Revista Educación 15(2): 75-80, 1991

EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Teresita Peralta Monge

I. Introducción

Este trabajo pretende establecer un marco de ideas que proporcione un fundamento teórico para el aprendizaje de las fracciones.

Parte del supuesto de que el aprendizaje de la Matemática es potenciado por el descubrimiento del estudiante, por su propia construcción de significados y no por la práctica de procedimientos impuestos para ser memorizados y la aplicación de reglas para las que no tiene ningún significado.

Se refiere al aprendizaje de las fracciones por ubicarse estas entre los temas de los programas de Matemática que presentan más dificultad para el aprendizaje de los estudiantes de los tres ciclos de la Educación General Básica y para su tratamiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje por parte de los maestros de escuela primaria y profesores de secundaria. Al respecto, en el Diagnóstico Evaluativo de la enseñanza de la Matemática en la Educación General Básica y Educación Diversificada, (Esquivel et al, 1983), en pruebas de conocimientos mínimos aplicadas a una muestra de estudiantes de cuarto y sexto grados, procedentes de 127 escuelas de todo el país, como resultado de un análisis respecto a criterios mínimos de dominio de objetivos, se encontró que estos estudiantes no mostraron dominio de los objetivos relacionados con la identificación de fracciones en el caso de estudiantes de cuarto grado y la resolución de operaciones con fracciones en el caso de sexto grado. Estudios posteriores realizados en el Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (I.I.M.E.C.), (Esquivel et al 1987, 1988), coinciden con los resultados obtenidos en este diagnóstico.

El bajo rendimiento académico en relación con el aprendizaje de las fracciones y sus operaciones, conduce a la necesidad de profundizar en la construcción de conceptos relacionados con fracciones como lo son las relaciones parte -todo y parte- parte y la utilización de las operaciones con fracciones en situaciones específicas correspondientes a los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad.

Los supuestos teóricos de esta reflexión en relación con el aprendizaje de las fracciones se fundamentan en la investigación "Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad" (Peralta 1989), realizada por la autora de este artículo en 1989, en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México D.F., bajo el patrocinio de la Universidad de Costa Rica y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas y en la experiencia práctica de la misma autora en los cursos de Matemática para estudiantes de la carrera de Bachillerato en Educación Primaria.

2. El término fracción.

Kieren (1978), interpreta el número racional desde perspectivas diferentes como: fracciones que pueden ser comparadas y con las que se puede ejercer la acción de sumar, restar, multiplicar o dividir; fracciones decimales; clases de equivalencia de fracciones; números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq \emptyset$; operadores multiplicativos; elementos de un campo cociente con números de la forma $x = \frac{p}{q}$ donde x satisface la ecuación q x = p, y como medidas o puntos en la recta numérica.

Al respecto Freudenthal (1983), afirma que el número racional presenta distintas formas fraccionarias de las cuales cada una vive su propia vida y se le conoce con el nombre de fracción. Para él la fracción es la palabra con la que se introduce el número racional y está relacionada con la acción de romper, fracturar. Considera que expresiones como "la mitad de, un tercio de...", describen una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra.

Piaget et al (1966) consideran que la relación de la parte con el todo y la relación parte - parte son básicas en la construcción de la noción de fracción. Cita como características de las fracciones: la existencia de un todo divisible compuesto de elementos separables, el requerimiento de un número determinado de partes, la división exhaustiva del todo, la igualdad de las partes de la división y la existencia de una relación fija entre el número de partes en las que el todo continuo es dividido y el número de intersecciones. Considera, también, el carácter dual de la fracción en el sentido de que esta es parte del todo original; pero también es una parte en sí misma que puede ser subdividida de nuevo. Para un entendimiento completo del concepto de fracción, Piaget señala como requisito la habilidad para resolver las operaciones inversas de encontrar una parte fraccionaria de la unidad y la de determinar la unidad de la cual es parte una determinada fracción. Define además la conservación del todo como una condición esencial de la subdivisión operatoria, o sea que la suma de las partes iguala al todo original.

Dickson et al (1984), consideran que la diversidad de significados y aplicaciones que encierra el concepto de fracción hacen difícil el manejo de estas. La fracción puede estar indicando una sub-área de una región entera, una comparación entre un subconjunto y el conjunto de objetos que lo incluye, un punto en la recta numérica intermedio entre los puntos correspondientes a dos números enteros o el resultado de una división.

Hasemann (1981) señala que una causa de la dificultad del estudiante para trabajar con fracciones radica en el hecho de que estas son menos usadas en situaciones de la vida diaria que los números naturales y las reglas para su aritmética son más complejas que las existentes para trabajar con números naturales, razones por las que en muchos casos el estudiante las aplica en forma mecánica sin entenderlas.

