Rev. Educación 11(1): 7-19,1987

ALGUNAS IMPLICACIONES DE LA FILOSOFIA Y LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN SU ENSEÑANZA

Angel Ruiz Zúñiga

INTRODUCCION

En la enseñanza de las Matemáticas (al igual que de las ciencias en general) es importante establecer profundos vínculos con la filosofía de éstas. Los paradigmas o visiones filosóficas aceptados juegan a veces un extraordinario papel activo en el decurso de las ciencias y su educación. No es posible eximir a las ciencias de cierto contacto con el pensamiento especulativo (si se quiere con la *doxa*) como si éstas fueran meros lenguajes asépticos o poseedores de una lógica absoluta asfixiante que no deja espacio a las opiniones, a la incertidumbre y a las decisiones humanas. Las mismas teorías de las ciencias (en el sentido que apuntan Kuhn y Feyerabend, 1971) son aprehendidas sobre la base de un concierto de factores intelectuales y sociales (las revoluciones científicas aluden precisamente al papel "vivo" de los hombres). La Filosofía aceptada como un cuerpo teórico (particular) más sistemático de ideas y visiones sobre cierta realidad, resulta ser entonces, a veces, el elemento que explica una orientación científica o un camino epistemológico y una tendencia educacional. Parto de la posición de que la ideología de la ciencia juega un papel esencial en su configuración teórica. Esto se desarrolla más adelante en el artículo.

En Matemáticas no es lo mismo partir de una visión que hace de éstas lenguaje abstracto, estructuras y formalismos, o de otra que afirma un carácter empírico de ellas. Tanto el desarrollo teórico de las Matemáticas (en sus líneas y tendencias generales) como el de su enseñanza entran entonces en una estrecha vinculación con la aproximación filosófica (especialmente) dominante. En realidad en un momento histórico pueden existir diferentes paradigmas aceptados que generan orientaciones y actitudes teóricas diferentes. No se trata, evidentemente, de una correlación mecánico-directa, pero afecta de una manera que siempre debe ser objeto de un estudio histórico concreto.

La Historia y la Filosofía de las Matemáticas se convierten en palancas teóricas importantes para la comprensión de los problemas de la enseñanza de las mismas. El papel que se asigne a la misma Historia de la Ciencia está en dependencia de la visión filosófica aceptada sobre su naturaleza. Vamos a hacer una indagación sobre esta vinculación entre el uso de la Historia de las Matemáticas y la Filosofía, así como establecer un bosquejo metodológico sobre una aproximación conceptual a la naturaleza de las Matemáticas. Esto último busca ofrecer algunos elementos ontológicos y epistemológicos que en su definición expresen una visión de las Matemáticas capaz de integrar el uso óptimo de la Historia y sustentar una aproximación coherente y eficaz en su enseñanza. Se parte en este artículo de la visión de que existe una profunda vinculación entre la Filosofía y la práctica educativa. Con esta última, de manera concreta, aparecen condensados muchos problemas epistemológicos (y donde aparece la epistemología no se puede dejar de hacer referencia a la ontología).

1. Ha sido reconocida desde hace algún tiempo la importancia del uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza de las Matemáticas. Importantes textos hacen constantes referencias a pasajes históricos, y, en ciertas ocasiones, hasta el orden histórico se ha tomado como base en la explicación de contenidos.

La Historia de la Ciencia (después de largos años desde su profesionalización con Sarton) ha empezado a ocupar un lugar particular y un papel cada vez más significativo en las aproximaciones epistemológicas y educacionales alrededor de las ciencias. En América Latina diversas publicaciones e investigaciones periódicas en Historia de la Ciencia han empezado a desarrollarse y estos estudios tienden a abrirse un espacio cada vez más importante en universidades e institutos. Se puede mencionar la creación de la Sociedad Latinoamericana de Historia de la Ciencia y la Tecnología en Puebla, México, en 1982. En Costa Rica desde 1983 funciona también la Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia. Sin embargo, durante mucho tiempo el uso de la Historia de las Matemáticas ha sido muy reducido; incluso en buena parte de la enseñanza moderna de las Matemáticas no aparece en ninguna forma. La formación de los profesores de Matemáticas en general se ha visto eximida de la historia de las mismas (salvo tal vez por algún curso aislado y poco meditado de los *currícula* ordinarios). El énfasis de la educación matemática ha sido puesta en la *lógica* interna de los contenidos y en su aprehensión por una vía abstracta y poco intuitiva. Detrás de esto existe un sustrato filosófico. Aparte de las consideraciones filosóficas generales (que se expresan en este artículo) se debe apuntar además que la visión llamada "internalista" en la misma historia y filosofía de la ciencia ha contribuido a apuntalar ese tipo de visión sobre las matemáticas.

La concepción del uso de la historia en la educación varía en función de la Filosofía de las Matemáticas que se posea. A veces es posible pensar que se incluyan referencias históricas aisladas de tipo anecdotario (como recurso de motivación), y en otras ocasiones que los programas sean estructurados con base en el devenir histórico concreto. La importancia o no de la introducción de la Historia y el uso preciso en la educación matemática no es producto de un desarrollo intrínseco de los contenidos matemáticos, sino que está profundamente condicionada por objetivos que encuentran sentido y coherencia especialmente en las visiones aceptadas (consciente o inconscientemente) sobre la naturaleza de las Matemáticas.

Esto no quiere decir que (de una manera lógica) los principios en la educación matemática alrededor de la Historia son deducidos de una coherente Filosofía de las Matemáticas. Se hace referencia, sobre todo, al papel jugado por las creencias o ideologías (más o menos consistentes desde un punto devista teórico) que los matemáticos, los educadores, los filósofos, los administradores educativos, etc., han asumido como correctas.

