Rica, Alajuela, Costa Rica. Sección de Matemática, Sede de Occidente. Dirección electrónica: norman.noguera@ucr.ac.cr

2 Universidad de Costa Rica, Alajuela, Costa Rica. Sección de Matemática, Sede de Occidente. Dirección electrónica: mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr

3 Universidad de Costa Rica, Alajuela, Costa Rica. Sección de Matemática, Sede de Occidente. Dirección electrónica: ana.maroto@ucr.ac.cr



conclusions drawn at that time are examined in the light of the historical events that have marked the degree course over the last fifteen years.

Keywords: Teacher preparation in mathematics, academic decentralization, regionalization, teaching mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

El 22 de junio de 2024 la Sede de Occidente, de la Universidad de Costa Rica, cumplió cuarenta años de ofertar la carrera Enseñanza de la Matemática en la región, esto según la resolución 1739-84 emitida por la Vicerrectoría de Docencia de la Universidad de Costa Rica. Durante este periodo, la gestión académica-administrativa de la carrera, en la Sede de Occidente, ha estado a cargo de la Sección de Matemática, del Departamento de Ciencias Naturales. A lo largo de estos años, la carrera ha enfrentado importantes desafíos, pero también ha logrado avances significativos en varios aspectos.

En el trabajo de Ulate, Maroto y Noguera (2009) se hizo un recuento histórico de la carrera en sus primeros 25 años de gestión. En dicho trabajo, se plantearon algunas conclusiones y retos a futuro de la carrera. En particular, se destacaron los siguientes puntos:

1. La Sede de Occidente cuenta con una carrera en Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, que ofrece la salida lateral al Profesorado. Dicha carrera es desconcentrada y, a pesar de las limitaciones de recursos, se ha consolidado a lo largo de 25 años de existencia. Se ofrece de forma permanente en San Ramón y cada tres años se abre promoción en el Recinto Universitario de Grecia y a partir del 2009 se espera que se ofrezca en forma continua. La carrera cuenta con un personal propio, identificado con los procesos de regionalización. Más recientemente, y a partir de la desconcentración de la licenciatura, la misma empieza a producir su propio personal docente integrándose en los cursos con sigla MA y FD respectivamente.
2. Hasta el II Ciclo del 2007 se han graduado 119 profesores, 165 bachilleres y 9 licenciados en Enseñanza de la Matemática. Se ha logrado verificar que el 67% de los profesores que laboran en el área de influencia de la Sede de Occidente son graduados de la Sede, atendiendo las zonas Naranjo, Palmares, San Ramón, Sarchí y Alfaro Ruiz. Precisamente, la Región Académica de San Ramón se ubica entre las tres con mejores promociones de bachillerato en seis materias durante el año 2007. En el caso de la materia matemática, San Ramón ocupa la posición correspondiente al primer lugar.
3. Existe una fuerte tendencia entre los profesores de no quedarse solo con el profesorado, sino continuar el proceso y finalizar el bachillerato.
4. En el período 1997 a 2007, la Sede ha graduado más estudiantes con el título de Profesorado y Bachillerato que la Sede Rodrigo Facio.
5. Bajo la modalidad de desconcentración, la Sección de Matemática ha mantenido una estrecha coordinación con el Departamento de Enseñanza de la Matemática, lo cual se evidencia en procesos docentes y administrativos, como la Comisión de Trabajos Finales de Graduación. Tener personal calificado a tiempo completo ha permitido a la Sección funcionar de manera independiente y adaptarse mejor a las necesidades de los

estudiantes. Esto les da libertad para tomar decisiones, como elegir a los profesores de los cursos FD y MA. Como resultado, han aumentado los graduados en los tres grados académicos.

6. Se deben definir líneas de investigación en las didácticas específicas que permitan diseñar los programas de las siguientes áreas: Geometría, Álgebra, Análisis, Probabilidad y Estadística, Matemática para Secundaria y sus didácticas. Por ejemplo, en Didáctica de la Geometría se requiere un laboratorio equipado con cartulina, reglas, geoplanos, computadoras con paquetes especializados que permitan la construcción de material concreto y virtual, planeamiento de unidades didácticas utilizando diferentes técnicas didácticas, entre otros.
7. Como necesidad se destaca el contar con un laboratorio de cómputo que ayude a: dar soporte a los cursos de laboratorios anteriormente mencionados, orientar a los estudiantes de la carrera al uso del ordenador, y en consecuencia de paquetes computacionales específicos, como recurso didáctico para el desarrollo de las clases de matemática en secundaria.
8. Resulta necesario analizar posibles cambios en la metodología de la enseñanza de los cursos MA de forma que los estudiantes participen más activamente, estimulando una evaluación no centrada en exámenes. Es importante formar equipos de trabajo en la Sección que permitan definir nuevas estrategias a corto plazo que sean incorporadas en los cursos y que efectúen la evaluación respectiva.
9. Es importante, desarrollar un plan para la obtención de becas de estudios de postgrados en Didáctica de la Matemática para los cuadros de relevo de la Sección de Matemática.
10. Se requiere implementar un curso de adecuaciones curriculares que permita a los futuros profesores de matemática abordar las diferentes situaciones de aprendizaje que se presentan en las aulas.
11. Se espera que a futuro se empleen las tecnologías de la información y comunicación como un eje transversal dentro de los cursos de la carrera.
12. Un aspecto por mejorar es orientar los cursos ED de la carrera de Enseñanza de la Matemática hacia las necesidades de los estudiantes como futuros profesores de Enseñanza Secundaria.
13. Sería valioso para la carrera establecer alianzas con otras universidades estatales, que permitan compartir experiencias y mejorar.

Así, este ensayo tiene como objetivo analizar la evolución de la carrera de Enseñanza de la Matemática, a partir de los aspectos destacados en dichas conclusiones, y según los cambios ocurridos en la carrera durante los últimos quince años. Al hacerlo, buscamos mirar al pasado para proyectar el futuro de la carrera Enseñanza de la Matemática, en la Sede de Occidente. La intención es ofrecer una perspectiva crítica que evalúe los logros alcanzados y los desafíos que persisten en la formación de docentes de matemática en la Sede de Occidente.

Este trabajo se trata de una revisión bibliográfica, en la que se han utilizado datos provenientes de diversos sistemas y bases de datos de la Universidad de Costa Rica, tales como el Sistema de Información Institucional para la Autoevaluación y Gestión de la Calidad (Siiag), y el Sistema de Información y Gestión de Proyectos, Programas y Actividades (Sigpro). Además, se han considerado los resultados de procesos de investigación realizados en los últimos años, como la Autoevaluación de la carrera, llevada a cabo entre 2012 y 2016, así como los compromisos de mejora continua que surgieron a partir de dicho proceso.

El alcance de este ensayo es descriptivo, presentando datos y acciones realizadas por la carrera en los últimos 15 años. Y aunque los informes anuales generados durante la Autoevaluación y otros procesos constituyen una fuente clave de información que permite evidenciar el desarrollo de la carrera, no es el foco, ni propósito de este trabajo entrar en detalles metodológicos de dichos procesos.

2. DESARROLLO DE LA CARRERA EN LOS ÚLTIMOS 15 AÑOS

A la luz de lo planteado en Ulate et al. (2009) se detallará el desarrollo de la carrera en los próximos apartados, los cuales se organizan de la siguiente forma: (a) autoevaluación y acreditación de la carrera, (b) vínculos académicos, (c) población graduada, (d) cuerpo docente y (e) cambios metodológicos y de infraestructura.

2.1. Autoevaluación y acreditación de la carrera

La Universidad de Costa Rica, a través del Consejo Universitario, desde la década de los años ochenta categorizó el tipo de carrera ofertada en esta casa de enseñanza como: carreras propias, carreras desconcentradas y carreras descentralizadas. Esta tipificación sufrió una reforma integral en 1995, en la sesión número 4112, artículo 7, de este ente rector, con el objetivo de normar las carreras desconcentradas y descentralizadas. Así, en la resolución VD-9200-2015, se estipula que las carreras desconcentradas son “aquellas que se ofrecen en forma temporal en una Sede Regional para atender necesidades eventuales en una determinada región, bajo la plena responsabilidad académica de la unidad que ofrece la carrera en la Universidad”. Por otro lado, las carreras descentralizadas son “aquellas carreras que con la participación de la Sede y algún(a) Unidad(es) académica(s) se decidan ofrecer en una determinada Sede Regional, sea esta una carrera única o duplicada que por razones justificadas convenga ofrecer en la respectiva Sede Regional”.

Uno de los grandes cambios que sufrió la carrera Enseñanza de la Matemática, en la Sede de Occidente, durante estos últimos quince años fue el paso de figura de carrera desconcentrada a carrera descentralizada. Estos procesos, según Casassus (1990), en América Latina, se pueden presentar en tres modalidades: la regionalización, la municipalización y la nuclearización. En el caso de Costa Rica, como bien lo apunta el autor, la dimensión en la cual se desarrollan está relacionado con la Regionalización Educativa. Seguidamente se expondrán los principales antecedentes que llevaron a la Sección de Matemática, de la Sede de Occidente a tomar la decisión para este cambio.

En el 2012, la carrera inició la Autoevaluación con miras a la acreditación. Sin embargo, luego de indagar en la documentación existente sobre la carrera, se descubrió que no existe un Documento Plan de Estudios, que defina los fundamentos epistemológicos, pedagógicos y socioprofesionales de la carrera, lo que imposibilitó la acreditación (Informe de Autoevaluación, 2015). Adicionalmente, la carrera de Enseñanza de la Matemática se ofertaba en tres

sedes diferentes, a saber: Sede Rodrigo Facio, Sede del Atlántico y Sede de Occidente, y, por tanto, para obtener la acreditación se debía autoevaluar la carrera en las tres sedes. En este punto, el Centro de Evaluación Académica (CEA) recomendó aprovechar los avances hechos y la información recabada para optar una Certificación de Calidad a lo interno de la Universidad de Costa Rica, otorgada por la Vicerrectoría de Docencia.

