Revista Educación 12(2):63-68, 1988

LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

Teodora Tsijli Angelaki

Introducción

En el sistema educativo costarricense, cada una de las asignaturas tiene su propio programa para cada nivel.

Los programas de matemática presentan una lista de contenidos "lógicamente" estructurados; podemos decir que esta secuencia lógica no responde mínimamente al desarrollo histórico de las matemáticas, sino que corresponde a una presentación rigurosa de un sistema axiomático deductivo aunque en la puesta en práctica de estos programas no se muestra ni exige este carácter. A menudo la rigidez de los programas tiene como resultado considerar que la presentación de cada uno de los temas conlleva cierto grado de rigidez de enfoque; pareciera que para cada tema existe, independientemente de la metodología que se utilice -aunque a menudo es la expositiva-, una única forma de presentación. Es mi opinión que en la mayoría de los casos es posible combinar datos históricos, concepto y aplicación del tema haciendo un mapeo con distintas posibilidades. Es este exactamente mi objetivo con el tema "irracionalidad de raíz cuadrada de dos" desde el punto de vista del binomio historia-concepto.

La irracionalidad del dos se utiliza para introducir el Conjunto de Números Reales en el noveno año de nuestra Enseñanza General Básica. A partir de allí la mayor parte de los contenidos que se ofrecen en el Ciclo Diversificado descansan, se apoyan o están relacionados con este Conjunto de Números Reales que comúnmente denotamos como $\mathbb{R}$.

Es deseable que al concluir la Enseñanza Media el estudiante maneje con soltura las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, potenciación en $\mathbb{R}$, así como el concepto de función y continuidad.

Funciones específicas como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas tienen como soporte la "completitud de los números reales", propiedad esta que se debe a la existencia de los números irracionales. El primer número irracional históricamente es el que corresponde a la medida de la diagonal de un cuadrado de lado uno y es el que llamamos "raíz cuadrada de dos". Este hecho de representación gráfica por medio de un cuadrado, supongo que nos induce a introducir $\mathbb{R}$ utilizando la $\sqrt{2}$ como primer número irracional.

El descubrimiento de este tipo de números llamados irracionales está asociado a leyendas a las que naturalmente no me voy a referir. No omito, sin embargo, recordar que si bien se conocía que la razón de la medida de una circunferencia a su diámetro era una constante hoy conocida como el número π, el carácter de irracionalidad de este número se demuestra en el siglo XVIII.

Enfoque Histórico

Quien descubre la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es Pitágoras de Samos (siglo VI A.C.), el padre de las matemáticas griegas.

Mencionar el nombre de Pitágoras y su Escuela naturalmente no es suficiente.

Es posible referirse a Pitágoras desde distintos puntos de vista, dependiendo del "ambiente de clase".

Pitágoras como matemático:

Se atribuye a Pitágoras la demostración de la proposición 47 del libro I de Euclides que dice: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados". También en geometría se considera que se debe a los Pitagóricos la construcción de los poliedros regulares, tetraedro, cubo y dodecaedro.
En el campo del álgebra se atribuye a los pitagóricos los conceptos de media aritmética, media geométrica, y media armónica, así como el planteamiento de varias propiedades de las proporciones.

Pitágoras y su teoría de números:

Podemos referirnos a Pitágoras como matemático que crea y desarrolla conceptos en el campo de la teoría de números; números primos, números amigos, números perfectos, números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, etc. e ilustrar con ejemplos la extraordinaria gracia que presentan, así como los juegos que de ellos se derivan.

Pitágoras filósofo:

Hablar de Pitágoras como filósofo místico y sus teorías filosóficas de explicar el mundo que nos rodea sobre la base de números, es otra alternativa.

Euclides:

Otra fuente histórica que podemos utilizar es Euclides (siglo III A.C.) quien escribió varias obras que han llegado hasta nosotros como: Datos, La División de las Figuras, La Optica, entre otros. Su obra maestra, "Los Elementos", determina la enseñanza de la geometría hasta nuestros días y es el que contiene la primera prueba escrita de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos.
En "Los Elementos" no solamente se da una concepción de ciencia matemática sino que también se nota una presentación altamente valiosa desde el punto de vista didáctico.

Platón:

Tengo presente la impresión de mis estudiantes de tercer año de colegio cuando su profesora de matemáticas tras una breve introducción sobre Platón (429-348 A.C.) daba lectura del fragmento del "Teetetes" que por su belleza transcribo.

