Ciencias Económicas 28-No. 1: 2010 / 23-50 / ISSN: 0252-9521

JUEGOS NORMALES Y EVOLUCIÓN CULTURAL

Osvaldo Acuña[1]

Resumen

Estudiamos un modelo en el que consideramos un concepto de evolutivamente estable en Teoría de Juegos Normales. Probamos que este concepto corresponde a la noción de evolutivamente estable en Evolución Cultural. Con el fin de probar esto consideramos los aspectos dinámicos de las estrategias en juegos normales usando el concepto de la ecuación replicadora, que gobierna la evolución en el tiempo de un subconjunto finito de estrategias del espacio de estrategias de un juego normal de dado.

Abstract

We prove that the concept of evolutionarily stable strategies corresponds to the concept of evolutionarily stable in Cultural Evolution. We use replicator dynamics to prove this fact.

Introducción

En el presente trabajo modelamos el concepto de evolutivamente estable que aparece en la Teoría de evolución cultural, usando la teoría de juegos. El concepto de evolutivamente estable aparece originalmente en Biología con el trabajo de J. Maynard y G.R. Price [5] "The Logic Of Animal Conflict". Este concepto nos dice que cierto tipo de características genéticas, una vez que han sido adquiridas por la mayoría de una población no puede ser invadida por un grupo pequeño con una mutación de dichas características.

En evolución cultural no hablamos de poblaciones de individuos, sino del conjunto de tipos culturales o espíritus que definen la idiocincracia de un pueblo. Entendemos por espíritu de un pueblo como los valores, ideas y

1 Osvaldo Acuña: Wesleyan University, Connecticut USA, Ph. D. en Matemáticas. Profesor Escuela de Matemáticas, UCR, desde 1977; catedrático. Más de 28 publicaciones en revistas nacionales e internacionales.

creencias en un campo o actividad específica. La mentalidad de un pueblo incluye al conjunto de todos los espíritus. Existen ciertas expreciones culturales elementales que determinan al conjunto de todos los espíritus. A estas expreciones culturales elementales las llamaremos tipos culturales elementales o espíritus elementales. La población o conjunto de individuos podran tener una identificación positiva o nula en cada uno de éstos tipos culturales elementales. El conjunto de los espíritus serán tratados como seres vivos que evolucionan (ver Maynard y Szathmany [7]). Decimos que un espíritu es evolutivamente estable si no puede ser invadido por otro espíritu mutante. Por ejemplo el espíritu pacífico de ciertos pueblos resulta ser evolutivamente estable ver por ejemplo Ulate,F. en [11].

Juegos en Forma Normal

Suponemos que estamos modelando una situación donde al comportamiento de cada jugador individual se puede describir en términos de un conjunto finito de estrategias puras (las estrategias puras corresponden a los espíritus elementales). En general supondremos que existen N estrategias puras $R_1, \ldots, R_N$ y es permitido que los jugadores usen estas estrategias mezcladas; ésto consiste en jugar las estrategias puras $R_1, \ldots, R_N$ con algunas probabilidades preasignadas

$p_1, \ldots, p_N;$ con $p_i \geqslant 0$ y $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Entonces una estrategía corresponde a un punto p en el simplex

$$S_N = \{ p \in \mathbb{R}^N / p_i \geqslant 0 \; y \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \}$$

Las esquinas del simplex S_N son los vectores unitarios e_i que corresponden a las estrategias puras $R_i, i=1,\ldots,N$. El conjunto S_N consiste de las estrategias completamente mezcladas. La frontera de S_N consiste de todo $p \in S_N$ tal que el soporte de $p : soporte(p) = \{ i \in \{1,\ldots,N\} / p_i > 0 \}$ es un subconjunto propio de $\{1,\ldots,N\}$. Entonces se tiene que los puntos e_i corresponden a los espíritus elementales y S_N corresponde al conjunto de todos los espíritus.

Para simplificar supondremos que el juego solo envuelve dos jugadores. Para éste juego tenemos una matriz $U = (U_{ij})$ real $N \times N$ llamada la matriz de pago del juego. El pago para la estrategia p contra la estrategia q , $p, q \in S_N$ está dada por $p.U.q = \sum_{i,j} U_{i,j} p_i p_j$

Definición Para el juego descrito anteriormente y $\hat{p} \in S_N$

(a) decimos que $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash si $p.U.\hat{p} \leq \hat{p}.U.\hat{p} \; \forall \; p \in S_N$

(b) decimos que $\hat{p}$ es un equilibrio estricto de Nash si

$$p.U.\hat{p} < \hat{p}.U.\hat{p} \; \forall \; p \in S_N, \; p \neq \hat{p}$$

Nota Todo juego en la forma normal definido por una matriz de pago U $N \times N$ admite un equilibrio de Nash.

Proposición 1.1 Sea $\hat{p} \in S_N$ una estrategia para un juego en la forma normal con matriz de pago U $N \times N$. Entonces

(a) $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash de éste juego si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$ $(U_{\hat{p}})_i \leqslant c$ y $(U_{\hat{p}})_i = c$ $\forall i \in soporte(\hat{p})$; en éste caso tenemos que $c = \hat{p}.U.\hat{p}$

(b) Si $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash estricto entonces $\hat{p} = e_i$ con $i \in \{1,\ldots,N\}$; es decir $\hat{p}$ corresponde a una estrategia pura R_i .

Prueba (a) $(\Leftarrow)$ suponga que $(U_{\hat{p}})_i = c$ $\forall i \in soporte(\hat{p})$ y $(U_{\hat{p}})_i \leqslant c \, \forall i$ entonces $e_i.U.\hat{p} = (U_p)_i = c$ $\forall i \in soporte(\hat{p})$ y así

$$\hat{p}.U.\hat{p} = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i (U\hat{p})_i = \sum_{i \in soporte(\hat{p})} \hat{p}_i (U\hat{p})_i = \sum_{i \in soporte(\hat{p})} \hat{p}_i c = c(\sum_{i=1}^{N} p_i) = c \cdot 1 = c;$$ por tanto $\hat{p}.U.\hat{p} = c.$

Tenemos entonces que $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$ $e_i \cdot U\hat{p} = (U\hat{p})_i \leqslant \hat{p}.U.\hat{p}.$ Entonces si

$p \in S_N$ $p = \sum_{i=1}^{N} p_i e_i$; como $p_i \geqslant 0$ $\forall i$ se tiene que $p_i(e_i.U.p) \leqslant p_i(\hat{p}.U.\hat{p})$ y sumando

sobre i tenemos $\sum_{i=1}^{N} p_i e_i.U.\hat{p} \leqslant \sum_{i=1}^{N} p_i(\hat{p}.U.\hat{p}) = (\sum_{i=1}^{N} p_i)\,\hat{p}.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$ y así

$(\sum_{i=1}^{N} p_i e_i)\,U\hat{p} \leqslant \hat{p}.U.\hat{p}$; es decir $p.U.\hat{p} \leqslant \hat{p}.U\,\hat{p}$ $\forall p \in S_N$; por tanto $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash.

$(\Rightarrow)$ Suponga que $\hat{p} \in S_N$ es un equilibrio de Nash. Entonces se tiene que $e_i . U. \hat{p} \leqslant \hat{p} . U. \hat{p} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$ y así $\forall i \quad (U_p)_i \leqslant \hat{p} . U. \hat{p}$. Probaremos que si $i, j \in soporte(\hat{p}) \quad (U_{\hat{p}})_i = (U_{\hat{p}})_j$. Suponga por contradicción que $(U \hat{p})_i > (U \hat{p})_j$; sea $\bar{p}$ obtenido de $\hat{p}$ tal que

$$(\hat{p})_k = \begin{cases} \hat{p}_k & si \ k \neq i, j \\ \hat{p}_i + \varepsilon & si \ k = i \\ \hat{p}_j - \varepsilon & si \ k = j \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ tal que $\hat{p}_j - \varepsilon > 0 \ \ (\hat{p}_j, \hat{p}_i > 0)$.

