Ciencias Económicas 26-No. 1: 2008 / 171-185 / ISSN: 0252-9521

Adam Smith y Sistemas Dinámicos

Osvaldo Acuña   Fernán Ulate

Resumen

Presentamos un sistema dinámico sencillo con dos ecuaciones diferenciales, una representa la trayectoria del precio, y la otra la de la cantidad de un bien en una economía.
Nuestro modelo se basa sobre todo en la teoría clásica de precios expuesta por Adam Smith en *La Riqueza de las Naciones*. Al final del trabajo, se presenta, a modo de ejemplo, un estudio para el caso del ganado vacuno en la economía mundial.

Abstract

We present a simple dynamical system with two differential equations, one for price, and another for a good in an economy.
Our model is based in the price theory exposed by Adam Smith in *Wealth of Nations*. We studied as an example, the case of cattle for world economy.

1. Introducción

El problema más serio con la teoría de precios moderna actual, es que se preocupa demasiado por ver los precios como señales eficientes en la asignación de recursos y bienes, y le da muy poca importancia al estudio de estos en si mismos y sus trayectorias, que es precisamente lo que aquí nos interesa.

La idea original de que el sistema de precios es eficiente bajo condiciones que ahora llamamos competencia pura y perfecta, se remonta al mismo Adam Smith en su libro *La Riqueza de las Naciones*(Ver [19])-libro que aquí denominaremos RdlN-, y a su muy famoso concepto conocido como *mano invisible*. Esencialmente, la idea de Smith se puede resumir en que las diferentes unidades microeconómicas (consumidores, productos, comerciantes), actuando egoístamente, llevan a una maximización de la riqueza social, siempre y cuando se tengan las condiciones de competencia.

Smith distingue entre el valor de uso y el valor de cambio, y posteriormente los economistas, con las ideas de utilidad marginal y productividad marginal, probarán que los dos conceptos de valor están relacionados. La Escuela Marginalista, utilizará el cálculo diferencial para probar rigurosamente que, en efecto, la asignación de recursos bajo condiciones de competencia perfecta, llevará a un máximo de bienestar social conocido como Pareto Óptimo (Ver Acuña y Ulate, [2]).

Si bien es cierto que la eficiencia del sistema capitalista, bajo las condiciones y supuestos de la competencia perfecta, es un tema de importancia trascendental, también es cierto que tanto la teoría del consumidor como la teoría de la producción moderna se obsesionan con la idea de la maximización racional, y en algún grado, se ha descuidado la comprensión del comportamiento de precios por sí misma. En la últimas décadas, en algunos casos como por ejemplo en la teoría del monopolio, la idea de maximizar ganancias utilizando el instrumental del cálculo, se ha enriquecido muchísimo con conceptos nuevos que vienen de la Teoría de Juegos, como lo es peligro de estimular que otras empresas e individuos se metan en el mercado del monopolio, si las ganancias de este son muy altas.

Nuestra principal crítica a la teoría de precios actual, es que se preocupa en demasía por el uso de la maximización matemática y el cálculo, y descuida el problema de inercia y gravitación en la trayectoria de los precios. Inercia que está íntimamente relacionada con desequilibrios en la economía y en el comportamiento cultural (ver Ulate [21]), y gravitación alrededor de lo que Smith llama *precio natural*.

Actualmente, se le enseña a un estudiante de economía que el precio es producto de un equilibrio entre la oferta y la demanda. Detrás de la oferta está la teoría marginalista de maximización de ganancias por parte del productor, y detrás de la demanda está la teoría marginalista de maximización de utilidad por parte del consumidor. Cuando los precios cambian, muchos economistas explican que dicho cambio se debe a cambios en la oferta y demanda, y cuando se le pregunta a uno de ellos por un precio futuro también dirá que eso depende de la oferta y la demanda. Y en resumen, no dirá nada útil. Aún más, si se le da tiempo, comienza a explicar cómo cambios en la oferta y demanda afectarían el precio. Y en resumen, hablará aún más sin decir nada útil. Si se le pregunta a muchos economistas que no tienen experiencia práctica en precios, cómo afecta al precio del café una disminución de la oferta de éste debido a una helada en Brasil, de lo cual hoy se enteraron, existe peligro de que pronostiquen que el precio va a subir, cuando en realidad podría bajar debido a que el mercado, que se enteró primero que ellos de la noticia, ya sobrereaccionó. Sobrereacción que produce un desequilibrio con su propia inercia.

El problema más serio ocurre cuando se recomienda una política de inversiones e inclusive se otorgan créditos a empresas cuyos productos tienen precios altos, como consecuencia de una coyuntura anormal, causando la ruina de gran cantidad de productores, o se desestimula una actividad económica porque el producto tiene un precio inferior al que tendría normalmente.

La Teoría del Valor, expuesta en Acuña y Ulate (ver [1]), que es útil para representar el valor de un bien, a través del costo de producción, usando la matriz de Insumo Producto, históricamente tiene su fundamento en el concepto de valor de David Ricardo, que sería una versión relativa de lo que Adam Smith llama *precio natural*, concepto que también va a influenciar a J.S. Mill y que llamará *precio necesario*, y a Alfred Marshall, quien lo llamará *precio normal*.

Nosotros creemos que este concepto de *precio natural*, es esencial para pronosticar en el mediano y largo plazo, la tendencia o trayectoria del precio de mercado de un bien. La definición de este concepto la asumiremos, tal y como lo hace A. Smith en RdlN, libro 1, capítulo 7, titulado *Del Precio Natural y el Precio de Mercado de los Bienes*, donde se define el precio natural como aquel que cubre precisa y exactamente los tipos naturales de salario, renta de la tierra y beneficio del capital. Smith sostiene que los precios de mercado fluctúan a la larga alrededor de este precio natural. Para una definición matemática precisa, la podríamos hacer a través de un modelo de equilibrio como los expuestos en Acuña y Ulate ([1]).

En el capítulo 4 de RdlN, llamado *El Origen y uso del Dinero*, Smith explica que el dinero ha llegado a ser en todas las Naciones civilizadas, el instrumento universal del comercio, con el cual se compran y venden toda clase de artículos o se intercambian. Sin embargo, en el capítulo 5, llamado *Precio Real y Precio Nominal de los Artículos*, o sea, su precio en trabajo y su precio en dinero, Smith escribe:

> "Parece, pues, evidente que el trabajo es la única medida universal del valor, y también la única exacta, es decir, el único patrón mediante el cual es posible comparar los valores de los distintos artículos en todos los tiempos y en todos los lugares"(libro 1, Capítulo 5, párrafo 17).

Esto significa que Smith no utiliza el método de los número índices que ya había sido inventado en su época, y prefiere utilizar el trabajo para estudiar el precio real de un producto a lo largo del tiempo, tal y como también prefieren hacerlo muchos economistas de su época. En el Capítulo 6, Smith hace una especie de introducción para explicar los precios de los bienes por el costo de producción, que divide en: salario, beneficio y renta. En el Capítulo 7, como dice J.A. Schumpeter (ver [17] pag. 231), se expone: una rudimentaria teoría del equilibrio "...que es con mucho el mejor producto teórico de A. Smith", idea que nosotros compartimos, y que es la base del modelo que en este artículo presentamos. Por lo tanto, en el siguiente apartado, expondremos las ideas básicas de dicho modelo de precios, modelando matemáticamente lo que consideramos su esencia.