Durante el proceso de Autoevaluación se empezaron a develar muchas fortalezas con las que la carrera cuenta, pero también debilidades importantes como la ya mencionada de la falta de un Documento Plan de Estudios. Al año 2014, la carrera llevaba veintidós años sin realizar una modificación significativa en su Plan de Estudios. Esta debilidad estaba muy clara a lo interno de la Sección de Matemática, incluso, en múltiples ocasiones se discutía en el seno de las reuniones de sección sobre la pertinencia de contenidos de cursos, orden de estos en la estructura curricular, incluso la pertinencia de cursos completos en esta última. Es importante señalar que, aunque se conocía sobre estos vacíos, la figura con la que contaba la carrera en esos momentos, carrera desconcentrada, impedía cualquier acción que naciera desde la Sede de Occidente, pues la carrera oficialmente pertenece a las Escuelas de Matemática y Escuela de Formación Docente, así que cualquier cambio curricular de la carrera debería surgir de la Comisión Compartida correspondiente.

Así, como parte de la estrategia de búsqueda de mayor autonomía de la carrera, para la toma de decisiones, la Sección de Matemática decide iniciar el proceso para descentralizarla. Luego de presentar el informe de factibilidad correspondiente, la Vicerrectoría de Docencia acuerda descentralizar la carrera Bachillerato y Licenciatura en el Enseñanza de la Matemática, en la Sede de Occidente, a partir del I Ciclo de 2016, según consta en la resolución VD-R-9347-2016. De acuerdo con la resolución VD-R-9200-2015, las carreras descentralizadas se registrarán bajo las siguientes condiciones:

- Su ofrecimiento debe formalizarse mediante la firma de un acuerdo de cooperación entre las unidades.
- Desde el punto de vista administrativo están bajo la responsabilidad de la Sede Regional.
- Académicamente son reguladas por un Consejo de Carrera con igual participación de la Sede Regional y de la(s) correspondiente(s) unidad(es) académica(s).
- La Sede Regional podrá establecer concursos de antecedentes dirigidos únicamente a llenar vacantes para esas carreras, de conformidad con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico y Servicio Docente.

Con la descentralización de la carrera vinieron algunos cambios desde lo administrativo. Por ejemplo, ya no es necesario enviar a consulta, ciclo a ciclo, los perfiles de las personas docentes que impartirán los cursos con siglas MA y FD, solicitando el aval de las Escuelas de Matemática y de Formación Docente, respectivamente. Otro aspecto que mejoró la gestión de la carrera con la descentralización fue el hecho de que los Trabajos Finales de Graduación (TFGs) ya no tenían que valorarse y aprobarse por una comisión de TFGs compartida. Esto ha agilizado el trámite, pues las propuestas de TFGs se valoran y aprueban en una comisión propia de la Sede de Occidente, donde hay representación de docentes de la Sección de Matemática. Pese a lo anterior, la figura de carrera descentralizada no fue suficiente para poder tomar decisiones en torno a las debilidades detectadas en el proceso de Autoevaluación y que estaban relacionadas con el Documento Plan de Estudios.

Esta dualidad, ventajas/desventajas del proceso de descentralización, se plasma muy claramente en Barrios (1984), citado por Senén (1989), cuando la autora declara que “el par centralización/descentralización está constituido por categorías instrumentales cuyo contenido progresista o conservador no es intrínseco a ellas, sino que viene dado por las circunstancias históricas que rodean su implementación”; y, “...ambos esquemas tienen sus virtudes y limitaciones” (p. 5). Además de la dualidad del impacto del proceso de descentralización de la carrera Enseñanza de la Matemática en la Sede de Occidente, es claro que este obedeció precisamente a circunstancias históricas específicas, como el proceso de Autoevaluación que se estaba desarrollando en ese momento, así como la visión académica que se visualizaba a futuro, como se expondrá en el apartado 2.4.

2.2. Vínculos académicos

En la conclusión 5, destacada en la introducción, se indica que las relaciones entre la Sección de Matemática y el Departamento de Enseñanza de la Matemática de la Sede Rodrigo Facio habían sido muy estrechas y cordiales. Una de las fortalezas que se ha mantenido durante estos quince años es precisamente esta, las buenas relaciones que han prevalecido entre la Sección y las instancias académicas de la Sede Rodrigo Facio como, por ejemplo, la Escuela de Matemática, el Departamento de Educación Matemática de esa misma escuela y el Departamento de Educación Secundaria, de la Escuela de Formación Docente. Esto se ha traducido en espacios de cooperación y colaboración conjunta enfocados a diversos proyectos académicos. Entre los más recientes se destacan:

- En febrero del año 2019, se contó con la visita de personas docentes investigadoras del Centro de Investigaciones en Matemática Pura y Aplicada (CIMPA), así como del Centro de Investigaciones en Matemática y Meta-Matemática (CIMM) ambos de la Escuela de Matemática. El objetivo era la búsqueda de colaboraciones conjuntas entre personas investigadoras de estos centros y personas investigadores de la Sección de Matemática.
- En julio del año 2022 se coordinó nuevamente un espacio entre el CIMPA y la Sección de Matemática. En esta ocasión se presentaron algunas charlas de ambas instancias, con el objetivo de conocer algunas de las investigaciones desarrolladas y buscar posibles colaboraciones futuras.
- Desde el año 2023, se creó una subcomisión desde la Sede de Occidente que apoya permanentemente el proceso de reestructuración al que se está sometiendo la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, en el que participan además personas representantes de la Escuela de Formación Docente, la Escuela de Matemática y la Sede del Atlántico.
- En diciembre del año 2023 se contó con la visita de personas docentes investigadoras del Departamento de Educación Matemática, de la Sede Rodrigo Facio, con la intención de buscar oportunidades de trabajo conjunto con docentes de la Sección de Matemática.
- Durante el año 2024, se celebró en Costa Rica la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME). Para la organización de este evento internacional se

inscribió un proyecto en el CIMM, en el que se integró a la profesora María Fernanda Vargas González, docente de la Sección de Matemática, Sede de Occidente.

- De forma similar, la profesora de la Sección de Matemática, Patricia Maroto Vargas, forma parte del equipo encargado de organizar el Simposio Internacional de Matemática Educativa (SIME), que se celebrará en febrero del 2025 en la Sede Rodrigo Facio.

Las buenas relaciones y las alianzas de cooperación entre la Sección de Matemática e instancias académicas han trascendido la Escuela de Matemática y Escuela Formación Docente de la Universidad de Costa Rica. Desde la Sección, personal docente ha colaborado en otro tipo de proyectos intersedes como, por ejemplo:

- El proyecto de Extensión Docente denominado Preparándonos para la Prueba de Admisión de la UCR: Colegios públicos de bajo ingreso a la Universidad de Costa Rica (ED3544) plantea la extensión y adaptación de un proyecto que se desarrolló inicialmente en la Sede Rodrigo Facio, denominado Preparación para la Prueba de Admisión. Este proyecto se ha desarrollado en las Sedes Regionales del Sur, Pacífico, Guanacaste y Occidente, de manera que equipos de docentes en cada una de ellas se capacitan para desarrollar el proyecto con profesorado de instituciones de secundaria académicas diurnas con grandes desventajas educativas y ubicadas en el área de influencia geográfica de la sede correspondiente. De esta forma, se procura la sostenibilidad en el tiempo para el proyecto y lograr la cobertura de zonas fuera del área metropolitana. Por parte de la Sección de Matemática, las profesoras María Fernanda Vargas González, Patricia Maroto Vargas y el profesor Andrés Cubillo Arrieta, colaboran en esta iniciativa desde el año 2022. El profesor Norman Noguera participó durante 2022 y 2023 en este proyecto.
- En 2024, las docentes María Fernanda Vargas González, Patricia Maroto Vargas, Jéssica Jiménez Moscoso y el profesor Andrés Cubillo Arrieta, pertenecientes a la Sección de Matemática, iniciaron una colaboración en el proyecto intersedes denominado “Estrategias de actualización profesional en el área de la didáctica de la matemática” (ED3699). Este proyecto tiene como objetivo fortalecer la mediación pedagógica y las habilidades matemáticas a lo largo de los diversos niveles del sistema educativo costarricense.

El proyecto ofrecerá procesos de actualización para docentes de preescolar, primaria y secundaria en varias zonas del país, a través de la participación de proyectos de Acción Social de varias sedes. Este esfuerzo es financiado mediante un fondo concursable de la Vicerrectoría de Acción Social.

Además, se han fortalecido las relaciones entre la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Sede de Occidente e instituciones de educación superior a nivel nacional, a través de acciones como:

- La Sección de Matemática organiza, desde el año 2021, un Seminario de Investigación en el que se invitan, como ponentes, docentes de otras Universidades Públicas del país, como el Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC), Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) y Universidad Estatal a Distancia (UNED). Además, al tratarse muchas veces de un seminario virtual ha permitido la participación de estudiantes de otras instituciones (Sección de Matemática 2021, 2022, 2023).

- En los últimos años, se ha logrado un acercamiento importante con el TEC, lo que ha permitido establecer una colaboración entre docentes, así como la realización de charlas y la participación de estudiantes en diversas actividades académicas e intercambios de experiencias. Destaca especialmente la colaboración en organización del Encuentro de la Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (EDEPA). Actualmente, docentes del TEC y de la Sección de Matemática de la Sede han formado una comisión para organizar la Escuela de Verano del EDEPA, que se llevará a cabo en la Sede de Occidente en el 2025.