Tenemos que $\sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i = 1$ y como $\bar{p}_i \geqslant 0 \quad \forall i \quad \bar{p} \in S_N$. Por otro lado considere:

$\hat{p} . U. \hat{p} < \bar{p} . U. \hat{p} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{N} \hat{p}_l \cdot (\sum_{h=1}^{N} U_{lh} \hat{p}_n) < \sum_{l=1}^{N} \bar{p}_l (\sum_{h=1}^{N} U_{lh} \hat{p}_h)$ (como $h \neq i, j$ implica $\hat{p}_h = \bar{p}_h$)

$$\Leftrightarrow \quad \hat{p}_i (\sum_{h=1}^{N} U_{ih} \hat{p}_h) + \hat{p}_j (\sum_{h=1}^{N} U_{jh} \hat{p}_h) < \bar{p}_i (\sum_{h=1}^{N} U_{ih} \hat{p}_h) + \bar{p}_j (\sum_{h=1}^{N} U_{jh} \hat{p}_h)$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{p}_i (U_{\hat{p}})_i + \hat{p}_j (U_{\hat{p}})_j < \bar{p}_i (U_{\hat{p}})_i + \bar{p}_j (U_{\hat{p}})_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{p}_i (U_p)_i + \hat{p}_j (U_p)_j < (\hat{p}_i + \varepsilon)(U_{\hat{p}})_i + (\hat{p}_j - \varepsilon)(U_{\hat{p}})_j$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \varepsilon (U_{\hat{p}})_i - \varepsilon (U_{\hat{p}})_j$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \varepsilon ((U_{\hat{p}})_i - (U_{\hat{p}})_j)$$

Esta última desigualdad es verdadera; por tanto $\hat{p} . U. \hat{p} < \bar{p} . U. \hat{p}$, pero $\bar{p} . U. \hat{p} \leqslant \hat{p} . U. \hat{p}$, lo cual es una contradicción; así se tiene que $(U_{\hat{p}})_i \leqslant (U_{\hat{p}})_j$. Similarmente se prueba que

$(U_{\hat{p}})_j \leqslant (U_p)_i;$ y entonces $(U_{\hat{p}})_i = (U_{\hat{p}})_j \quad \forall\, i, j \in soporte(\hat{p})$. Por lo tanto existe una constante c tal que $(U_{\hat{p}})_i = c \quad \forall\, i \in soporte(\hat{p})$ y por la primera parte de la prueba $(\Leftarrow)$ se tiene que $c = \hat{p}.U.\hat{p}$ y entonces $\forall\, i \in \{1,\ldots,N\} \ (U_{\hat{p}})_i = \hat{p}.U.\hat{p};$ completandose la prueba de $(\Rightarrow)$.

(b) Suponga que $\hat{p}$ es un equilibrio estricto de Nash; entonces $\forall\, p \in S_N,\ p \neq \hat{p}$ se tiene que $p.U.\hat{p} < \hat{p}.U.\hat{p}$. Probemos que $soporte(\hat{p})$ es un conjunto unitario : sean $i, j \in soporte(\hat{p})$ de la parte(a) sabemos que $e_i.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$ y $e_j.U_{\hat{p}} = \hat{p}.U.\hat{p},$ y entonces $\hat{p} = e_i$ y $\hat{p} = e_j$, por lo tanto $e_i = e_j$, es decir $i = j$. Entonces $soporte(\hat{p})$ tiene a lo sumo un elemento. Como $\hat{p} \neq 0$ se debe tener que $soporte(\hat{p}) \neq \phi$ y así existe $i_0 \in \{1,\ldots,N\}$ tal que $soporte(\hat{p}) = \{i_0\}$. Por lo tanto si $\hat{p}_j = 0$ si $j \neq i_0$ y

$1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i = \hat{p}_{i_0}$; esto implica que $\hat{p} = e_{i_0};$ es decir $\hat{p}$ corresponde a la estrategia pura R_{i_0}

Definición $\hat{p} \in S_N$ evolutivamente estable si $\forall\, p \in S_N$ con $p \neq \hat{p}$ se tiene que $p.U.(\varepsilon p + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p}.U.(\varepsilon p + (1-\varepsilon)\hat{p}) \quad \forall\, \varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Proposición 1.2

(a) $\hat{p}$ es evolutivamente estable si y solo si

(i) $p.U.\hat{p} \leqslant \hat{p}.U.\hat{p} \quad \forall\, p \in S_N$ (es decir $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash)

(ii) si $p \neq \hat{p}$ $p \in S_N$ y $p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$ entonces $p.U.p < \hat{p}.U.p$

(b) Si $\hat{p}$ es evolutivamente estable entonces $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash. Si $\hat{p}$ es un equilibrio estricto de Nash entonces $\hat{p}$ es evolutivamente estable.

Prueba (a) $\hat{p}$ es evolutivamente estable si y solo si para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$p.U.(\varepsilon\, p+(1-\varepsilon)\,\hat{p})<\hat{p}\,.\,U.(\varepsilon\, p+(1-\varepsilon)\,p)$$

$$\Leftrightarrow\ \varepsilon\, p.U.p+(1-\varepsilon)\,p\,.\,U.\,\hat{p}<\varepsilon\,\hat{p}\,.U.p+(1-\varepsilon)\,\hat{p}\,.U.\,\hat{p}$$

$\Leftrightarrow\ 0<\varepsilon\,(\hat{p}\,.\,U.p-p.U.p)+(1-\varepsilon)(\,\hat{p}\,.U.\,\hat{p}-p.U\ \hat{p}),$ para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño entonces si en ésta última desiguladad $\varepsilon\rightarrow 0$, si tiene que

$$(i)\ \ \hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}\geqslant 0\ \ \forall\, p\in S_N\ .$$

Probemos (ii) : *si* $p\in S_N$ y $p.U.\,\hat{p}=\hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}$ entonces se tiene que

$0<\varepsilon(\,\hat{p}\,.U.p-p.U.p)+(1-\varepsilon)\cdot 0$ es decir $\hat{p}\,.\,U.p-p.U.p>0$ y así $p.U.p<\hat{p}\,.\,U.p$.

Reciprocamente suponga (i) y (ii) ; sea $p\in S_N$ tal que $p\neq\hat{p}$. Se tiene por (i) que $\hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}\geqslant 0$; si $\hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}>0$, como $h(\varepsilon)=(1-\varepsilon)(\,\hat{p}\,.U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p})+\varepsilon\,(\hat{p}\,.\,U.p-p.U.p)>0$, es continua en ε y $h(0)=\hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}-p.U.p>0$; existe $\delta>0$ tal que $\forall\,\varepsilon\ \ 0<\varepsilon<\delta$ se tiene que $h(\varepsilon)>0$.

Si $\hat{p}\,.\,U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}=0$ se debe tener $\hat{p}\,.\,U.p>p.U.p$ por (ii) es decir $\hat{p}\,.\,U.p-p.U.p>0$ y así $\forall\,\varepsilon>0\ \ \varepsilon\,(\,\hat{p}\,.\,U.p-p.U.p)>0$ lo que implica $h(\varepsilon)>0\ \ \forall\,\varepsilon$.

Por lo tanto para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño $h(\varepsilon)>0$ y entonces $\hat{p}$ es evolutivamente estable.

(b) La primera parte sigue de (i) de (a). Si $\hat{p}$ es un equilibrio estricto de Nash entonces $\hat{p}$ satisface (i) de (a) y satisface trivialmente (ii) de (a); luego $\hat{p}$ es evolutivamente estable.