Esto que se ha dicho no excluye la importancia de la realidad de la práctica concreta (con su multitud de experiencias, lecciones y resultados particulares) en la educación, que siempre engendra nuevos criterios y aproximaciones. Sin duda muchos resultados han emergido de los errores y desaciertos recorridos prácticamente en el pasado. Sin duda la educación no gira en el vacío de las ideas al margen de dimensiones reales del mundo; las teorías y los métodos educativos asumen precisamente como punto de referencia la realidad (y su evolución). Ellas evolucionan en relación esencial con el devenir de la práctica educativa particular, así como de la totalidad socio-histórica. Es decir, se reconoce aquí el papel preciso de la actividad intelectual de los hombres (en su contexto histórico), pero al mismo tiempo se busca enfatizar la importancia de la *ideología* (entendida como conjunto de representaciones de la conciencia) en su construcción. Esta representa en efecto un adecuado punto de partida para entender las actividades y la evolución de los hombres. Es decir, se puede considerar en general a la ideología como un factor social que a veces determina el devenir no sólo intelectual sino también socio-histórico. En ese sentido no parece correcto afirmar a la ideología sobre las Matemáticas (y sobre las ciencias en general) como un "reflejo" de la "práctica" matemática (o de las ciencias). No se trata meramente de una consecuencia determinada por esa práctica, ni, por otro lado, determinada por otros estratos "materiales" de la actividad humana. A veces se considera a la ideología como una esfera *pasiva* y, en ocasiones, producto del movimiento de condiciones económico-productivas de la sociedad. Se busca (con estas aproximaciones) encontrar todos los determinantes ya sea del Positivismo o del Liberalismo (por ejemplo) en el "desarrollo de las fuerzas productivas"[1]. Muchas actitudes metodológicas deterministas y doctrinarias han subestimado el papel de las esferas ideológicas (de la cultura en general) en la comprensión de la misma cultura y de la sociedad en general. Por otro lado, tampoco las ideologías en sí mismas determinan "las leyes de la historia y la sociedad". Se trata aquí de encontrar puntos de partida metodológicos que integren en su proporción justa el devenir de la sociedad en general (con todos sus condicionantes), la ideología sobre las Matemáticas y la práctica matemática concreta (incluyendo su enseñanza). Es decir, se trataría de abordar el estudio de la evolución de las Matemáticas y su enseñanza a partir de realidades históricas particulares y concretas; en situaciones socio-históricas e intelectuales en las que todos los factores deben estructurarse y definir entonces su papel en la proporción resultante. Aquí afirmamos el imperativo de realizar el *análisis histórico concreto* a partir de la actividad global y particular de los hombres, a partir de la totalidad. Aquí se trata de un imperativo metodológico. Esta totalidad es siempre concreta. Se refiere al conjunto de determinantes de un momento histórico preciso. En este terreno teórico las premisas *a priori* deterministas desaparecen. A veces un factor es esencial y decisivo, a veces es otro. En todos los casos se da una profunda dialéctica que en lugar de afirmar la existencia de "uniformidades" o "leyes objetivas" en el devenir de la historia y la conciencia sociales, afirma la multiplicidad y la diversidad. Una dialéctica que afirma el papel del azar en la configuración de la historia (el azar frente a la necesidad de las leyes). Si bien yo pienso que en la historia social y humana existen ciertas "regularidades", las posibilidades de la predicción son pocas. Los márgenes de error son muy altos. La verificación en ciencia social es un problema absolutamente diferente al planteado en la ciencia natural. La sola presencia de la *conciencia* como factor social determina siempre una multiplicidad desconocida de opciones. La noción de *ley* no puede usarse sin más en la ciencia social; ni las expectativas de futuro que se buscan en las ciencias naturales se pueden usar. Se trataría entonces de una interpretación metodológica que valora de manera sustancial el papel de los individuos (y sus ideas) en el devenir socio-histórico.

La anterior discusión metodológica es importante en la medida en que es posible concluir que los procesos de desarrollo de las Matemáticas deberían analizarse especialmente a partir de las realidades de las comunidades matemáticas en cada momento histórico (así como sus relaciones con el resto de la sociedad). La evolución de sus tendencias deberían entonces buscarse en un "debate" (teórico y práctico) de paradigmas (aceptados o no) y en toda una serie de consideraciones similares a las necesarias en el escrutinio de la evolución de las demás ciencias "naturales". La división Kuhniana (no internalista) sobre la estructura de las revoluciones científicas puede aplicarse (*mutatis mutandis*) sobre el devenir de las Matemáticas. Si se asume este punto de vista sería posible rastrear importantes "situaciones – problema" en la Historia de las Matemáticas: alrededor del Cálculo (en el Siglo XVII y XVIII) o alrededor de las geometrías no euclidianas y los cuaterniones (a principios del siglo XIX). Sin duda, importantes discusiones sobre los infinitesimales, sobre el continuo, o la teoría de conjuntos podrían estudiarse con una óptica más concreta y "situacional". Aunque fue la visión de Cauchy la que en el primer caso se impuso, las ideas de Leibniz no fueron despreciables. Todo un debate se dio. Robinson a partir de los años 60 ha rescatado en el "análisis no-standard" una visión (aunque no llegó a tradición, como señala Lakatos) anclada en la historia como paradigma perdedor.

Ahora bien, si en el devenir mismo de las Matemáticas es adecuado asumir esta aproximación metodológica, con mucha mayor justeza se debería hacer en el estudio de su enseñanza. Pero vamos a dejar esta discusión en este punto.

¿Cuál sería el papel más adecuado de la Historia en una educación matemática que afirma el carácter sintáctico y convencional de las Matemáticas? Se trataría (en el mejor de los casos) de proporcionar ejemplos "motivantes" de introducción a las teorías o de la aplicación de éstas en la realidad. Si las Matemáticas son un lenguaje (por más importante que se le considere), lo decisivo para aprenderlo es usarlo tal cual; la evolución histórica del mismo no es importante. Existen en esta visión algunas consideraciones epistemológicas razonables. Sin duda, buena parte de las Matemáticas poseen un carácter sintáctico y mucho es sujeto a la conveniencia y a la convención[2]. La visión sintáctica de las Matemáticas estuvo presente en las discusiones sobre los "Fundamentos de la Matemática" desde finales del siglo pasado. El Círculo de Viena lo hizo parte de su "catecismo" principal en el libro de Ayer *Lenguaje, Verdad y Lógica,* 1971. Pero volvamos al uso de la Historia. Una vez aceptada esta visión las conclusiones aparecen fácilmente: no se requiere conocer la historia del francés para aprenderlo a usar (aparte de las motivaciones para su aprendizaje). Lo importante es la aprehensión de las reglas de la sintaxis. Pero además si estas reglas son posibles de cambiar por conveniencia o convención, el origen histórico de los contenidos matemáticos aparece todavía menos importante si la sintaxis es lo decisivo; la semántica con la que aparece históricamente no puede resultar importante. Es claro entonces que asumida esta visión filosófica sobre la naturaleza de las Matemáticas, la enseñanza de éstas no requiere de la Historia o de las Matemáticas ni para la asimilación de sus contenidos (epistemológicamente) ni para la estructuración de planes de estudio.

Supongamos que se asume que el corazón de las Matemáticas lo constituye la axiomática y las estructuras formales. Es decir, lo central son las configuraciones estructurales formales, las reglas de consistencia y la organización axiomática-deductiva de las Matemáticas. Sin duda esta visión no es necesariamente contradictoria con la que afirma el carácter sintáctico de las Matemáticas. La educación matemática correspondiente buscaría enfatizar precisamente lo axiomático-formal y deductivo. La Historia tal vez permitiría mostrar el origen y el desarrollo histórico de las estructuras. Pero el orden favorecido de presentación de los contenidos siempre sería *el lógico*. Las Matemáticas no serían vistas como sucesiones de problemas históricos en las que es posible obtener incluso diferentes vías de solución o de orientaciones teóricas que dependen de una multiplicidad de factores no lógicos. Se favorecería aquí una visión uniforme, racional y deductiva, y no una multiforme, intuitiva e histórica.

Si se considera que las entidades de las Matemáticas son partes de un mundo "platónico" independiente de la voluntad de los hombres (sólo vinculado a éstos a partir de la razón), la Historia jugaría un papel determinado. La práctica matemática descansaría entonces en la búsqueda de verdades intemporales y la descripción de los objetos de ese mundo no material. Esto es lo que se suele llamar Platonismo en Matemáticas. Es el aceptar la existencia de las entidades matemáticas realmente al margen de la construcción individual humana. La dialéctica del crear-descubrir se resuelve unilateralmente en beneficio del segundo término. La Historia de las Matemáticas reproduciría los momentos y cómo fueron descubiertas las verdades, pero se trata aquí de procesos eminentemente mentales en los que la realidad natural y social poco tienen que hacer. No se trataría de un proceso de creación y modificación de resultados en relación con el mundo y la mente de los hombres, sino de una *aprehensión espiritual-racional* (aunque sea deductiva) de realidades intemporales e independientes. Si se quiere, la Historia jugaría un papel importante pero sería una historia de vivencias psicológicas, de recursos y mecanismos mentales, de situaciones motivantes de las aprehensiones de los objetos abstractos. Es decir se trataría no de una historia material y social, cargada de debates, esfuerzos individuales y colectivos (siempre parciales) y modificaciones a veces sustanciales producto de irrupciones poderosas de estratos sociales externos al mero pensamiento deductivo o racional. La Educación aquí se concentraría en dos cosas: transmitir las verdades absolutas descubiertas y, por otra parte, los mecanismos de aprehensión de las mismas. La dialéctica de la mente y la realidad socio-histórica aparecería aquí distorsionada por un "mentalismo" abstracto, que a lo sumo favorecería una historia psicológica e "internalista" y por lo tanto insuficiente para poder dar cuenta de la construcción matemática (de los procesos interrelacionados mentales, materiales, sociales que intervienen en ella). Pero además se trataría de una historia muy difícil de establecer teóricamente. Por eso mismo se iría descansando en un "fenomenalismo existencial", que enfatizaría sobre todo la reproducción de experiencias mentales (que pueden ser deductivas) que desencadenen la aprehensión de las verdades y las entidades matemáticas. Pero esto mismo conduce entonces a reducir las posibilidades de intervención de la Historia de la Enseñanza.