Otro tipo de colaboraciones, esta vez a nivel internacional, por parte de docentes de la carrera se han desarrollado a través de las Escuelas de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA). Por ejemplo, en febrero del 2012 se llevó a cabo una EMALCA en la Sede Occidente, en donde se contó con la participación de investigadores de Chile, México y Brasil (Rojas, 2012). Además de la colaboración en la organización, se instó a estudiantes avanzados de la carrera, así como a docentes jóvenes de la Sección de Matemática a participar de dicho evento. Esto permitió establecer contactos importantes, que permitieron conocer más de cerca algunas opciones de posgrado, por ejemplo, en México y Chile. Es así como de la EMALCA 2012, salió la iniciativa del profesor Mario Álvarez de aplicar al Doctorado de la Universidad de Concepción en Chile. Mario fue aceptado, en el año 2013, en el Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática en la Universidad de Concepción (UdeC) en Chile. En febrero del año 2014, docentes de la carrera coorganizaron la III EMALCA Costa Rica, llevada a cabo en la Sede del Atlántico. Al igual que antes, se motivó a otro grupo de docentes jóvenes de la carrera para participar de esta escuela, en donde se contó con la visita de personas investigadoras de México, Chile y Estados Unidos (Guerrero, 2014).

Además, de las EMALCAS, en los últimos años la Sección de Matemática ha mantenido vínculos internacionales gracias a los proyectos de investigación desarrollados en los que colaboran docentes de distintas y prestigiosas universidades a nivel mundial. En la Tabla 1 se mencionan las personas colaboradoras a la fecha (Sección de Matemática, 2023c).

Tabla 1. Investigadores colaboradores externos a la Universidad de Costa Rica.

Colaborador externo	Universidad
Juan Francisco Ruiz Hidalgo José Antonio Fernández Plaza	Universidad de Granada, España
Ricardo Ruiz Baier	Monash University
Paul Méndez Silva	Escuela Politécnica Nacional
Ademir Pastor Ferreira Maicon Sartoni Hespanha	Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Filander Sequeira	Universidad Nacional de Costa Rica
Eligio Colmenares García	Universidad del Bío-Bío, Chile

Fuente: Elaboración propia.

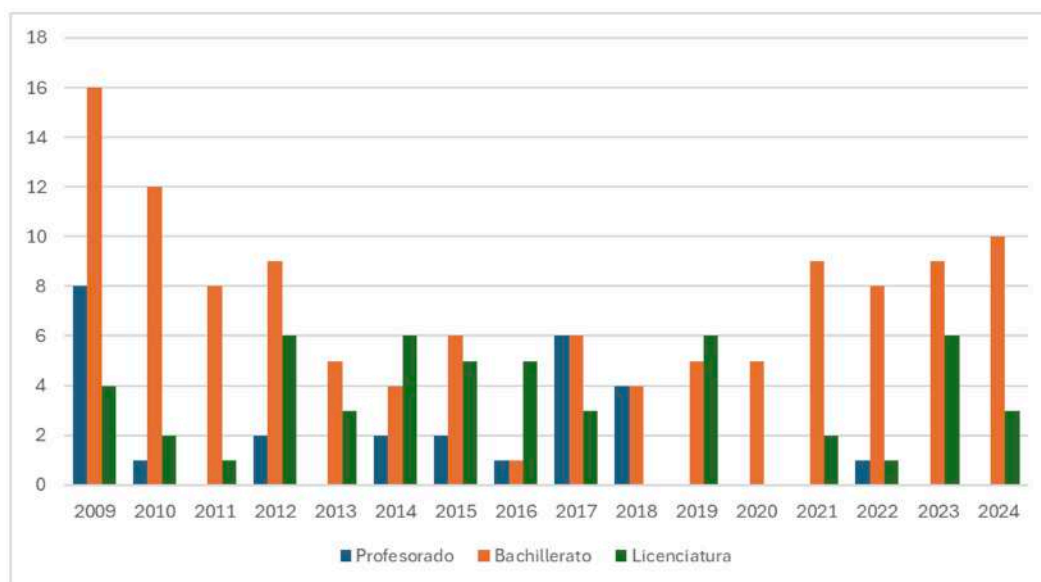
2.3. Población graduada

Desde su creación, la carrera de Enseñanza de la Matemática ha formado un número importante de nuevas personas profesionales, resultando en un impacto positivo para la región. En los últimos 15 años, esta tendencia se ha mantenido, contribuyendo al desarrollo social y económico de la zona y del país en general, pues a la carrera ingresan personas de todas las provincias del país y ya no se concentra tanto en la zona de Occidente.

En la Figura 1 se presenta un desglose detallado de las personas graduadas, por año y grado, a partir de 2009, lo que permite identificar algunas tendencias interesantes. Por ejemplo, se observa que el estudiantado opta por no graduarse del profesorado, prefiriendo en su lugar avanzar directamente al bachillerato. Además, la mayoría de esta población continúa su formación con la licenciatura. Incluso se sabe que quienes no ingresan a la licenciatura, pues optan por empezar a trabajar, buscan otras opciones académicas, como universidades privadas, para obtener el título de licenciatura. Esto resalta su compromiso con el desarrollo profesional.

Ahora bien, la Sede de Occidente y la Sección de Matemática han implementado medidas para aumentar la tasa de personas graduadas de la licenciatura. Anteriormente, se ofrecían solo dos cursos de licenciatura por semestre, mientras que actualmente se ofrecen los cuatro cursos del bloque cada semestre, lo que permite al estudiantado completar este grado académico en un año. Esta flexibilidad ha llevado a muchas personas a posponer su ingreso al mundo laboral para seguir con sus estudios.

Figura 1. Personas graduadas de la carrera 2009-2024.



Fuente: Elaboración propia.

Es importante destacar que el impacto de la población graduada trasciende la zona de Occidente, con personas graduadas desempeñándose en las siete provincias en una variedad de instituciones. Entre ellas se encuentran centros educativos de secundaria, tanto públicos como privados, además de universidades como la UNED, el TEC y la UCR, y entidades como el INA y oficinas centrales del Ministerio de Educación. Este fenómeno subraya la importancia de la Sede de Occidente en la formación de personas profesionales en la Enseñanza de la Matemática comprometidas, no solo en su región, sino en todo el país.

Además, se cuenta con personas graduadas de la carrera que han obtenido sus títulos de maestría y doctorado en diferentes universidades del exterior, lo que muestra que la formación recibida durante el Bachillerato y la Licenciatura es suficiente para ingresar a posgrados, inclusive en otros países.

2.4. Cuerpo docente (personal de relevo)

En el año 2009, la Sección de Matemática ya vislumbraba la necesidad de un plan de obtención de becas para que los futuros cuadros de relevo cursaran posgrados orientados en Didácticas Específicas de las Matemáticas, tal como se destacaba en la conclusión 9 (Ulate, et al., 2009).

A pesar de la importancia de contar con personal docente con estudios especializados en las tres áreas, Educación Matemática, Matemática Aplicada y Matemática Pura, para el año 2009, la Sección solo tenía dos docentes con posgrados a nivel de maestría: la M. Ed Patricia Maroto y el M. Sc. Sergio Araya. Un dato interesante es que, desde su concepción, en la Sede, la Sección de Matemática sólo había contado con un docente con grado de doctorado, el Dr. Carlos Torre Rodríguez, el cual se había acogido a su pensión desde el 2004. También el profesor Antonio Ledezma Araya, jubilado en 2006, contaba con una maestría en Educación. Este hecho era una debilidad académica de la Sección de Matemática, que en su mayoría se conformaba por licenciados en Matemática Pura y licenciados en Enseñanza de la Matemática.

Durante los años siguientes, la Sección mantuvo un discurso constante hacia los docentes interinos sobre lo fundamental de encaminar esfuerzos a la obtención de posgrados, tanto para fortalecer a la Sección en las tres áreas de acción: Educación Matemática, Matemática Aplicada y Matemática Pura, como para consolidar plazas dentro de la Sede.

Este proceso se logró a través de los años y actualmente la carrera y la Sección de Matemática cuenta con un cuerpo docente mejor formado académicamente que la generación anterior. En la Tabla 2 se resume la información de las personas docentes laborando para la carrera y la Sección de Matemática que cuentan con posgrados.

Tabla 2. Estudios de posgrado del personal docente en los últimos 15 años.

Docente	Área	Grado Académico	Institución	Año de obtención
Jesús Rodríguez Rodríguez	Matemática Aplicada	Maestría	Universidad de Puerto Rico, Puerto Rico	2012
Bolívar Ramírez Santamaría	Matemática Educativa	Maestría	Universidad de Costa Rica, Costa Rica	2015

Docente	Área	Grado Académico	Institución	Año de obtención
Mario Álvarez Guadamuz	Matemática Aplicada	Doctorado	Universidad de Concepción, Chile	2016
Ana Patricia Maroto Vargas	Educación Matemática	Doctorado	North Carolina State University, Estados Unidos	2017
Héctor Barrantes González	Matemática Pura	Doctorado	Centro de Investigaciones en Matemática, México	2018
Bryan Gómez Vargas	Matemática Aplicada	Doctorado	Universidad de Concepción, Chile	2019
Norman Noguera Salgado	Matemática Pura	Doctorado	Universidade Estadual de Campinas, Brasil	2020
María Fernanda Vargas González	Educación Matemática	Doctorado	Universidad de Granada, España	2020
Jéssica Jiménez Moscoso	Educación	Maestría	Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica	2023
Wendy Araya Benavides	Educación	Maestría	Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica	2024
Jorge Luis Salazar Chaves	Matemática Aplicada	Doctorado	Universidad Autónoma de México, México	2024

Fuente: Elaboración propia.

Todo este proceso de formación ha favorecido a la carrera, ya que se cuenta con más proyectos de investigación y acción social. También la formación del grupo de docentes ha permitido explorar otras posibilidades menos tradicionales para los Trabajos Finales de Graduación. Por ejemplo, hay algunas personas estudiantes que han realizado investigaciones en Matemática Aplicada inclusive de manera interdisciplinaria. Además, se han realizado investigaciones en Educación Matemática utilizando metodologías de investigación más recientes, ya que tradicionalmente se desarrollaban principalmente trabajos asociados a guías didácticas. Esto también muestra que la meta que tenía la Sección de Matemática y la carrera en 2008 fue lograda en un plazo de 15 años.

