Revista Educación 23(2): 197-207, 1999

SECUENCIAS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

Ana Mondrus Ostroumón

Resumen: *En este trabajo se presenta una técnica, las secuencias de aprendizaje, que permite incidir en forma fina en los procesos de aprendizaje de los estudiantes en relación con los componentes más básicos de sus conocimientos matemáticos, procurando detectar oportunamente debilidades en los subsumidores (Moreira, 1994, p.3) y estimulando en el estudiante su disposición a asumir su aprendizaje como aprendizaje significativo. Esto se retroalimenta cuando el estudiante adquiere seguridad en sus conocimientos, al no arrastrar conceptos previos mal asimilados. En estas secuencias, el principal papel del docente, además de ser su constructor y un atento observador al aplicarlas, es reconocer en el aprendiz el punto en que el conocimiento previo se debilita, ya sea por haber sido aprendido en forma mecánica o en forma incorrecta.*

Las secuencias de aprendizaje son, en sí mismas, una técnica, sin embargo inciden en lo contextual en la medida en que abren una posibilidad real de lo que puede llamarse un acercamiento matemático entre el docente y el alumno, que puede ayudar a romper el estereotipo sobre la dificultad absoluta de las matemáticas o sobre la falta de capacidad del estudiante.

Introducción

A través de la práctica de varios años en la enseñanza de matemáticas en los primeros niveles universitarios a estudiantes de diversas carreras, puede constatarse que, repetidamente, detrás del sufrimiento y ansiedad que manifiestan algunos estudiantes asociados al deber de aprender matemáticas, así como al desagrado por y falta de disposición para su estudio, se encuentran serias dificultades para la comprensión de algún nuevo conocimiento específico; esto es atribuido por el estudiante a una supuesta falta de capacidad personal; pero la experiencia docente de la autora le permite afirmar que, en muchos casos, esta situación puede atribuirse a lo inadecuados o a la carencia de los esquemas mentales previos necesarios para incorporar ese nuevo conocimiento, debido a un débil dominio de los conocimientos específicos que deben sustentar la construcción de los nuevos conceptos y que la mayoría de los profesores da por descontado que los estudiantes manejan.

Frente a esta situación, un discurso usual entre la comunidad de docentes es que subsanar estos aspectos básicos es responsabilidad personal del estudiante, pues corresponden a etapas previas del sistema educativo. Para el alumno se crea entonces un círculo vicioso pues "no sabe lo que no sabe", por lo tanto intentar en muchos casos reparar esa situación por sí mismo, aún si se lo propusiera, le sería difícil y le reafirmaría su condición sobre su falta de capacidad.

Es posible modificar la situación descrita con la mediación de un profesor. La experiencia docente de la autora le ha permitido apreciar que, al inicio de una interacción personal con los estudiantes, al atender dudas formuladas por ellos, ya sea dentro o fuera del aula, no siempre es claro en qué consiste exactamente la traba que está frenando la comprensión. Pero por lo que podría llamarse una labor de "aproximaciones sucesivas" es posible lograr un acercamiento entre la pregunta del alumno y la respuesta del docente. Así se descubren los eslabones o componentes faltantes o erróneos, se obtiene finalmente la comprensión cabal del nuevo conocimiento, se crean las condiciones para su asimilación y, por ende, la satisfacción del estudiante

Para los fines de este trabajo no se consideran las diferencias entre los conceptos de asimilación desarrollados por diferentes autores que son referencia para la educación matemática, sino sus coincidencias, en particular la importancia que, a partir de esas concepciones, debe dársele al conocimiento previo en la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, cabe traer a colación las palabras de (Ausubel, 1978, citado en Moreira,(3) 1994, p. 2): "Si tuviese que reducir toda la psicología educacional a un solo principio, diría lo siguiente: el factor aislado más importante que influencia el aprendizaje, es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñese de acuerdo a ello."

Esta importante afirmación podría ampliarse, para las experiencias en la educación matemática descrita, con la frase: "...es el punto de encuentro entre lo que el aprendiz ya sabe y lo que no sabe o cree que sabe, o que "sabe" de modo diferente a lo pretendido".

Y es este punto de encuentro entre lo que el aprendiz "sabe" y lo que "no sabe" particularmente en los aspectos que deben sustentar la construcción de los nuevos aprendizajes lo que se pretende desentrañar con la técnica que se propone en este artículo.