Se podría asumir una visión diferente de las anteriores en la que las Matemáticas fuesen producto-construcción del sujeto (epistemológicamente). Es decir un constructivismo metodológico que afirme el papel del sujeto pero en donde lo material y social sirven apenas como punto (*pasivo*) de referencia. Este constructivismo estaría opuesto epistemológicamente al platonismo. Aquí se enfatizaría especialmente la creación en detrimento del descubrir. No se aprehenden aquí verdades absolutas, se trataría de procesos de acumulación de resultados que la mente crea (aunque la mente posea una referencia material biológica y social). Con esta aproximación la Historia jugaría un papel más importante sobre todo en la descripción y esclarecimiento de los pasos constructivos que históricamente se han dado. Pero existe una dificultad. El carácter *pasivo* de lo material y social (del *objeto* epistemológico) podría generar otra historia psicologista, individual y artificial (tomando en cuenta por ejemplo sólo aspectos de orden psicogenético). Si esto fuera así el papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza-aprendizaje de éstas también se relativizaría.

Si el punto de partida filosófico fuese el Empirismo Clásico (a lo Mill) la evolución histórica aparecería importante al enfatizar el carácter "aproximado" de las verdades matemáticas. Estas serían el producto de experiencias sensoriales directas y concretas; lo que permitiría el cambio y la relativización. Las Matemáticas en este caso aparecen como contenidos-resultado de la inducción y la generalización. Las condiciones de su aprehensión-construcción y las influencias posteriores en su desarrollo parecen ser importantes en la medida que ayudan a esclarecer su gestación como recurso de nuevos resultados. La referencia al conjunto de experiencias sensoriales que generaron un resultado pueden ayudar a dar un sentido intuitivo y reproducible para su asimilación y reproducción (si se quiere). Es posible entender la base de relaciones materiales y sociales que presionaron en la decantación y cristalización de una noción matemática. Una visión empirista clásica aparece como un buen punto de partida. Sin embargo, es insuficiente. No es posible reducir las Matemáticas a inducción y generalización de experiencias sensoriales directas. Ese tipo de reducciones rechazan las múltiples posibilidades del intelecto y condenan la mente a ser una pantalla donde sólo lo material y físico (externo) dibujan las imágenes sin intervención prácticamente del sujeto. Esta caracterización *pasiva* del sujeto encierra muchos problemas. Diferentes resultados epistemológicos revelan que los procesos mentales involucrados en las Matemáticas y las ciencias en general trascienden (de lejos) el plano de la inducción y la generalización[3]. Por otra parte, existe una dimensión operativa, estructural, de las Matemáticas que no puede ser captada analíticamente si el sujeto epistémico es sólo el receptáculo del movimiento del objeto.

Todo aparece apuntar que el uso de la Historia de las Matemáticas jugaría un papel muy importante en el seno de una visión filosófica que afirme (al mismo tiempo) una *base de partida empírica* y un papel activo del sujeto epistémico. Es decir, la Historia se vuelve esencial cuando se establece un cierto *construccionismo empírico.* Uso el término en ausencia de otro que exprese mis opiniones; tal vez se podría hablar de una posición dialéctica; sin embargo, la palabra "dialéctica" ha sido usada por muchos autores de maneras muy equívocas. El sujeto (epistémico) es el que construye las nociones y entidades matemáticas en un proceso de múltiples recursos mentales pero siempre sobre la base (activa también) de realidades materiales y sociales. Se vuelve importante esclarecer los pasos constructivos así como el medio material-social en el que toman cuerpo. Al asumir esta aproximación epistemológica no se afirma una predeterminación *a priori* de los factores epistemológicos; es decir, no se afirma una "proporción teórica" de influencia universal. La proporción en la base que los factores epistemológicos actúan en la práctica matemática es en sí un problema histórico concreto.

Una vez que hemos establecido esta profunda vinculación entre el uso de la Historia en la Enseñanza de las Matemáticas y las filosofías, se hace necesario realizar una incursión (precisamente histórico-filosófica) sobre el decurso de la reflexión sobre las Matemáticas. A través de ésta vamos a aprehender los determinantes teóricos más profundos que motivan la actual situación que vive la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

2. La Filosofía de las Matemáticas ha tenido desde hace muchos siglos como tradición dominante aquella que efectúa un énfasis en los aspectos axiomático-deductivo-formales de las Matemáticas. Esta visión usualmente ha sido contrapuesta a la tradición empirista clásica. En ella se afirma a la mente (la razón) como privilegiada (frente a la experiencia sensorial) en la discusión sobre la verdad y el conocimiento. Se puede decir que un paradigma formalista y axiomatizante ha convivido estrechamente con el Racionalismo, creando (si se quiere) un "paradigma racionalista" sobre las Matemáticas. En realidad habría que decir que dentro de las dos tradiciones epistemológicas fundamentales las posiciones sobre las Matemáticas han constituído en cada tradición visiones diferentes sobre las Matemáticas. Con ese sentido se puede hablar de dos visiones. Lo que ha sucedido es que la visión empirista (a lo Mill) no obtuvo suficiente reconocimiento intelectual.

Conviene, sin embargo, hacer distinciones en la clasificación que se ha hecho. El paradigma axiomático-formalizante puede estudiarse independientemente del Racionalismo. De hecho no todo pensador racionalista afirmó este paradigma. Se trata, no obstante, de una importante simbiosis intelectual que me interesa subrayar.

En la Antigüedad Clásica ciertas formas de racionalismo sobre las Matemáticas jugaron un importante papel en su configuración intelectual (esto especialmente después del Siglo IV A. C.). La historia de la práctica matemática, sin embargo, no había tenido un carácter puramente deductivo-axiomático, o al margen de las realidades del mundo material y social. La importante sistematización axiomática de Euclides fue un resultado producto de una muchedumbre de pruebas y errores, de práctica científica, de experiencia, etc., que desde Tales (heredando los resultados de las Civilizaciones de Bronce) se había desarrollado. La excelente clasificación euclídea no podía haberse dado evidentemente sin los resultados matemáticos anteriores. La lectura que de esta realidad histórica hicieron tanto algunos filósofos griegos[4] como los intelectuales de la época moderna, usualmente ha dejado por fuera la etapa pre-euclídea (o, si se quiere, la ha subestimado teóricamente). Se ha leído lo axiomático y deductivo como la quintaesencia de las Matemáticas, y, a la par, se han asumido valoraciones excesivas sobre el papel (casi absoluto) de la mente. No suele volverse la mirada por ejemplo a los resultados físico-matemáticos de Arquímedes (con una visión intuitivo-experimental). Las tradiciones materialistas griegas nunca fueron muy valoradas.

