Revista Educación 18(1): 113-123, 1994

EN TORNO A LA SUMA DE FRACCIONES

Teresita Peralta Monge

Introducción

El presente estudio pretende profundizar en las formas usadas por los estudiantes, para resolver la suma de fracciones en su forma algorítmica y en su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, como un medio para establecer un marco de referencia para la construcción de conceptos relacionados con esta operación.

Parte del supuesto de que el conocimiento no puede ser transmitido, sino que debe ser construido activamente por parte del sujeto. Wheatley (1991), visualiza el conocimiento matemático como una actividad del aprendiz para construir relaciones y patrones, en contraposición a la consideración de un cuerpo de conocimientos para ser transmitidos y una colección de procedimientos para ser memorizados y practicados. En este sentido Wheatley (1989), considera que los estudiantes aprenden mejor construyendo significados por sí mismos que trabajando por procedimientos impuestos y que el maestro será mejor en su función docente, cuando más facilite la construcción de conceptos por parte del estudiante.

Diferentes estudios han señalado deficiencias en relación con la construcción de conceptos relacionados con las fracciones y sus operaciones, así como un uso mecanicista de estas y una memorización de procedimientos carentes de significado. Peralta (1989), señala una tendencia a una solución en forma mecánica de la suma de fracciones , que se manifiesta principalmente en:

1. Una conducta inconstante en la aplicación de procedimientos para su solución, que se traduce en el uso de algoritmos correspondientes a otras operaciones y mezcla de diferentes algoritmos.
2. Un tratamiento de las partes constitutivas de la fracción como simples números naturales, sin considerar su relación numerador-denominador.
3. La imposibilidad para traducir una suma de fracciones enunciada en el lenguaje simbólico-aritmético y/o verbal, a una representación gráfica en el modelo continuo o discreto de fracción de la unidad, que plasme la relación que establece la operación entre las dos fracciones.

La representación gráfica de la suma de fracciones en el modelo continuo de fracción de la unidad, demanda del uso de la relación de equivalencia de fracciones para hacer la partición del todo continuo, en un número de partes igual a un múltiplo de los denominadores, para luego, de acuerdo con el denominador y numerador de cada fracción, tomar el número de partes que corresponde a cada una de las fracciones.

En el modelo discreto de fracción de la unidad, la representación simultánea de las dos fracciones en un mismo conjunto de elementos, requiere determinar un conjunto de elementos de cardinalidad igual a un múltiplo de los dos denominadores, para luego, de acuerdo con el denominador y numerador de cada fracción, tomar el número de elementos que corresponde a cada una de las fracciones.

Figueras (1988), señala dificultades por parte de los estudiantes, para representar gráficamente la fracción en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, determina categorías de errores comunes a ambos modelos, en relación con la no consideración del todo, el predominio de la cardinalidad de la parte y errores de conteo. Respecto al predominio de la cardinalidad de la parte, señala principalmente una tendencia a asignar el numerador o denominador a la cardinalidad de la parte y omitir el denominador (o numerador), asignar a la parte el papel del todo sin considerar la relación parte-parte y asignar el número de partes que constituyen la fracción al denominador, lo que se traduce en una disociación de los elementos constitutivos de la fracción y una distorsión de la relación parte-parte y parte-todo.

Freudenthal (1983), señala que en el concepto de fracción interviene la subdivisión exhaustiva del todo en partes equivalentes, subdivisión que por lo general es hecha por niños pequeños en partes desiguales y sin usar completamente el todo.

Piaget (1966), determina que la noción de fracción depende de dos relaciones fundamentales: la relación de la parte con el todo y la relación parte-parte. Agrega que los niños presentan dificultades para hacer subdivisiones de figuras dadas, sobre todo en el caso del círculo.

Streefland (1978), señala que el hecho de que el estudiante trabaja con números naturales antes de hacerlo con fracciones, hace que se le dificulte la comprensión del concepto de fracción y que tienda a asignarle a esta un significado definido dentro del contexto de los números naturales. Considera que la equivalencia de fracciones es evidente para el estudiante cuando se representa en forma gráfica , pero le es menos evidente cuando se le presenta en el lenguaje simbólico. Determina, además, la existencia de una discrepancia entre el tratamiento concreto de las fracciones equivalentes y el algoritmo para sumar fracciones, debido a la falta de coordinación entre la introducción en el nivel concreto de las fracciones y los ejercicios vinculados a las operaciones básicas con fracciones, lo cual podría evitarse si se propician situaciones en las que el acercamiento concreto a las fracciones tenga un significado perdurable.