¿Qué son las "secuencias de aprendizaje"?

Como se señaló anteriormente uno de los principales obstáculos con que tropiezan muchos estudiantes al intentar comprender un nuevo concepto o desarrollar un nuevo procedimiento en matemáticas, es la distancia entre los conocimientos previos y los que se pretende enseñarles. Esto imposibilita o dificulta grandemente que el aprendizaje sea significativo, entendido en el sentido que le da Ausubel, es decir, que "las nuevas ideas sean relacionadas de manera sustantiva (no literal) y no arbitraria a algún aspecto de su estructura cognitiva específicamente relevante, es decir, un subsumidor" (Moreira, (3), 1994, p.7). Este es uno de los factores que está detrás de la reproducción de un aprendizaje mecánico, no significativo, que lleva al estudiante a repetir pasos sin haber captado realmente el sentido de esos pasos o a confundir una definición con una característica presente en ella; vale decir, suponer que una condición necesaria es una condición necesaria y suficiente (por ejemplo, suponer que para que una función real de variable real definida por un cociente tenga una asíntota vertical en un punto es suficiente que el denominador se anule en él). En este artículo se plantea que muchas de estas generalizaciones indebidas (como "toda vez que un denominador se haga cero habrá una asíntota vertical"), estas lagunas entre el conocimiento previo y el presente, estos "errores incorporados", pueden abordarse con la técnica de "secuencias de aprendizaje", que se describe a continuación, para apoyar la integración y el cambio conceptual.

La técnica consiste en que el estudiante, en presencia del docente, resuelva una secuencia corta de pequeños ejercicios, muy cercanamente enlazados unos con otros y que agoten todas la gama de situaciones posibles (ejemplos y contraejemplos), para no dejar resquicio alguno que impida subsanar los aspectos más básicos que subyacen en esas lagunas o "errores incorporados". De esta manera se estará facilitando la identificación de las debilidades conceptuales y se propiciará la comprensión del nuevo conocimiento. Esto ayudará a la asimilación de nuevos conocimientos relacionados con él. Estos ejercicios se formulan para el caso concreto en cuestión; sin embargo, la autora ha verificado que son aplicables (con las modificaciones y ajustes necesarios) a otros casos particulares y abren una posibilidad real de lo que puede llamarse "un acercamiento matemático" entre el docente y el alumno, que no es frecuente en la actualidad.

La aplicación de esta técnica debe sustentarse, por lo tanto, en un estudio sistemático de los errores o dificultades de comprensión que más comúnmente presentan los estudiantes con relación a un tema específico en el marco de un análisis didáctico de los conceptos que deben sustentar la construcción de los nuevos conocimientos, cuya adquisición se desea promover, y en su validación, perfeccionamiento y adecuación con estudiantes específicos, cuidando de que lo dicho no rigidice el proceso, pues la flexibilidad es una condición importante para el uso de esta técnica.

Con respecto a lo anterior: "La asimilación mental, con su proceso de selección e integración de estímulos, constituye de acuerdo con Piaget, la actividad intelectual fundamental en el ser humano. Al asimilar hay una actividad propia del individuo en la que nadie puede sustituirlo. Las consecuencias educativas de este concepto son de la mayor importancia, pues el maestro puede brindar conocimientos, pero el alumno no los toma tal cual; escogerá algunos elementos y los incorporará en función de las estructuras mentales elaboradas." (Méndez, 1995, p.44).

Por otra parte, Gowin (1981, p. 81) plantea que: "La enseñanza se consuma cuando el significado del material que el alumno capta es el significado que el profesor pretende que ese material tenga para el alumno" (citado en Moreira, (4),1994, p.11).

Se sabe que no es fácil verificar que los significados son compartidos; procurar esta verificación en el caso de conocimientos específicos básicos es uno de los objetivos de esta estrategia.