Para Descartas los conceptos de las Matemáticas eran "innatos" y "puestos por Dios". El afirmaba en Matemáticas la intuición y la axiomática. Pero esta primera era abstracta y espiritualista (no se trataba de una refererencia a lo físico o sensorial). La axiomática era un instrumento importante en su elaboración intelectual. Tanto su revolución "geométrica" como la "cosmológica" manifiestan una fuerte dosis axiomática. La revolución geométrica es la reducción de ésta a través del álgebra, y la revolución cosmológica es la reducción a través de la categoría de "extensión". El nudo común es la utilización del método axiomático.

Por otra parte, Descartes estableció una traslación en los criterios generales de verdad de la "correspondencia con el ser" al análisis de las ideas. La verdad se sancionaba, entonces, en la claridad, precisión y rigor de las ideas y no en una relación directa con la realidad (ya fuese esta material o de origen espiritual). Las reglas del método cartesiano plantean la reducción a verdades innatas, claras y distintas. Se trata de un reduccionismo axiomático.

A pesar de esta visión abstracta (en general) en Matemáticas, fue el creador (al mismo tiempo que Fermat) de la Geometría Analítica, la cual jugaría un importante papel en la gestación y desarrollo del Cálculo. A través de la Geometría Analítica (el uso de coordenados) fue posible hacer el tratamiento de las tangentes. El "Cálculo de Fluxiones" de Newton y la aproximación leibniziana no podían haberse dado plenamente sin la Geometría Analítica.

Leibniz por otra parte eliminó radicalmente la "intuición" en las Matemáticas (aunque esta fuese espiritual). Decía: "Las proposiciones de la Matemática son ciertas porque su negación sería lógicamente imposible" (Körner, 1969, p. 23). Se da una superación de Descartes pero para afirmar con mucha mayor fuerza la axiomática; Leibniz valora extraordinariamente el papel de la Lógica. Sin duda Leibniz fue el filósofo que más contribuiría al desarrollo de un paradigma axiomático-formalizante sobre las Matemáticas. Sin embargo, sus ideas no encontraron en su tiempo la importante acogida que tendría después en el siglo XIX. Leibniz es precursor desde el cálculo de clases, la lógica booleana, hasta métodos meta-matemáticos.

Conviene señalar algunos elementos de la tradición empirista británica opuesta al Racionalismo continental. Hume (el más radical) cuestionó el valor de las leyes matemáticas de la ciencia, su intemporalidad e inevitabilidad (Kline , 1975). Negó la deducción como palanca creadora de conocimiento. Para él no había verdad ni en lo axiomas ni en los teoremas (Kline, 1975). Llegó incluso a desestimar la existencia de un "yo" permanente aparte de la sucesión de nuestras percepciones internas (Novack, 1973). Este escepticismo de Hume se convirtió en un importante reto epistemológico, que obligaba al Racionalismo a buscar respuestas teóricas. En particular, era imprescindible dar cuenta de la experiencia sensorial en una interpretación comprehensiva.

Para Kant (1973) se puede conocer el mundo a través de categorías subjetivas y las Matemáticas se refieren a la forma de la sensibilidad pura y por ello se puede afirmar la validez de sus leyes. Según él, existesun conocimiento no analítico ni empírico (que llama *sintético a priori*) que incluye a las Matemáticas y partes generales de la Física teórica. Según Kant, si Hume se hubiera percatado de esto no habría hecho aseveraciones tan "destructivas". Para Kant la verdad de las Matemáticas se demostraba por la vía de intuiciones subjetivas espacio-temporales. El orden y la racionalidad del mundo exterior se encuentra en realidad en el sujeto. (Kline, 1980). La experiencia es tomada en cuenta, pero no para apuntalarla en su relación con las proporciones de las Matemáticas (Kant, 1973). Se refiere a una intuición, pero ésta es pura, a priori (Kant, 1971). En este sentido, Kant no enfatiza lo deductivo y axiomático de las Matemáticas; su visión se contrapone a la de Leibniz. Sin embargo, no escapa del Racionalismo.

La Filosofía Moderna de las Matemáticas tomará elementos de las filosofías de los siglos XVII y XVIII, pero al mismo tiempo de los desarrollos matemáticos de los siglos XVIII y XIX. Las Matemáticas del siglo XVIII tuvieron un sesgo "cuantitivista" y presentaba lo que suele llamarse una situación "contradictoria". Por un lado se tenía una extraordinaria producción matemática (gestada por la revolución matemática del XVII). Me refiero a la Geometría Analítica, Teoría superior de números, las Probabilidades y sobre todo el Cálculo (aunque muchos otros resultados importantes se dieron en este siglo: Geometría proyectiva, avances en Lógica, etc.). Al mismo tiempo se dio una gran debilidad en sus fundamentos lógicos. Alrededor del Cálculo (centro de análisis) y a pesar de la ausencia de "lógica" se dieron gigantescos resultados. Los números irracionales se admitían aunque no los negativos y complejos a principios del XIX (Kline, 1980). Filósofos como Berkeley aprovechaban el "marasmo" en los fundamentos lógicos para atacar a los infinitesimales leibnizianos y a las Matemáticas en general (Kline, 1980). Los problemas de los fundamentos se manifestaron con mayor fuerza con la aparición de las geometrías no euclidianas y los cuaterniones de Hamilton. Kline (1980) caracteriza esta situación como un desastre.

En realidad no se trataba sólo de un problema de los fundamentos lógicos de las Matemáticas. Con las geometrías no euclidianas y los cuaterniones se empezaba a manifestar un nuevo carácter de las Matemáticas en donde la lógica y la abstracción continuada jugarían un papel más decisivo. Kline (1980) afirma que este salto se acumulaba desde el Siglo XVIII y las nuevas matemáticas estaban presentes desde varios siglos anteriores.

Las Matemáticas del siglo XIX unifican realidades intelectuales nuevas y procesos de rigorización lógica extraordinaria (la tradición Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, etc.). Cauchy trató de fundamentar en el número y en el concepto de límite el Cálculo (Kline, 1980). Sin embargo, la mejor tentativa de rigorización la hizo Weierstrass a través de la derivación de las propiedades de los reales a partir de los racionales (en un sentido similar a los trabajos de Dedekind)(Kline, 1980). En la Lógica (como resultaba natural) resultados importantes se generaron (sobre todo inspirados en la visión del álgebra de Peacock, Gregory y De Morgan, y especialmente en la nueva geometría y los cuaterniones). Muchos otros resultados del Siglo XIX se pueden señalar (los trabajos de Gauss y Dirichlet en teoría de números, la teoría de las funciones de Weierstrass, Schwarz y Mittag-Leffler) (Babini, 1969).

Sin embargo, es necesario mencionar especialmente a la Teoría de Conjuntos de Cantor (quien entre 1872 y 1884 abordó la casi totalidad de los problemas de la misma). A pesar de la oposición que Cantor encontró, Dedekind y Weierstrass se interesaron por sus trabajos (aplicados a la teoría de números y a las cuestiones generales del análisis) (Bourbaki).

Esta teoría se iba a inscribir de una manera muy importante en los intentos teóricos fundacionales de finales del siglo pasado y principios del XX. La reducción logicista, por ejemplo, era hecha vía interpuesta la Teoría de Conjuntos.