Respecto a la suma de fracciones de diferentes denominadores Hasemann (1981), considera que esta demanda para su solución de la realización de dos procedimientos, uno de carácter lógico, consistente en la conversión de las fracciones a fracciones equivalentes de igual denominador y otro de carácter aritmético, consistente en la suma de los numeradores.

2. Fuente de datos

Los supuestos teóricos de esta reflexión en torno a la construcción de conceptos relacionados con la suma de fracciones se fundamentan en:

1. La investigación "Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad" (Peralta, 1989), realizada por la autora de este artículo, bajo el patrocinio de la Universidad de Costa Rica y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas.
2. La experiencia práctica de la misma autora en los cursos de Matemática de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica (1989, 1990, 1991), dirigidos a estudiantes de la carrera de Bachillerato en Educación Primaria, y el análisis de ejecuciones de estos estudiantes, al resolver sumas de fracciones en su forma algorítmica y en su representación gráfica en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.
3. En los resultados obtenidos de la aplicación durante 1992, de un cuestionario tipo diagnóstico, a 108 estudiantes de sexto y sétimo años, procedentes de cuatro secciones de escuelas y colegios públicos del área urbana de la Provincia de San José. Las edades de estos estudiantes oscilan entre los once y los catorce años y los docentes a cargo de estos grupos poseen al menos el grado de profesor de enseñanza primaria en el caso de las escuelas y el de bachiller en la enseñanza de la Matemática en el caso de los colegios.

Las preguntas de este cuestionario forman parte de una prueba diagnóstico elaborada para conocer en relación con variables como la resolución de operaciones con fracciones, su representación en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad y la resolución de problemas de aplicación de estas operaciones. La validez de contenido se evidenció por criterio de jueces y se obtuvo un valor de 0.81, para la prueba de confiabilidad de alfa de Cronbach.

Se validó para ser aplicada a estudiantes de la Ciudad de México (Peralta 1989), razón por la que hubo que hacer algunas modificaciones de vocabulario en la redacción de las preguntas que se tomaron para aplicarlas a estudiantes costarricenses. Estas modificaciones consistieron básicamente en cambios como la sustitución de las palabras: "dulces" por "confites" en un problema de repartición y "pastel" por "queque" en un problema de partición por ser estos términos más familiares. Después de que se hicieron estos cambios, se hizo una aplicación piloto, para conocer acerca de la claridad de las preguntas.

3. Análisis de resoluciones de sumas de fracciones y su representación en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad

3.1 Como un primer apartado, se hará un análisis de las ejecuciones de los 108 estudiantes de sexto y sétimo años, al resolver en su forma algorítmica, las sumas

$$\text{“}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\text{”},\ \text{“}\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\text{”},\ \text{“}\frac{2}{3}+\frac{3}{6}\text{”},\ \text{“}\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\text{”}$$

Como resultado se obtuvo que en ninguna de las cuatro operaciones alcanza el 11% el porcentaje de estudiantes que logra una respuesta correcta.

El análisis de los procedimientos seguidos para resolver estas operaciones, determina como el principal error en que coinciden más de la mitad de los estudiantes, el de sumar numeradores y denominadores entre sí

$$\text{“}\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\text{,”}$$

Algunos aplicaron este procedimiento en las cuatro sumas y otros en tres, dos o una de ellas, determinando así un tratamiento de las partes constitutivas de la fracción, numerador y denominador como simples números naturales, que se suman sin considerar la relación existente entre ellas.

Otra tendencia manifiesta en el análisis, es el uso de los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones para resolver la suma y, la mezcla de todos los algoritmos para la resolución de operaciones con fracciones, lo cual puede interpretarse como una memorización por partes de cada algoritmo y el rescate de partes de un algoritmo para incorporarlas en la aplicación de otro algoritmo.

Aunque los porcentajes de incidencia de estos errores son menores al 10% en cada uno de los casos que se analizan, debido a que unos estudiantes los cometen en unas operaciones y en otras no, es importante su categorización debido a las implicaciones que pueden tener estos, en una posible ausencia de significado de parte de estos estudiantes para el algoritmo de la suma de fracciones. De los procedimientos seguidos, ameritan citarse:

- Multiplicación en cruz de numeradores por denominadores (algoritmo de la división):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

- Multiplicación de numeradores y denominadores entre sí mismos (algoritmo de la multiplicación):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- Suma de numeradores entre sí mismos y multiplicación de denominadores entre sí mismos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{bd}$$

- Multiplicación de numeradores entre sí mismos y suma de denominadores entre sí mismos:

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{b} = \frac{ac}{b+d}$$

- Suma en cruz de numeradores y denominadores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+d}{b+c}$$

- Suma del numerador y denominador de cada fracción:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$$

- Suma de los numeradores entre sí mismos y consideración de uno de los denominadores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b \text{ ó } d}$$

Cabe destacar el procedimiento seguido por un estudiante en todas las operaciones, según el cual da como resultado de la operación un número entero en el que la cifra de las decenas corresponde a la suma de los numeradores y la cifra de las unidades corresponde a la suma de los denominadores:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{1+5}{2+6} = 68$$

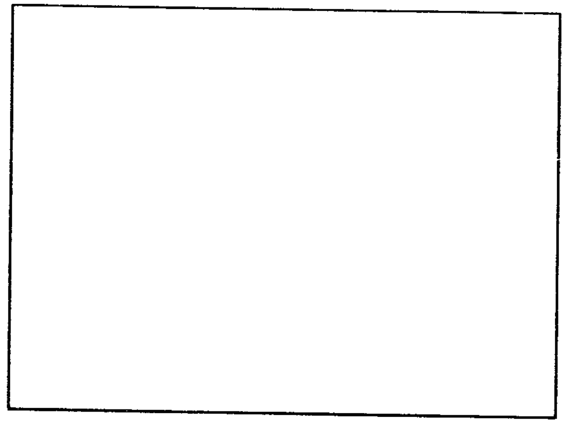
Es notable el porcentaje de respuestas (25%), en las que la complejidad de los pasos seguidos por el estudiante para resolver la operación, impide hacer una interpretación o, aparecen resultados sin ningún procedimiento que los determine, lo cual pareciera indicar que han sido dados al azar.

3.2 Análisis de las representaciones gráficas en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, realizadas por los 108 estudiantes de sexto y sétimo años.

3.2.1 Al estudiante se le solicitó hacer la siguiente representación en el modelo continuo de fracción de la unidad.

Alicia cumplió años y su mamá le hizo un queque para celebrarlo. Al día siguiente le regaló a su maestra 1/4 de su queque y a su compañero Federico le obsequió 1/6 del mismo queque.

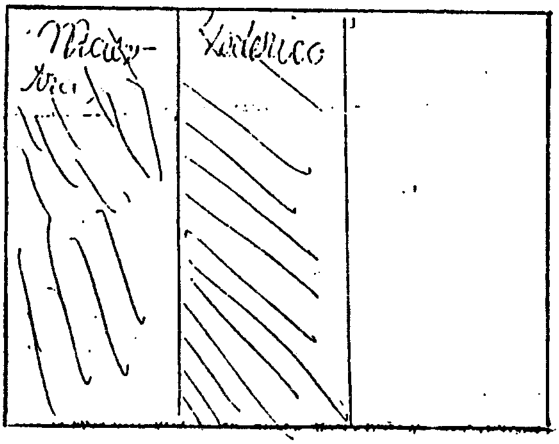
El siguiente rectángulo representa el queque que la mamá le hizo a Alicia. Representa en este, la parte que le regaló a su maestra y la que le regaló a Federico.

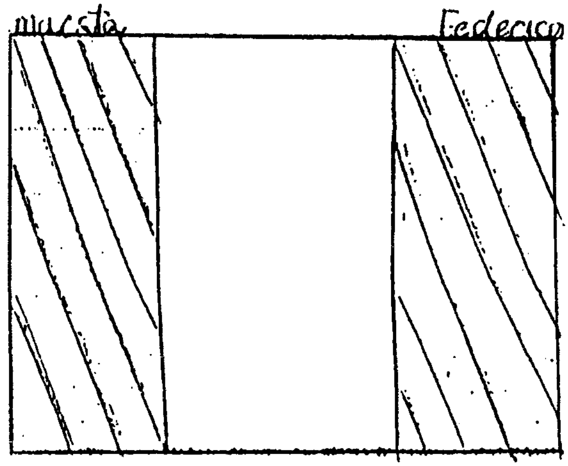


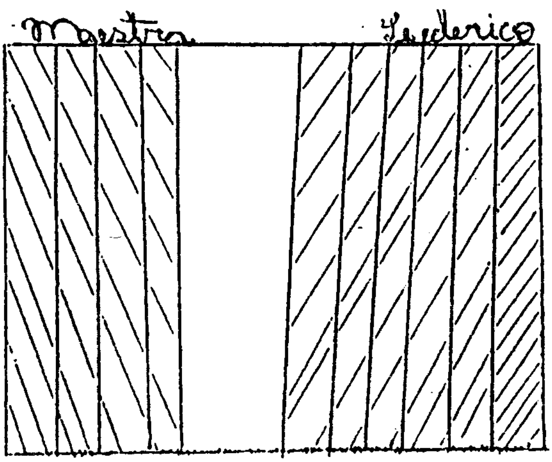
Ningún estudiante logró hacer la representación correcta del cuarto y el sexto. Un 20,37% logró representar correctamente el cuarto pero luego no pudo representar el sexto.