Proposición 1.3 Sea $\hat{p} \in S_N$ evolutivamente estable; sea

Entonces $\bar{\varepsilon}$ es una función continua en S_N tal que $0 < \bar{\varepsilon} < 1$ y si $0 < \varepsilon < \varepsilon(p)$ implica

$p.U(\varepsilon p + (1-\varepsilon)\hat{p}) < \hat{p}.U(\varepsilon p + (1-\varepsilon)\hat{p})$ *si* $p \neq \hat{p}$ y $p \in S_N$.

$$\bar{\varepsilon}(p) = \begin{cases} \dfrac{(\hat{p}-p)U\hat{p}}{(\hat{p}-p)U(\hat{p}-p)} & si \quad p.U.p > \hat{p}.U.p \\ 1 & si \quad no \end{cases}$$

Prueba Si $p.U.p > \hat{p}.U.p$ tenemos $p.U.p - \hat{p}.U.p > 0$, también

$(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p) = \hat{p}.U.\hat{p} - \hat{p}.U.p - p.U.\hat{p} + p.U.p = \hat{p}.U.\hat{p} - p.U.\hat{p} + p.U.p - \hat{p}.U.p$

como $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash se tiene $(\hat{p}-p)U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p} - p.U.p \geqslant 0$ y dado que

$p.U.p - \hat{p}.U.p > 0$ implica $(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p) > 0$, por lo tanto $\bar{\varepsilon}(p)$ está bien definida y

$\bar{\varepsilon}(p) = \dfrac{(\hat{p}-p)U\hat{p}}{(\hat{p}-p).U\hat{p} + p.U.p - \hat{p}.Up}$. Si $\bar{\varepsilon}(p) = 0$ se tiene $(\hat{p}-p).U.\hat{p} = 0$ y

$p.U.p - \hat{p}.U.p > 0$, entonces $\hat{p}.U.\hat{p} = p.U.\hat{p}$ y por (ii) se tiene que

$p.U.p - \hat{p}.U.p < 0$, pero esto es una contradicción; por lo tanto

$\bar{\varepsilon}(p) > 0$ *si* $p.U.p > \hat{p}.U.p$ Por lo tanto si $p.U.p > \hat{p}.U.p$ implica $(\hat{p}-p).U.\hat{p} > 0$ y

entonces $(\hat{p}-p).U.\hat{p} + p.U.p - \hat{p}.U.p > (\hat{p}-p).U.\hat{p}$ lo que implica

$1 > \dfrac{(\hat{p}-p)U\hat{p}}{(\hat{p}-p)U\hat{p} + p.U.p - \hat{p}.U.p}$ y asi

$0 < \bar{\varepsilon}(p) < 1$ *si* $p.U.p > \hat{p}.U.p$. *Si* $p.U.p - \hat{p}.U.p \leqslant 0$ implica $\bar{\varepsilon}(p) = 1$; por lo tanto

$\forall\, p \in S_N \quad 0 < \bar{\varepsilon}(p) \leqslant 1$.

Probemos ahora que $\bar{\varepsilon}$ es continua: tenemos que

$$\bar{\varepsilon}(p)=\begin{cases}\dfrac{(\hat{p}-p).U.\hat{p}}{(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)} & si \quad p.U.p \geqslant \hat{p}.U.p \\ 1 & si \quad p.U.p \leqslant \hat{p}.U.p\end{cases}$$

debemos probar que la función de la derecha está bien definida. Si $p.U.p=\hat{p}.U.p$ entonces

$(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)=(\hat{p}-p).U.\hat{p}+p.U.p-\hat{p}.U.p=(\hat{p}-p).U.\hat{p}$; si $(\hat{p}-p).U.\hat{p}=0$

por (ii) implica $p.U.p<\hat{p}.U.p$, contradicción y así $(\hat{p}-p).U.\hat{p}>0$, luego

$$\frac{(\hat{p}-p).U.\hat{p}}{(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)}=\frac{(\hat{p}-p)U\hat{p}}{(\hat{p}-p)U\hat{p}}=1$$

Por definición de $\bar{\varepsilon}(p)$ se tiene la igualdad. Como $\bar{\varepsilon}(p)$ es continua en los conjuntos

$\{p\in S_N / p.U.p\geqslant \hat{p}.U.p\}$ y $\{p\in S_N / p.U.p\leqslant \hat{p}.U.p\}$ entonces $\bar{\varepsilon}(p)$ es continua en

S_N . Sea $\varepsilon>0$ tal que $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}(p)$, si $p.U.p\geqslant\hat{p}.U.p$ se tiene que

$\bar{\varepsilon}(p)=\dfrac{(\hat{p}-p).U.\hat{p}}{(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)}$ y entonces $\varepsilon<\dfrac{(\hat{p}-p).U.\hat{p}}{(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)}$, pero

$$\varepsilon<\frac{(\hat{p}-p).U.\hat{p}}{(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)} \Rightarrow \varepsilon(\hat{p}-p).U.(\hat{p}-p)<(\hat{p}-p).U.\hat{p}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \varepsilon\,\hat{p}.U.\hat{p}-\varepsilon\,\hat{p}.U.p-\varepsilon\,p.U.\hat{p}+\varepsilon\,p.U.p<\hat{p}.U.\hat{p}-p.U.\hat{p}\\
&\Rightarrow p.U.\hat{p}-\varepsilon\,p.U.\hat{p}+\varepsilon\,p.U.p<\hat{p}.U.\hat{p}-\varepsilon\,\hat{p}.U.\hat{p}+\varepsilon\,\hat{p}.U.p\\
&\Rightarrow p.U.(\hat{p}-\varepsilon\,\hat{p}+\varepsilon\,p)<\hat{p}.U.(\hat{p}-\varepsilon\,\hat{p}+\varepsilon\,p)\\
&\Rightarrow p.U.(\varepsilon\,p+(1-\varepsilon)\,\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon\,p+(1-\varepsilon)\,\hat{p})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall\,\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}(p))$ implica $p.U.(\varepsilon\,p+(1-\varepsilon)\,\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon\,p+(1-\varepsilon)\,\hat{p})$

Si $p.U.p\geqslant\hat{p}.U.p$.

$Si \quad p.U.p<\hat{p}.U.p$, como $(\hat{p}.U.\hat{p}-p.U.\hat{p})\geqslant 0$, entonces

$\varepsilon(\hat{p}.U.p-p.U.p)+(1-\varepsilon)(\hat{p}.U.\hat{p}-p.U.\hat{p})>0$ y así

$p.U.(p\varepsilon+(1-\varepsilon)\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})$

En cualquier caso se tiene que $\forall\, \varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}(p))$

$$p.U.(p\varepsilon+(1-\varepsilon)\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})$$

Teorema 1.4 $\hat{p}\in S_N$ es evolutivamente estable si y solo si $q.U.q<\hat{p}.U.q \quad \forall q\neq\hat{p}$ en un vecindario de $\hat{p}$ en S_N .

Prueba Suponga que $\hat{p}$ es evolutivamente estable. Es claro que $\forall \quad q\in S_N,\ q\neq\hat{p}$ existe

$p\in C=\{x\in S_N / x_i=0 \text{ para algún } i\in soporte(\hat{p})\}$ tal que $q=\varepsilon\, p+(1-\varepsilon)\hat{p}$ con

$\varepsilon\in[0,1]$. C es un conjunto compacto.

Por la proposición 1.3 sabemos que $\bar{\varepsilon}$ es continua en S_N y $0\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant 1$ en S_N . Como C es compacto $\tilde{\varepsilon}=min\{\bar{\varepsilon}(p)/p\in C\}>0$ y $\min_{p\in C}|p-\hat{p}|>0 \ (\hat{p}\notin C)$ Sea $0<d<\min_{p\in C}|p-\hat{p}|.\tilde{\varepsilon}$, si $q\notin B(\hat{p},d),\ q\neq\hat{p}$ existe $p\in C$ tal que $q=\varepsilon\, p+(1-\varepsilon)\hat{p}$, ε є (0,1] entonces tenemos que $d>|\varepsilon\, p+(1-\varepsilon)\hat{p}-\hat{p}|=|\varepsilon\, p-\varepsilon\,\hat{p}|=\varepsilon|p-\hat{p}|\geqslant\varepsilon\min_{p\in C}|p-\hat{p}|$

$\Rightarrow\ d>\varepsilon\min_{p\in C}|p-\hat{p}|$, luego $\dfrac{b}{\min_{p\in C}|p-\hat{p}|}>\varepsilon$; pero $\tilde{\varepsilon}>\dfrac{b}{\min_{p\in C}|p-\hat{p}|}$, entonces

$\varepsilon<\tilde{\varepsilon}\leqslant\bar{\varepsilon}(p)$ y así $\varepsilon<\bar{\varepsilon}(p)$ y por la proposición 1.3

$$
\begin{aligned}
& p.U(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Rightarrow \ \varepsilon p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})<\varepsilon \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Rightarrow \ (1-\varepsilon)\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})+\varepsilon p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})<(1-\varepsilon)\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& +\varepsilon \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Rightarrow \ ((1-\varepsilon)\hat{p}+\varepsilon p).U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Rightarrow \ q.U.q<\hat{p}.U.q \quad \forall q\in B(\hat{p},d), \ \ q\neq\hat{p}
\end{aligned}
$$

Reciprocamente suponga que existe un vecindario abierto de $\hat{p}$ en S_N tal que $\forall q\neq\hat{p}, q$ en tal vecindario se tiene que $\hat{p}.U.q>q.U.q$.