A partir de estos elementos (tratados aquí esquemáticamente) se configuró el panorama intelectual de las Matemáticas modernas a partir del cual se abordarían las importantes discusiones de los "Fundamentos de la Matemática" entre 1870 y 1934. En estas discusiones se apuntalaría (nuevamente) una visión racionalista y axiomático-formalizante de las Matemáticas. En ella (como sucedía con Descartes, Spinoza, Leibniz o Kant) la razón generaba verdades *a priori*, infalibles. Ya sea que se afirme una intuición espiritualista (Descartes) o espacio-temporal (Kant), o sólo se afirme la lógica (Leibniz), la naturaleza de las Matemáticas se decía *a priori*, sus verdades necesarias y absolutas. La nueva situación de las Matemáticas en el XIX exigía una conciencia nueva más allá de las elucubraciones teoréticas de la filosofía de los siglos XVII y XVIII. Sin embargo, la nueva conciencia que emergería, iba a heredar muchos de los vicios y las actitudes intelectuales del pasado. Adelantando criterios, opino que la Filosofía de las Matemáticas en la etapa de los "Fundamentos" no fue en general muy profunda. Se limitó a buscar en el baúl de las filosofías anteriores y más o menos acomodar los nuevos resultados de las Matemáticas.

En los intentos fundacionales de las Matemáticas realizados entre 1870 y 1934 (Logicismo, Formalismo e Intuicionismo) se va a desarrollar una apuntalación clave del paradigma axiomático-formalizante (salvo en el Intuicionismo) y del Racionalismo en general. La reducción de las Matemáticas a la Lógica de Frege y Russell (contrapuesta a la visión booleana)[5] es el primer intento serio en la búsqueda de la fundamentación de las Matemáticas. En el Logicismo se busca demostrar la "evidencia lógica"[6] de las Matemáticas y en el Formalismo una "evidencia formal"[7]: en ambos casos asumiendo como base una reducción axiomática.

Hilbert admitía axiomas no lógicos (parte de lo que derrumbó al Logicismo) siempre que la consistencia fuese adquirida. La filosofía de Frege (aunque no exactamente la de Russell) encontraba la solidez epistemológica de las Matemáticas en un mundo de objetos lógicos, reales, no subjetivos pero no físicos. En 1918 en su artículo *"Der Gedanke"* Frege expresó de la manera más clara ese "Tercer Mundo" de objetos reales, no físicos, en una ontología que dividía lo real en: ideas (impresiones subjetivas individuales), los objetos físicos y los pensamientos (no físicos pero reales).

Hilbert y el Formalismo clásico trataban de encontrar el fundamento en la intuición del signo y en la búsqueda de la consistencia formal (que en realidad también se hace corresponder a una consistencia lógica). Para el Intuicionismo no se afirmaba tanto lo deductivo, lógico y formal como una práctica matemática basada en una intuición temporal (residuo Kantiano) y en un construccionismo metodológico de las entidades y la verdad matemáticas. El "pecado" de los intuicionistas era, sin embargo, precisamente la recurrencia a una intuición subjetiva difícil de aprehender. ¿Cómo garantizar la inter-subjetividad, base de la ciencia? Su constructivismo (y la negación, aunque parcial, de la ley del tercero excluído) conduce a una importante tala de las Matemáticas modernas. El caso es que para todos las Matemáticas eran *a priori; sus verdades, absolutas, infalibles.*

La paradoja que Russell descubre en el *Die Grundgesetze der Arithmetik* de Frege (así como las otras: Burali-Forti, J. Richard, Berry, Grelling, etc.), fue una importante llamada de atención de que algo funcionaba mal en el carazón del proyecto logicista (*pero también de las pretensiones axiomático-formalistas*). Se trata de la paradoja de la "clase de clases que no se pertenecen a sí mismas". Si K representa a esa clase, se formula la pregunta: ¿es K elemento de K? Se afirme como verdadera o falsa, la respuesta conduce a una contradicción. A pesar de la seguridad con la que Hilbert y sus discípulos se expresaban sobre su proyecto fundacional y sobre la consistencia de las Matemáticas, no tuvo que esperar mucho tiempo para encontrar una crisis decisiva que destruiría de un plumazo las pretensiones formalistas y logicistas. Bajo el título de *DISKUSSION ZUR GRUNDLEGUNG DER MATHEMATIK* en la revista *ERKENNTNIS* (en 1931) Kurt Gödel demostraba que las Matemáticas no sólo no pueden ser formalizadas de manera absoluta sino que en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia (Gödel, 1981).

La crítica se dirigía directamente contra los formalistas (Nagel y Newman, 1959).

La crítica gödeliana sin embargo, trasciende el plano de lo cotidiano en los Fundamentos de las Matemáticas porque se dirige contra el paradigma de las Matemáticas axiomático-formalizante y el Racionalismo. Los resultados de Gödel manifiestan la necesidad teórica de reevaluar con otra óptica los formalismos y el sentido de la axiomática en matemáticas, *apunta a repensar la naturaleza de las Matemáticas.* En particular apunta a reconsiderar el papel de la intuición material y la experiencia sensorial (que había sido, desde un principio, desterrada) en la configuración de la realidad epistemológica de las Matemáticas.

Esta lectura sobre las implicaciones de la evolución de los trabajos sobre los Fundamentos de las Matemáticas no ha sido, sin embargo, general. Las Matemáticas siguen siendo vistas por muchos matemáticos, filósofos y educadores, a partir de los paradigmas formalistas y racionalistas. En el énfasis en lo formal, lógico y axiomático (aunque también en otras muchas ocasiones en lo *sintáctico*) y en la infalibilidad de las verdades, lo que ha predominado en la visión sobre las Matemáticas. Es precisamente esta visión a la que habría que acudir para entender buena parte de los programas y métodos presentes en la educación matemática del siglo XX. Es esta visión la que ha condicionado desfavorablemente, en particular, el papel del uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las mismas.

El desarrollo de una mayor intervención de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza revela la existencia de modificaciones en la percepción que se tiene de la naturaleza de las Matemáticas. Hasta dónde esto ha evolucionado es difícil de precisar. Es también previsible que sea precisamente en la enseñanza de las Matemáticas donde se busque hacer estas modificaciones. *La educación plantea de una manera práctica la mayoría de los problemas epistemológicos centrales, y exige soluciones concretas (que serán siempre sujetas a la crítica, al error y corrección).* La Educación se convierte en un especial factor dinámico en el desarrollo de las reflexiones epistemológicas y filosóficas en general. *No sería extraño entonces pensar en las comunidades de educadores de las Matemáticas como el medio social más adecuado para construir importantes modificaciones en la percepción de la naturaleza de las Matemáticas y el mejor instrumento humano para avanzar en la comprehensión y desarrollo renovador de las Matemáticas.*

3. Una nueva visión aceptada de las Matemáticas que sustituya los anteriores paradigmas cuestionados no existe todavía. En el mejor de los casos puede hablarse de la decantación de algunos elementos de orden esencialmente metodológico. En la búsqueda de esa nueva filosofía me voy a permitir antes de finalizar este trabajo sugerir explícitamente algunas ideas acerca de las Matemáticas (esquemáticamente) que en mi opinión permiten dar cuenta (en cierta medida) de su naturaleza última: la diversidad de las Matemáticas, su carácter em-

pírico y sus determinantes epistemológicos. Se trata, en realidad, de una unidad conceptual. A través de estos tres elementos es posible definir el bosquejo de una nueva visión filosófica sobre las Matemáticas. Hacer esta descripción teorética nos va a permitir comprender mejor (de una manera más concreta) la relación (que ha sido el tema de este) entre el uso de la Historia, la Enseñanza y la Filosofía de las Matemáticas.