"*Sócrates:* Por consiguiente, cuando se pregunta lo que es la ciencia, es ponerse en ridículo el dar por respuesta el nombre de una ciencia, puesto que es responder sobre el objeto de la ciencia, y no sobre la ciencia misma, que es a la que se refiere la pregunta.
Teetetes: Así parece.
Sócrates: Eso es tomar un largo rodeo, cuando puede responderse sencillamente y en pocas palabras. Por ejemplo, a la pregunta: ¿qué es el barro?, es muy fácil y sencillo responder, que es tierra mezclada con agua, sin acordarse de los distintos obreros que se sirven de él.
Teetetes: La cosa me parece ahora fácil, Sócrates. La cuestión es de la misma naturaleza que la que nos ocurrió hace algunos días a tu tocayo Sócrates y a mí en una conversación que tuvimos.
Sócrates: ¿Qué cuestión, Teetetes?
Teetetes: Teodoro nos enseñaba algún cálculo sobre las raíces de los números, demostrándonos que

las de tres y de cinco no son conmensurables en longitud con la de uno, y en seguida continuó así hasta la de diez y siete, en la que se detuvo. Juzgando, pues, que las raíces eran infinitas en número, nos vino al pensamiento intentar el comprenderlas bajo un solo nombre, que conviene a todas.

Sócrates: ¿Habéis hecho ese descubrimiento?

Teetetes: Me parece que sí, juzga por ti mismo.

Sócrates: Veamos.

Teetetes: Dividimos todos los números en dos clases: los que puede colocarse en filas iguales, de tal manera que el número de las filas sea igual al de unidades de que cada una consta, las hemos llamado cuadrados y equiláteros, asimilándolos a las superficies cuadradas.

Sócrates: Bien.

Teetetes: En cuanto a los números intermedios, tales como el tres, el cinco y los demás, que no pueden dividirse en filas iguales de números iguales, según acabamos de decir, y que se componen de un número de filas menor o mayor que el de las unidades de cada una de ellas, de donde resulta que la superficie que la representa está siempre comprendida entre lados desiguales, a estos números los hemos llamado oblongos, asimilándolos a superficies oblongas.

Sócrates: Perfectamente. ¿Qué habéis hecho después de esto?

Teetetes: Hemos comprendido, bajo el nombre de longitud,[1] las líneas que cuadran el número plano y equilátero, y bajo el nombre de raíz,[2] las que cuadran el número oblongo, que no son conmensurables por sí mismas en longitud con relación a las primeras, sino sólo por las superficies que producen. La misma operación hemos hecho respecto a los sólidos.

Sócrates: Perfectamente, hijos míos, y veo claramente que Teodoro no es culpable de falso testimonio.

Teetetes: Pero, Sócrates, no me considero con fuerzas para responder a lo que me preguntas sobre la ciencia, como he podido hacerlo sobre la longitud y la raíz, aunque tu pregunta me parece de la misma naturaleza que aquélla. Así es posible que Teodoro se haya equivocado al hablar de mí."

En este fragmento de la obra de Platón "*Teetetes o de la Ciencia*", Sócrates parte del teorema de Pitágoras, para explicar lo que es ciencia y "demuestra" la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En ese texto se exhibe el método socrático de filosofar, el arte de ayudar a dar a luz a la inteligencia, la mayeútica, y además sirve como fuente a los historiadores de la Ciencia en cuanto a que se conocía el carácter de irracionalidad de los números "oblongos" hata el diez y siete.

Es mi opinión que utilizar la literatura, la historia, las fuentes primarias, permite ver, sentir y transmitir el carácter humano de las matemáticas.

---

(1) 0 racional
(2) 0 irracional

El concepto matemático

Es común presentar "la prueba" de la irracionalidad de raíz de dos para ilustrar el carácter de sistema-lógico deductivo de las matemáticas.

Por lo general se expone la prueba que Euclides presenta en sus Elementos.

Sin embargo ésta no es la única demostración posible. Es importante tener a mano varias pruebas teniendo presente en cada caso las proposiciones, "teoremas", que se utilizan y que se aceptan intuitivamente como ciertas aunque no se ha estudiado su demostración formal.

A continuación presento algunas pruebas de la proposición "$\sqrt{2}$ es un número irracional" indicando en cada caso el o los teoremas en los que se fundamenta la prueba, y es lo que llamo supuestos básicos.

Todas las pruebas que aquí se dan están inscritas en el marco de la Teoría de Números.

Nota:

1. Usaremos la notación $(a,b) = 1$ para indicar que a y b son números primos entre sí.
2. El símbolo $a \mid b$ indica que "a" divide a "b" o que "b" es múltiplo de "a".

Algunas pruebas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

Prueba I:

Supóngase que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, es el cociente de enteros que suponemos primos entre sí.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (a,b) = 1 \qquad a,b \in N$$

entonces, $2 = \frac{a^2}{b^2}$ y $a^2 = 2b^2$

De aquí se concluye que $b > 1$ puesto que $b \in N$ y si $b = 1$ entonces $a^2 = 2$ o sea $\sqrt{2} = a$ $a \in N$ lo cual es falso.

Como $a^2 = 2b^2$ entonces a^2 es par, por lo tanto, a es par, o sea $a = 2c$, de aquí tenemos

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \quad 2c^2 = b^2.$$

Por razonamiento análogo al anterior b^2 es par, por lo tanto, b es par. Esto contradice la hipótesis de $(a,b) = 1$. Por el método de reducción al absurdo concluimos que

$\sqrt{2}$ no es expresable por el cociente de dos números enteros.