A pesar de este proceso, se necesita aún más docentes especialistas en las diferentes áreas de Educación Matemática para fortalecer más la carrera y la investigación en esta área. Como parte de esta necesidad, la profesora Jéssica Jiménez continuará su formación con una maestría en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en 2025 y proyecta además realizar el doctorado en la misma casa de estudios. Además, en enero de 2025, la docente Imelda Rojas Campos iniciará el programa de maestría en Evaluación Educativa, de la Universidad de Costa Rica. Finalmente, el docente Andrés Cubillo Arrieta se encuentra en la construcción de su Trabajo Final de Graduación de la Maestría Profesional en Tecnología Educativa con énfasis en Producción de Recursos Didácticos, de la Universidad Estatal a Distancia, UNED.

El compromiso del profesorado con su formación continua y con el desarrollo integral de la Sección ha impulsado un notable aumento en la participación en investigación y acción

social. La Tabla 3 muestra los proyectos de investigación inscritos por docentes de la Sección de Matemática en los últimos 15 años.

Tabla 3. Proyectos de investigación inscritos por profesores de la Sección.

Proyecto	Investigador(es) principal(es)	Vigencia
A9022: Medición del impacto del proyecto de autoformas del Laboratorio de Matemática de la Sede de Occidente en la educación primaria.	Luis Gerardo Araya Aguilar	2009-2012
B0017: Impacto del uso de la calculadora en el rendimiento académico de los estudiantes de primer ingreso, en los cursos de matemática de la Sede de Occidente.	Héctor Barrantes González	2010-2012
B2112: Mejoramiento del plan de estudios de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Sede de Occidente.	Ana Patricia Maroto Vargas Bryan Gómez Vargas	2012-2015
B7233: Métodos de elementos finitos mixtos para problemas acoplados en mecánica de fluidos.	Mario Álvarez Guadamuz	2017-2019
C0084: Ecuaciones elípticas no lineales sobre variedades riemannianas cerradas.	Héctor Barrantes González	2020-2022
C0089: Métodos de elementos finitos mixtos y técnicas afines para modelos matemáticos en dinámica de fluidos.	Mario Álvarez Guadamuz	2020-2022
C0202: Métodos de elemento finito para problemas acoplados en mecánica	Bryan Gómez Vargas	2020-2022
C1025: Desarrollo del pensamiento numérico en procesos de formación continua con docentes de educación primaria utilizando una perspectiva sociocultural.	Ana Patricia Maroto Vargas	2021-2022
C1147: Dinámica de sistemas de Schrödinger no lineal con no linealidades de tipo orden p .	Norman Noguera Salgado	2021-2022
C1343: Significado matemático atribuido a la noción de función, por parte de futuros docentes de matemática y los libros de texto.	María Fernanda Vargas González	2021-2023
C3003: Soluciones scattering y blow-up para sistemas de ecuaciones de Schrödinger no lineales de tipo cuadrático en dimensión seis.	Norman Noguera Salgado	2023-2025
C3008: Desarrollo y análisis de métodos numéricos aplicados a modelos en mecánica de sólidos y fluidos.	Bryan Gómez Vargas	2023-2025
C3138: Análisis y simulación numérica de fenómenos con aplicaciones biológicas y biomecánicas.	Mario Álvarez Guadamuz	2023-2025
C3321: Significado del álgebra escolar para futuros docentes de primaria.	María Fernanda Vargas González	2023-2024
C5002: Existencia de ondas viajeras para un sistema de ecuaciones de Schrödinger acoplado no lineal de tipo cuadrático en el caso no resonante.	Norman Noguera Salgado	2025-2027

Fuente: Elaboración propia basada en la base de datos Sigpro.
<https://inv.ucr.ac.cr/sigpro/web/>

Además, algunas personas docentes han colaborado como investigadoras asociadas en diversos proyectos inscritos en distintos centros de investigación de la Universidad. También se han ampliado las iniciativas de Acción Social propuestas por la Sección de Matemática, buscando generar un impacto positivo en la comunidad y fomentar la divulgación del conocimiento matemático. A continuación, se detallan los proyectos inscritos actualmente:

- El proyecto TC-382: Laboratorio de Matemática, con más de 30 años de experiencia y a cargo de Andrés Cubillo Arrieta.
- ED3596: MatemaTICs, inscrito desde el 2022, a cargo de Jéssica Jiménez Moscoso y Adrián Moya Fernández.
- ED3615: Fortalecimiento de la educación matemática para estudiantes de Secundaria de la zona de Occidente, inscrito desde el 2022, a cargo de María Fernanda Vargas, Patricia Maroto y Norman Noguera.

Como se mencionó anteriormente, parte del profesorado de la Sección también ha participado en otros proyectos de Acción Social fuera de la Sede de Occidente.

2.5. Cambios metodológicos y de infraestructura

Desde ya hace varios años en las reuniones de la Sección de Matemática se ha venido reflexionando sobre las metodologías y la evaluación de los cursos de matemática. En la Tabla 4, se presenta una muestra de cursos de la carrera impartidos entre el año 2016 y hasta el I Ciclo del 2024, que incluyen actividades de evaluación diferentes a exámenes parciales, exámenes finales o pruebas cortas. Es importante mencionar que durante estos años se pueden ubicar cursos que presentan porcentajes de evaluación diferentes a exámenes o pruebas cortas que van desde el 10% y hasta el 100%.

Tabla 4. Tipos de evaluaciones diferentes a los exámenes y porcentajes asignados.

Sigla	Curso	Año	Actividades de Evaluación sumativa	Porcentaje
MA0560	Computación y Métodos Numéricos	2016	Proyecto, exposiciones	60%
MA0552	Introducción a la Topología	2017	Folder de ejercicios, exposiciones	40%
MA0560	Computación y Métodos Numéricos	2018	Porcentaje de los parciales para hacer en casa y exponerlos	60%
MA0540	Principios de Análisis I	2019	Exposiciones ejercicios	20%
MA0552	Introducción a la Topología	2020	Exposiciones	40%

Sigla	Curso	Año	Actividades de Evaluación sumativa	Porcentaje
MA0371	Álgebra para la enseñanza	2021	Proyectos, exposiciones, elaboración de artículo, etc.	100%
MA0560	Computación y Métodos Numéricos	2021	Tareas, transcripciones, proyectos	100%
MA0502	Geometría III	2022	Tutoriales, planeamiento, blogs, etc.	100%
MA0552	Introducción a la Topología	2022	Videos, infografías	80%
MA0560	Computación y Métodos Numéricos	2022	Portafolio, trabajo grupal, proyecto	90%
MA0610	Introducción a la variable compleja	2022	Talleres, videos, portafolio, proyecto	100%
MA0420	Introducción a la Teoría de Números	2023	Videos	70%
MA0912	Resolución de Problemas	2023	Análisis de lectura, resolución de problemas, análisis de tareas, portafolios, etc.	80%
MA0421	Geometría Analítica	2024	Tareas, trabajo en clase, proyecto	40%
MA0552	Introducción a la Topología	2024	Presentaciones orales, participación de actividades académicas	40%

Fuente: Elaboración propia utilizando la base de datos del portal de la Sede de Occidente https://repositorio.so.ucr.ac.cr/~ciencias_naturales/

De la Tabla 4 se desprende que en los últimos años ha habido una tendencia hacia modificar la evaluación de los cursos con sigla MA, de tal modo que no todo el porcentaje de la evaluación sumativa consista en exámenes parciales o pruebas cortas. Particularmente, se destacan los cursos Álgebra para la Enseñanza, MA0371, y Computación y Métodos Numéricos, MA0560 en el año 2021; y los cursos Geometría III, MA0502, e Introducción a la Variable Compleja, MA0610, los cuales en el año 2022 no contemplaron en su evaluación sumativa ningún examen o prueba corta; por el contrario, se plantearon diferentes actividades que permitieran valorar el desempeño y aprendizaje de la población estudiantil de otra forma. También, como se puede observar, hay experiencia de cursos con 70%, 80% y hasta un 90% de sus evaluaciones dirigidas a desarrollar diferentes actividades no limitadas a exámenes.

Aunque la pandemia influyó de cierta manera en la forma en la que se evaluaban los aprendizajes en los cursos de la carrera, ya desde años prepandémicos se nota un cambio en los porcentajes de evaluación relacionados con otras actividades diferentes a aplicación de exámenes. El llamado a la reflexión a lo interno de las reuniones de Sección ha permitido que este porcentaje vaya creciendo año con año y se implemente cada vez más en más cursos.

Otro aspecto importante de destacar es que a partir de estas modificaciones en la forma en que se evalúa en los cursos, han surgido experiencias muy positivas. Por ejemplo,

en el curso de Ecuaciones Diferenciales para la Enseñanza de la Matemática del II Ciclo del año 2018, a cargo del profesor Jesús Rodríguez, se realizó una modificación en la evaluación, que consistió en desarrollar una investigación a lo largo de todo el semestre. Esto permitió que un grupo de estudiantes aprovechara esta actividad para presentar su propuesta de investigación de licenciatura, la cual culminó en la defensa del TFG titulado *Estudio de los patrones en la afluencia de insectos nocturnos a trampas de luz mediante el procesamiento digital de imágenes, en la Estación de Investigación José Miguel Alfaro, del Bosque Nuboso El Silencio de los Ángeles de San Ramón*, en el año 2023. Esto fue, muy ventajoso para este grupo, pues lograron madurar su proyecto, concibiendo una idea que comenzó estando en tercer año de carrera.

3. CONCLUSIONES

Una reflexión sobre el desarrollo de los últimos quince años de la carrera de Enseñanza de la Matemática revela tanto avances como oportunidades de mejora. Estos logros trascienden la zona de Occidente, ya que, como se mencionó, el estudiantado proviene de diversas regiones del país y termina trabajando en múltiples localidades a nivel nacional.