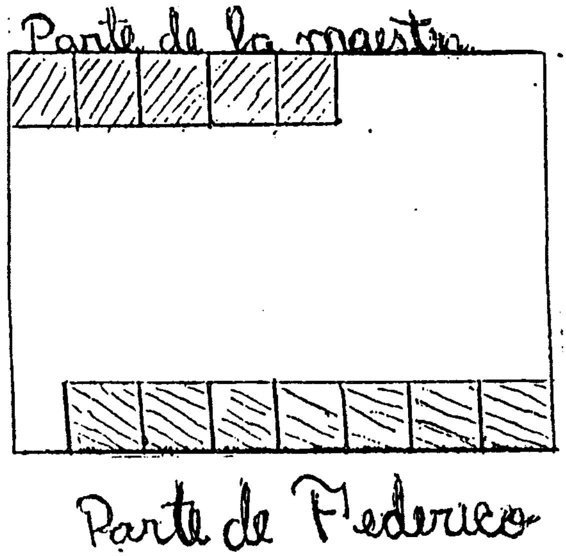
Entre los errores que ameritan analizarse están:

- Representaciones por medio de áreas que no corresponden a la cuarta y sexta parte del rectángulo (37,96%). Entre estas es notable el 18,52% que considera una área para el sexto, igual o mayor que la señalada para el cuarto.









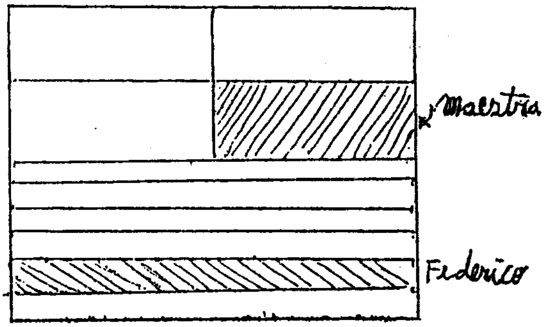
Aunque en porcentajes de incidencia menores que el 12%, las siguientes representaciones ameritan analizarse:

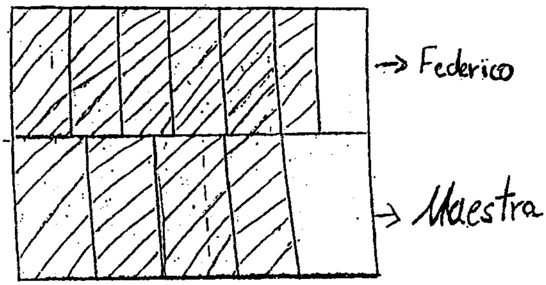
- Partición de una parte de la figura en cuartos y la otra en sextos, sin usar toda la figura. Representación que determina una distorsión del todo, debido a que no se consideran $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$

  de toda la figura, sino $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ de áreas diferentes.

El segundo ejemplo representa además subdivisiones en un número de partes igual a la suma del numerador y denominador de cada una de las fracciones.

- Partición de la figura en dos partes, subdividiendo una de las partes en cuartos y la otra en sextos. De nuevo se determina una distorsión del todo, al representar $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ de la mitad de la figura.

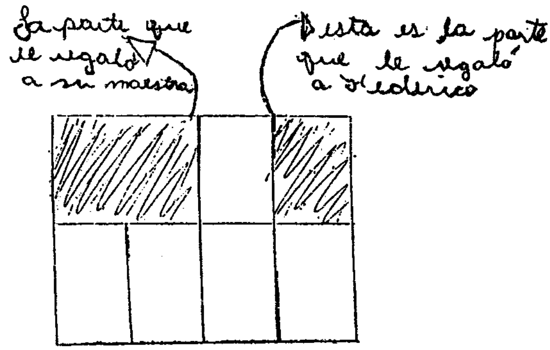




En este último ejemplo se presenta además la no división exhaustiva de la parte que se divide en sextos y la que se divide en cuartos.