3.1 Una de las primeras consecuencias de los resultados de Gödel establece que las Matemáticas no pueden seguir considerándose como un cuerpo teórico sólido, seguro, único, absoluto y verdadero. *Se plantea entonces la existencia de varias Matemáticas.* Durante cierto tiempo se ha considerado a las Matemáticas (a través de la axiomática y la visión estructuralista de corte bourbakiano) como una unidad. Sin embargo, una vez establecido que ningún sistema formal puede dar cuenta de todas las Matemáticas, ni siquiera de partes importantes de ella (y donde además, por los resultados de Skolem-Löwenheim, los modelos tampoco se "portan bien"), esa visión no puede mantenerse tan fácilmente. Pero, aún más, según se acepte o no el axioma de elección (o la hipótesis del continuo) en cada situación se obtienen axiomáticas diferentes no isomóficas. Esto es producto de los resultados de Paul Cohen en 1963. La práctica matemática aparece entonces como una realidad diferente en la que es posible trabajar teoréticamente en "regiones" con plena "autonomía" de otras (en cada una las reglas, nociones y métodos poseen un sentido especial). No sería extraño suponer que los trabajos más recientes en "Lógicas generalizadas" o los llamados "Topos" apunten a una realidad matemática separada y diversa.

Si se posee una visión de las Matemáticas que afirma su diversidad teórica se abre entonces la necesidad en la enseñanza no sólo de describir los rasgos unificadores abstractos y poco intuitivos, sino enfatizar las diferencias, la cantidad de relaciones particulares. Las estructuras serían importantes, pero se le brindaría especial atención a los sistemas concretos.

Es también conveniente sugerir que la diversidad de las Matemáticas (a la que he apuntado) no es producto de una visión historicista a lo Spengler (1958). No es producto tampoco de una actitud convencionalista. La diversidad de las Matemáticas está en relación directa con la naturaleza más profunda de ellas, y, en particular, con las condiciones del "objeto" que posee como referencia. Esta discusión conduce directamente a consideraciones sobre la naturaleza empírica (o no) de las matemáticas.

3.2 ¿Son las Matemáticas *a priori*? Esta ha sido una posición usualmente incuestionada (que por lo demás, en su medida, fue engendrada a partir de las divisiones clásicas de la epistemología moderna: *a priori-a posteriori, sintético-analítico*). En realidad, se busca a través de esa noción dar cuenta de ciertas características particulares de las Matemáticas (una intervención más "amplia" del sujeto epistémico en la construcción teórica). El sentido de lo *a priori* en Matemáticas ha sido formulado de acuerdo con las filosofías asumidas. Para Leibniz, las Matemáticas eran "verdades de la razón" y, al igual que Frege, su verdad respondía a una evidencia lógica. Para Kant, sin embargo, el *a priori* involucra algo diferente: la intuición espacio-temporal. Incluso para pensadores modernos como Ladrière (que ha escrito una extraordinaria obra sobre los límites de los formalismos), las Matemáticas siguen siendo *a priori* y se tratan de un lenguaje a través del cual viajan significaciones producto de una experiencia *sui generis* (Ladrière, 1969). No ha sido fácil plantear como Mill el carácter empírico de las Matemáticas. La misma tradición empirista moderna (alrededor del Círculo de Viena) llegó a la conclusión que era preferible considerar a las Matemáticas como un lenguaje sin referencia alguna al mundo. En otras palabras, su evidencia es *sintáctica* (Russell, por ejemplo, pasaría en su vida de un platonismo "moderado" a una posición radicalmente sintáctica sobre las Matemáticas). Esta visión (influenciada mucho por la misma evolución del Logicismo y el Formalismo, y que no resulta ser teóricamente muy satisfactoria) contribuía a no enfrentar los paradigmas formalistas y racionalistas sobre las Matemáticas. En efecto, si la Matemática es sintáctica y convencional, no se entra en contradicción con los arquetipos formales y axiomáticos del Racionalismo (en general).

Morris Kline (1980) (en su *Mathematics. The loss of certainty*) no asume la visión apriorista y se refiere a las Matemáticas como una ciencia "cuasi empírica" que no se diferencia mucho de la mecánica u otras ciencias tradicionalmente consideradas empíricas (dice que la diferencia reside en la "longevidad" de los resultados matemáticos).

Si la visión no apriorista es aceptada, las consecuencias son muchas. Las verdades de las Matemáticas dejan de ser absolutas o infalibles. El problema de los fundamentos se vuelve un asunto epistemológico de otra naturaleza. Más aún los problemas epistemológicos sobre las Matemáticas serían de otra naturaleza (¿cómo realizar la falsación en Matemáticas?, ¿el sentido de los modelos físicos?, etc.)[8]. En última instancia (en la nueva visión) todo estaría sujeto a la sanción de la experiencia (*aunque esta puede ser diferente a las otras ciencias naturales*). No toda práctica matemática resultaría necesariamente con éxito en su relación con la realidad. Es decir, no toda matemática lo es de lo real. Pero, por otra parte, ningún resultado matemático puede desecharse (en su correspondencia con lo real) puesto que siempre está abierta la posibilidad de una prueba (como sucedió con las geometrías no euclidianas). Esto es característico de las Matemáticas. La escogencia de las líneas de investigación y construcción matemática se replantearía en función de las condiciones empíricas de su naturaleza. El status de la "matemática pura" versus la "aplicada" variaría en un sentido vectorial que beneficiaría a esta última. Esto sólo quiere decir que, sin relativizar inadecuadamente las Matemáticas puras, las tendencias determinantes de la evolución matemática deben ponerse en contacto con líneas de relación directa (o muy cercana) con la realidad (esto es en los países subdesarrollados además un imperativo de orden incluso político). Más aún, la división planteada no tendría más actualidad que la de una clasificación *Ad-Hoc*. Las Matemáticas se podrían ver como *una sola realidad teorética con aspectos abstractos e intuitivos,* con aplicaciones directas o no. De hecho hasta el siglo pasado las Matemáticas eran vistas como una sola realidad teórica. La separación (inadecudamente comprendida) entre "puras" y "aplicadas" creó actividades aisladas y desfavoreció tendencias progresivas en las Matemáticas.

En mi opinión las Matemáticas son una ciencia natural. De alguna forma, entonces, su *"objeto"* debe exhibirse. Para empezar, es evidente que no se trata del mismo tipo de "objeto" que las ciencias llamadas ordinariamente naturales poseen. Opino que existe todo un estrato de lo real a lo que se refieren las Matemáticas. Este estrato es al que la categoría de "general" en alguna forma se refiere. Las Matemáticas no tienen por objeto lo particular, sino aquello que provoca en el sujeto la abstracción de lo "general". Cuando hablamos del "orden, lo "continuo", lo "operacional", lo "organizacional", no nos referimos sólo a nociones puestas exclusivamente por el sujeto (es decir, estas corresponden, de una manera particular, a pedazos de lo real). Lo "continuo" no existe en sí mismo (puesto que esa noción de una realidad "pegada", libre de la "nada", no existe como tal). Pero en relación con el sujeto lo "continuo" existe. En esa relación (mutuamente condicionada) aparece el sujeto epistémico por un lado, y por el otro un objeto. Lo "continuo" sólo puede existir en el seno de la relación epistemológica que se establece entre los dos. La noción no podría engendrarse, sin embargo, si el objeto mencionado no existiera. Ese objeto particular (que provoca el concepto general de lo "continuo") es el tipo de referentes al que me refiero como "objeto" de las Matemáticas. Ahora bien: No todo lo que percibimos como "general" apunta a las Matemáticas exclusivamente. A veces otras ciencias naturales o disciplinas teóricas poseen una intersección *común o similar* en los referentes de su indagación teorética. Existe de hecho una extraordinaria relación "referencial" entre la Física y las Matemáticas. Las relaciones son incluso más profundas. Debido a su referente, las Matemáticas aparecen como el lenguaje de otras ciencias. Aunque no da una idea absolutamente precisa, la frase "lo general presente en lo particular" apunta a una relación de las Matemáticas con las otras ciencias.