2. Modelación

Sea:

p = Precio de mercado, o precio real, o valor de cambio de un bien (en un momento dado). Lo definiremos aquí como la cantidad de unidades monetarias que se dan por ese bien. Si se quisiera, dicha unidad monetaria, puede expresarse en términos reales (usando números índices).

2.1 $p \in \mathbb{R}_+$, o sea, p es un número real mayor o igual que cero.

v = precio natural o valor natural.

> "Cuando el precio de un artículo no es superior ni inferior a lo necesario para pagar la renta de la tierra, los salarios de la mano de obra y los beneficios del capital invertido en cultivarlo, prepararlo y trasladarlo al mercado de conformidad con sus tipos naturales, el artículo se vende por lo que podríamos llamar su precio natural". (Ver RdlN, libro 1, capítulo 7, párrafo 4).

2.2 $v \in \mathbb{R}_+$. En todo momento $p \gtreqless v$.

> "El precio real a que se vende corrientemente un artículo determinado es lo que se llama precio de mercado, que puede ser superior, inferior o exactamente igual al precio natural"(Ver RdlN, libro 1, capítulo 7, párrafo 7).

q = cantidad ofrecida de un bien (en un momento dado).

2.3 $q \in \mathbb{R}_+$.

En el párrafo 8 del capítulo 7, Smith distingue entre demanda absoluta y demanda efectiva.

Sea

f = demanda efectiva, que es la demanda entre los que realmente pueden comprar un bien, y que es la que nos interesa.

> "De un hombre muy pobre puede, en cierto sentido, decirse que demanda un coche tirado por seis caballos, quizá le gustaría tenerlo, pero su demanda no es una demanda efectiva, porque jamás se pondrá ese artículo en el mercado pensando en satisfacerla". (RdlN, libro 1, capítulo 7, párrafo 8).

2.4 $f \in \mathbb{R}_+$.

En el párrafo 9 y 10, capítulo 7, libro 1, que transcribimos por completo a continuación, Smith desarrolla el modelo de cómo los precios suben y bajan.

> "Cuando la cantidad de un artículo puesta en el mercado es inferior a la demanda efectiva, no es posible proporcionar la cantidad que desean a todos los que están dispuestos a pagar el valor total de la renta, salarios y beneficios que hubo que abonar para llevarlo hasta el mismo. Algunos de estos demandantes preferirán pagar más a carecer por completo de tal artículo. Se iniciará en el acto entre los demandantes una competencia, y el precio de mercado subirá más o menos por encima del precio natural según la escasez relativa o la riqueza y opulencia de los competidores den mayor o menor animación a su afán de competir. Una misma escasez originará entre competidores de igual riqueza y opulencia una competencia más o menos viva según que la adquisición de tal artículo tenga para ellos mayor o menor importancia. De ahí los precios exhorbitantes de los artículos necesarios para la vida a que se llega cuando la población está bloqueada o cuando reina el hambre.
>
> Si la cantidad puesta en el mercado supera a la demanda efectiva, no puede toda ella venderse a quienes están dispuestos a pagar el valor total de la renta, salarios y beneficios que tuvieron que abonarse para ponerla en el mismo. Habrá, pues, que vender parte de ella a quienes están dispuestos a pagar menos, y lo bajo del precio que pagan tiene por fuerza que reducir el precio

> del conjunto. El precio de mercado caerá más o menos por debajo del precio natural, según que la cuantía del excedente haga subir más o menos la competencia entre los vendedores, o según que resulte para ellos más o menos importante el quitarse de encima el artículo en cuestión. Un mismo excedente en la importación de artículos perecederos acarreará una competencia mucho mayor que si se tratase de artículos duraderos; por ejemplo, en la importación de naranjas, comparada con la importación de chatarra".

Podríamos expresar lo anterior, matemáticamente, así:

2.5 $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{p} = c(f - q)$, donde $c \in \mathbb{R}_+$

Utilizaremos el incremento proporcional y no absoluto a la hora de modelar, porque nuestra modelación garantiza que si se parte de un precio positivo, y la tendencia es a la baja, dicho precio no puede pasar a ser menor que cero, algo que creemos debe ser esencial.

Es por está razón que en los modelos de precios expuestos en Acuña y Ulate (ver [1]), estudiamos los teoremas sobre matrices no negativas que garantizan precios no negativos para los bienes. Creemos que esta realidad de no negatividad, debe ser siempre tomada en cuenta a la hora de modelar precios. El problema es que si la oferta es mayor que la demanda para todos los precios positivos, los precios tenderán a bajar, pero nunca podrían ser negativos.

Como vemos en el párrafo anterior también A. Smith claramente ve que la demanda es función del precio, y además señala que para vender más producto es necesario bajar los precios para vender adicionalmente a los que están dispuestos a pagar menos.

Expresamos esta relación inversa entre el precio y la cantidad demandada de una manera lineal

2.6 $f = \alpha - \beta p$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

Sustituyendo **2.6** en **2.5** y llamando

$$c\alpha = a$$

$$c\beta = b$$

Brinda

2.7 $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{p} = a - bp - cq$

En los párrafos 12, 13 y 14 del capítulo 7, libro 1, Smith explica cómo la cantidad ofrecida aumenta o disminuye de acuerdo a si el precio de mercado está por debajo a por encima del precio natural. En general, si el precio de mercado es menor que el precio natural, entonces la cantidad ofrecida disminuirá pues en el proceso productivo, ya sea los terratenientes, los trabajadores o los amos de estos, están perdiendo dinero. Además, este proceso de disminuir la oferta hará que el precio aumente haciendo que el precio vuelva al precio natural. De la misma manera, Smith escribe para el caso contrario:

> "Si, por el contrario, la cantidad puesta en el mercado fuese en cualquier momento inferior a la demanda efectiva, una u otra de las partes integrantes de su precio tendrá que subir por encima de su tarifa natural. Si se trata de la renta, el interés de todos los demás terratenientes les empujará naturalmente a preparar una mayor extensión de tierras para el cultivo de aquel artículo; si se trata de salarios o beneficios, el interés de todos los demás trabajadores y comerciantes les empujará pronto a dedicar una cantidad mayor de mano de obra y de capital a la preparación y puesta en el mercado del mismo. La cantidad que a este se lleve será pronto suficiente para satisfacer la demanda efectiva. Todas las partes integrantes de su precio descenderán pronto hasta su tarifa natural y el precio total volverá a ser igual que el natural."(Libro 1, capítulo 7, párrafo 14).

Matemáticamente, podemos entonces expresar el cambio porcentual en la cantidad ofrecida como una proporción del precio de mercado menos el precio natural.

2.8 $\dfrac{dq}{dt} \cdot \dfrac{1}{q} = e(p - v)$, donde $e \in \mathbb{R}_+$.