El primer paso consiste en detectar con la mayor exactitud posible cuál es el punto en que los conocimientos previos han sido realmente comprendidos y a partir del cual empiezan a debilitarse los significados para el alumno. En la práctica esto muchas veces surge a partir de una duda planteada o un error cometido por un estudiante. Si la situación es uno de estos dos casos, la detección del "punto de conexión" buscado puede lograrse pidiéndole que explicite lo mejor posible su duda en el primer caso, haciéndola tan específica como le sea posible. En el caso del error, se le pide que exprese verbalmente lo que *realmente* va pensando, procurando infundirle la confianza necesaria para que no se inhiba en expresar su razonamiento, aunque no sea correcto, pues justamente se trata de eso, de revisar ese proceso. En muchos casos se encuentra, más que errores, suposiciones gratuitas que de no pedirse esta explicitación, se dificulta tomar conciencia de ellas. (Un ejemplo frecuente de esto es la suposición de que /x/= x, sin tomar en cuenta que x podría tomar distintos signos).

Con respecto a lo anterior: "parte importante en el logro de un adecuada comunicación con el estudiante es procurar conocer cómo piensa en relación a una situación matemática dada. De esta manera se llega a captar las dificultades típicas con que algunos de ellos se tropiezan, por ejemplo: la diferencia entre variable y constante, o el hecho de que para el estudiante cualquier letra representa un número positivo y cualquier letra precedida de un signo "-" representa un número negativo" (Mondrus y Campos, 1992, p.62).

Así se llega a formular hipótesis que podrán ser confirmadas con el análisis de su trabajo con las secuencias de aprendizaje, que jugarán entonces el papel de reactivos concretos.

Una vez detectado ese "punto de conexión" con el conocimiento previo se construye y aplica la "secuencia de aprendizaje", como una secuencia de cine; que, aunque formada por cuadros estáticos están ellos tan ligados cada uno con el siguiente, que parecen fluir en forma continua. Del mismo modo, en estas secuencias, los ejercicios iniciales, que han de ser muy simples, deben continuar con muy pequeñas variantes entre uno y otro. Podría decirse "variaciones sobre lo mismo", pero que, en conjunto, liguen fluida y naturalmente el conglomerado de conocimientos anteriores posibilitando la integración de lo viejo con lo nuevo.

Para que una secuencia de aprendizaje cumpla con su objetivo, debe ser resuelta con el trabajo *personal* del estudiante, paso a paso y bajo la observación atenta del profesor. Esto requiere, por parte del docente, en primer lugar, un sólido dominio de los contenidos involucrados y un trabajo de investigación en aula o estudio sistemático a partir de una atenta observación de las manifestaciones de los procesos mentales de los estudiantes, anotado anteriormente.

Objetivos de las secuencias de aprendizaje

- Explorar el modo como los conocimientos previos básicos han sido incorporados por el alumno (mecánico o significativo; correcto o incorrecto, etc). En particular, diagnosticar preconcepciones erróneas.
- Establecer una concatenación fina entre un conocimiento que se verifique haya sido cabalmente comprendido (que servirá de "punto de conexión") y el nuevo conocimiento con el que hay dificultades, de modo que no queden vacíos.
- Verificar que los significados dados por el estudiante a los conceptos en cuestión son los que se pretenden. De no ser así, confrontar al estudiante con las inconsistencias que surjan, paso indispensable para que puedan subsanarse, creando el conflicto cognitivo correspondiente.

Cabe aquí la siguiente cita: "El criterio final de cualquier tema de matemáticas es la consistencia... El que esta consistencia exista, es un tema de mutuo acuerdo entre un matemático y otro, y entre profesor y alumno... La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deberán ser, así, una interacción entre inteligencias, cada una respetando a la otra... Siempre que, y en grado hasta donde, el alumno no ha dispuesto de las ideas previas para la comprensión, lo que se comunica sólo puede serlo en forma de afirmaciones; y estas no proveerán alimento para una inteligencia en desarrollo. (La metáfora alimenticia es acertada. El alimento genuino llega a ser parte del cuerpo mismo de la persona que lo come; el material no digerible es interiorizado, pero no asimilado, y los esfuerzos para retenerlo indefinidamente son contrarios a nuestras funciones naturales). ...La asimilación de material significativo depende de su aceptabilidad por la inteligencia del estudiante". (Skemp, 1980, pp. 122-125).