Sea $p\in S_N$, $p\neq\hat{p}$ para $\forall\varepsilon>0$ suficientemente pequeño $\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}$ está en tal vecindario de $\hat{p}$ y entonces:

$$
\begin{aligned}
& \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})>(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}).U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Leftrightarrow \ \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})>\varepsilon p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})+(1-\varepsilon)\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Leftrightarrow \ \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})>\varepsilon p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})+\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& -\varepsilon \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Leftrightarrow \ \varepsilon \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})>\varepsilon p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p}) \\
& \Leftrightarrow \ \hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})> p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})
\end{aligned}
$$

Entonces $\forall p\in S_N$, $p\neq\hat{p}$ se tiene que $p.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})<\hat{p}.U.(\varepsilon p+(1-\varepsilon)\hat{p})$ $\forall\varepsilon>0$ suficientemente pequeño; es decir existe $\bar{\varepsilon}(p)>0$ tal que $\forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}(p))$ la desigualdad del anterior se cumple; por lo tanto $\hat{p}$ es evolutivamente estable.

Nota Si $\hat{p}$ es evolutivamente estable y $\hat{p}$ ϵ int (S_N) ; entonces $q.U.q<\hat{p}.U.q \forall q\neq\hat{p}$ y $q\in S_N$; por lo tanto no existe otro equilibrio de Nash $\hat{q}\neq\hat{p}$; en particular no existe otro punto en S_N evolutivamente estable distinto de $\hat{p}$. Más aún si $\hat{p}$ es evolutivamente estable y si $\hat{q}$ es un equilibrio de Nash tal que $soporte(\hat{q})\subseteq soporte(\hat{p})$ entonces $\hat{p}=\hat{q}$.

Entonces juegos con varias estrategias evolutivamente estables, todas ellas deben estar en la frontera de S_N .

Prueba Como $\hat{p}$ es evolutivamente estable entonces se tiene que $\hat{p}$ es un equilibrio de Nash y si $p \in S_N$, $p \neq \hat{p}$ y $p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$ implica $p.U.p < \hat{p}.U.p$. Como $\hat{p} \in \mathrm{int}(S_N)$ y siendo $\hat{p}$ un equilibrio de Nash se tiene que $(U\hat{p})_i = \hat{p}.U.\hat{p}$ $\forall i \in soporte(\hat{p})$, pero $soporte(\hat{p}) = \{1, \ldots, N\}$ ya que $\hat{p} \in \mathrm{int}(S_N)$. Sea $p \in S_N$ arbitrario entonces se tiene que

$p.U.\hat{p} = \sum_{i=1}^{N} p_i (U\hat{p})_i = \sum_{i=1}^{N} p_i (\hat{p}.U.\hat{p}) = (\sum_{i=1}^{N} p_i)(\hat{p}.U.\hat{p}) = 1(\hat{p}.U.\hat{p}) = \hat{p}.U.\hat{p}$ por lo tanto $p \in S_N$ implica $p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$.

Entonces si $p \in S_N$, $p \neq \hat{p}$ tenemos $p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$ y como $\hat{p}$ es evolutivamente estable se debe tener $p.U.p < \hat{p}.U.p$; por lo tanto $\forall\, p \in S_N$ $p \neq \hat{p}$ implica $p.U.p < \hat{p}.U.p$.

Si $\hat{p}$ es un equilibrio evolutivamente estable y $\hat{q}$ es un equilibrio de Nash tal que $soporte(\hat{q}) \subseteq soporte(\hat{p})$ queremos probar que $\hat{q} = \hat{p}$. Tenemos:

$$\hat{q}.U.\hat{p} = \sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i (U\hat{p})_i = \sum_{i \in soporte(\hat{q})} \hat{q}_i (U\hat{p})_i = \sum_{i \in soporte(\hat{q})} \hat{q}(\hat{p}.U.\hat{p})$$

$(si\ \ i \in soporte\ (\hat{q}) \Rightarrow i \in soporte(\hat{p}) \Rightarrow (U\hat{p})_i = \hat{p}.U.\hat{p})$

$$= \left(\sum_{i \in soporte(\hat{q})} \hat{q}_i\right)(\hat{p}.U.\hat{p}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i\right)(\hat{p}.U.\hat{p}) = 1(\hat{p}.U.\hat{p}) = \hat{p}.U.\hat{p}$$

por lo tanto $\hat{q}.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}$, si $\hat{q} \neq \hat{p}$ entonces $\hat{q}.U.\hat{q} < \hat{p}.U.\hat{q}$.

Por otro lado como $\hat{q}$ es un equilibrio de Nash se tiene que $\hat{p}.U.\hat{q} \leqslant \hat{q}.U.\hat{q}$ lo cual contradice $\hat{q}.U.\hat{q} < \hat{p}.U.\hat{q}$ y entonces $\hat{q} = \hat{p}$. Cuando $\hat{p} \in \mathrm{int}(S_N) \Rightarrow$ $soporte(\hat{p}) = \{1, \ldots, N\}$; si $\hat{q}$ es un equilibrio de Nash, como $soporte(\hat{q}) \subseteq soporte(\hat{p})$ entonces $\hat{q} = \hat{p}$.

Dinámica replicadora

Ecuación replicadora

La dinámica replicadora describe la evolución de las frequencias de las estrategias en una población. Discutiremos el equilibrio de Nash y las estrategias evolutivamente estables en términos de la dinámica replicadora. Tenemos una población que ésta dividida en tipos $E_1, \ldots, E_n$, con frecuencias $x_1, \ldots, x_n$. El bienestar o salud del tipo E_i será una función $f_i(x)$ $(x=(x_1, \ldots, x_n))$ con valores reales. Si la población es muy grande y las generaciónes se mezclan continuamente entre ellas, podemos asumir que el estado $x(t)$ evaluado en $S_n=\{(x_1, \ldots, x_n)/x_i \geqslant 0 \ , \ x_1+\ldots+x_n=1\}$ es una función diferenciable en t . El cociente

$\frac{\dot{x}_i}{x_i}$ es una medida para E_i de su éxito como tipo. Podemos medir éste éxito como la diferencia

del bienestar de E_i y el promedio $\bar{f}(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)$ y así $\frac{\dot{x}_i}{x_i}=f_i(x)-\bar{f}(x)$; es decir

$\dot{x}_i=x_i(f_i(x)-\dot{f}(x))$ con $i=1, \ldots, n$. (*)

Llamamos a éste sistema de ecuaciones diferenciales la ecuación replicadora.

Proposición 2.1 El simplex S_n es invariante bajo la ecuación replicadora; es decir si $x(t)$ es una solución de la ecuación replicadora tal que $x(0) \in S_n$ entonces $x(t) \in S_n$ $\forall t \in \mathbb{R}$. La adición de una función $\psi: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ no afecta la ecuación replicadora en S_n .

Prueba Si sumamos $\dot{x}_i = x_i(f_i(x) - \dot{f}(x))$ para $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(f_i(x) - \dot{f}(x)) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\bar{f}(x) = \bar{f}(x) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\bar{f}(x)$$

$= (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)\bar{f}(x); si \quad S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ entonces se tiene $\dot{S} = (1 - S)\bar{f}(x)$. Esta última ecuación tiene por solución $S(t) = 1 \quad \forall t$. Por lo tanto una solución de la ecuación replicadora que empieza en el plano $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ continuará en este plano. Si $x_i(0) = 0 \Rightarrow x_i(t) = 0 \quad \forall t$, por lo tanto S_n como sus caras son invariantes bajo la ecuación replicadora.