De nuevo, la ecuación **2.8** garantiza que si los productores están teniendo pérdidas, la cantidad ofrecida disminuye, pero no pasa a ser negativa si efectivamente al principio del proceso es positivo.

Llamando $ev = w$, tenemos

2.9 $\dfrac{dq}{dt} \cdot \dfrac{1}{q} = -w + ep.$

En resumen, tenemos el sistema dinámico que estudiaremos en la siguiente sección

2.10 $\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} \cdot \dfrac{1}{p} = (a - bp - cq) \\ \dfrac{dq}{dt} \cdot \dfrac{1}{q} = (-w + ep) \end{cases}$

Nuestro principal interés es estudiar el sistema dinámico anterior (**2.10**). Sobre todo nos interesa saber si la teoría de la gravitación expuesta por Smith bajo sus supuestos dados es correcta, tal y como lo escribe:

> "Tenemos pues, que el precio natural es, como si dijéramos, el precio central hacia el que los precios de todos los artículos gravitan constantemente. Diversos incidentes pueden en ocasiones mantener dichos precios suspendidos muy por encima de ese precio central, y en otras ocasiones los obligan a descender algo por debajo del mismo. Pero, cualquiera que sean los obstáculos que les impiden establecerse en este centro de reposo y de estabilidad, los precios tienden constantemente hacia él."(Libro 1, capítulo 7, pag 15).

Para ello, utilizaremos el estudio que de dicha ecuación se ha hecho en biología matemática, pues esta es, estructuralmente, un caso especial de una versión de la llamada ecuación de Lotka-Volterra (ver por ejemplo [10]).

3. Presentación matemática del modelo

Estudiaremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = (a - bp - cq)p \\ \dfrac{dq}{dt} = (-w + ep)q \end{cases} \tag{1}$$

con $a, b, c, w, e > 0$.

Podemos encontrar cinco soluciones inmediatamente de esta ecuación diferencial:

i. $p_1(t) = 0,\ q_1(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

ii. $p_2(t) = \dfrac{a}{b},\ q_2(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

iii. $p_3(t) = 0,\ q_3(t) = q_3(0)\mathbf{e}^{-wt}\ \forall t \in \mathbb{R},\quad q_3(0) > 0$

iv. $p_4(t) = \dfrac{ap_4(0)}{(a - bp_4(0))\mathbf{e}^{-at} + bp_4(0)},\quad q_4(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{a}{b} > p_4(0)$.

v. $p_5(t) = \dfrac{ap_5(0)}{(a - bp_5(0))\mathbf{e}^{-at} + bp_5(0)},\quad q_5(t) = 0,\ \dfrac{a}{b} < p_5(0)$.

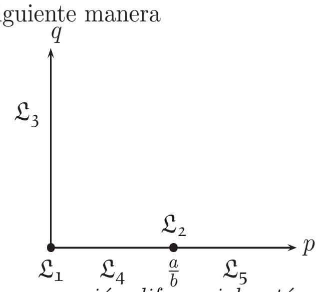
$\forall t > t_0$ donde $t_0 < 0$ tal que $(a - bp_5(0))\mathbf{e}^{-at} + bp_5(0) = 0$.

Las órbitas de cada una de las soluciones son los conjuntos

$$\mathfrak{L}_i = \big\{(p_i(t), q_i(t))/t \in]\tilde{t_0}, +\infty[\big\} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

y $\tilde{t_0} = +\infty$ si $1 \leq i \leq 4$, $\tilde{t_0} = t_0$ si $i = 5$.

Se representan en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera



Definición 3.1 *Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial autónoma, donde $f(x)$ está definida en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto F de D se dice ser invariante si para cada solución $x(t), t \in I$ (I un intervalo abierto) tal que existe $t_0 \in I$ con $x(t_0) \in F$, entonces $\forall t \in I$, $x(t) \in F$.*

Nota 3.1 *Si $\mathbb{R}^2_+ = \big\{(p, q) \in \mathbb{R}^2/p, q \geq 0\big\}$, entonces la frontera de $\mathbb{R}^2_+$ y el interior de $\mathbb{R}^2_+ = int(\mathbb{R}^2_+) = \big\{(p, q) \in \mathbb{R}^2/p > 0,\ q > 0\big\}$ son conjuntos invariantes para la ecuación diferencial (1).*

Probemos primero que la frontera de $\mathbb{R}^2_+$ es invariante. Sea $(p(t), q(t))$, $t \in I$ (I un intervalo abierto) una solución de la ecuación diferencial (1) tal que existe $t_0 \in I$ con $(p(t_0), q(t_0))$ en la frontera de $\mathbb{R}^2_+$. Podemos suponer que $t_0 = 0$, sin pérdida de generalidad reemplazando $(p(t), q(t))$ por $(p(t+t_0), q(t+t_0))$ e I por $I - t_0$. Entonces existe $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $(p(0), q(0)) \in \mathfrak{L}_i$. Por otro lado, $(p_i(t), q_i(t))$, con $t \in]\tilde{t_0}, +\infty[$ es solución de la ecuación diferencial (1), con $p_i(0) = p(0)$, $q_i(0) = q(0)$. El conjunto

$$\big\{t \in]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I \ / \ (p_i(t), q_i(t)) = (p(t), q(t))\big\} \tag{2}$$

es no vacío y cerrado en $]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I$. Por el teorema de unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales, sabemos que éste conjunto es abierto relativo de $]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I$ y como $]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I$ es conexo, entonces se tiene que

$$\big\{t \in]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I \ / \ (p_i(t), q_i(t)) = (p(t), q(t))\big\} =]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I \tag{3}$$

Por otro lado si $1 \leq i \leq 4$ se tiene $\tilde{t_0} = -\infty$ y $]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I = I$, si $i = 5$, $\tilde{t_0} = t_0$ y $\lim\limits_{t \to t_0^+} p_5(t) = +\infty$, si $t_0 \in I$, entonces $p_5(t) = p(t)$ $\forall t > t_0$ y así se tiene que

$$+\infty = \lim_{t \to t_0^+} p_5(t) = \lim_{t \to t_0^+} p(t) = p(t_0)$$

$$\therefore p(t_0) = +\infty;$$

pero $p(t_0) \in \mathbb{R}$; lo cual es una contradicción y entonces debe tenerse que $t_0 \notin I$, es decir $\tilde{t_0} \notin I$ y entonces $]\tilde{t_0}, +\infty[\cap I = I$.

Así obtenemos que $\forall t \in I$, $(p_i(t), q_i(t)) = (p(t), q(t))$, lo que implica que $\forall t \in I$, $(p(t), q(t))$ pertenece a la frontera de $\mathbb{R}^2_+$.