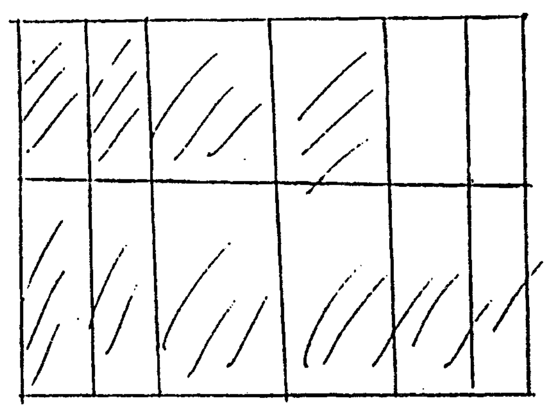
- Partición de la figura en dos partes de igual o diferente área, correspondiendo una de ellas al cuarto y la otra al sexto.

- Representación correcta del cuarto pero luego se origina una distorsión de la relación parte-todo, al hacer la partición del área restante en sextos.



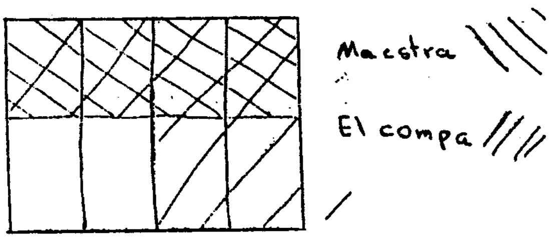
Respuestas individuales que ameritan analizarse son:

- La partición en décimos que hace un estudiante, como resultado de la suma de los numeradores y denominadores entre sí, en la que se presenta también una distorsión de la relación parte-parte, al hacer la partición del todo en un número de partes igual a la suma del numerador y denominador de la fracción $\frac{2}{10}$, resultado de la operación, para luego sombrear un número de partes igual a la cardinalidad del denominador.



- La partición en octavos y la consideración del cuarto como cuatro octavos y del sexto como seis octavos, además de la sobreposición de áreas que se presenta.

El 9,26% de los estudiantes ofreció respuestas que presentan una partición de la fi-

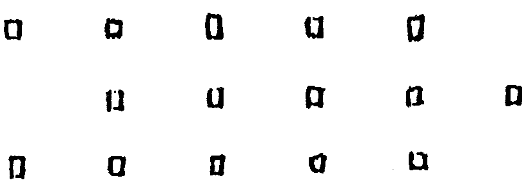


gura en un número de partes, que no tiene correspondencia con ninguno de los numeradores o denominadores de las dos fracciones, ni con el resultado de alguna operación entre estos.

3.2.2 En el modelo discreto de fracción de la unidad, se presentó a los estudiantes la siguiente situación:

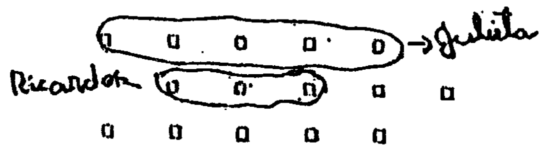
> Silvia compró 15 confites para llevar a la escuela. Le regaló $\frac{1}{5}$ de ellos a Julieta y $\frac{1}{3}$ de los mismos a Ricardo.

El siguiente dibujo representa los 15 confites que compró Silvia. Encierre la parte que corresponde a los confites que le regaló a Julieta y la parte que corresponde a los que le regaló a Ricardo.



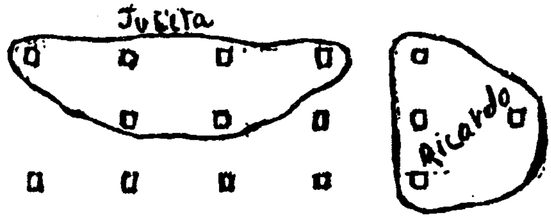
Sólo el 8,33% de los estudiantes logró hacer la representación correcta y aplicar la relación de equivalencia para determinar que la quinta parte de los quince confites corresponde a tres confites y la tercera parte a cinco confites.

El principal error es presentado por el 37,96% de los estudiantes que coincide en la representación de dos subconjuntos de cardinalidad igual a los denominadores de las dos fracciones, centrándose en la cardinalidad del denominador.

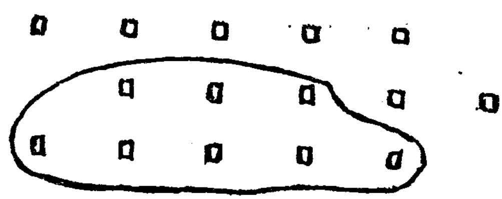


Aunque en porcentajes menores al 11% los demás errores se dirigen a:

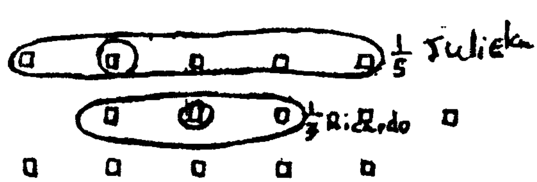
- Representación de dos subconjuntos cada uno de cardinalidad igual a la suma del numerador y denominador de cada fracción, resultado de una distorsión de la relación numerador-denominador.