El análisis ha permitido identificar cambios positivos en comparación con las conclusiones destacadas por Ulate et al. (2009). Entre los aspectos más relevantes se encuentran:

- Descentralización de la carrera: La carrera ha pasado de ser desconcentrada a descentralizada, lo que le ha otorgado mayor independencia en procesos como el nombramiento de docentes, la consolidación de personal en plazas, y la revisión y aprobación de trabajos Finales de Graduación (TFGs).
- Cuerpo docente: La Sección cuenta con un sólido equipo académico, conformado por siete personas con doctorado y tres con maestría.
- Investigación y Acción Social: Se ha registrado un aumento notable en la investigación y en las iniciativas de Acción Social llevadas a cabo por la Sección de Matemática. En el caso de la investigación, esta se realiza directamente relacionada con experiencia adquirida por el cuerpo docente luego de realizar sus posgrados.
- Vínculos nacionales e internacionales: Se han fortalecido los lazos con instituciones tanto a nivel nacional como internacional, enriqueciendo la labor académica de la carrera.
- Metodología y evaluación: Se han implementado cambios significativos en las metodologías de enseñanza y en la evaluación de los cursos.

Sin embargo, un cambio no tan positivo es que actualmente la carrera solo se ofrece en el recinto de San Ramón. En 2009, se mantenía la apertura de una nueva promoción cada tres años en el Recinto de Grecia. No obstante, la disminución en la cantidad de estudiantes interesados y la necesidad de que alumnos de Tacares se trasladaran a San Ramón para completar sus cursos llevaron a la decisión de cerrar la carrera de manera permanente en ese recinto.

Ahora bien, a pesar de los avances, aún hay áreas que requieren atención y mejora. Por ejemplo, todavía, no existe un plan de sustitución del personal que garantice la continuidad en el tiempo, de docentes, con posgrados especializados en áreas como Educación Matemática,

Matemática Aplicada y Matemática Pura. Además, es fundamental en la actualidad reforzar la cantidad de docentes con posgrados en el área de Educación Matemática.

Asimismo, el proceso de autoevaluación había puesto de manifiesto la necesidad de mejorar y actualizar el plan de estudios de la carrera contemplando aspectos como: (a) la inclusión de un curso sobre adecuaciones curriculares, (b) la integración de las tecnologías de la información y la comunicación como eje transversal, y (c) la implementación de cursos de educación específicamente orientados a la enseñanza de la matemática, los cuales no se han podido subsanar completamente por la dificultad para modificar el plan de estudios; debido a que la carrera no es propia y la figura con la que se cuenta actualmente (carrera descentralizada) no es suficiente para realizar dichos cambios, esto en concordancia con las ventajas/desventajas a las que hacía alusión Senén (1989) sobre estos procesos. Sin embargo, tal como se indicó en el apartado 2.2. la carrera actualmente se encuentra en reestructuración lo cual permitirá abordar estas y otras debilidades en un futuro.

Tras el proceso de autoevaluación y como parte del compromiso de mejora, la carrera ha buscado abordar algunas de esas necesidades dentro del plan de estudios actual. Por ejemplo, en varios cursos se ha incorporado el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) como eje transversal, pues se ha reflexionado que esta estrategia resulta más efectiva que la inclusión de un curso específico sobre el tema. Es por ello, que con miras a seguir mejorando e innovando, la Sección de Matemática ha estado trabajando en la creación de una nueva oferta académica denominada: Enseñanza Bilingüe de la Matemática.

Todos los esfuerzos hechos desde 2012 no permitieron realizar mejoras sustanciales al plan de estudios, ya que la carrera depende de las dos escuelas mencionadas previamente. Por esta razón, en 2018 la entonces Vicerrectora de Docencia, Dra. Marlen León Guzmán, propuso a la Sección de Matemática y a la carrera trabajar en la construcción de una nueva opción académica novedosa para el país y que permitiera la formación de docentes de matemática de manera que se pudiera aprovechar el recurso humano y la experiencia de la sede. El profesorado de la carrera asume el reto y en 2020 inició un largo proceso de investigación que permitió la construcción del Estudio de Pertinencia y Factibilidad Administrativa-Presupuestaria. Dicho informe fue aprobado por la Asamblea de la Sede de Occidente a finales de 2022. Posteriormente se inició con la construcción del Documento Plan de Estudios, finalizado el 1 ciclo del año 2024 y el cual está en trámite para una segunda valoración por la Asamblea de la Sede de Occidente. En todo este recorrido ha sido fundamental la asesoría técnica del CEA (Informe del Estudio de Pertinencia y Factibilidad, 2023).

Esta nueva opción académica se propone propia para la Sede de Occidente. Es un programa de cinco años, sin salida lateral al bachillerato, por ser una carrera interdisciplinaria. El plan incluye las tendencias recientes en la formación de docentes de Matemática y por tanto un eje fundamental de la propuesta son las didácticas específicas en las diferentes áreas matemáticas, a saber: Álgebra y Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidad, Números, así como la Didáctica de la Enseñanza Bilingüe de la Matemática. Esta última se conecta con el otro eje fundamental y novedoso de este currículum: el aprendizaje del idioma inglés, de manera que las personas graduadas posean las habilidades necesarias para enseñar matemática en ese idioma. Nótese que la necesidad de inclusión de las didácticas específicas fue una necesidad ya detectada en 2008 y que hasta ahora pudo ser atendida. Las tres personas autoras de este artículo son quienes han liderado el proceso de construcción de este nuevo plan de estudios, con el apoyo de toda la Sección de Matemática y una comisión de enlace con algunas personas docentes de la Sección de Lenguas Modernas de la Sede de Occidente.

Esta propuesta se alinea con los requerimientos solicitados por el Gobierno de la República durante las últimas dos negociaciones del Fondo Especial para la Educación Superior, FEES, al incluir una carrera del área STEM, con el fomento de una segunda lengua y el fortalecimiento de la regionalización de las universidades (Martínez, 2023). Además, la nueva oferta académica desarrollada, responde a una necesidad país, enmarcada en los objetivos que el estado costarricense quiere alcanzar para el año 2040, relacionados con el manejo de un segundo idioma en la población estudiantil de secundaria y que se plasman en lo que se conoce como Alianza para el Bilingüismo (Vargas, Noguera y Maroto, 2024).

Consideramos esta nueva opción un gran reto académico para el profesorado actual y futuro de la carrera, pero considerando la experiencia que tiene la Sede de Occidente y en particular la Sección de Matemática, quien ha formado docentes de matemática durante 40 años y también la calidad académica del profesorado actual, se espera cumplir con una mejor formación de docentes de matemática que necesita el país para así afrontar los retos que las condiciones actuales del país demandan.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Casassus, J. (1990). Descentralización y desconcentración de los sistemas educativos en América Latina. Proyecto Principal de Educación: En América Latina y el Caribe. Boletín 22, Santiago, Chile.
- Guerrero, L. (2014). Matemáticos Reunidos en Sede del Atlántico. <https://www.ucr.ac.cr/noticias/2014/02/13/matematicos-reunidos-en-sede-del-atlantico.html>
- Martínez, A. (2023). Gobierno y autoridades universitarias definieron un aumento del 2% para el monto del FEES 2024 luego de nueve reuniones. Delfino. FEES 2024: Comisión de Enlace acuerda \$576.087 millones como presupuesto para universidades públicas - Delfino.cr
- Resolución 1739-84. [Vicerrectoría de Docencia, UCR].
- Resolución VD-R-9200-2015 [Vicerrectoría de Docencia, UCR]. Sobre la descentralización de carreras en Sedes Regionales.
- Resolución VD-R-9347-2016. [Vicerrectoría de Docencia, UCR].
- Rojas, G. (2012). Matemáticos destacan beneficios de EMALCA. <https://www.ucr.ac.cr/noticias/2012/02/15/matematicos-destacan-beneficios-de-emalca.html>
- Sección de Matemática. (2015). Informe del proceso de Autoevaluación: Carrera Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.
- Sección de Matemática. (2021). Memoria 2021 de la Sección de Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente. <https://portal.so.ucr.ac.cr/matematica/recursos>
- Sección de Matemática. (2022). Memoria 2022 de la Sección de Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente. <https://portal.so.ucr.ac.cr/matematica/recursos>
- Sección de Matemática. (2023). Informe del Estudio de Pertenencia y Factibilidad Administrativa-Presupuestaria para la creación de la carrera: Licenciatura en la Enseñanza Bilingüe de la Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.
- Sección de Matemática. (2023b). Memoria 2023 de la Sección de Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente. <https://portal.so.ucr.ac.cr/matematica/recursos>
- Sección de Matemática. (2023c). Informe de Avance de Cumplimiento del Compromiso de Mejoramiento de la Carrera Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.



- Senén G, S. (1989). Políticas estatales y programas de descentralización y regionalización educativa: Un estudio de casos en tres provincias argentinas⁷. Ponencia para la reunión Interagencial sobre descentralización y desconcentración de políticas públicas. Brasilia, Brasil.
- Ulate, C. M., Maroto, A. P. y Noguera, N. F. (2009). La carrera de Enseñanza de la Matemática: Pasado y futuro en la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5), 69 – 94.
- Vargas, M., Noguera, N. F., y Maroto, A. P. (2024). Carreras de enseñanza bilingüe: Un paso más en la ruta hacia la Costa Rica bilingüe. Revista Actualidades Investigativas en Educación, 24(2), 1-26. <https://doi.org/10.15517/aie.v24i2.57146>



EXPERIENCIA PROFESIONAL: CLASES DE NIVELACIÓN EN SÉTIMO AÑO BASADAS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dilan Josué Jiménez Sánchez¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-9047-083X>

La resolución de problemas en matemática es una habilidad fundamental tanto para personas estudiantes como educadoras matemáticas. En el caso de Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública [MEP] (2012) en los Programas de Estudio de Matemática propone la resolución de problemas como estrategia de mediación pedagógica en el aula, con la cual se podrán construir los conocimientos y desarrollar habilidades específicas en el ámbito matemático. En los diferentes cursos de la carrera Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica [UCR] se estudian los problemas matemáticos desde distintas perspectivas, desde consideraciones propias de la didáctica de matemática hasta ser protagonistas del proceso de plantearlos y resolverlos; sin embargo, fue hasta el curso MA0033 Seminario en Educación Matemática que se abordó esta temática desde un enfoque teórico, estudiando los textos de Polya (1989) y Schoenfeld (1985).