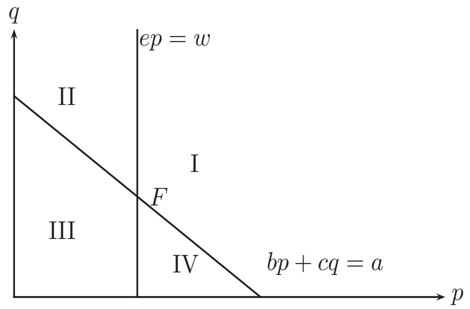
Probemos ahora que el conjunto $int(\mathbb{R}^2_+)$ es invariante. Sea $(p(t), q(t))$, $t \in I$ (I intervalo abierto) una solución de (1) tal que existe $t' \in I$ con $p(t'), q(t') > 0$. Probemos primero que $\{(p(t), q(t)) \ / \ t \in I\}$ no contiene puntos de la frontera de $\mathbb{R}^2_+$. Suponga por contradicción que existe $T \in I$ tal que $(p(T), q(T))$ pertenece a la frontera de $\mathbb{R}^2_+$. Sea $(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = (p(t+T), q(t+T))$ con $t \in I - T$ esto define una solución de la ecuación diferencial (1) tal que $(\tilde{p}(0), \tilde{q}(0)) = (p(T), q(T))$ pertenece a la frontera de $\mathbb{R}^2_+$ y por la primera parte de ésta argumentación se tiene que $(p(t'), q(t')) = (p(t'-T), q(t'-T))$ pertenece a la frontera de $\mathbb{R}^2_+$, lo cual es una contradicción ya que $p(t'), q(t') > 0$. Por lo tanto, $\forall t \in I$ $(p(t), q(t))$ no está en la frontera de $\mathbb{R}^2_+$. Como $p(t'), q(t') > 0$, no pueden existir puntos $(p(t), q(t))$ con $t \in I$ fuera de $\mathbb{R}^2_+$ ya que por la continuidad de $p(t), q(t)$ existirían puntos del conjunto $\{(p(t), q(t)) \ / \ t \in I\}$ en la frontera de $\mathbb{R}^2_+$, situación que no puede darse. Por lo tanto, $p(t), q(t) > 0$, $\forall t \in I$.

Sólo estaremos interesados en soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = (a - bp - cq)p \\ \dfrac{dq}{dt} = (-w + ep)q \end{cases}$$

con $a, b, c, w, e > 0$, para $(p, q) \in int(\mathbb{R}^2_+)$.

El conjunto de puntos (p, q) donde $\dot{p} = 0$ es llamado la $p-$isoclina y es donde el campo vectorial de la ecuación diferencial (1) es vertical. Este conjunto es $\{(p, q) \ / \ bp + cq = a\}$. Similarmente el conjunto de las $q-$isoclinas es donde $\dot{q} = 0$ y es el conjunto $\{(p, q) \ / \ ep = w\}$ y es donde el campo vectorial es horizontal. Ambos conjuntos se cortan en un único punto $F = (\overline{p}, \overline{q})$ en el $int(\mathbb{R}^2_+)$ si $\dfrac{w}{e} < \dfrac{a}{b}$ y se tiene que $F = (\overline{p}, \overline{q}) = \left(\dfrac{w}{e}, \dfrac{b}{c}\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{w}{e}\right)\right)$. En este caso las isoclinas $ep = w$ y $bp + cq = a$ dividen el interior de $\mathbb{R}^2_+$ en cuatro regiones I, II, III, IV, como se ve en la siguiente figura



Como $(\overline{p}, \overline{q})$ resuelve el sistema

$$\begin{cases} (a - bp - cq)p = 0 \\ (-w + ep)q = 0 \end{cases}$$

entonces $(p(t), q(t)) = (\overline{p}, \overline{q})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación diferencial (1). En este caso la órbita de esta solución es $\{(\overline{p}, \overline{q})\}$, que es llamado *punto de descanso* de la ecuación diferencial (1). $(\overline{p}, \overline{q})$ es el único punto de descanso de esta ecuación diferencial en $int(\mathbb{R}^2_+)$.

Estudiaremos los signos de $\dot{p}$, $\dot{q}$ en las regiones I, II, III, IV.

$$\dot{p} > 0 \iff a - bp - cq > 0 \iff \frac{a - bp}{c} > q$$

y entonces se tiene que $\dot{p} > 0$ en III,IV y $\dot{p} < 0$ en I, II.

Por otro lado,

$$\dot{q} > 0 \iff -w + ep > 0 \iff p > \frac{w}{e};$$

entonces $\dot{q} > 0$ en I, IV y $\dot{q} < 0$ en II, III.

Las consideraciones de signo anteriores no son suficientes para especificar las órbitas de las soluciones de la ecuación diferencial (1), por lo tanto ocuparemos un poco de teoría de ω-límites y funciones de Lyapunov.

Definición 3.2 *Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema autónomo em una región de $\mathbb{R}^n$ y sea $x(t)$ una solución del sistema definido para todo $t \geq 0$ tal que $x(0) = x$. El ω-**límite de** x es el siguiente conjunto*

$$\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ x(t_k) \to y \text{ para alguna secuencia } (t_k) \text{ tal que } t_k \to +\infty \text{ si } k \to +\infty\}.$$

Nota 3.2 *Podemos definir de manera análoga el conjunto $\alpha-$**límite de** x como*

$$\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ x(t_k) \to y \text{ para alguna secuencia } (t_k) \text{ tal que } t_k \to -\infty \text{ si } k \to +\infty\}.$$

Observación 3.1

a. Si $\{x(t) \ / \ t \geq 0\}$ está contenido en un conjunto compacto, entonces $\omega(x) \neq \emptyset$.

b. Si $z \in \{x(t) \ / \ t \geq 0\}$ entonces $\omega(z) = \omega(x)$.

c. $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{x(s) \ / \ s \geq t\}}$; en particular $\omega(x)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

d. $\omega(x)$ es invariante respecto de $\dot{x} = f(x)$.

e. Si x es un punto de descanso $\omega(x) = \{x\}$.

f. $\omega(x)$ es compacto y también arcoconexo.

Teorema 3.1 *(Lyapunov). Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema autónomo definido en algún abierto G en $\mathbb{R}^n$. Sea $V : G \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Si $x(t)$ es una solución de $\dot{x} = f(x)$ tal que la derivada de la función $F(t) = V(x(t))$ es $\geq 0 (\leq 0)$. Entonces*

$$\omega(x) \cap G \subseteq \{x \in G \ / \ \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\} \quad (\alpha(x) \cap G \subseteq \{x \in G \ / \ \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\})$$

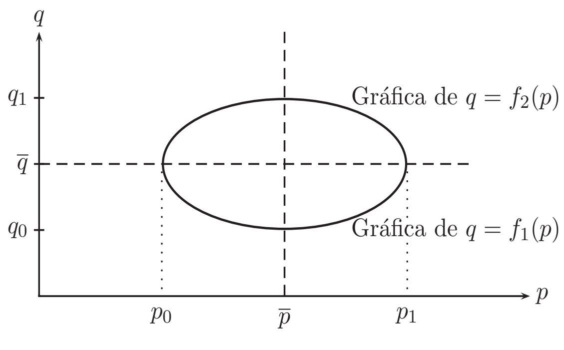
Definición 3.3 *Sea $V : int(\mathbb{R}^2_+) \to \mathbb{R}$ tal que $V(p,q) = eH(p) + cG(q)$ donde $H(p) = \overline{p} \ln p - p$ y $G(q) = \overline{q} \ln q - q$.*

Nota 3.3 *La función $V(p,q)$ tiene un máximo absoluto estricto en $(\overline{p}, \overline{q})$.*

Estudiaremos la curva $V(p,q) = k$ con $k < V(\overline{p}, \overline{q})$. Existen p_0, p_1, q_0, q_1 únicos tales que $0 < p_0 < \overline{p} < p_1$, $0 < q_0 < \overline{q} < q_1$, $V(p_0, \overline{q}) = V(p_1, \overline{q}) = V(\overline{p}, q_0) = V(\overline{p}, q_1) = k$ y $V(p,q) = k$ implica $p_0 \leq p \leq p_1$, $q_0 \leq q \leq q_1$.