De manera precisa, las notaciones básicas de las Matemáticas se construyen en realidad a partir de la relación sujeto-objeto (que posee una esencial dimensión material). Con esto no pretendo más que una incursión metodológica en la que apunto los componentes de la relación epistemológica (lo que ampliaré más adelante)..

El estrato de realidad a que me he referido como objeto de las Matemáticas no es tampoco homogéneo. Precisamente cuando hacía antes referencia a la diversidad de las Matemáticas lo hacía como correlación a la diversidad de este estrato. Esta diversidad es producto tanto de la multiplicidad del objeto exterior como de la multiplicidad con la que el sujeto se relaciona con ese objeto.

3.3 En el proceso del conocimiento apunto tres factores funcionalmente importantes: el sujeto, la sociedad (marco social), y el objeto material. Opino que el conocimiento es resultado de una síntesis dialéctica del movimiento de estos tres factores en una relación – proporción de influencias de difícil precisión cuantitativa. Es decir, el "porcentaje de influencia" o "determinación" de cada factor en el *"output"* cognoscitivo es difícil de establecer. Creo, incluso, que no existe todavía suficiente evidencia científica para tener criterios definitivos. En última instancia se trata de algo que debe ser sancionado por una descripción cuantitativa-empírica-física. Por ahora, con excepciones, el conocimiento (como en gran parte la conducta) se estudia de manera indirecta. Pero expliquemos nuestro punto. El sujeto (epistémico), cuyas determinaciones de base se encuentran en lo biológico y físico, es *activo*. Pero esto es así en una relación con el objeto material también dinámico y activo (*aunque no de la misma forma*). Ambos factores son activos de maneras diferentes y condiciones, (incluso de dimensión material) diferente a cada uno de los constituyentes. Como en la tradición hegeliana, el sujeto es objetivizado y el objeto subjetivizado. Esta relación adquiere un sentido adicional-especial al sumergirse en el contexto social (en las relaciones entre los hombres, la cultura, etc.). Este "contexto" influye sustancialmente en el movimiento del sujeto y a veces incluso modifica la realidad del objeto. La referencia a lo social como factor epistemológico implica (de una manera más precisa) una referencia a la historia misma (le da una dimensión histórica a los procesos del conocimiento).

Este es un punto de partida metodológico que se puede aplicar a todo el conocimiento, pero de una manera diferente en cada caso (*el peso de cada factor es diferente en relación con cada sector del conocimiento considerado*). Esto significa un llamado al *análisis epistemológico concreto*. De hecho, es posible pensar en el diseño de programas de investigación epistemológicos (que incluyan una interdisciplinariedad adecuada) que busquen dar cuenta de las proporciones de influencia (en cada parte del conocimiento) de sus factores constitutivos. Sería posible entonces afirmar diversas hipótesis y contrastarlas (o falsearlas) con la experiencia (sin duda el corazón intelectual de un intento así radica en la determinación del tipo de experiencias y métodos concretos). Se podría sugerir (por ejemplo) como hipótesis: la existencia de claras diferencias en la intervención de las Matemáticas o de la Física. Incluso habría que decir que en las diferentes partes de las Matemáticas la intervención del sujeto es distinta. Dejemos aquí esta disgresión y vayamos a las Matemáticas.

En el Empirismo clásico el sujeto se identificaba con una plaqueta de cera en la que el objeto imprimía sus huellas. En el apriorismo kantiano es el sujeto el factor activo en la determinación del conocimiento *sintético a priori*. Para Piaget (1974) en relación a las Matemáticas, se heredan buena parte de los problemas de Kant. El sujeto es aquí el factor activo. El se refiere a una "abstracción reflexiva", que es una generalización operatoria. Menciona en sus estudios psicogenéticos etapas mentales determinadas por estructuras mentales (Beth y Piaget 1980) cuya evolución es producto de la abstracción reflexiva. Según Piaget (1947 y 1980) esta abstracción se hace *a partir de las acciones* del sujeto y no del objeto. El objeto juega aquí un papel secundario (de hecho sólo sirve para propiciar condiciones sobre las que el sujeto actúa). Existe un poder del sujeto de coordinar y combinar las acciones. Es una operatividad mental lo que crea el conocimiento matemático (y es base de todo conocimiento). Este poder está asociado a condiciones biológicas (aunque no, según Piaget, hereditarias). Es parte de los mecanismos de las funciones cognoscitivas en general, y referido a la función organizadora más general de los seres vivos: la "reconstrucción convergente con superación" (1980). A diferencia de Kant, Piaget involucra factores materiales en su configuración epistemológica. Sin embargo, comparte lo que es en mi opinión una subestimación del rol del objeto. Por otra parte, Piaget (1980) tampoco le da un papel muy importante al factor social.

La consideración del papel de estos tres factores epistemológicos en la determinación del conocimiento matemático posee importantes consecuencias en la concepción de la práctica educativa. Si el objeto y lo social aparecen como factores activos epistemológicamente, las etapas de Piaget en la psicogénesis se deben relativizar. La evolución psicogenética se ve afectada por las características del objeto y la sociedad. Ni la sucesión de etapas y estructuras mentales ni la cronología piagetiana estaría libre de la multiplicidad de influencias de lo social y lo externo al sujeto 9. Un proceso de estímulo continuo en la educación (desde los primeros meses) puede provocar resultados gigantescos en la evolución de la inteligencia y las capacidades individuales. El sujeto puede ver su desarrollo mental (incluso físicamente) profundamente afectado por el estímulo externo y social. En cierta medida los trabajos de Doman en el aprendizaje precoz (y los de muchos otros) demuestran esta apreciación. Algunas aproximaciones sobre la enseñanza-aprendizaje que determinan ésta con base en rígidas etapas (y que en ocasiones han tratado de justificar sus puntos de vista con ideas de Piaget), deberían ser entonces profundamente cuestionadas 10. Pero vayamos a conclusiones más generales.

Por medio del "uso de la Historia de las Matemáticas" como recurso en la enseñanza de éstas, hemos hecho una incursión en consideraciones filosóficas. Al asumir un carácter empírico de las Matemáticas se apuntala la necesidad de introducir la historia concreta para su enseñanza. La opinión que afirma la diversidad de las Matemáticas empuja también hacia una aproximación más concreta sobre estos cuerpos teóricos. Al mismo tiempo, al señalar un papel activo del sujeto, en una relación dialéctica que no elimina ni al objeto ni lo social, se vuelve más importante recurrir a los momentos históricos de construcción individuales para desarrollar adecuadamente la enseñanza-aprendizaje. Las consideraciones metodológico-filosóficas que hicimos sobre la naturaleza de las Matemáticas corresponden enteramente a las necesidades del uso de la Historia en su enseñanza.