El presente ensayo tiene como objetivo comentar mi experiencia personal como docente a cargo de un grupo de nivelación de 30 estudiantes de séptimo año en matemática, en el Colegio Técnico Profesional Don Bosco, el cual fue ofrecido a las personas estudiantes de séptimo y décimo año luego de la primera ronda de exámenes; y cómo la formación en la carrera Educación Matemática me permitió abordar una de las situaciones a la que se presentaron en el desarrollo de las clases: las personas estudiantes no sabían cómo afrontar un problema en matemática. Para lograr este objetivo, describiré el contexto en que se dio esta nivelación, describiré dos de las doce clases impartidas (cada una de dos horas), junto con los problemas que fueron cruciales para esta experiencia, y, por último, presento algunas reflexiones propias sobre los aprendizajes que obtuve con esta experiencia.

Con respecto al curso de nivelación, este no era obligatorio, sino que se propuso como plan para apoyar a la población que tuvo bajo desempeño en las primeras evaluaciones del año 2024. Para séptimo año, las clases debían abordar los siguientes contenidos: Operaciones con números naturales, teoría de números, operaciones con números enteros, sucesiones y patrones, y por último, geometría; todos los contenidos acorde a lo propuesto por el MEP (2012), estos eran asignados semana a semana por la coordinación del departamento de matemática del colegio. De estos contenidos, se decidió trabajar resolución de problemas una clase enfocada en la división y multiplicación de números naturales; sin embargo, debido a los sucesos que

¹ Licenciado en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico dilan.jimenez@ucr.ac.cr



ocurrieron y que se describirán posteriormente, se optó por abordar una segunda clase de esta temática, desarrollando los contenidos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y además, enfocada en aprender a resolver problemas.

Para el desarrollo de la clase 1, se planteó el siguiente problema: Don Juan y Doña Ana son personas trabajadoras en la feria del agricultor. Cada fin de semana, llevan sus cosechas de papa y zanahoria para ponerlas a la venta. Para este sábado llevan 12 sacos de papa y 15 de zanahoria. Conteste las siguientes preguntas, sabiendo que en cada saco caben 25 Kg del producto, que el kilo de papa contiene 7 unidades y el de zanahorias 8 unidades, aproximadamente. Estime, ¿cuántas papas llevan Don Juan y Doña Ana para vender?, ¿cuántas zanahorias?, ¿cuántos vegetales en total? Esta vez llevan una nueva promoción, que incluye una bolsa de 4 papas y 5 zanahorias por $\$3750$. ¿Cuántas promociones pueden formar, con la cantidad de vegetales que llevan?, ¿cuánto dinero ganarían si vendieran toda la carga de esta forma?, ¿sobraría producto?

El problema se leyó en voz alta, y luego se dio un espacio de trabajo independiente. En este momento, las personas estudiantes presentaron resistencia para trabajar; entre sus motivos, se encontraban: no lograr identificar qué operación hacer con todos los datos, no entender qué información se solicita, o bien, que no se parecía a nada de lo que han trabajado antes, lo anterior en concordancia con sistema de Recurso y Creencias de Schoenfeld (1985); esto llevó a que colectivamente se reusaran a intentar resolver el problema. Al indagar un sobre este último aspecto, se evidenció que, en su pasado académico, las personas estudiantes no estaban resolviendo problemas realmente, sino lo que el MEP (2012) denomina *ejercicios de reproducción*, los cuales son “relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados” (p. 32).

Para esta situación en específico, se dedicó toda la clase solo al estudio de este problema. Entre las acciones tomadas, se volvió a leer el problema en conjunto, asegurando que se comprendiera cada parte del contexto de las personas agricultoras. Una vez estuvo claro el contexto, se dio paso a la fase de diseño del plan; para esto, se fue pregunta por pregunta estableciendo ideas que podrían ayudar a dar una respuesta. Por ejemplo, para determinar la cantidad total de vegetales, las personas estudiantes propusieron sumar para determinar cuántos vegetales cabían en un solo saco, y luego sumar de nuevo para calcular el total; en este momento, otra persona preguntó: “¿eso no es una multiplicación?”, lo que llevó a las personas estudiantes a recordar la definición de multiplicación como suma repetida.

Una vez diseñado el plan, las personas estudiantes lograron concluir con éxito el proceso de resolución; por último, se reflexionó sobre si las respuestas tenían sentido, si habían resuelto otro tipo de ejercicios antes utilizando estas mismas operaciones, entre otros. Las fases anteriores coinciden, parcialmente, con las planteadas por Polya (1989), y permitieron que las personas estudiantes no solo resolvieran la situación presentada, si no que se utilizó como base para asociar las operaciones de multiplicación y división a los procesos de sumar repetidamente o separar en grupos de igual tamaño.

Al finalizar, se conversó con la otra persona a cargo de nivelación de séptimo sobre lo ocurrido, cabe destacar que esta última es parte del personal docente de la institución. Se determinó que había muchas personas con esta misma situación asociada a no saber cómo afrontar tareas matemáticas que fueran más allá de ejercicios de reproducción. Por lo anterior, se decidió realizar una segunda clase basada en esta temática, con la que se iba a abordar el contenido de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, pero además enfocada a qué pasos se pueden seguir para resolver un problema.

Para la clase 2, a cada persona estudiante se le entregó la guía de resolución de problemas presente en el apéndice 1. Se dio una lectura general, para luego separar la clase en 6 grupos, donde cada uno de ellos debía resolver un problema de los que se presentan en el apéndice 2. La guía se desarrolló basada en los aportes de Polya (1989) y Schoenfeld (1985); además de las discusiones dadas en el curso MA0033. En esencia, la guía busca que la persona estudiante se asegure de comprender el problema, traiga a su mente “herramientas” que le permitan solucionarlo, diseñe una estrategia, la aplique, y luego que vuelva atrás y verifique que la solución obtenida tenga sentido dentro del contexto del problema.

En contraste con la clase 1, las personas estudiantes estuvieron motivadas a trabajar con los problemas, aun cuando las soluciones de estos no fuesen tan directas para ellas. Entre las ideas propuestas para las soluciones estaban, el dibujo o “actuación” de las situaciones para entender el problema, la discusión entre pares sobre ideas y su respectiva validación, entre otras. Al finalizar la actividad, se obtuvieron resultados acordes a los objetivos planteados para la clase, las personas estudiantes resolvieron con éxito los problemas, además, se logró generalizar la idea de que de mínimo común múltiplo y máximo común divisor desde su interpretación conjuntista. En clases posteriores, se formalizó la definición y se determinaron alternativas para su cálculo.

Para finalizar, haré referencia a dos reflexiones propias sobre los aprendizajes que obtuve con esta experiencia. En primer lugar, como la formación dada en la carrera Educación Matemática me permitió abordar la situación presentada en la clase 1, conservando a la persona estudiante como protagonista de su proceso de aprendizaje y yo como docente, siendo una guía para alcanzar los objetivos. Además, durante el desarrollo de ambas clases, se lograron movilizar procesos planteados por el MEP (2012) como razonar y argumentar, resolver problemas y comunicar, llevando estas clases a dar un paso más allá de su objetivo, que era repasar y fortalecer contenidos matemáticos en los cuales las personas estudiantes tenían deficiencias.

En segundo lugar, logré evidenciar la utilidad del estudio teórico de la resolución de problemas como se hizo en el curso MA0033, y verificar como este abordaje permitió que las personas estudiantes utilizaran el conocimiento previo para construir un nuevo conocimiento. Aun cuando el espacio de nivelación no corresponde con una clase convencional de matemática y se acerca más a una “tutoría”, se presentó la oportunidad de llevar esta metodología e impactar en las creencias de las personas estudiantes sobre lo que significa aprender matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemática*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.



APÉNDICES

Apéndice 1: Guía para la resolución de problemas

La habilidad para resolver problemas y relacionar el contenido académico con situaciones cotidianas es fundamental. No se trata sólo de comprender conceptos abstractos, sino de aplicarlos de manera práctica en nuestras vidas diarias. Saber cómo resolver problemas no solo fortalece nuestra comprensión de los temas, sino que también nos prepara para enfrentar los desafíos del mundo real con confianza y destreza. En esta guía, exploraremos las fases que se pueden seguir cuando nos enfrentamos a un problema.

Primera fase: Comprendiendo el problema

- Lea con detenimiento el problema asignado por el docente. Contesten las siguientes preguntas: ¿comprendo el problema en su totalidad?, ¿hay algún concepto o contexto que no conozco? (en caso de que sí, búsquelos), ¿conozco el contexto que me presentan, o hay algo en él nuevo para mí?
- En su grupo de trabajo, intenten reformular la situación planteada “como si se la fueran a contar a un amigo”, ¿sigue teniendo el mismo sentido?, ¿hay algo del problema que tuvieron que “adaptar”?, ¿cómo lo hizo y por qué?
- Tome un espacio para planear sus creencias sobre el problema.

Segunda fase: Planteando una estrategia

- Sin efectuar ningún procedimiento, piensen un “plan de acción”, donde describan qué conocimientos (no solo matemáticos) creen que serán necesarios para resolver la situación planteada. ¿Cómo determinan si una estrategia es válida?
- ¿Qué “cosas” asumen?, ¿consideran que hay más de un camino para resolverlo?, ¿cuáles son las diferencias entre las posibles vías de solución?
- Tome un espacio para escribir sus creencias en torno a las estrategias, ¿consideran que el contenido aprendido hasta el momento es útil y suficiente para su resolución?