La curva $V(p,q) = k$ está determinada por la gráfica de dos funciones $f_1(p)$, $f_2(p)$ con $p \in [p_0, p_1]$ tales que $f_1(p) < f_2(p)$ si $p \in]p_0, p_1[$, $f_1(p_0) = f_2(p_0) = f_1(p_1) = f_2(p_1) = \overline{q}$, f_1 es estrictamente creciente en $[\overline{p}, p_1]$ y es estrictamente decreciente en $[p_0, \overline{p}]$ y cóncava hacia arriba en $[p_0, p_1]$; f_2 es estrictamente creciente en $[p_0, \overline{p}]$ y estrictamente decreciente en $[\overline{p}, p_1]$ y cóncava hacia abajo en $[p_0, p_1]$.

En resumen la gráfica de la curva $V(p,q) = k$ tiene la forma



Proposición 3.1 *Sea k tal que $k < V(\overline{p}, \overline{q})$, entonces tenemos que $V(p', q') > k$ si y solo si (p', q') pertenece al interior de la curva $V(p, q) = k$.*

Prueba. La curva $V(p, q) = k$ está formado por las gráficas de las funciones $f_1(p)$, $f_2(p)$ con $p \in [p_0, p_1]$.

($\Leftarrow$) Sea (p', q') un punto interior de $V(p, q) = k$, entonces $p' \in]p_0, p_1[$ y $f_1(p') < q' < f_2(p')$.

Caso 1. Si $q' \leq \overline{q}$; entonces $f_1(p') < q' \leq \overline{q}$, como G es estrictamente creciente en $]0, \overline{q}] \Rightarrow G(f_1(p')) < G(q')$, pero como $V(p', q') = eH(p') + cG(q') > eH(p') + cG(f_1(p')) = k$ entonces $V(p', q') > k$.

Caso 2. Si $\overline{q} < q'$; entonces $\overline{q} < q' < f_2(p')$; como G es estrictamente decreciente en $[\overline{q}, +\infty[$ entonces $G(f_2(p')) < G(q')$ y así se obtiene que $V(p', q') = eH(p') + cG(q') > eH(p') + cG(f_2(p'))) = k$ y por lo tanto $V(p', q') > k$.

($\Rightarrow$) Sea $(p', q') \in int(\mathbb{R}^2_+)$ tal que $V(p', q') > k$ y suponga por contradicción que (p', q') no está en el interior de la curva $V(p, q) = k$; entonces se tiene algunas de las siguientes alternativas:

1. $p' \notin]p_0, p_1[$.
2. $p' \in]p_0, p_1[$ y $q' \leq f_1(p')$.
3. $p' \in]p_0, p_1[$ y $f_2(p') \leq q'$.

Caso 1. $p' \notin]p_0, p_1[$.

a. Si $0 < p' \leq p_0$; como H es estrictamente creciente en $]0, \overline{p}]$ se tiene que $H(p') \leq H(p_0)$ y entonces $V(p', q') = eH(p') + cG(q') \leq eH(p_0) + cG(q') = V(p_0, q')$. Siendo $k < V(p', q')$ debemos tener $k < V(p_0, q')$. Por otro lado como $G(q') \leq G(\overline{q})$ entonces $V(p_0, q') = cG(q') + eH(p_0) \leq cG(\overline{q}) + eH(p_0) = V(p_0, \overline{q}) = k$ y por lo tanto $V(p_0, q') \leq k$ pero esto es una contradicción.

b. Si $p_1 \leq p'$; dado que H es estrictamente decreciente en $[\overline{p}, +\infty[$ se tiene que $H(p') \leq H(p_1)$ y entonces $V(p', q') \leq V(p_1, q')$ y así $k < V(p_1, q')$. Por otro lado como $G(q') \leq G(\overline{q})$ tenemos $V(p_1, q') \leq V(p_1, \overline{q}) = k$ lo cual es una contradicción.

Caso 2. Si $p' \in]p_0, p_1[$ y $q' \leq f_1(p')$; como $f_1(p) \leq \overline{q}$ y G es creciente en $]0, \overline{q}]$ se tiene $G(q') \leq G(f_1(p'))$ y entonces $V(p', q') \leq V(p', f_1(p')) = k$ lo cual contradice $V(p', q') > k$.

Caso 3. Si $p' \in]p_0, p_1[$ y $f_2(p') \leq q'$; como $\overline{q} \leq f_2(p')$ y G es decreciente en $[\overline{q}, +\infty[$ entonces $G(q') \leq G(f_2(p'))$ y así se tiene que $V(p', q') \leq V(p', f_2(p')) = k$, lo cual contradice $V(p', q') > k$.

Hemos completado la prueba de la proposición.

Observación 3.2 Sea $(p(t), q(t))$, $t \in]a, b[$ es una solución de la ecuación diferencial (1) y $]a, b[$ es el intervalo máximo de definición de $(p(t), q(t))$. Si $\{(p(t), q(t)) \;/\; t \geq t', t \in]a, b[\}$ está contenido en un compacto para algún $t' \in]a, b[$ entonces $b = +\infty$ y en particular la órbita de $(p(t), q(t))$, $t \in]a, b[$ contiene al conjunto $\{(p(t), q(t)) \;/\; t \geq t'\}$.

Probemos esta observación. Suponga por contradicción que $b \in \mathbb{R}$; como el conjunto $\{(p(t), q(t)) \;/\; t \geq t',\ t \in]a, b[\}$ está contenido en un conjunto compacto, entonces existe $k > 0$ tal que $|p(t)|, |q(t)| \leq k$, $\forall t \geq t',\ t \in]a, b[$. Entonces

$$|\dot{p}| = |(a - bp - cq)p| \leq (a + b|p| + c|q|)|p| \leq (a + bk + ck)k \quad \text{y}$$

$$|\dot{q}| = |(-w + ep)q| \leq (w + e|p|)|q| \leq (w + ek)k;$$

si $k_1 = (a + bk + ck)k$, $k_2 = (w + ek)k$ entonces $|\dot{p}| \leq k_1$, $|\dot{q}| \leq k_2$, $\forall t \geq t'$, $t \in]a, b[$.