- Representación de un subconjunto de cardinalidad igual a la suma de los dos denominadores de las dos fracciones, consecuencia de un tratamiento de las partes constitutivas de la fracción como números naturales que se suman entre sí.



- Representación de dos subconjuntos cada uno de cardinalidad igual al denominador de cada fracción y, en cada subconjunto se determina a la vez un subconjunto de cardinalidad igual al respectivo numerador. Distorsión del todo al representar cada fracción en un determinado subconjunto y no como parte de un mismo conjunto.



- Un estudiante representó dos subconjuntos de cardinalidad igual a los numeradores (centramiento en la cardinalidad del numerador), cinco estudiantes (4,63%) no ofrecieron respuesta alguna y más de la tercera parte de los estudiantes (36,11%), determinó por respuestas representaciones de subconjuntos de una cardinalidad que no tiene ninguna correspondencia con ninguno de los numeradores o denominadores de las dos fracciones, ni con el resultado de alguna operación entre estos.

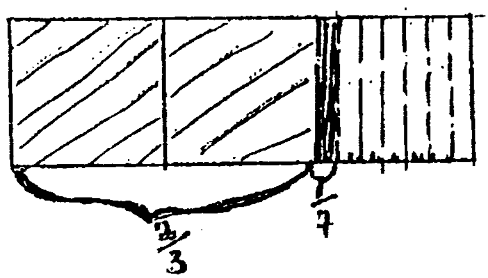
3.3 Análisis de las ejecuciones de estudiantes de la carrera de bachillerato en Educación Primaria (Universidad de Costa Rica, 1989, 1990, 1991), al representar la suma de fracciones, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.

Desde una perspectiva en la cual se concibe el uso del algoritmo para resolver la suma de fracciones de manera que la operación tiene un significado para el estudiante en cuanto a la relación que establece entre las dos fracciones, es de suponer que el estudiante que domina el algoritmo de esta operación debe presentar también una ejecución correcta al representar gráficamente esta operación en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad. Sin embargo, algunas ejecuciones presentadas por estudiantes del nivel universitario, permiten deducir que a pesar de su nivel de escolaridad, en su caso, estos no han logrado construir un significado para esta operación.

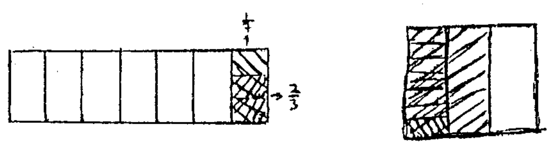
3.3.1. En relación con el modelo continuo de fracción de la unidad, se presenta a continuación un análisis de algunas ejecuciones significativas al hacer la representación de la suma: “$\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$” :

- En el caso que se presenta a continuación, a pesar de que el estudiante resolvió correctamente la suma $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ en su forma algorítmica, no logró trasladar el procedimiento seguido a la representación gráfica y en lugar de representar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{7}$ de un mismo todo, considera $\frac{2}{3}$ de toda la figura y $\frac{1}{7}$ del tercio restante, originando una distorsión del todo.

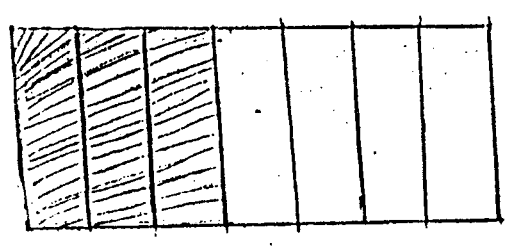
$$“\frac{2}{3} + \frac{1}{7}” = \frac{14}{21} + \frac{3}{21} + = \frac{17}{21}$$



- En la figura de la izquierda se determina una partición de la figura en sétimos, para luego representar $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{7}$ y en la figura de la derecha se determina una partición en tercios, para luego representar $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{3}$. En ambos casos se presenta de nuevo una distorsión del todo, al considerar sétimos y tercios de diferentes áreas.