3. Representación gráfica de las fracciones.

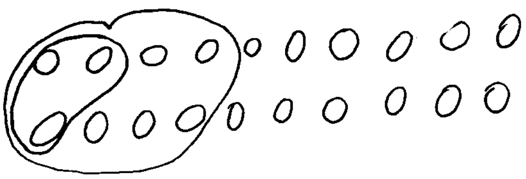
La fracción puede ser parte de un todo continuo o discreto, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura.

En el modelo continuo de fracción de la unidad, la fracción es un medio para relacionar la parte con el todo, se contextualiza con figuras geométricas en las que la fracción indica una subregión de la región entera. Un área rectangular de cien metros de largo por sesenta metros de ancho representa un todo definido continuo.

En el modelo discreto de fracción de la unidad, la fracción es un medio para relacionar un subconjunto con el conjunto que lo incluye. Un conjunto formado por quince bolas es un todo definido discreto, mientras que el conjunto formado por todos los seres humanos representa un todo indefinido discreto, el cual puede ser estructurado de acuerdo con variables como nacionalidad, raza u otras. Figueras (1988) encontró que los aspectos que intervienen en la comprensión del concepto de fracción son los mismos en los modelos continuo y discreto: el todo debe estar bien definido, el denominador de la fracción indica la división del todo, el todo debe dividirse en partes iguales, el numerador indica la parte del todo que se va a tomar, la fracción indica una relación entre la parte y el todo ya que el numerador es al denominador como la parte es al todo.

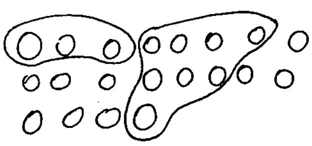
Desde una perspectiva en la cual se concibe que el concepto de fracción tiene un significado para el estudiante en cuanto a la relación parte -parte y parte- todo, es de suponer que este pueda realizar correctamente su representación gráfica en el modelo continuo o discreto de fracción de la unidad. Sin embargo, algunas ejecuciones realizadas por estudiantes universitarios en los cursos de Matemática en Educación Primaria (1989, 1990), permiten deducir que a pesar de su nivel de escolaridad, no han logrado construir un significado para estas relaciones (parte -parte o parte- todo) involucradas en el concepto de fracción. Esta ausencia de significado se puede deducir de las representaciones hechas por estos de la fracción $\frac{3}{8}$ en un conjunto formado por veinte elementos. El número de elementos se debe a que el objetivo del profesor era que al tratar de representar $\frac{3}{8}$ en un conjunto formado por veinte elementos, estos estudiantes llegaran a descubrir la presencia de un caso en el que no existe un todo divisible compuesto de elementos separables, lo cual conlleva a la imposibilidad de determinar las partes. En contra de lo esperado, solo uno de los estudiantes consideró que la cardinalidad del conjunto debería ser igual a un múltiplo del denominador. Los demás, sin cuestionar la no divisibilidad de 20 entre 8, hicieron las representaciones que se agrupan en las cuatro siguientes categorías:

1.



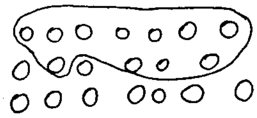
En esta representación, al tomar tres elementos de un subconjunto formado por ocho elementos e ignorar el resto de los elementos del conjunto, se manifiesta una distorsión del todo al no considerarlo en todos sus elementos y restringir la lectura a una parte de la imagen.

2.



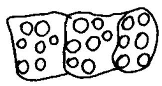
Al determinar dos subconjuntos formados por tres y ocho elementos respectivamente, esta representación se centra en la cardinalidad del numerador y denominador. Toma a estos como simples números naturales, sin considerar la relación existente entre ellos (parte-parte) ni su relación con el todo (parte-todo), lo cual puede traducirse en un predominio de la cardinalidad de las partes.

3.



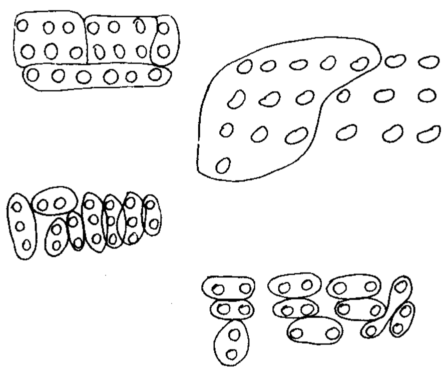
Al presentar un subconjunto de cardinalidad igual a la suma de la cardinalidad del numerador y denominador, esta representación muestra una tendencia a un tratamiento de las partes de la fracción (numerador y denominador) como simples números naturales que se suman, sin considerar la relación existente entre estos.