Si $t_1, t_2 \geq t'$, $t_1, t_2 \in]a, b[$ por el teorema del valor medio se tiene que

$$|p(t_1) - p(t_2)| = |\dot{p}(t^*)||t_1 - t_2| \leq k_1|t_1 - t_2| \quad (t^* \text{ entre } t_1, t_2);$$

por lo tanto $|p(t_1) - p(t_2)| \leq k_1|t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \geq t'$ y $t_1, t_2 \in]a, b[$. Similarmente se tiene que $|q(t_1) - q(t_2)| \leq k_2|t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \geq t'$ y $t_1, t_2 \in]a, b[$.

Sea (t_k) cualquier secuencia de $]a, b[$ tal que $\forall k$, $t_k \geq t'$ y $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = b$; entonces se tiene que $|p(t_k) - p(t_{k'})| \leq k_1|t_k - t_{k'}|$, por lo tanto $(p(t_k))$ es una secuencia de Cauchy y así $\lim\limits_{k \to +\infty} p(t_k)$ existe y es real. Si

(t_k), (t'_k) son secuencias de $]a,b[$ tales que $t_k, t'_k \geq t'$, $\forall k$ y $t_k, t'_k \to b$ si $k \to +\infty$; sabemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} p(t_k)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} p(t'_k)$ existen y son reales y como $|p(t_k)-p(t'_k)| \leq k_1|t_k - t'_k|$ y $k_1|t_k - t'_k| \to 0$, si $k \to +\infty$, entonces $\lim\limits_{k\to+\infty} p(t_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} p(t'_k)$. Esto demuestra que $\lim\limits_{t\to b^+} p(t)$ existe y es real. Similarmente se prueba que $\lim\limits_{t\to b^+} q(t)$ existe y es real. Por el teorema de continuación de soluciones de ecuaciones diferenciales existe $b' > b$, $b' \in \mathbb{R}$ tal que $(p(t), q(t))$, $t \in]a, b'[$ es solución de la ecuación diferencial (1). Pero esto contradice la maximalidad de $]a,b[$; por lo tanto $b = +\infty$.

Teorema 3.2 *Si $(p(t), q(t))$ con $t \in I$ intervalo abierto máximo, $0 \in I$ es una solución de la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \dot{p} = (a - bp - cq)p \\ \dot{q} = (-w + ep)q \end{cases}$$

con $a, b, c, w, e > 0$ en $int(\mathbb{R}^2_+)$, tal que $(p(0), q(0)) \neq (\overline{p}, \overline{q})$. Entonces la órbita de esa solución contiene al conjunto $\{(p(t), q(t)) \ / \ t \geq 0\}$ y este conjunto es una espiral que gira alrededor del punto $(\overline{p}, \overline{q})$ en el sentido positivo y

$$\lim_{t\to+\infty} (p(t), q(t)) = (\overline{p}, \overline{q}).$$

Prueba. Probamos primero que si $t_2 > t_1$, entonces $(p(t_2), q(t_2))$ está en el interior de la curva $V(p,q) = k$, donde $k = V(p(t_1), q(t_1))$. Tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(V(p(t), q(t))) = \frac{\partial V}{\partial p} \cdot \dot{p}(t) + \frac{\partial V}{\partial q} \cdot \dot{q}(t) = e\left(\frac{\overline{p}}{p} - 1\right) p(a - bp - cp) + c\left(\frac{\overline{q}}{q} - 1\right) q(-w + ep)$$

(como $a = b\overline{p} + c\overline{q}$, $w = e\overline{p}$)

$$\begin{aligned} &= e\left(\frac{\overline{p}}{p} - 1\right) p(b\overline{p} + c\overline{q} - bp - cq) + c\left(\frac{\overline{q}}{q} - 1\right) q(-e\overline{p} + ep) \\ &= e(\overline{p} - p)(b(\overline{p} - p) + c(\overline{q} - q)) - c(\overline{q} - q)e(\overline{p} - p) \\ &= e(\overline{p} - p)(b(\overline{p} - p) + c(\overline{q} - q) - c(\overline{q} - q)) \\ &= eb(\overline{p} - p)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Probemos que existe $\tilde{t} \in]t_1, t_2[$ tal que $p(\tilde{t}) \neq \overline{p}$. Suponga por contradicción que $\forall t \in]t_1, t_2[$, $p(t) = \overline{p}$, entonces en $]t_1, t_2[$, $\dot{p} = 0$, lo que implica que $a - b\overline{p} - cq = 0$ en $]t_1, t_2[$ y entonces $(p(t), q(t)) = (\overline{p}, \overline{q})$ $\forall t$ y así $(p(0), q(0)) = (\overline{p}, \overline{q})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $\tilde{t} \in]t_1, t_2[$ tal que $p(\tilde{t}) \neq \overline{p}$. Escogemos un intervalo centrado en $\tilde{t}$ contenido en $]t_1, t_2[$ tal que en tal intervalo $p(\tilde{t}) \neq \overline{p}$, $\forall t$. Sean $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ en ese intervalo tal que $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$, entonces

$$\frac{d}{dt}(V(p(t), q(t))) > 0 \qquad \forall t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$$

por lo tanto $V(p(t), q(t))$ es estrictamente creciente en $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ y como $t_1 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < t_2$ se tiene:

$$V(p(t_1), q(t_1)) \leq V(p(\tilde{t_1}), q(\tilde{t}_1)) < V(p(\tilde{p}_2), q(\tilde{t}_2)) \leq V(p(t_2), q(t_2))$$

y así se tiene que $V(p(t_1), q(t_1)) < V(p(t_2), q(t_2))$ y por lo tanto el punto $(p(t_2), q(t_2))$ es un punto interior de la curva $V(p,q) = k$, donde $k = V(p(t_1), q(t_1))$.

En particular se tiene que

$$\{(p(t_1), q(t_1)) \ / \ t \geq 0, \ t \in I\} \subseteq \{(p,q) \ / \ V(p,q) \geq V(p(0), q(0))\},$$

pero el conjunto $\{(p,q)\ /\ V(p,q) \geq k\}$ es compacto $\forall k$. Entonces esto implica que por la observación anterior al teorema, la órbita de la solución $(p(t), q(t))$ contiene al conjunto $\{(p(t_1), q(t_1))\ /\ t \geq 0\}$. También tenemos que

$$\omega(p(0), q(0)) \subseteq \{(p,q)\ /\ V(p,q) \geq V(p(0), q(0))\},$$

en particular $\omega(p(0), q(0)) \subseteq int(\mathbb{R}^2_+)$ y $\omega(p(0), q(0)) \neq \emptyset$.

Por otro lado, como $\dfrac{d}{dt}(V(p(t), q(t))) \geq 0\ \forall t$, podemos aplicar el teorema de Lyapunov y entonces

$$\omega(p(0), q(0)) \subseteq \{(p,q) \in int(\mathbb{R}^2_+)\ /\ \nabla V(p,q) \cdot f(p,q) = 0\}$$

donde $f(p,q) = ((a - bp - cq)p, (-w + ep)q)$.