La adición de una función $\psi : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ no afecta la ecuación replicadora ya que si

$g_i(x) = f_i(x) + \psi(x)$ se tiene que $\bar{g}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(f_i + \psi(x)) = \bar{f}(x) + \psi(x)$

en S_n y entonces $g_i - \bar{g}_i = f_i(x) + \psi(x) - f(x) - \psi(x) = f_i(x) - f(x) \quad \forall x \in S_n$. Por lo tanto $\dot{x}_i = x_i(f_i(x) - \bar{f}(x)) = x_i(g_i(x) - \bar{g}_i(x)) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$ De ahora en adelante solo consideraremos la restricción de la ecuación replicadora a S_n .

Es de mucho interes el caso cuando en la ecuación(*) las funciónes f_i son lineales $\forall i.$;

entonces existe un vector fila b_i de n entradas tal que $f_i(x) = b_i x \quad \forall i ; si \; A = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una matriz definida por filas, entonces tenemos que $f_i(x) = (Ax)_i$ y así se tiene

$x_i(f(x)-\overline{f}(x))=x_i((Ax)_i-x.A.x)$ y entonces la ecuación replicadora toma la siguiente forma $\dot{x}_i=x_i((Ax)_i-x.A.x)\ \ \forall i=1,\ldots,n$ (*')

Proposición 2.2 Los puntos de descanso x de (*') en S_n son los puntos que satisfacen las ecuaciones

$(i)\ (Ax)_i=c\ \ (c\,constante)\ \ \forall i\in soporte(x)$

$(ii)\ x_i+\ldots+x_n=1$ y $x_i\geqslant 0\,\forall i=1,\ldots,n$

En particular los puntos de descanso de (*') en el interior de S_n son aquellos puntos que satisfacen

$(a)\ (Ax)_1=(Ax)_2=\ldots=(Ax)_n$

$(b)\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ y $\forall_i\, x_i>0$

Prueba Sea $(x_1,\ldots,x_n)=(a_1,\ldots,a_n)$ un punto de descanso de (*') en S_n ; entonces $0=x_i((Ax)_i-x.A.x),\, x_i=a_i\,\forall i=1,\ldots,n;\, si\ \ i\in soporte(x)$ entonces $(Ax)_i-x.A.x=0$ y así $(Ax)_i=x.A.x\,\forall i\in soporte(x)$; por lo tanto $x=(a_1,\ldots,a_n)$ satisface (i) y (ii) $x_i\geqslant 0\,\forall i$. Reciprocamente sea $(x_1,\ldots,x_n)=(a_1,\ldots,a_n)\forall t$ tal que

$(Ax)_i=c\ \ (c\ constante)\,\forall i\in soporte(x),\sum_{i=1}^{n} x_i=1$ y $x_i\geqslant 0\,\forall i$; entonces

$x.A.x=\sum_{i=1}^{n} x_i(Ax)_i=\sum_{i\in soporte(x)} x_i(Ax)_i=\sum_{i\in soporte(x)} x_i c=\sum_{i=1}^{n} x_i c=(\sum_{i=1}^{n} x_i)c=1\cdot c=c$; luego

$x.A.x = c$. Por lo tanto $\forall i \in soporte(x) \; (Ax)_i = x.A.x$ y entonces

$\dot{x}_i = 0 = x_i((Ax)_i - x.A.x) \forall i \in soporte(x)$. $Si\, i \notin soporte(x)$ entonces $x_i = 0$ y así

$\dot{x}_i = 0 = x_i((Ax)_i - x.A.x)$. por lo tanto $\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x.A.x) \forall i = 1, \ldots, n$ y entonces

$x = (a_1, \ldots, a_n)$ es un punto de descanso de (*').

Equilibrio de Nash y los estados evolutivamente estables

Damos una interpretación de la ecuación replicadora (*') desde el punto de vista de la teoría de juegos. Existe un juego en la forma normal con N estrategias puras $R_1, \ldots, R_N$ y una función de pago definida en $N \times N$ representada por una matriz U . Una estrategia se define como un punto en S_N . Los tipos $E_1, \ldots, E_n$ corresponden a n puntos $p^1, \ldots, p^n \in S_N$. El estado de la población se define por las frecuencias x_i de todos los tipos E_i ; es decir es un punto $x \in S_n$.

Con $a_{ij} = p^i.U.\,p^j$ (el pago obtenido por la $p^i - estrategia\; contra\; la\; p^j - oponente$) obtenemos la función de bienestar $f_i(x)$ de E_i definida por la fórmula

$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = (Ax)_i$ donde $A = (a_{ij})$ por lo tanto la ecuación replicadora se reduce a (*').

Aunque N, n no están relacionadas a priori, es conveniente dar un paralelismo entre las estrategias puras $R_1, \ldots, R_N$ y la matriz de pago U por un lado y los tipos de jugadores $E_1, \ldots, E_n$ en S_n y la matriz $n \times n$ por A de bienestar. En particular consideramos la siguiente definición

Definición (a) Decimos que un punto $\hat{x} \in S_n$ es un equilibrio de Nash (simétrico) si

$x.A.\hat{x} \leqslant \hat{x}.A.\hat{x} \quad \forall\, x \in S_n$

(b) Decimos que un punto $\hat{x} \in S_n$ es un estado evolutivamente estable si $x.A.x < \hat{x}.A.\hat{x}$ para todo $x \neq \hat{x}$ en un vecindario de $\hat{x}$.

Proposición 2.3

(a) $\hat{x} \in S_n$ es un equilibrio de Nash si y solo si $\forall\, i=1,\ldots,n \;\; (A\hat{x})_i \leqslant \hat{x}.A.\hat{x}$

(b) $\hat{x} \in S_n$ es un equilibrio de Nash si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$\forall\, i \in \{1,\ldots,N\} \;\; (A\hat{x})_i \leqslant c$ y $(A\hat{x})_i = c \; \forall\, i \in soporte(\hat{x})$; en éste caso $c = \hat{x}.A.\hat{x}$

(c) $x \in S_n$ es evolutivamente estable si y solo si $\forall\, x \in S_n$ con $x \neq \hat{x}$ se tiene que

$x.A.(\varepsilon x + (1-\varepsilon)\hat{x}) < \hat{x}.A.(\varepsilon x + (1-\varepsilon)\hat{x}) \; \forall\, \varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

(d) $\hat{x} \in S_n$ es evolutivamente estable si y solo si

(i) $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash y

$(ii)\, si\; x \in S_n ,\;\; x \neq \hat{x}$ y $x.A.\hat{x} = \hat{x}.A.\hat{x}$ entonces $x.A.x < \hat{x}.A.x$

Prueba (b),(c),(d) tienen pruebas similares al caso de estrategias. Probemos (a); suponga que $\hat{x} \in S_n$ es un equilibrio de Nash, entonces $e_i.A.\hat{x} \leqslant \hat{x}.A.\hat{x}$ y luego $(A\hat{x})_i \leqslant \hat{x}.A.\hat{x}$

Reciprocamente suponga que $(A\hat{x})_i \leqslant \hat{x}.A.\hat{x} \; \forall\, i=1,\ldots,n$. Si $x \in S_n$ se tiene que

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ y $x_i \geqslant 0 \; \forall\, i$ y entonces $\forall\, i \;\; x_i (Ax)_i \leqslant x_i \hat{x}.A.\hat{x}$ y sumando sobre i

obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} x_i (Ax)_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{x}.A.\hat{x} = (\sum_{i=1}^{n} x_i)\hat{x}.A.\hat{x} = \hat{x}.A.\hat{x}$ y así

$x.A.x \leqslant \hat{x}.A.\hat{x} \forall x \in S_n$ y entonces $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash.

Teorema 2.4 (a) Sea $\hat{x} \in S_n$ un equilibrio de Nash en S_n, con matriz de pago A, entonces $\hat{x}$ es un punto de descanso de (*')

(b) si $\hat{x}$ es el ω-límite de una órbita $x(t)$ en el interior de S_n, entonces $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash

(c) si $\hat{x}$ es Lyapunov estable, entonces $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash

Prueba (a) si $i \in soporte(\hat{x})$ entonces $(A\hat{x})_i = \hat{x}.A.\hat{x}$, luego $(Ax)_i - \hat{x}.A.\hat{x} = 0$ y así $\hat{x}_i.((A\hat{x})_i - \hat{x}.A.\hat{x}) = 0 \forall i \in \{1,\ldots,n\}$; por lo tanto si $x(t) = \hat{x} \forall t$ se tiene $\dot{x} = 0 = \hat{x}_i((Ax)_i - \hat{x}.A.\hat{x}) = x_i((Ax)_i - x.A.x)$ y entonces $x(t) = \hat{x} \forall t$ es solución de (*'); es decir $\hat{x}$ es un punto de descanso de (*').