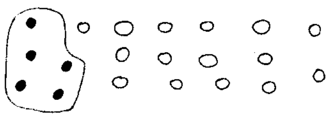
4.

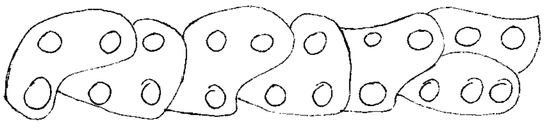


Esta representación muestra un predominio de la cardinalidad del numerador, al omitir el denominador y determinar un número de sucojuntos de acuerdo con el numeral correspondiente al numerador.

5.





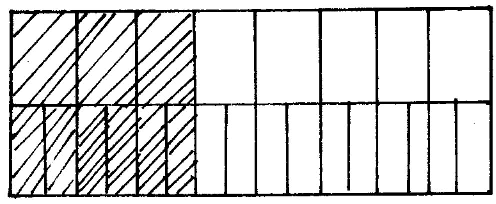


Estas ejecuciones presentan subconjuntos de una cardinalidad que no tiene ninguna correspondencia con el numerador o denominador de la fracción, ni con el resultado de alguna operación entre estos. Pareciera que en estos estudiantes existe un desconocimiento total acerca de qué hacer con la expresión $\frac{3}{8}$, situación que puede traducirse en una ausencia de significado para esta.

En el modelo continuo de fracción de la unidad, se han obtenido también representaciones de fracciones de parte de estudiantes universitarios en los cursos de Matemáticas en Educación Primaria (1989, 1990), que ameritan ser analizadas, como es el caso de la representación de las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{16}$ en un mismo todo, ejecución que tenía como objetivo que el estudiante comprobara en forma gráfica la equivalencia existente entre estas dos fracciones.

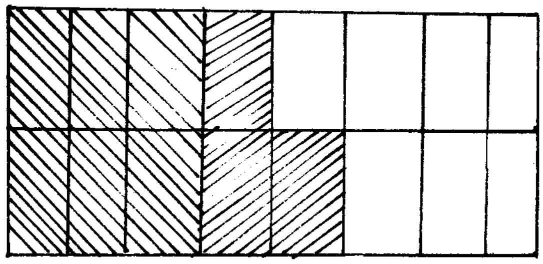
Los siguientes son ejemplos de las representaciones más relevantes.

1.



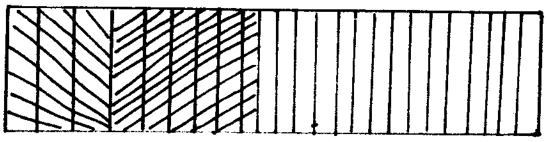
En su intento por representar las dos fracciones en una misma figura, esta respuesta muestra una distorsión del todo, al trabajar con dos todos sin considerar que $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{16}$ son fracciones de un mismo todo. Se hace una división de la figura en dos mitades para hacer la partición de una de las partes de acuerdo con el denominador de una de las fracciones y de la otra parte de acuerdo con el denominador de la otra fracción, lo cual hace que en realidad se esté dando la partición del todo en dos todos que se manejan por separado, de acuerdo con el denominador de cada una de las fracciones.

2.



Esta ejecución presenta una distorsión de la partición, al representar octavos y dieciseisavos por áreas de igual tamaño.

3.



Este caso podría analizarse como una distorsión de la partición, debido a que cada una de las áreas que representa octavos no mide el doble de cada una de las áreas que representan dieciseisavos. Además, la división irregular en veinticuatro partes no corresponde a un número de partes que sea múltiplo de dieciséis; ni tampoco corresponde a un múltiplo de dieciséis, la subdivisión en veintiún partes más pequeñas que se determina.

4. Hacia un significado del concepto de fracción

La mecanización y la práctica tienen una larga permanencia en la historia de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, especialmente en la aritmética. Desde la década de los 20, con la llamada "Psicología de la mecanización y la práctica" o "Teoría conexionista del aprendizaje de Thorndike", se ha conservado en general la tendencia al uso de la mecanización y la práctica en la construcción de destrezas aritméticas. En la década de los 60, surgen nuevos enfoques en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática que atacan a los métodos de cómputo tradicionales, por considerar que la comprensión de las estructuras matemáticas que subyacen a los procedimientos y conceptos impartidos en el aula es fundamental para el logro de un aprendizaje significativo (Valdemoros 1987).