Pero $\nabla V(p,q) = \left(e\left(\dfrac{\overline{p}}{p} - 1\right), c\left(\dfrac{\overline{q}}{q} - 1\right)\right)$ y entonces

$$\nabla V(p,q) \cdot f(p,q) = e\left(\frac{\overline{p}}{p} - 1\right) p(a - bp - cq) + c\left(\frac{\overline{q}}{q} - 1\right) q(-w + ep)$$

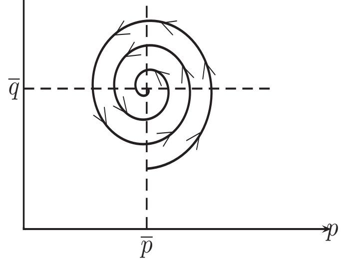
$$eb(\overline{p} - p)^2.$$

Entonces $\nabla V(p,q) \cdot f(p,q) = 0$ si y solo si $p = \overline{p}$. Por lo tanto $\omega(p(0), q(0)) \subseteq \{(p,q) \in int(\mathbb{R}^2_+)\ /\ p = \overline{p}, q > 0\}$. Pero sabemos que $\omega(p(0), q(0)) \neq \emptyset$ y como $\omega(p(0), q(0))$ es invariante, si $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0)$ pertenece a $\omega(p(0), q(0))$ implica que $\tilde{p_0} = \overline{p}$. Sea $(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$ una solución de la ecuación diferencial tal que $(\tilde{p}(0), \tilde{q}(0)) = (\tilde{p}_0, \tilde{q}_0)$, como $\omega(p(0), q(0))$ es invariante $\Rightarrow (\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) \in \omega(p(0, q(0)))\ \forall t$, entonces $\tilde{p}(t) = \overline{p}\ \forall t \Rightarrow \dot{\tilde{p}} = 0$ y como $\tilde{q}(t) > 0\ \forall t$ se tiene que $a - b\overline{p} + c\tilde{q}(t) = 0$ lo que implica que $\tilde{q}(t) = \overline{q}\ \forall t$ y así se tiene que $\tilde{q}(0) = \overline{q}$ y así se tiene que $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0) = (\overline{p}, \overline{q})$ y entonces $\omega(p(0), q(0)) \subseteq \{(\overline{p}, \overline{q})\}$ y como $\omega(p(0), q(0)) \neq \emptyset$ se debe tener que $\omega(p(0), q(0)) = \{(\overline{p}, \overline{q})\}$ y entonces

$$\lim_{t \to +\infty} (p(t), q(t)) = (\overline{p}, \overline{q}).$$

Finalmente hemos probado que si $t_2 > t_1$ entonces $(p(t_2), q(t_2))$ está en el interior de la curva $V(p,q) = k$ con $k = V(p(t_1), q(t_1))$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} (p(t), q(t)) = (\overline{p}, \overline{q})$, entonces el conjunto $\{(p(t), q(t))\ /\ t \geq 0\}$ es una espiral que gira alrededor de $(\overline{p}, \overline{q})$ en el sentido positivo y que converge al punto $(\overline{p}, \overline{q})$, completando esto la prueba del teorema.

Nota 3.4 *Podemos dar una representación gráfica de la semiórbita de la solución de la ecuación diferencial del teorema anterior.*



4. Estudio Empírico. Caso del ganado vacuno

Estudiaremos empíricamente las ecuaciones analizadas para el caso de la producción y precios mundiales del ganado vacuno. La base de datos contiene valores anuales que corresponden a los niveles producidos (miles de cientos de libras, en pie) y precios promedio del ganado[1] (dólares constantes[2]) para el período entre 1924 y el 2004[3].

Se utiliza el método de mínimos cuadrados ordinarios, y el programa estadístico SPSS.

Formulación y resultados de cada modelo planteado

La producción mundial de carne se ha cuadruplicado en los últimos 50 años y la taza de stock cárnico crece a una tasa mayor (3 : 1) que la población humana. El stock vivo de producción mundial cárnica excede los 21 mil millones de animales cada año, lo que es más de tres veces y media la población mundial. Además, el crecimiento de los animales toma más de $\frac{2}{3}$ de la tierra agrícola, y $\frac{1}{3}$ del área global cultivable[4]. Lo anterior convierte la estimación de la variación en los precios y en la producción, en un tema de relevancia para la sostenibilidad alimentaria mundial.

Primera Ecuación

$$\frac{P_{i+n} - P_i}{P_i} = \alpha + \beta_1^n P_i + \beta_2^n Q_i + \mu \tag{4}$$

En primer lugar se aplica la ecuación (4) al mercado del Ganado.

Cuadro 1
Resultados Ecuación (4) para el Ganado

N	Regresión		Constante		Precio Deflatado		Producción	
	F	Sig.	α	Sig.	β_1^n	Sig.	β_2^n	Sig.
1	4,405	0,015	0,197	0,003	−0,002	0,010	−0,000	0,130
2	10,139	0,000	0,426	0,000	−0,005	0,000	−0,000	0,037
3	16,249	0,000	0,589	0,000	−0,007	0,000	−0,000	0,007
4	21,027	0,000	0,706	0,000	−0,009	0,000	−0,000	0,003
5	22,427	0,000	0,759	0,000	−0,010	0,000	−0,000	0,004
6	20,747	0,000	0,760	0,000	−0,010	0,000	−0,000	0,004
7	19,438	0,000	0,802	0,000	−0,010	0,000	−0,000	0,004
8	21,498	0,000	0,906	0,000	−0,011	0,000	−0,000	0,002
9	27,131	0,000	1,049	0,000	−0,012	0,000	−0,000	0,000
10	35,633	0,000	1,183	0,000	−0,013	0,000	−0,000	0,000
11	47,723	0,000	1,340	0,000	−0,015	0,000	−0,000	0,000
12	55,573	0,000	1,480	0,000	−0,017	0,000	−0,000	0,000
13	59,967	0,000	1,631	0,000	−0,018	0,000	−0,000	0,000
14	57,910	0,000	1,757	0,000	−0,020	0,000	−0,000	0,000
15	64,713	0,000	1,856	0,000	−0,021	0,000	−0,000	0,000
16	71,334	0,000	1,948	0,000	−0,022	0,000	−0,000	0,000

Fuente: Elaboración propia. Datos: National Statistics Agricultural.

[1] Definido como AVG PRICE/CWT CATTLE por la "National Statistics Agricultural Service".

[2] Precio deflatado (precio Real) utilizando el "Consumer Price Index for All Urban Consumers, 1982-84=100". Financial Forescast Center Home Page, http://www.forecasts.org/

[3] National Statistics Agricultural Service, United States Department of Agriculture. http://www.nass.usda.gov/

[4] Vegan Society. http://www.vegansociety.com/

Segunda Ecuación

$$\frac{Q_{i+n} - Q_i}{Q_i} = \alpha + \delta_1^n P_i + \mu \tag{5}$$

El objeto de aplicar la ecuación (5) al mercado de ganado, es aproximar su evolución de la oferta en los próximos años, ya que está asociada a la diversidad de mercados agrícolas como por ejemplo el trigo.