Es, justamente en aras del respeto a la inteligencia del estudiante que se busca reparar lo necesario en los componentes básicos de sus conocimientos, de manera que lleguen a formar parte en forma adecuada de los subsumidores para los nuevos conceptos. Aquí la frase "componentes básicos" se refiere a aquellos conocimientos, símbolos, nociones, etc., que son elementales y reaparecen una y otra vez como parte integrante de diversos conceptos.

Metodología para aplicar la técnica

La inspiración lejana para desarrollar esta técnica se encuentra en la mayéutica socrática. La belleza y arte con que Sócrates (s. IV A. C.) convence a su interlocutor de que la duplicación del lado de un cuadrado no duplica su área y la forma cómo a través del diálogo lo hace llegar al conocimiento de cuál debe ser el lado para que el área sea doble, en el diálogo platónico "Menón" (Platón, 1979, pp. 350-35.) creándole lo que hoy llamaríamos "conflicto cognitivo" no ha perdido vigencia.

Más cercanamente en el tiempo, el estudio sistemático y la interacción directa docente-estudiante para promover el desarrollo de la zona de desarrollo próximo y crear una base orientadora de la acción se enmarca en la Teoría de la Actividad, fundamentada en los planteamientos vigotskianos.

En cuanto a las condiciones para aplicar las secuencias de aprendizaje, el mejor aprovechamiento se da en una dialéctica uno-uno entre profesor y estudiante, desarrollando una sucesión de preguntas y respuestas a medida que el estudiante va realizando los ejercicios de la secuencia, pero sin interrumpirle cuando esta realización sea fluida. El contexto puede ir desde una atención personalizada, por ejemplo, en una hora de consulta, pasando por el trabajo en grupos pequeños, ya sea en talleres extraprogramáticos o dentro de una clase y aún puede usarse para aclarar alguna idea, mediante una interacción, en una clase expositiva. Lo importante es que el alumno se involucre en esta dialéctica, pues si se distrae o se invisibiliza en el anonimato del grupo la técnica no tendrá efecto. En palabras de Nina Tallizina (1993, pp. 75-76): "Porque si el alumno no hace nada, cualquier cosa que haga el profesor no surtirá efecto alguno. Esta es una verdad elemental y conocida por todos, pero en la actividad práctica casi no se tiene en cuenta". Ella plantea que la asimilación de cualquier contenido exige que los alumnos realicen un sistema de acciones, para lo cual hay que hacer que las realicen, pero esto requiere que por lo menos comprendan su lógica. Entiende "comprender" en el sentido de que el alumno debe realizar, además de la acción en sí, un sistema de otras acciones que le permitan concientizar esta acción nueva, resumirla y consolidarla. (Tallizina, 1993, pp. 75, 76 y 77).

Un profesor que una al dominio de los contenidos el haber trabajado repetidas veces un tema con distintos estudiantes y sea un observador atento del modo como sus alumnos procuran aprender, muy probablemente puede preparar de antemano las secuencias obviando inicialmente el primer paso (detectar el punto de conexión con el conocimiento previo), ya que es común que las dificultades para comprender un tema dado o realizar cierto procedimiento sean las mismas para distintos estudiantes. (Por supuesto, este primer paso es indispensable si se trata de aclarar una duda específica a un estudiante particular). Una vez construida la secuencia, esta puede luego adecuarse frente a las situaciones diversas que se presenten.

La técnica exige que el estudiante no se salte ningún paso al realizar los ejercicios, de modo que la concatenación asegure la fluidez del camino entre el conocimiento previo ya incorporado y el nuevo conocimiento por incorporar. Es probable que en el desarrollo de los ejercicios de la secuencia, el propio estudiante proponga un nuevo eslabón, que debe incluirse pues responde a su propio proceso mental y puede ser, además, un buen indicador de este proceso. Es usual que la captación del nuevo conocimiento se manifieste con una reacción de lenguaje corporal del alumno (risa, gesto que indica algo como "cómo no había captado eso", etc.).

Una vez que los estudiantes desarrollen la secuencia completa, es conveniente que el docente verifique, mediante ejercicios que no estén en ella y de un grado mayor de complejidad, que, efectivamente, el nuevo conocimiento fue asimilado, e incluso, de ser el caso, haberse modificado los esquemas mentales previos que impedían su asimilación.