Para que el tratamiento de las fracciones no se quede en la consideración de estas como simples objetos de cálculo, centrando el papel de la instrucción en la manipulación de símbolos y la memorización de términos y reglas, sino que lleve al estudiante a un aprendizaje significativo, es necesario que este tratamiento se base en la naturaleza del concepto de fracción y se presenten al estudiante situaciones de aprendizaje que le faciliten la construcción del significado de una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ representativa de una fracción, construcción que depende del significado que otorgue el estudiante a las relaciones parte -parte y parte- todo. Para todo es indispensable también que el estudiante construya su conocimiento en relación con las características de la fracción en cuanto a la definición de un todo divisible, la división exhaustiva del todo, la equidad de las partes, las funciones que corresponden al numerador y al denominador, la conservación del todo aún después de la partición, el carácter dual de la fracción y la determinación de la unidad de la que es parte una determinada fracción; las cuales parecen dejarse de lado en muchas situaciones de aprendizaje.

Conclusión

El análisis de estos casos presentados por estudiantes universitarios, los cuales no tienen éxito cuando se les solicita hacer la representación gráfica de una determinada fracción, puede ser un indicador de una enseñanza-aprendizaje de las fracciones carente de una construcción de significados. Estos resultados parecen corroborar el hecho de que la simple práctica no genera significados y la repetición no conduce a la comprensión.

Esta problemática en relación con el significado del concepto de fracción abarca también al significado de las operaciones suma, resta, multiplicación y división, en cuanto a la relación que establece cada una de estas entre las fracciones con las que se está operando.

Una de las principales dificultades que enfrenta el estudiante para la adquisición de conceptos relacionados con las fracciones es que su aritmética difiere de la aritmética de los números naturales. Como el estudiante ha trabajado primero con números naturales, tiende, aún en el nivel universitario como sucede en los casos analizados, a una disociación de los elementos constitutivos de la fracción, tratando sus partes como simples números naturales. Situación que amerita la realización de investigaciones cuyo objetivo sea conocer, con mayor profundidad, si el estudiante traslada a las operaciones con fracciones, la aritmética de los números naturales.

Es necesario profundizar también en la investigación acerca de cuál modelo de representación gráfica de la fracción, continuo o discreto, favorece más la interpretación de la fracción, el reconocimiento del todo del cual es parte, la visualización de la equivalencia de fracciones y la relación que se establece entre las fracciones que intervienen en una operación de suma, resta, multiplicación o división, para que el tratamiento de las fracciones no se convierta en una simple mecanización de algoritmos.

En relación con la labor del maestro en el aula, es recomendable el uso del material manipulativo y pictográfico, como un recurso en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en busca de la construcción de significados en torno a las fracciones por parte del estudiante, lo cual no puede facilitar el maestro si él mismo no ha construido esos significados, razón por la que es tarea primordial de los profesores universitarios formadores de maestros permitir el acceso de sus propios estudiantes a esta construcción de significados, los cuales en muchos casos no poseen por haber participado de un proceso de aprendizaje de la Matemática orientado hacia la memorización y repetición de algoritmos en forma mecánica.

Bibliografía

Esquivel J.; Delgado V.; Peralta, T. *Diagnóstico Evaluativo de la Enseñanza de la Matemática, en la Educación General Básica y Educación Diversificada*. Costa Rica, I.I.M.E.C., Universidad de Costa Rica, 1983.

Esquivel, J. et al. *Resultados de las Pruebas Nacionales de conocimientos mínimos: Matemática y Español.* Costa Rica, I.I.M.E.C., Universidad de Costa Rica, 1987.

Esquivel J. et al. *Resultados de las Pruebas Nacionales de conocimientos mínimos: Matemática, Español, Estudios Sociales y Ciencias*. Costa Rica, I.I.M.E.C., Universidad de Costa Rica, 1988.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. *Children Learning Mathematics:* A Teacher Guide to Recent Research. Gran Bretaña, Holt, Rinehart and Winston, Ltda. 1984.

Figueras, O. *Dificultades de Aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. México, Sección Matemática Educativa, CINVESTAV, 1988.

Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda, D. Reidel Publishing, Co., 1983.

Hasemann, K. "On the Difficulties with fractions". *Educational Studies in Mathematics*, Alemania, 1981.

Kieren, T. "On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers". *Number and Measurement: Papers from a Research Workshops*, Columbus, E.U.A., Editor; Lesh, R., ERIC/SMEAC, 1978.

Peralta, T. *Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. México, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, 1989.

Piaget, J., Inhelder B., Szeminsha, A. *The Child's Conception of Geometry*. Londres, Routledge and Reagan Paul, 1966.

Valdemoros, M. *"Psicología del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas"*. México, Sección de Matemática, 1987.