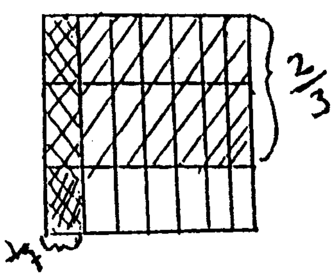


- Partición de acuerdo con el denominador mayor, para luego sombrear un número de partes igual a la suma de los numeradores de las dos fracciones.

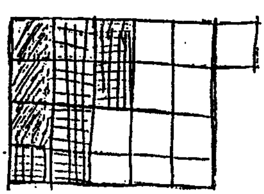


- De acuerdo con los pasos seguidos en el algoritmo, se determina una partición en 21 partes, pero luego se sobreponen las áreas correspondientes a $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{7}$.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{14}{21} = \frac{3}{21} = \frac{17}{21}$$

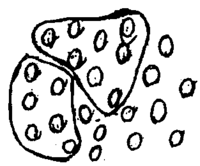


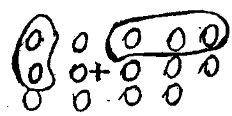
- Partición en 21 partes, resultado de un múltiplo del numerador y denominador, pero luego no se aplica la relación de equivalencia para determinar el número de partes que corresponden a $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{7}$. En el primer caso se determina un número de partes igual al denominador mayor y en el segundo caso también se da un centramiento en la cardinalidad del denominador, al sombrear un número de partes igual a los denominadores.



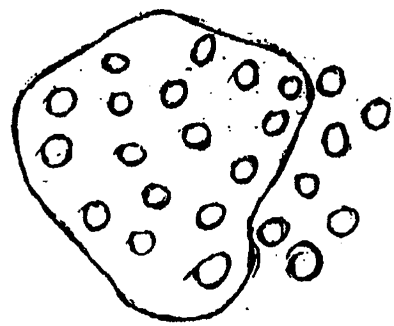
3.3.2 A continuación se presentan algunas ejecuciones al representar la suma $\frac{2}{6} + \frac{3}{8}$ en el modelo discreto de fracción de la unidad.

- Sin considerar la relación numerador-denominador, la representación de la izquierda de subconjuntos de cardinalidad igual a los denominadores de las dos fracciones, determina un centramiento en la cardinalidad del denominador mientras que en la representación de la derecha el centramiento se da en la cardinalidad del numerador, al representar dos subconjuntos de cardinalidad igual a los numeradores.

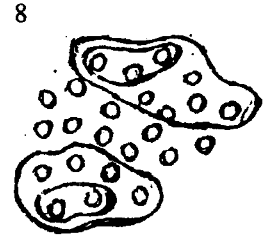




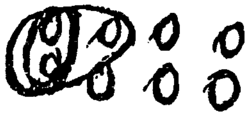
- Representación de un subconjunto de cardinalidad igual a la suma de los dos denominadores, resultado de un tratamiento de las partes constitutivas de la fracción como simples números naturales que se suman además del centramiento en la cardinalidad del denominador.



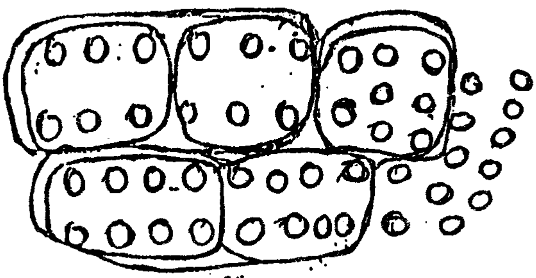
- Representación de dos subconjuntos de cardinalidad igual a los denominadores y, en cada subconjunto se determina a la vez un subconjunto de cardinalidad igual al respectivo numerador, situación que refleja una distorsión del todo al no representar $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{8}$ de todo el conjunto.



- Centramiento en la cardinalidad de los numeradores al representar un subconjunto de cardinalidad igual al mayor de los numeradores para luego considerar otro subconjunto de cardinalidad igual al menor de los numeradores.



- Al determinar dos subconjuntos de seis elementos cada uno y tres subconjuntos de ocho elementos cada uno, se considera el numerador como el determinante de un número de subconjuntos de una cardinalidad igual al respectivo denominador, manifestándose una distorsión de la relación numerador-denominador.



IV. Conclusiones

Este estudio pretende aportar por medio de un análisis cualitativo, evidencias sobre posibles modelos de entendimiento respecto a la suma de fracciones y las relaciones implícitas en esta operación.

El análisis de las resoluciones de sumas de fracciones en su forma algorítmica y sus representaciones gráficas en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, determina para los estudiantes de sexto y sétimo años que participaron en el estudio, distorsiones en cuanto a la relación que establece la operación entre las fracciones que se están sumando, debido a que presentan un manejo inadecuado del todo continuo o discreto, de la relación numerador-denominador o de la relación de la parte con el todo.