Cuadro 2
Resultados Ecuación (5) para el Ganado

N	Regresión		Constante			Precio Deflatado		
	F	Sig.	B	t	Sig.	B	t	Sig.
1	5,855	0,018	−0,036	−1,515	0,134	0,001	2,420	0.018
2	7,410	0,008	−0,055	−1,484	0,142	0,002	2,722	0.008
3	6,458	0,013	−0,057	−1,103	0,274	0,002	2,541	0.013
4	5,072	0,027	−0,041	−0,640	0,524	0,002	2,252	0.027
5	3,463	0,067	−0,002	−0,033	0,974	0,002	1,861	0.067
6	2,694	0,105	0,033	0,409	0,684	0,002	1,641	0.105
7	2,475	0,120	0,063	0,732	0,467	0,002	1,573	0.120
8	1,529	0,220	0,119	1,326	0,189	0,002	1,237	0.220
9	0,347	0,558	0,207	2,193	0,032	0,001	0,589	0.558
10	0,021	0,884	0,283	2,910	0,005	0,000	0,146	0.884
11	0,000	0,995	0,333	3,279	0,002	0,000	0,007	0.995
12	0,044	0,834	0,348	3,258	0,002	0,000	0,211	0.834
13	0,098	0,756	0,372	3,224	0,002	0,001	0,313	0.756
14	0,040	0,842	0,420	3,456	0,001	0,000	0,200	0,842
15	0,003	0,959	0,488	3,847	0,000	0,000	−0,052	0,959
16	0,292	0,591	0,586	4,509	0,000	−0,001	−0,540	0,591

Fuente: Elaboración propia. Datos: National Statistics Agricultural.

Interpretación de resultados empíricos

En general observamos para la estimación de la ecuación (4) una significancia estadística alta (con excepción de $n = 1$ en el que, si bien F es significante las $t-$estadísticas sólo son para la constante y el precio real). En general las ecuaciones indican o nos llevan a la curva de demanda con pendiente negativa. Para la ecuación (5) la regresión tiene un F que solamente es significante al 5 % para n menor o igual a 4, para $n = 5$ es significante al 7 % y para n mayor o igual a 6 en general no es significante. Las $t-$estadísticas son significantes para n menor o igual a 4 en el caso del precio real y para la constante solamente lo son para n mayor o igual a 9.

Como para $n = 4$ ambas ecuaciones son significantes (para F al 5 %), entonces utilizaremos dicho tamaño del período para analizar el sistema dinámico. O sea, empíricamente, el período de tiempo igual a cuatro años nos brinda un modelo bastante útil tanto para estudiar la respuesta de los precios ante un exceso de demanda u oferta, así como estudiar la producción ante un estímulo o desestímulo por parte de los precios.

Para el período de tiempo $n = 4$, las estimaciones de las ecuaciones serían:

3.1.e. $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{p} = 0,706 - 0,00893p - 0,00000039q$

3.2.e. $\frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{q} = -0,0407 - (-1)0,0024p$

Para el sistema anterior, podríamos encontrar la "$p-$isoclina"para $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{p} = 0$ y obtener

3.3.e. $p = 79,06 - 0,0000436q$

Lo que, en algún grado, nos da una estimación de una curva lineal de demanda de largo plazo, con el precio en función de la cantidad.

De la misma manera, podríamos encontrar una "$q-$isoclina", para $\frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{q} = 0$ y obtener

3.4.e. $p = 16,95$

Lo cual nos daría un valor aproximado de $17 reales (de 1982) el costo de producción de un quintal (46 kilos de carne de vacuno en pie).

Este estudio empírico se da a modo de ilustración, y no pretende ser el propósito de este trabajo. Para estudios posteriores, y conocer realmente a fondo la utilidad de este modelo dinámico, deberían hacer trabajos econométricos con mejores series de datos, preferiblemente semanal o por lo menos mensual, así como utilizar métodos modernos para corregir y mejorar los problemas típicos de las regresiones lineales simples.

5. Conclusión

Creemos que el modelo expuesto no solo es de sumo interés, desde el punto de vista teórico-matemático, sino que también puede ser útil en un sentido práctico doble. Primero, como punto de partida para futuros estudios empíricos que ayuden a estimar curvas lineales de demanda, así como estimación del costo de producción (precio natural o valor) a través de las "isoclinas". Segundo, resucitar, de alguna manera, el uso práctico de la teoría del valor clásica para proyecciones y recomendaciones sobre la tendencia o trayectoria de los precios.

Para resumir de una manera adecuada nuestra recomendación, tal y como lo hacían los clásicos, a la hora de proyectar precios lo mejor es tener una idea del costo de producción, tanto nacional como internacional.

Bibliografía

[1] Acuña, O.; Ulate, F. (1994). Matrices no negativas. Editorial de Universidad de Costa Rica.

[2] Acuña, O.; Ulate, F. (1993). Condiciones para un Pareto Óptimo Generalizado. Rev. Ciencias Económicas, Vol XIII, No 1.

[3] Dorfman, Samuelson y Solow. (1958). Linear Programing and Economic Analysis. Mcgraw-Hill.

[4] F.A.O. (2004). Perspectivas alimentarias. http://www.fao.org/doc rep/

[5] Financial Forecast Center Home Page. http://www.forecast.org/National

[6] Gibbons, Robert. (1992). Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press.

[7] Hallan, T.G.; Levin, S.A. (1986). Mathematical Ecology: An Introduction. Biomathematics 17. Berlin: Springer.

[8] Hirsch, M.W.; Smale, S. (1974). Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. New York: Academic Press.

[9] Hirsch, M.W. (1982). Systems of differential equations which are competitive or cooperative: I Limit sets. SIAMJ Math Anal, 13, 167-179.

[10] Hofbauer, J.; Sigmund, K. (1998). Evolutionary Games and Populations Dynamics. Cambridge University Press.

[11] Lotka, A.J. (1957). Elementos de Biología Matemática. Dover.

[12] Maynard, John. (2003). Evolution and the theory of Games. Cambridge Press.

[13] Marx, Carlos. (1958). El Capital, Crítica de la Economía Política. Fondo de Cultura Económica.

[14] National Statistics Agriculture Service, United States. Department of Agriculture. http://www.nass.vsda.gov

[15] Ricardo, D. (1959). Principios de Economía Política y de Tributación. Aguilar. Madrid.

[16] Samuelson, P.A. (1957). Fundamentos del Análisis Económico. El Ateneo, Buenos Aires.

[17] Schumpeter, J.A. (1971). Historia del Análisis Económico. Barcelona: Ariel.

[18] Seudo, F.; Ziegler, J. (1978). The Golden Age of Theoretical Ecology, 1923.1940. Lecture notes in Biomathematics 22. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

[19] Smith, A. (1904). An Inquiry into the Nature and Causes of the Weath of Nations. London: Methuen and Co., Ltd, ed. Edwin Eannan. Fifth Edition. First publised: 1776. (http://www.econlib.org/ En español "La Riqueza de las Naciones"que hemos simplificado RdlN).

[20] Statistics Agriculture Service, United States Department of Agriculture. http://www.nass.vsda.gov

[21] Ulate, F. (2006). Formalización de una teoría de la Mentalidad. Rev. de Matemática. Vol XIII No1.

[22] Vegan Society. http://www.vegansociety.com/