Por supuesto que sólo una revisión posterior, en la que se integre este conocimiento con otros o se aplique en diversas situaciones permitirá valorar si realmente permaneció y se consolidó el nuevo aprendizaje; pero con esta técnica se pretende asegurar la comprensión de ideas, nociones, símbolos, etc. que son indispensables para elaborar otros más complejos y que al no darse provoca muchas dificultades e, incluso, incide en la falta de motivación para aprender matemáticas.

Los aprendizajes más complejos requieren muchos otros factores, tanto contextuales como personales, que aseguren la dedicación de tiempo suficiente en cantidad y calidad para el estudio intensivo que lleve a interrelacionar conocimientos, profundizar en los conceptos, familiarizarse con los algoritmos, de modo que sea posible aplicar a otras situaciones lo aprendido. Sin embargo, los aprendizajes complejos no se lograrán sin la comprensión cabal de las ideas básicas, para lo cual estas secuencias pueden ser útiles.

A continuación, se presentan algunas de las secuencias desarrolladas por la autora como producto de su trabajo y estudio sistemático en esta dirección.

Ejemplo No. 1:

Secuencia de funciones para explicar el concepto de asíntota vertical y el recurso técnico para dar su ecuación.

La definición de asíntota vertical del modo en que aparece generalmente en los libros de cálculo es comprendida en lo esencial por los estudiantes. Aún así, tiende a dejar en las mentes de muchos de ellos el sedimento de que "una función (definida por un cociente) tiene asíntota vertical en los puntos en que su denominador se hace cero", sin tomar en cuenta aquellos casos en que un denominador se anula sin corresponder a una asíntota vertical.

La siguiente secuencia es útil para modificar esto. El objetivo es quitar esa generalización indebida, posiblemente a través de un conflicto cognitivo que surge de un contraejemplo inesperado y lograr una mejor comprensión de los procedimientos prácticos para obtener su ecuación.

Para cada una de las funciones dadas en la secuencia siguiente, al estudiante se le pide que decida si tiene o no asíntotas verticales, que justifique su respuesta y en caso de tenerla, dé su ecuación.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-2}$

3. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 4}$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}$

6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-4}$

Estas secuencias deber ser flexibles y adaptarse a cada situación concreta. Por ejemplo, en la presente, el paso seis fue incluido por haber sido preguntado explícitamente por la alumna a la que se le estaba aplicando. El haber planteado esa pregunta fue interpretado por la profesora como una señal positiva en el camino de la comprensión buscada, ya que los anteriores pasos habían sido resueltos correctamente con la ayuda de la orientación docente y el nuevo permitía cerrar el proceso. Aunque se corre el riesgo de que el nuevo aprendizaje sea también mecánico ("hay asíntota vertical cuando el denominador se hace cero y el numerador no"), al menos se habrá confrontado al estudiante con lo inadecuado de un aprendizaje no significativo y se habrá dado un paso en el camino de la disposición del estudiante a aprender significativamente.

El conflicto cognitivo puede darse en distintos pasos según los conocimientos previos y este choque manifiesto permitirá observar debilidades. Por ejemplo en la secuencia anterior, no es adecuado incluir el paso cuatro si aún no es conocido que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, pero de serlo y manifestarse allí una dificultad, habrá que incidir también en ese conocimiento.

Ejemplo No. 2:

Dada la ecuación de una función real de variable real, determinar el dominio máximo de la función.

La frase "el dominio máximo de una función (real de variable real) es el mayor subconjunto de $\Re$ para el cual la expresión involucrada tiene sentido", a muchos estudiantes NO les lleva a asociarla con las restricciones relativas a denominadores y cantidades subradicales. Por otra parte, sí comprenden estas restricciones, pero con mucha frecuencia cometen errores en los procesos algebraicos que deben llevarse a cabo para determinar los dominios máximos en $\Re$. ¿Por qué? En muchos casos, porque hay suposiciones gratuitas tácitas, como que un número distinto de cero es positivo.

A continuación, se presenta una secuencia de aprendizaje que permitió detectar esto y lograr que la estudiante a la que se le presentó tomara, por una parte, conciencia de su suposición gratuita, y por otra, resolviera la contradicción en que aparentemente se encontraba, al comprender un concepto y, sin embargo, realizar en forma incorrecta ejercicios relativos a ese concepto.