Las ejecuciones en el plano de la algoritmia, permiten concluir que la mayoría de estos estudiantes no cuenta con procedimientos que los lleven a obtener una respuesta correcta para la suma de fracciones y no parecen haber construido una relación entre la suma y la equivalencia de fracciones, por cuanto no hacen uso de esta para hacer la conversión de las fracciones que se están sumando a fracciones equivalentes de igual denominador, en su lugar tienden a hacer uso de los algoritmos de otras operaciones, aplicar procedimientos resultado de una mezcla de los algoritmos de la suma, multiplicación o división de fracciones y operar con las partes constitutivas de la fracción (numerador y denominador) como simples número naturales que se suman, multiplican o dividen entre sí, procedimientos que pueden interpretarse como una memorización sin significado de los algoritmos o partes de estos. Situación que es confirmada en la mayoría de los casos por las representaciones de sumas de fracciones que hacen estos estudiantes en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad, en las que no hacen transferencia de la relación de equivalencia entre fracciones a una representación gráfica y en su intento por representar las dos fracciones que se están sumando en una misma figura (modelo continuo) o en un mismo conjunto (modelo discreto), coinciden en distorsiones del todo y de la relación parte-parte y parte-todo que se manifiestan principalmente en:

- Representaciones en el modelo continuo en las que se trabaja con dos todos al representar cada fracción en una área determinada de la figura, sin considerar que las fracciones que se están sumando pertenecen a un mismo todo o en las que se coincide en no usar toda la figura al representar las fracciones que se están sumando.

- Representaciones en el modelo discreto en las que cada fracción es representada correctamente, pero cada una en su propio conjunto. definiéndose así dos todos.

- Ejecuciones en las que se coincide en un predominio de la cardinalidad del numerador o del denominador, sin considerar la relación existente entre ambos, ni su relación con el todo.

- Partición de la figura en el modelo continuo, en un número de partes que no tiene correspondencia con los denominadores de las fracciones que se están sumando.

- Representación en el modelo discreto de subconjuntos de una cardinalidad que no tiene ninguna correspondencia con los denominadores de las fracciones que se están sumando.

Aunque se desconoce si estas distorsiones respecto al todo y las relaciones parte-parte y parte-todo están presentes en estos estudiantes en el nivel concreto, por cuanto el estudio no exploró por medio de la manipulación de objetos, sus ejecuciones en el plano de la algoritmia y de la representación gráfica pueden considerarse como indicadores en estos casos de un tratamiento mecanicista de la suma de fracciones y la ausencia de un aprendizaje significativo por parte del estudiante, situación que en ocasiones se mantiene aun en el nivel universitario, como en los casos analizados de estudiantes de la carrera de bachillerato en Educación Primaria, en los que su ejecución en el nivel gráfico pareciera reflejar que en ellos su avance a través de los diferentes niveles del sistema educativo, no les ha facilitado la construcción de estructuras en relación con la suma de fracciones y su significado.

En este sentido es necesario propiciar situaciones que permitan el desarrollo de procesos reflexivos que faciliten al estudiante la construcción de relaciones y significados a través de sus propias experiencias, enfrentándolos a la ejecución, interpretación, discusión y descripción de procesos de solución de situaciones problemáticas en relación con las operaciones con fracciones y su representación en los niveles concreto y gráfico, para que el tratamiento de sus fracciones y sus operaciones no se limite al simple manejo mecanicista de sus algoritmos.

V. Bibliografía

Figueras, Olimpia. *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. México, Sección Matemática Educativa, CINVESTAV, 1988.

Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda, D. Reidel Publishing, Co., 1983.

Hasemann, K. "On the Difficulties with Fractions". *Educational Studies in Mathematics*, Alemania, 1981.

Peralta, T. *Resolución de la suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. México, CINVESTAV, 1989.

Piaget, J., Inhelder B., Szeminsha, A. *The Child's Conception of Geometry*. Londres, Routledge and Reagan Paul, 1966.

Streefland, L. "Some observational results concerning mental constitution of the concept of fraction". *Educational Studies in Mathematics, E.U.A., 1978.*

Wheatley G. *"Perspectiva constructivista en el aprendizaje de la Matemática y la Ciencia"*. Primera conferencia internacional en la Historia y Filosofía de Ciencias en la Enseñanza de las Ciencias. Tallahassee, Florida, 1989.

Wheatley G. "Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning". *Science Education U.S.A.* Estados Unidos, John Wiley & Sons, Inc, 1991