(b) Suponga que $\hat{x}$ es el ω-límite de una órbita $x(t)$ en el interior de S_n, y suponga por contradicción que $\hat{x}$ no es un equilibrio de Nash; entonces existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\hat{x}.A.\hat{x} < e_i A\hat{x}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $e_i A\hat{x} - \hat{x}.A.\hat{x} > \varepsilon$, es decir $(A\hat{x})_i - \hat{x}.A.\hat{x} > \varepsilon$. Por continuidad existe un vecindario abierto U de $\hat{x}$, acotado tal que $\forall x \in U$ se tiene $(Ax)_i - x.A.x > \varepsilon$. Como $\hat{x}$ es el ω-límite de $x(t)$ entonces $\hat{x} = \lim_{t\to\infty} x(t)$, por lo tanto existe $t_0 > 0$ tal que $\forall t \geqslant t_0$ $x(t) \in U$ y así $(Ax(t))_i - x(t).A.x(t) > \varepsilon$ $\forall t \geqslant t_0$.

También tenemos $\dot{x}_i(t) = x_i(t)((Ax(t))_i - x(t).A.x(t))$, como $x(t) \in interior(S_n) \forall t$

entonces $x_i(t)>0$ y así $\dfrac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}=(A.x(t))_i-x(t).A.x(t)>\varepsilon\ \forall\, t\geqslant t_0$, luego

$\dfrac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}>\varepsilon\ \forall\, t\geqslant t_0$, por lo tanto $\dot{\log}(x_i(t))>\varepsilon\ \forall\, t\geqslant t_0$ .Entonces

$\int_{t_0}^{t}\dot{\log}(x_i(t))\geqslant\varepsilon(t-t_0)\ \forall\, t\geqslant t_0$; es decir $\log(x_i(t))-\log(x_i(t_0))\geqslant\varepsilon(t-t_0)$ y así

$\log\left(\dfrac{x_i(t)}{x_i(t_0)}\right)\geqslant\varepsilon(t-t_0)\ \forall\, t\geqslant t_0$ y esto implica $x_i(t)\geqslant x_i(t_0)\mathrm{e}^{\varepsilon(t-t_0)}\ \forall\, t\geqslant t_0$; luego

$\{x_i(t)/t\geqslant t_0\}$ es no acotado; pero $x(t)\in U\ \forall\, t\geqslant t_0$ y como U es acotado, ésto es una contradicción; por lo tanto $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash.

(c) Suponga que $\hat{x}$ es Lyapunov estable para (*'), entonces si U es un vecindario abierto de $\hat{x}$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-\hat{x}|<\delta$ y si $x(t)$ es solución de (*') tal que $x(0)=x$ entonces $x(t)\in U\ \forall\, t\geqslant 0$.

Suponga por contradicción que $\hat{x}$ no es un equilibrio de Nash, entonces existe $i\in\{i,\ldots,n\}$ tal que $e_i.A.\hat{x}-\hat{x}.A.\hat{x}>0$; así existe $\varepsilon>0$ tal que $(A\hat{x})_i-\hat{x}.A.\hat{x}>\varepsilon$ y por continuidad existe un vecindario abierto acotado de $\hat{x}$ tal que $\forall\, x\in U$ se tiene $(Ax)_i-x.A.x>\varepsilon$. Como $\hat{x}$ es Lyapunov estable existe $\delta>0$ tal que si $|x-\hat{x}|<\delta$ implica $x(t)\in U\ \forall\, t\geqslant 0$ si $x(t)$ es solución de (*') tal que $x(0)=x$. Siendo $\hat{x}$ Lyapunov estable, $\hat{x}$ es un punto de descanso de (*') y como $0=\hat{x}_i.((Ax)_i-\hat{x}.A.\hat{x})$ y $(A\hat{x})_i-\hat{x}.A.\hat{x}>0$ entonces $\hat{x}_i=0$. Sea $x\in S_n$ tal que $|x-\hat{x}|<\delta$ y $x_i>0$, si $x(t)$ es solución de (*') tal que $x(0)=x$ se tiene $x(t)\in U\ \forall t\geqslant 0$ y $\dot{x}_i(t)=x_i((Ax(t))_i-x(t).A.x(t))$. Como $x(t)\in U\ \forall t\geqslant 0$ tenemos $(A.x(t))_i-x(t).A.x(t)>\varepsilon$ y como $x_i(t)\geqslant 0\ \forall t\geqslant 0$ implica $\dot{x}_i(t)\geqslant 0$ luego $x_i(t)$ es creciente en [0, +∞) y así se tiene $\forall t\geqslant 0\ x_i(t)\geqslant x_i(0)=x_i>0$, luego $x_i(t)>0\ \ \forall t\geqslant 0$. Entonces $\dot{x}_i(t)=x_i(t)((A.x(t))_i-x(t).A.x(t))>x_i(t).\varepsilon\ \ \forall t\geqslant 0$,

luego $\dfrac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}>\varepsilon\ \ \forall t\geqslant 0$; es decir $\dot{\log}\, x_i(t)>\varepsilon$, por lo tanto $\int_0^t \dot{\log}(x(t))dt\geqslant\varepsilon t$, lo que

implica $\log\left(\dfrac{x(t)}{x_i}\right)\geqslant\varepsilon t$; es decir $x_i(t)\geqslant x_i e^{t\varepsilon}\ \ \forall t\geqslant 0$. Entonces $\{x_i(t)/t\geqslant 0\}$ es no acotado; pero $\{x(t)/t\geqslant 0\}\subseteq U$, luego U es no acotado; contradicción U es acotado; por lo tanto $\hat{x}$ es un equilibrio de Nash.

Definición Un estado $x\in S_n$ es asintoticamente estable si x es Lyapunov estable y toda órbita $x(t)$ cerca de $\hat{x}$ es tal que $\lim_{t\to\infty} x(t)=\hat{x}$.

Teorema 2.5 Si $\hat{x}\in S_n$ es un estado evolutivamente estable, entonces $\hat{x}$ es asintoticamente estable.

Prueba Considere la función $P(x)=\pi_i\, x_i^{\hat{x}_i}$, ésta función tiene un único máximo (en S_n) en el punto $\hat{x}$. Esto sigue de la desigualdad de Jensen: si $f(t)$ es una función estrictamente convexa en un intervalo I , entonces $f(\sum_i p_i x_i)\leqslant\sum_i p_i f(x_i)\ \forall x_1,\ldots,x_n\in I$ y todo $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\ interior(S_n)$ y se tiene la igualdad si y solo si $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Aplicamos ésta desigualdad a la función estrictamente convexa $f=\text{-}\log(\text{-})$ con $I=[0,\infty]$, suponemos que $0\log 0=0\log\infty=0 \quad (\Rightarrow 0^0=1)$. Entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\log\left(\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right)=\sum_{\hat{x}_i>0}\hat{x}_i\log\left(\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right)\leqslant\log\left(\sum_{\hat{x}_i>0}x_i\right)=\log\sum_{i=1}^{n}x_i=\log 1=0$$; entonces

$\sum_{i=1}^{n}x_i(\log x_i-\log\hat{x}_i)\leqslant 0$ es decir $\sum_{i=1}^{n}\hat{x}\log x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n}\hat{x}_i\log\hat{x}_i$, lo que implica que

$P(x)\leqslant P(\hat{x}) \quad (x=(x_1,\ldots,x_n))$. Tenemos la igualdad si y solo si $\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\log x_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\log\hat{x}_i$

si y solo si $\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\log\left(\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right)=0$ si y solo si $\sum_{\hat{x}_i>0}\hat{x}_i\log\left(\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right)=\log\left(\sum_{\hat{x}_i>0}x_i\right)$ si y solo si todos los