Tercera fase: Poniendo el plan en acción

- Realicen los procedimientos planteados en la segunda fase.
- Mientras resolvían el problema, ¿surgió una nueva estrategia?, ¿la aplicaron?, ¿cómo determinaron si era una estrategia válida?, ¿es mejor que la que plantearon antes?
- ¿En algún momento en la solución, consideraron que una estrategia que creían viable, no lo era?, ¿por qué?, ¿qué hicieron en ese momento?

- Determine: ¿mi solución tiene sentido dentro del contexto del problema?, ¿por qué?
- ¿Consideraron en algún punto que debían detenerse, y volver a plantear otra estrategia?

Cuarta fase: Comunicando mi proceso de aprendizaje

- Utilizando el papel periódico, marcadores y cualquier material que consideren necesario, creen un “póster expositivo”, con el cual van a comentar a las demás personas:

En qué consistía el problema que les correspondió.

Qué conocimientos fueron necesarios para resolver el problema.

Qué estrategia planearon, si les fue útil, y si debieron replantearla.

La solución del problema, y cómo validaron que tuviera sentido en el contexto.

Apéndice 2: Problemas para la clase 2

Problema 1: En San José hay variadas paradas de autobús. Entre ellas, se encuentran las de “Hatillo 3 y 4” y “15 de Setiembre”, los cuales comienzan a trabajar a las 5:00 AM. Sobre estos buses se sabe la siguiente información:

- En horario regular (no “hora pico”) el recorrido del bus de Hatillo 8 dura aproximadamente 1 hora y 10 minutos, y el del bus de la 15 de Setiembre dura 50 minutos.
- En “hora pico” (de 3:30 PM – 6:00 PM) el recorrido del bus de Hatillo 8 dura aproximadamente 1 hora y 45 minutos, y el del bus de la 15 de Setiembre dura 1 hora y 20 minutos.

María José todos los días pasa por San José cuando vuelve del trabajo. Usualmente ella llega antes de que inicie la hora pico a la parada, y están ambos buses. ¿Aproximadamente a qué hora llega María José a la parada?, El día de hoy ella llegó justo al inicio de la hora pico, y no estaban los buses. ¿Cuánto debe esperar para que llegue el primer bus?, ¿Cuánto debería esperar para que estén los buses juntos?

Problema 2: Don José tiene una ferretería. Por recomendación de su hijo, va a comenzar a vender pintura. Él aprovechó una oferta al por mayor, en la cual compró 120 L de pintura color blanco hueso, y 80 L de color crema; cada litro de pintura le costó ₡4375 el litro. Para venderlo, él quiere dividir la pintura en la mayor cantidad posible de cubos, todos con la misma capacidad. Su hijo logró conseguir cubos que cumplen con esa especificación, y al repartir la pintura, no quedaron sobras, ¿de cuántos mL es cada cubo?, ¿cuántos cubos consiguió el hijo de Don José?, ¿a cuánto debería vender cada uno, para que se recupere, al menos, la mitad de la inversión?

Problema 3: Dos amigos, Ana y Luis, están haciendo pulseras de la amistad para un concierto al que asistirán próximamente en Londres. Ana tiene 48 abalorios rojos y 36 morados, mientras que Luis tiene 72 rojos y 54 morados. Quieren hacer la mayor cantidad posible de pulseras iguales con sus cuentas; sin embargo, no quieren revolverlas, ya que Luis considera que no se verían bien, pues los abalorios son de tonos distintos. Entonces, ¿cuál es el mayor número de abalorios que puede tener cada pulsera de la amistad?, ¿cuántos de cada color tiene cada pulsera?

Problema 4: En el Parque Nacional Diversiones, en la plaza de Tío Conejo se instalaron dos fuentes de agua, una de tío Coyote, y otra de Tía Gallina. Están programadas para lanzar un chorro de agua a intervalos regulares de tiempo. La fuente de Tío Coyote lanza un chorro cada 15 segundos, mientras que la de Tía Gallina lo hace cada 25 segundos. Mario es un niño muy curioso, y se dio cuenta que ambas fuentes lanzaron un chorro de agua juntas por primera vez a las 3:00 p.m., entonces él se pregunta ¿Las fuentes estaban coordinadas al mismo tiempo a las 10:00 a.m., cuando abrió el parque?, ¿si el parque cierra a las 6:00 p.m., a qué hora las fuentes lanzarán el último chorro de agua juntas?

Problema 5: Tres amigos, Melissa, Carla y Jorge acordaron entrenar juntos para Los Juegos Paralímpicos de París 2024. Como Melissa no ha llegado, Carla y Jorge deciden calentar corriendo alrededor de una de las pistas de carreras del Parque Metropolitano La Sabana. A Carla le toma 12 minutos completar cada vuelta, mientras que a Jorge le toma 16 minutos. Ambos comienzan a correr a las 7:00 AM. Al llegar Melissa, nota que ambos están llegando juntos al inicio del circuito. ¿Cuál es una posible hora a la que llegó Melissa?



EXPERIENCIA DE FORMACIÓN: ESTUDIO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

TRAINING EXPERIENCE: STUDY ON PROBLEM SOLVING

David Córdoba Segura¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0006-4695-3650>

Emmanuel Ramírez Garita²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-5401-6487>

Yendry Quesada Calderón³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-0002-1039>

En la carrera de Educación Matemática de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, hemos tenido la oportunidad de desarrollar habilidades en el campo de la investigación, una de las áreas laborales clave del perfil profesional de esta carrera. A través de diversos cursos, hemos experimentado lo que implica realizar ejercicios de exploración investigativa en el ámbito de la Educación Matemática. En particular, en el marco de los cursos Evaluación de los Aprendizajes Matemáticos (MA-0011) y Métodos y Diseños de Investigación (PS-1080) entre los años 2023 y 2024, llevamos a cabo una investigación titulada *Resolución de problemas: una propuesta para guiar el proceso*.

El objetivo de este texto es narrar nuestra experiencia al desarrollar este estudio, así como destacar los aprendizajes obtenidos en esta, la cual representó una oportunidad de crecimiento en nuestra formación como docentes de matemática. Además, presentaremos de manera general en qué consistió nuestra práctica y sus principales resultados.

La resolución de problemas es una habilidad central en el aprendizaje y aplicación de los conocimientos matemáticos. Desde hace varias décadas, la resolución de problemas se ha incluido como elemento central en los currículos escolares de matemática en diversas partes del mundo. Por ejemplo, desde 1980 el Consejo Nacional de Educadores de Matemática (NCTM) de Estados Unidos hizo un llamado para que la resolución de problemas oriente la política educativa a futuro (Bahar & Maker, 2015). Sobre esto, la propia NCTM (1989)

1 Estudiante de Licenciatura en Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico david.cordobasegura@ucr.ac.cr

2 Estudiante de Licenciatura en Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico emmanuel.ramirezgarita@ucr.ac.cr

3 Estudiante de Licenciatura en Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico yendry.quesadacalderon@ucr.ac.cr

menciona que la resolución de problemas debe ser la base de todos los aspectos de la enseñanza de las matemáticas para que los alumnos experimenten el poder de las matemáticas en el mundo que les rodea.

De manera similar, a nivel nacional se ha seguido esta línea de acción en el currículo de matemática. En los Programas de Estudio de Matemática publicados por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en el año 2012, que son los que se usan actualmente, se estipula que el aprendizaje debe ser basado en una metodología de resolución de problemas, haciendo especial énfasis en los problemas contextualizados con escenarios plausibles en la vida real (MEP, 2012).

Sin embargo, a nivel nacional, no se evidencia que las personas estudiantes estén alcanzando los objetivos educativos en torno a la resolución de problemas. Según el último informe del Estado de la Educación elaborado por el Programa Estado de la Nación (PEN) publicado en el 2023, en las pruebas nacionales FARO del año 2021 menos del 6% de los estudiantes evaluados fueron capaces de “desarrollar ítems relacionados con los más altos niveles de desempeño esperados para su nivel, como establecer relaciones de causa y efecto en un texto leído, resolver problemas en contextos complejos o desarrollar ítems que implicaban mayor comprensión y análisis” (PEN, 2023, p. 94).

En vista de lo anterior, durante el curso de Evaluación de los Aprendizajes Matemáticos (MA-0011) desarrollamos una tabla para organizar el proceso de la resolución de problemas basada en la metodología propuesta por Polya (1965), así como una rúbrica para evaluar el progreso de las personas estudiantes. Posteriormente, en el curso Métodos y Diseños de Investigación (PS-1080) diseñamos y llevamos a cabo una investigación para determinar si utilizar dicha tabla mejora las habilidades de resolución de problemas en las personas estudiantes.

Tabla 1. Rúbrica de evaluación para la resolución de problemas.

criterio	Indicador	Excelente (100%)	Bueno (50%)	Insuficiente (0%)
Comprensión del problema	Identifica los datos dados en el problema. (15 pts.)	Enuncia todos los datos necesarios brindados en el problema.	No enuncia uno de los datos necesarios brindados en el problema de forma correcta.	No enuncia más de uno de los datos necesarios brindados en el problema.
	Identifica la(s) incógnita(s) a encontrar en el problema. (15 pts.)	Enuncia correctamente la(s) incógnita(s) del problema.	Enuncia parcialmente la(s) incógnita(s) del problema.	No enuncia la(s) incógnita(s) del problema.
Concepción de un plan	Elige un método matemático adecuado. (10 pts.)	Elige un tipo de método matemático correcto.	Elige un método matemático correcto, pero no el tipo.	No elige un método matemático adecuado.

Criterio	Indicador	Excelente (100%)	Bueno (50%)	Insuficiente (0%)
Ejecución del plan	La solución escrita es correcta. (25 pts.)	Hay a lo sumo 1 error de cálculo aritmético.	Hay más de 2 errores de cálculo aritmético.	Hay al menos 1 error de concepto matemático.
	Obtiene la solución al problema. (25 pts.)	Obtiene la solución correcta.	Obtiene la solución con algún error no significativo.	No obtiene la solución o es errónea.
	Da respuesta a la pregunta del problema. (10 pts.)	Responde la pregunta del problema de forma completa.	Responde el problema de forma incompleta.	No responde la pregunta del problema.