Supuestos básicos para esta prueba es el teorema:

T.1: Dado $n \in N$, n^2 es par si y solo si n es par.

Prueba II:

Supongamos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(a,b) = 1$ $a,b \in N$.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ entonces $2 = \frac{a^2}{b^2}$ entonces $b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}a$. Existe c, $c \in N$, c primo tal que $c \mid a$ o $c \mid \frac{a}{2}$.

En cualquier caso $c \mid a$ y $c \mid b$ lo cual contradice la hipótesis de que $(a,b) = 1$. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es racional.

En este caso los conocimientos previos que se usan en la prueba son los teoremas:

T.2: Todo número natural mayor que 1 o es primo o es el producto de números primos.

T.3: Si k es primo y divide el producto m n, $m \in N$, $n \in N$ entonces k divide m o k divide n.

Prueba III:

Supongamos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$ $a,b \in N$. Igual que en la prueba I obtenemos $2b^2 = a^2$ o sea $b^2 = b^2 = a^2$ entonces:

$$b^2 = a^2 - b^2 \qquad b^2 = (a - b)(a + b).$$

Como $b > 1$ existe $c \in N$ tal que $c \mid b$. Entonces $c \mid (a + b)$ o $c \mid (a - b)$.

En cualquiera de los dos casos c | a o sea (a,b) ≠ 1 contrario a la hipótesis. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

En este caso además de los teoremas T.2, T.3 se utiliza el: T.4: Si k es primo, k | m y k | m + n o k | m - n entonces k | n.

Prueba IV:

Consideremos la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Supongamos que $\frac{a}{b}$, a,b ∈ **Z** es solución de la ecuación.

Entonces b = 1 por lo tanto $a^2 = 2$ y $\sqrt{2}$ es entero.

Como esto es falso concluimos que la ecuación dada no tiene raíces racionales o sea $\sqrt{2}$ es irracional.

En esta demostración se hace uso del siguiente:

T.5: Si $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ $a_n \neq 0$ tiene como solución el número racional $\frac{a}{b}$ entonces $a \mid a_0$ y $b \mid a_n$.

Prueba V:

Probaremos el siguiente teorema:

"Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ o bien $\sqrt{k}$ es irracional".

Si $\sqrt{k}$ es entero no hay nada que probar.

Supóngase que $\sqrt{k}$ no es entero y $\sqrt{k}$ es racional existen $m,n \in \mathbb{Z}^+$ tal que (m,n) = 1 y $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$.

De esto resulta $k = \frac{m^2}{n^2}$ y $n^2 = \frac{m}{k}\, m$.

Por teorema T.2 se tiene que m es primo o es producto de números primos.

Sea p primo tal que p | m entonces existe q tal que m = pq, por lo tanto,

$n^2 = \frac{m}{k} pq \Rightarrow p \mid n^2 \Rightarrow p \mid n$: contradicción.

En esta prueba hacemos uso de los teoremas T.2 y T.3.

Para k=2 se tiene la proposición que nos interesa.

Cabe señalar que esta última proposición da una manera de obtener números irracionales, teniendo claro que el signo de radical por sí solo no indica número irracional alguno.

Comentarios:

La matemática se distingue de las demás ciencias por sus métodos de prueba de las hipótesis (inducción, deducción, reducción al absurdo).

Es importante plantear algunas "pruebas", aún omitiendo varios detalles, con el fin de impulsar el desarrollo del raciocinio lógico en los estudiantes.

En la medida en que tengamos a nuestro alcance diversos enfoques sobre un mismo tema, en esta medida seremos menos repetitivos y nuestra labor de enseñanza será más interesante, placentera y satisfactoria.

Con el presente trabajo tuve la pretensión de dar una amplia gama de posibilidades de presentación de un tema. Gráficamente estas posibilidades las veo así:

Pitágoras matemático álgebra-geometría	Prueba I
Pitágoras y su Teoría de Números	Prueba II
Pitágoras Filósofo	Prueba III
Euclides	Prueba IV
Platón	Prueba V

Combinar una (o varias) casillas de la columna izquierda con una casilla de la columna derecha significa una posible presentación.

Aún así existen otras posibilidades. Basta ubicarnos en otro contexto de espacio-tiempo-desarrollo matemático, tratando por ejemplo la construcción de los números reales con Dedekind (1831-1916) y sus cortaduras.

Cada profesor, según sus fuentes de consulta, su creatividad, su iniciativa hará su propia presentación de "la irracionalidad de raíz cuadrada de dos".

Bibliografía

Larroyo, F. *Platón. Diálogos*. Editorial Porrúa. S.A. México 1979.

Rey Pastor J., Babini J.. *Historia de la Matemática*. Prefacio de J. Vernet. Vol. 1. De la Antigüedad a la Baja Edad Media. Gedisa.

Richman Fred. *NumberTheory. An Introduction to Algebra*. USA. Brooks/Cole Publishing Co. 1971.