$\frac{x_i}{\hat{x}_i}$ son iguales entre si cuando $\hat{x}_i>0$. Por lo tanto existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{x_i}{\hat{x}_i}=a \quad \forall i$ tal

que $\hat{x}_i>0$ y entonces $x_i=a\hat{x}_i \quad \forall i$ tal que $\hat{x}_i>0$; como $\sum_{\hat{x}_i>0}\hat{x}_i=1$ tenemos

$a=\sum_{\hat{x}>0}x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ y así $0\leqslant a\leqslant 1$. Entonces $x_i=a\hat{x}_i\leqslant\hat{x}_i \quad \forall i$ tal que $\hat{x}_i>0$;

suponga que $a<1$ entonces $x_i<\hat{x}_i \quad \forall i$ tal que $\hat{x}_i>0$, luego $x_i^{\hat{x}_i}<\hat{x}_i^{\hat{x}_i} \quad \forall i$ tal que

$\hat{x}_i>0$; por lo tanto $P(x)=\pi_{\hat{x}_i>0}x_i^{\hat{x}_i}<\pi_{\hat{x}_i>0}\hat{x}_i^{\hat{x}_i}=P(\hat{x})$ y así $P(x)<P(\hat{x})$ contradiciendo

$P(x)=P(\hat{x})$; por lo tanto $a=1$ lo que implica $\sum_{\hat{x}_i>0}x_i=1$ y esto implica que $\sum_{\hat{x}_i=0}x_i=0$

y como $x_i \geqslant 0 \ \forall i$ se tiene que $\hat{x}_i = 0$ implica $x_i = 0$ y como $x_i = \hat{x}_i$ si $\hat{x}_i > 0$ se tiene que $x_i = \hat{x}_i \ \forall i = 1, \ldots, n$ y así $x = \hat{x}$. Hemos probado que si $P(x) = P(\hat{x})$ entonces $x = \hat{x}$. Probemos ahora que $P(x) > 0$ si y solo si $x_i > 0$ cuando $\hat{x}_i > 0$. Como $P(x) \geqslant 0 \ \forall x \in S_n$; si $P(x) = 0$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i^{\hat{x}_i} = 0$ y así $x_i = 0$ y $\hat{x}_i > 0$. Por lo tanto si $\forall i \ \hat{x}_i > 0$ implica $x_i > 0$ entonces $P(x) > 0$.

Reciprocamente, si $P(x) > 0$ como $P(x) = \underset{\hat{x}_i > 0}{\pi} x_i^{\hat{x}_i}$ cuando $\hat{x}_i > 0$ se debe tener $x_i^{\hat{x}_i} > 0$ y así $x_i > 0$.

Es claro que $P(\hat{x}) > 0$; y en el conjunto abierto de S_n dado por $\{x \in S_n / P(x) > 0\}$ se tiene que:

$$\frac{\dot{P}}{P} = \dot{\log} P = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \log x_i \right)^{\cdot} = \left(\sum_{\hat{x}_i > 0} \hat{x}_i \log x_i \right)^{\cdot} = \sum_{\hat{x}_i > 0} \hat{x}_i \cdot \frac{\dot{x}_i}{x_i} = \sum_{\hat{x}_i > 0} \hat{x}_i ((Ax)_i - x.A.x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i ((Ax)_i - x.A.x) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i (Ax)_i - x.A.x = \hat{x}.A.x - x.A.x$$

Como $\hat{x}$ es evolutivamente estable, existe un vecindario abierto de $\hat{x}$ en S_n tal que $\hat{x}.A.x - x.A.x > 0$ si $x \neq \hat{x}$ y x en éste vecindario. Entonces la función P es una función estricta de Lyapunov alrededor de x ; y entonces todas las órbitas en éste vecindario convergen a $\hat{x}$: sea U un abierto relativo de S_n tal que $\hat{x} \in U$ y $\dot{P} > 0$ en $U - \{\hat{x}\}$ y sea $V \subseteq U$ tal que $\bar{V} \subseteq U$, $x \in V$, V abierto relativo de S_n . Sea $x(t)$ un solución de (*') tal que $x(t) \in V \ \forall t \geqslant 0$; entonces $\omega(\hat{x}) \subseteq \bar{V}$ por lo tanto $\omega(\hat{x}) \subseteq U$ y como $\omega(\hat{x}) \subseteq S_n$ y S_n es compacto entonces $\omega(\hat{x}) \neq \phi$. Aplicando el Teorema de Lyapunov aplicado a (*') en U y $P|U$ se tiene que $\omega(\hat{x})=\omega(\hat{x})\cap U\subseteq\{x\in U/\dot{P}(x)=0\}=\{\hat{x}\}$; pero como $\omega(\hat{x})\neq\phi$ se tiene que $\omega(\hat{x})=\{\hat{x}\}$ y así $\lim_{t\to 0} x(t)=\hat{x}$.

Nota (a) Si $\hat{x}$ es evolutivamente estable y $\hat{x}\in\text{interior}(S_n)$, entonces $\forall\, x\in S_n, x\neq\hat{x}$ se tiene que $x.A.x<\hat{x}.A.x$.

(b) En particular por (a) si $\hat{x}\in\text{interior}(S_n)$ es evolutivamente estable, se tiene que $\dot{P}(x)>0\ \ \forall\, x\in\text{interior}(S_n), x\neq\hat{x}$; entonces $P(x)$ es una función de Lyapunov alrededor de $\hat{x}$ en $\text{interior}(S_n)$ y por lo tanto toda órbita $x(t)$ en $\text{interior}(S_n)$ es tal que $\lim_{t\to\infty} x(t)=\hat{x}$.

La prueba de (a) es similar al resultado correspondiente para estrategias.

Estabilidad Fuerte

¿Como la matriz A se relaciona con la matriz de pago U del juego subyacente? U es una matriz $N\times N$, donde N es el número de estrategias puras; A es por otro lado una matriz $n\times n$, donde n es el número de los diferentes tipos en la población, cada uno de los cuales corresponde a una estrategia p_i y $a_{ij}=p_i.U.p_j$.

La dinámica dada por la ecuacion replicadora describe la evolución de las frecuencias de los tipos $E_1,\dots,E_n$ dados por las estrategias $p_1,\dots,p_n$. El estado $x\in S_n$ corresponde a una estrategia del promedio de la población $p=\sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i$. Dependiendo en la evolución de las frecuencias x_i , ésta estrategia describe un camino en el espacio de las estrategias S_N .

Consideremos al caso $n=2$; sean E_1, E_2 dos tipos correspondientes a las estrategias $p\,,\,\hat{p}$

en S_N . Si x_1, x_2 son sus respectivas frecuencias; tenemos que $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ donde

$A_{11}=p.U.\,p$, $A_{12}=p.U.\,\hat{p}$, $A_{21}=\hat{p}.U.\,p$, $A_{22}=\hat{p}.U.\,\hat{p}$.

Por otro lado $A\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p.U.\,p & p.U.\,\hat{p} \\ \hat{p}.U.\,p & \hat{p}.U.\,\hat{p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p.U.\,p\cdot x_1+p.U.\,\hat{p}\cdot x_2 \\ \hat{p}.U.\,p\cdot x_1+\hat{p}.U.\,\hat{p}\cdot x_2 \end{bmatrix}$; si $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$Ax=\begin{bmatrix} p.U.(x_1\,p+x_2\,\hat{p}) \\ \hat{p}.U.(x_1\,p+x_2\,\hat{p}) \end{bmatrix} .$$

Así las funciones de pago de $p\,,\,\hat{p}$ respectivamente son

$$f_1(x)=(Ax)_1=p.U.(x_1\,p+x_2\,\hat{p}) \quad \text{y} \quad f_2(x)=(Ax)_2=\hat{p}.U.(x_1\,p+x_2\,\hat{p}) .$$