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la metodología de la investigación, realizamos una de tipo cuantitativo cuasiexperimental. La población del estudio estuvo conformada por las personas que cursan MA0002 Álgebra Elemental, un curso exclusivo para el estudiantado de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, y que en ese momento contaba con dos grupos. En el estudio participaron 40 estudiantes, en primer año de carrera.

Para la recolección de los datos se seleccionó uno de los grupos mencionados previamente para ser el grupo control, y el otro el experimental. Se utilizaron dos versiones distintas de un instrumento que contenía dos problemas del área de Álgebra. En una de ellas, la que se utilizó en el grupo control, se presentaron únicamente las instrucciones generales y los enunciados de los problemas. En la otra versión, la que se usó en el grupo experimental, se incluyó la tabla basada en el método de Polya. Los problemas son los mismos en ambos instrumentos. Adicionalmente, en ambos grupos se utilizó la rúbrica (Tabla 1) para evaluar conocimientos y competencias en la resolución de problemas matemáticos. Esta fue construida en base a la metodología de resolución de problemas de Polya, procurando que los rubros fuesen observables, exhaustivos y que evalúen un único objetivo

Para el análisis, se utilizó la rúbrica mencionada previamente para asignar una puntuación a cada problema; el promedio de puntuación de ambos problemas es la nota final de cada persona. La nota final, las puntuaciones individuales de cada problema y las puntuaciones por criterio evaluado fueron analizadas con una prueba de normalidad Shapiro-Wilk. Se calcularon las medias de las puntuaciones mencionadas y se analizó si las diferencias encontradas fueron significativas mediante una prueba T-Student o U de Mann-Whitney dependiendo del resultado de la prueba de normalidad. Todo el análisis de datos lo hicimos utilizando el software Jamovi versión 2.5.5.1

Una vez analizados los resultados pudimos concluir que el grupo experimental tuvo un desempeño significativamente mejor que el grupo control en ambos problemas. Esta mejora en el desempeño podría ser atribuida a que la utilización de la tabla ayuda a los estudiantes a seguir un enfoque estructurado, asegurando que no se salten pasos cruciales.

Esta vivencia nos permitió adquirir aprendizajes cruciales para el desarrollo de la práctica docente. El más evidente es la capacidad de desarrollar este tipo de estudios y generar

nuevo conocimiento. Al poner en práctica los conceptos teóricos del diseño de investigaciones, comprendimos el proceso real y todas las eventualidades, cambios y decisiones que deben tomarse a lo largo del mismo.

Por otro lado, y por la naturaleza de nuestro estudio, nos permitió explorar una posibilidad de estrategia de mediación pedagógica para implementar en nuestras clases de matemática. Por ejemplo, se podría enseñar a las personas estudiantes a utilizar la tabla al momento de resolver problemas. Lo anterior debido a que esta permite recopilar información sobre las capacidades de resolución de problemas de los estudiantes en diversos contextos y utilizando diferentes herramientas matemáticas. Esto permite identificar las fortalezas y debilidades de cada estudiante al momento de resolver problemas, además de guiarlo en el paso de cada etapa. Si una persona estudiante no es capaz de resolver un problema, se puede visualizar en qué fase de la resolución tiene dificultades.

La experiencia académica nos brindó la oportunidad de adentrarnos en el mundo de la investigación en educación matemática, como se mencionó previamente. Sin embargo, lo realmente relevante es entender cómo se lleva a cabo este proceso en nuestro contexto educativo. Aunque existe una gran cantidad de teoría sobre cómo abordar ciertos problemas en la educación matemática, quienes somos responsables de poner en práctica esa teoría y generar nuevos enfoques adaptados a nuestra realidad somos nosotros. Por ello, que la carrera ofrezca espacios para desarrollar estas competencias a lo largo de diversos cursos resulta fundamental para fomentar esta habilidad.

Un aspecto que muestra también este tipo de acercamientos es las dificultades y obstáculos con los que se puede encontrar un investigador. Durante el proceso es posible que se deban realizar cambios en los instrumentos o en la investigación, cambiar el enfoque con el que se quiere investigar o incluso darse cuenta que se están haciendo diversos procedimientos de forma incorrecta o poco funcionales, por lo que hay que replantear parte o todo del trabajo que se está realizando, este tipo de experiencias nos permiten vivir eso, perseverar y aprender del proceso.

Por último, queremos incentivarlos a nosotros mismos y a todas las personas que estén formándose en Educación Matemática a realizar este tipo de exploraciones en la investigación, esto desarrolla habilidades que no obtenemos en los cursos y nos permite estar en un proceso de formación continua mejorando nuestro quehacer docente dentro de las aulas.

REFERENCIAS

- Bahar, A. & Maker C. (2015) Cognitive Backgrounds of Problem Solving: A Comparison of Open-ended vs. Closed Mathematics Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1531-1546. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1410a>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica [MEP]. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Ministerio de Educación Pública.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics: An overview*. NCTM.
- Programa Estado de la Nación (2023). *Noveno Estado de la Educación 2023*. CONARE - PEN.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2025

Vol. 18

Nº. 1

Presentación.....	5-7
Sección 1. Artículos de investigación	
1. Sobre la interacción epistémica y educativa entre tres realidades: geométrica, física y algebraica (GFA).....	7-20
<i>Autores: Luis Enrique Moreno-Armella y Guershon Harel</i>	
2. Hábitos de pensamiento matemático y el uso de GeoGebra en la resolución y formulación de problemas de optimización....	21-42
<i>Autores: Martha L. García-Rodríguez y Juan Gabriel Herrera-Alva</i>	
3. Sala de aula invertida no ensino de fatoração algébrica: um estudo sobre o pensamento algébrico evidenciado por estudantes brasileiros 8º ANO	43-60
<i>Autores: Vilmar Gomes da Fonseca y Matheus de Carvalho Terra</i>	
4. IA en la resolución de problemas matemáticos.....	61-89
<i>Autor: Alexander Hernández Hernández</i>	
5. La cultura como operador en las metodologías de la enseñanza de las matemáticas.....	91-104
<i>Autor: Carlos Mometti</i>	
6. Idoneidad mediacional y ecológica del conocimiento didáctico-matemático y tecnológico del profesorado de educación matemática.....	105-120
<i>Autor: José David Vargas Gamboa</i>	
7. Análisis factorial exploratorio de las expectativas de eficacia y los valores de las tareas en matemática, un análisis realizado en personas estudiantes de ingeniería y ciencias.....	121-136
<i>Autor: Víctor Adolfo Rojas Cruz</i>	
8. Comprensión del aprendizaje de la aritmética desde la diversidad cognitiva: hacia la accesibilidad.....	137-153
<i>Autora: Elba Azucena Martínez Cárdenas</i>	
9. Aprendizaje basado en proyectos (ABP) para el fortalecimiento de competencias matemáticas en educación secundaria: propuesta y estudio empírico	155-182
<i>Autores: Laura Yareth Cañas Mendoza y Emil Hernández Arroyo</i>	
10. Las emociones en los libros de texto de la nueva escuela mexicana.....	183-200
<i>Autoras: Ana María Martínez Blancarte, Marleny Hernández Escobar y Cinthia Jessica Sánchez Serrano</i>	
11. Conocimiento especializado de una profesora de matemática en la ejemplificación de la descomposición de radicales.....	201-215
<i>Autores: Nicolás Sánchez Acevedo, Gonzalo Espinoza Vásquez, Carlos Segura, Luis Carlos Contreras y Leticia Sosa Guerrero</i>	
12. Análisis de la relación entre la actitud hacia la estadística, el pensamiento crítico y el rendimiento académico	217-233
<i>Autores: Felipe Santoyo Telles, Miguel Ángel Rangel Romero, Adriana Lorena Húiguez Carrillo y Neiber Maldonado Suárez</i>	
13. Proyectos en matemáticas con atención a las problemáticas escolares	235-249
<i>Autor: Jesús Antonio Larios Trejo</i>	
14. Diseño de una tarea fenomenológica para la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables.....	251-275
<i>Autores: Eduardo Emiliano Muñoz Ortiz, Priscilla M. Angulo Chaves, Carlos Robles Padilla y Axel Picado Piedra</i>	
15. Fracciones en la recta numérica. Un experimento de diseño basado en modelos de longitud.....	277-290
<i>Autores: Ivette Anel Delgado Valdez, Luis Manuel Aguayo Rendón y Lorena Alejandra Medina Hernández</i>	
16. Análisis de la idoneidad didáctica en situaciones de crecimiento poblacional en la escuela secundaria.....	291-313
<i>Autores: Claudio Rodríguez y Ricardo Fabián Espinoza</i>	
Sección 2. Narraciones: La voz de la persona formadora	
1. Matemáticas en Cuba: enseñanza, investigación, avances y retos: una visión en el contexto de América Latina	315-346
<i>Autores: Lilliam Álvarez Diaz, María Cristina González Dosal, Dunia Reyes Abreu, Rosa Alicia Cárdenas Puig, Oscar Domínguez Escobar y Fatma Vega Jadur</i>	
2. Carrera enseñanza de la matemática, Sede de Occidente: ¿qué ha pasado en los últimos quince años?.....	347-364
<i>Autores: Norman Noguera Salgado, María Fernanda Vargas González y Ana Patricia Maroto Vargas</i>	
Sección 3. Mi formación en EducMate	
1. Experiencia profesional: clases de nivelación en séptimo año basadas en resolución de problemas.....	365-370
<i>Autor: Dilan Josué Jiménez Sánchez</i>	
2. Experiencia de formación: estudio sobre la resolución de problemas.....	371-374
<i>Autores: David Córdoba Segura, Emmanuel Ramírez Garita y Yendry Quesada Calderón</i>	