Al introducirnos en el debate sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza (en el cual tomamos partido por su uso decidido) nos hemos introducido también en el debate acerca de la naturaleza más profunda de las Matemáticas. En este último (por lo menos desde los años treinta) se plantea una auténtica transformación conceptual. Las viejas categorías de lo *a priori, a posteriori, analítico-sintético,* etc., deben abrir paso a nuevas ideas y métodos, y a nuevas actitudes filosóficas. Se trata de una revolución teórica[11]. Es ésta una importante tarea que tanto los matemáticos como especialmente los que enseñamos matemáticas tenemos por delante.

NOTAS

(1) El materialismo histórico encierra una actitud teóricamente inadecuada al privilegiar arbitrariamente un estrato de la realidad histórica (contra otras) en la explicación y análisis de las sociedades. El determinismo economicista del Marxismo parte además de una premisa (vigente en Europa desde la Ilustración) que afirmaba la existencia de leyes objetivas de la historia (frente al azar). Para Hegel se trataba de la autoevolución (revelación) de la Idea; para Marx las leyes de la economía dictaban la quinta esencia del devenir histórico. Las "superestructuras" eran "reflejo" (como precisará más adelante V.I. Lenín) de la base económica.

(2) Una discusión paralela a ésta es la que se refiere a que parte de las matemáticas es "obvia" (en el sentido de lógica). Es la que Quine asume en su libro *Filosofía de la lógica.* Trad. Manuel Sacristán. Madrid. Alianza, 1977.

(3) En el Empirismo clásico el inductivismo en las teorías de la ciencia era la visión más aceptada. La noción de inducción ha sido desde entonces objeto de muchas discusiones en Filosofía de la Ciencia. Tal vez sea más adecuado pensar, con Popper, que es más adecuada la visión del "error y corrección" en la evolución de las teorías científicas. Cf. Popper, Karl. *La lógica de la investigación científica.* Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Madrid: Tecnos, 1982.

(4) Me refiero a Platón principalmente. Si bien éste le dio importancia a las Matemáticas, su visión era profundamente abstracta y deductivista; los aspectos intuitivos y empíricos los creía denigrantes. De hecho fue un constante crítico de las visiones materialistas griegas (jónicas, atomistas, etc). La alta calidad literaria y la extraordinaria habilidad retórica de Platón hicieron que muchas de sus ideas erróneas ejercieran una enorme influencia no sólo en su época sino en toda la hsitoria de la cultura.

(5) Para Boole, la lógica era matemática. Cf. Boole, George. *Análisis matemático de la Lógica.* Trad. Armando Astí-Vera. Buenos Aires: Universidad Nacional de La Plata, 1960.

(6) La filosofía logicista es referida a que las proposiciones de las Matemáticas (en Frege sólo la aritmética) se reducen a nociones lógicas. La Lógica es "segura" epistemológicamente; al reducir las Matemáticas la certeza y la infabilidad de la lógica (que es en realidad la de la *Razón*) se le transmiten.

(7) Aquí de lo que se trata es de fundamentar por la vía de la reducción a la manipulación de signos (Hilbert) o de fórmulas (Curry). Las pruebas de consistencia (por métodos finitistas) es central.

(8) Esto de alguna manera lo expresa Lakatos en su libro *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

(9) Piaget no deja de mencionar la importancia del objeto (e incluso de lo social), pero su debilidad reside en que esta mención es casi formal. En realidad subestima su papel. La estructura teórica de sus explicaciones psicogenéticas no está basada en un carácter dinámico del objeto o lo social. El incluye lo social entre los factores que afectan el paso de una etapa a otra, pero lo considera básicamente como una prolongación del *objeto*-referencia sobre el que el sujeto actúa (coordina acciones). Por otra parte, el objeto epistémico en la "abstracción reflexiva" *no es el factor activo.* Si se quiere, en Piaget no hay una auténtica dialéctica epistemológica objeto-sujeto. En este sentido se han dado varios estudios críticos en los últimos 15 años (incluyendo tratamientos estadísticos de cierta importancia).

(10) De hecho, las críticas a las etapas piagetianas se han exacerbado en los últimos 10 años. La ortodoxia piagetiana del Centro de Epistemología Genética de Ginebra ha incluso realizado revisiones teóricas a las etapas (aunque sin salir del marco epistemológico primigenio).

(11) Los trabajos de "aprendizaje precoz" podrían representar una auténtica revolución en la educación del futuro. Tal vez la educación de las Matemáticas en años previos (desde los bebés) puede servir para disminuir dificultades y la adversión frente a éstas. Los trabajos prácticos del grupo de Doman deberían usarse en el análisis epistemológico moderno.

BIBLIOGRAFIA

Ayer, A.J. *Lenguaje, Verdad y Lógica.* Ediciones Martínez Roca, S.A. Barcelona, España. 1971. Trad. por Marcial Suárez.

Babini, José. *Historia suscinta de la matemática.* Editorial Espasa-Calpe, Madrid, España. 1969.

Beth, Ew. y Piaget, Jean. *Epistemología, Matemática y Psicología.* Editorial Crítica. Barcelona, España. 1980. Trad. por Víctor Sánchez de Zavala.

Boole, George. *Análisis matemático de la lógica.* Editorial Universidad Nacional de la Plata. Buenos Aires, Argentina, 1960. Trad. por Armando Astí-Vera.

Bourbaki, Nicolás. *Elementos de Historia de las Matemáticas.* Madrid, España. Trad. por Jesús Hernández.

Gödel, Kurt. *Obras Completas.* Editorial Alianza, Madrid, España. 1981. Trad. por Jesús Mosterín.

Kant, Manuel. *Crítica de la Razón Pura.* Ed. Losada, Buenos Aires, Argentina. 1973. Trad. por José del Perojo.

Kant, Manuel. *Prolegómenos.* Ed. Aguilar Argentina, S.A. Buenos Aires, Argentina. 1971. Trad. Por Julián Besteiro.

Kline, Morris. *Mathematics. The loss of certainty.* Ed. Oxford University Press, New York, U.S.A. 1980.

Körner, Stephen. *Introducción a la Filosofía de la Matemática.* Ed. Siglo XXI, México, D.F. 1980. Trad. por Carlos Gerhard.

Kuhn, Thomas. *La estructura de las revoluciones científicas* 1971.

Ladrière, Jean. *Limitaciones internas de los formalismos.* Ed. Tecnos, Madrid, España. 1969. Trad. por José Blasco.

Lakatos, Imre. *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Editorial. 1981. Trad. por Diego Ribes Nicolás.

Nagel, Ernst; Newman, James. *La prueba de Gödel.* Editorial UNAM. México, D.F. 1959. Trad. por Ramón Xirau.

Novack, George. *The evolution of empiricism.* Ed. Pathfinder Press, New York, U.S.A. 1973.

Piaget, Jena. *Biología y Conocimiento.* Ed. Siglo XXI, México, México. 1980. Trad. por Francisco González Aramburu.

Piaget, Jean. *Introducción a la Epistemología Genética.* Ed. Paidós, Buenos Aires, Argentina. 1974. Trad. por María Teresa Carrasco y Víctor Fischman.

Popper, Karl. *La lógica de la investigación científica.* Ed. Tecnos, Madrid, España. 1982. Trad. por Víctor Sánchez de Zavala.

Quine. *Filosofía de la Lógica.* Ed. Alianza, Madrid, España, 1977. Trad. por Manuel Sacristán.

Spengler, Osvaldo. *La decadencia de Occidente.* Ed. Espasa-Calpe, Madrid, España. 1958. Trad. por Manuel García Morente.