Como $x_2=1-x_2$; es suficiente describir la evolución de x_1 y denotaremos x_1 por x . La dinámica en el intervalo $[0,1]$ ésta dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=x(f_1(x)-\bar{f}(x))=x(f_1(x)-(x\,f_1(x)+(1-x)\,f_2(x)))=\\
&=x(f_1(x)-x\,f_1(x)-(1-x)\,f_2(x))=x((1-x)\,f_1(x)-(1-x)\,f_2(x))=\\
&=x(1-x)(f_1(x)-f_2(x))=x(1-x)(p.U.(x\,p+(1-x)\,\hat{p})-\hat{p}.U.(x\,p+(1-x)\,\hat{p}))=\\
&=x(1-x)(x\cdot p.U.\,p+(1-x)\,p.U.\,\hat{p}-x\cdot\hat{p}.U.\,p-(1-x)\,\hat{p}.U.\,\hat{p})=\\
&=x(1-x)(x(p.U.\,p-\hat{p}.U.\,p)+(1-x)(p.U.\,\hat{p}-\hat{p}.U.\,\hat{p}))=\\
&=(-1)\cdot x(1-x)(x(\hat{p}.U.\,p-p.U.\,p)+(1-x)(\hat{p}.U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}))
\end{aligned}$$

por lo tanto $\dot{x}=-x(1-x)\cdot(x(\hat{p}.U.\,p-p.U.\,p)+(1-x)(\hat{p}.U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p}))$, si $0<x<1$ entonces $x(1-x)>0$ y el signo de $\dot{x}$ ésta determinado por el signo de

$$(-1)(x(\hat{p}.U.\,p-p.U.\,p)+(1-x)(\hat{p}.U.\,\hat{p}-p.U.\,\hat{p})) .$$

Sabemos que $\hat{p}$ es evolutivamente estable si

$$\forall\, p \in S_N,\, p \neq \hat{p} \quad x(\hat{p}.U.p - p.U.p) + (1-x)(\hat{p}.U.\hat{p} - p.U.\hat{p}) > 0$$, para x

suficientemente pequeño. Por lo tanto x es decreciente para x suficientemente pequeño si y solo si $\hat{p}$ es evolutivamente estable. Así la frecuencia x_1 de la población E_1 decrece en el tiempo, mas aún tiende a 0 cuando $t \to \infty$. Por lo tanto una población evolutivamente estable E_2 no puede ser invadida por ninguna población minoritaria E_1 . Es más tenemos que

$\forall\, p \in S_N$ y $\hat{p} \in S_N$ fijo $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es evolutivamente estable si y solo si $\hat{p}$ es evolutivamente estable:

Como $A = \begin{bmatrix} p.U.p & p.U.\hat{p} \\ \hat{p}.U.p & \hat{p}.U.\hat{p} \end{bmatrix}$ entonces $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es evolutivamente estable si y solo si se tiene que:

$$(i)\ [x_1, x_2] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leqslant [0,1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ tal que } x_1 + x_2 = 1,\ x_1, x_2 \geqslant 0$$, y

$$(ii)\ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ tal que } x_1 + x_2 = 1,\ x_1, x_2 \geqslant 0\ ,\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ y

$$[x_1, x_2] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0,1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ entonces } [x_1, x_2] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} < [0,1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado (i)
$$\Leftrightarrow [x_1, x_2]\cdot\begin{bmatrix} p.U.\hat{p} \\ \hat{p}.U.\hat{p}\end{bmatrix} \leqslant [0,1]\cdot\begin{bmatrix} p.U.\hat{p} \\ \hat{p}.U.\hat{p}\end{bmatrix} \qquad \forall x_1 \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow x_1\, p.U.\hat{p} + x_2\,\hat{p}.U.p \leqslant \hat{p}.U.\hat{p} \qquad \forall x_1 \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow x_1\, p.U.\hat{p} + (1-x)\,\hat{p}.U.\hat{p} \leqslant \hat{p}.U.\hat{p} \qquad \forall x_1 \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow x_1\, p.U.\hat{p} \leqslant x_1\,\hat{p}.U.\hat{p} \qquad \forall x_1 \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow p.U.\hat{p} \leqslant \hat{p}.U.\hat{p}$$

Tambíen se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1\, p + x_2\,\hat{p} \neq \hat{p} \Leftrightarrow x_1\, p - x_1\,\hat{p} \neq 0 \Leftrightarrow x_1\, p \neq x_1\,\hat{p} \quad (x_1 \neq 0) \Leftrightarrow p \neq \hat{p} \quad ,$$

$$[x_1, x_2].A.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0,1].A.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [x_1, x_2]\begin{bmatrix} p.U.\hat{p} \\ \hat{p}.U\,\hat{p}\end{bmatrix} = [0,1]\begin{bmatrix} p.U.\hat{p} \\ \hat{p}.U\,\hat{p}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x_1\, p.U.\hat{p} + x_2\,\hat{p}.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1\, p.U.\hat{p} + (1-x_1)\,\hat{p}.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1\, p.U.\hat{p} = x_1\,\hat{p}.U.\hat{p} \quad (x_1 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p}
\end{aligned}$$

y $\quad [x_1, x_2].A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} < [0,1].A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [x_1, x_2]\begin{bmatrix} x_1\, p.U.p + x_2\, p.U.\hat{p} \\ x_1\,\hat{p}.U.p + x_2\,\hat{p}.U.\hat{p}\end{bmatrix}$

$$< [0,1]\begin{bmatrix} x_1\, p.U.p + x_2\, p.U.\hat{p} \\ x_1\,\hat{p}.U.p + x_2\,\hat{p}.U.\hat{p}\end{bmatrix} \Leftrightarrow [x_1, x_2]\begin{bmatrix} p.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) \\ \hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p})\end{bmatrix} < \hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p})$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x_1\, p.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) + x_2\,\hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) < \hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) \\
&\Leftrightarrow x_1\, p.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) < (1-x_2)\,\hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) \\
&\Leftrightarrow x_1\, p.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) < x_1\,\hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) \\
&\Leftrightarrow p.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) < \hat{p}.U.(x_1\, p + x_2\,\hat{p}) \quad (x_1 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow x_1\, p.U.p + x_2\, p.U.\hat{p} < x_1\,\hat{p}.U.p + x_2\,\hat{p}.U.\hat{p} \\
&\Leftrightarrow x_1\, p.U.p < x_1\,\hat{p}.U.p \\
&\Leftrightarrow p.U.p < \hat{p}.U.p \quad (x_1 \neq 0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$(i) \Leftrightarrow p.U.\hat{p} \leqslant \hat{p}.U.\hat{p}$$

$$(ii) \Leftrightarrow p \neq \hat{p}, \quad p.U.\hat{p} = \hat{p}.U.\hat{p} \;\Rightarrow\; p.U.p < \hat{p}.U.p$$

y así se tiene que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es evolutivamente estable $\forall\, p$, $\hat{p}$ fijo, p , $\hat{p} \in S_N \Leftrightarrow \hat{p}$ es evolutivamente estable.

En particular si $\hat{p}$ es evolutivamente estable, $x_1 p + x_2 \hat{p}$ converge a $\hat{p}$ para todo valor inicial suficientemente cercano a $\hat{p}$.

Bibliografía:

[1] Feldman, M.W.; Cavalli-Sfonza, L.L. (1976) “Cultural and biological evolutionary processes selection for a trail under complex transmission” theor. Pop. Biol. 9.

[2] Gintia H. (2000) Game Theory Evolving. Princeton University Press.

[3] Kahneman, D.: Tversky, A. (2000) Choices and Frames. Cambridge University Press.

[4] Lumsden, C. J.; Wilson, EO. (1981) Genes, Mind and Culture. Harvard University Press.

[5] Maynard S. J.; G. R. Price (1973) “The logic of Animal Confict” Nature 246: 15-18.

[6] Maynard S. J.; (1982) Evolution and the theory of Games. Cambridge University Press.

[7] Maynard S., J.; Szsthmáry, E (1999) The Origins of Life From the Birth of Life to the Origin of Language. Oxford University Press.

[8] Nash, J. F. (1950) “Equilibrium Points in N-Person Games”. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America 36: 48-49.

[9] Osborne M. J.; Rubinstein, A. (1994) A course in Game Theory. The M.I.T. Press.

[10] Suk-Young Chwe, M (2001). Rational Ritual Culture, coordination and Common Knowledge. Princeton University Press.

[11] Ulate, F. (2006). Formalización de una Teoría de la Mentalidad. Revista de Matemáticas: Teoría y Aplicaciones 13 (1): 49-76.

[12] Von Newmann, J. ; Mongenstern, O. (1944) Theory of Games and Economic Behavior. John Wiley and Sons, New York.