Se pide determinar el dominio máximo (en $\Re$) de las funciones dadas por las siguientes ecuaciones:

1. $f(x) = \sqrt{3x - 18}$

2. $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{3x - 18}}$

3. $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{3x - 18}}$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 18}}{x - 5}$

5. $f(x) = \dfrac{3x - 18}{\sqrt{x - 5}}$

Al trabajar esta secuencia con una alumna de uno de los últimos años de Enseñanza Media, después de desarrollar adecuadamente los tres primeros pasos, en el paso cuatro escribió como planteamiento de la respuesta lo siguiente:

$$D_f = \{x \in \Re \,/\, 3x - 18 \geq 0 \wedge x - 5 > 0\}$$

Al preguntársele por qué x – 5 debía ser mayor que cero respondió, con un gesto de sorpresa: "¡porque x – 5 es distinto de cero¡" (en un contexto en que estaba claro que los denominadores son distintos de cero). Esto ilustra lo dicho en el párrafo con que se introduce este ejemplo, es decir, el no tener "a mano" en la memoria a los números negativos. En el caso concreto de la estudiante a que se ha hecho referencia, también fue una limitación el no manejar el símbolo que la hizo usar el >0 como "distinto de cero", viéndose aquí ejemplificada tanto la generalización indebida como el no compartir significados, en el sentido que *para la alumna,* "> 0" *significó* "≠ 0" sin tomar en cuenta que hay números distintos de cero que no son mayores que cero. Esta interpretación fue dada por la propia alumna al comentar su respuesta.

Las secuencias de aprendizaje pueden también ser usadas con provecho en un curso como parte de las actividades en la primera clase, siendo un instrumento útil para diagnosticar el nivel de los conocimientos previos desde el principio del curso. Como "actividades en la primera clase" han de ser trabajadas en grupos pequeños de alumnos (2, 3 o a lo sumo 4 estudiantes) para que el docente pueda observar muy atentamente su trabajo y escuchar sus diálogos, procurando intervenir exclusivamente cuando se detecten errores o cuando se haya detenido el avance. Así se obtiene el diagnóstico que se requiere para planear o adecuar al grupo concreto las actividades del curso.

Se presenta a continuación como un tercer ejemplo una "secuencia de aprendizaje" que fue trabajada en la primera clase de un curso de Cálculo I para diversas carreras. El curso empieza con el concepto de límite y el objetivo de la secuencia era revisar los conceptos y procedimientos asociados con la representación gráfica de ecuaciones elementales para indagar si habían errores conceptuales o ausencia de conceptos previos y reforzar los aprendizajes significativos. Al dialogar con los estudiante se enfatizó que allí lo importante no era cada ejercicio particular como tal, sino captar el *sentido* de una representación gráfica a partir de una ecuación; lograr la comprensión de la idea de "satisfacer una ecuación" e ir logrando graficar funciones más complejas a partir de otras elementales; reconocer cómo no sólo las funciones son representables (se incluyó una recta vertical) y finalmente dar un primer paso hacia el concepto intuitivo de límite.

Pudo observarse que el trabajo cooperativo (estudiante-estudiante y estudiante-profesor) ayudaba a esclarecer los aspectos lógicos involucrados, confirmándose la afirmación dada por Piaget en su obra "La Psicología de la Inteligencia" de que "la cooperación se halla en el punto de partida de una serie de conductas importantes para la constitución y el desarrollo de la lógica" (Piaget, 1967, p. 178). De ahí que las secuencias presentadas puedan también diseñarse como secuencias de refuerzo para trabajo en grupos pequeños con indicaciones precisas.

El ejemplo que sigue fue usado como investigación en aula sobre los conocimientos de los alumnos y alumnas y sobre la técnica misma. Se presentaron diez pasos en la secuencia, cada uno consistía en graficar una ecuación (excepto el último); las siete primeras elementales, la octava y novena más elaboradas al involucrar el valor absoluto. Se confirmó la hipótesis de un manejo muy precario del valor absoluto y se detectaron casos particulares con dificultades incluso en los primeros pasos de la secuencia. Se recogieron por separado las respuestas de hombres y mujeres como una observación adicional; el comportamiento de las respuestas fue esencialmente el mismo en ambos grupos.

La secuencia referida se da a continuación como tercer ejemplo. Más adelante se dan los resultados resumidos en dos cuadros.

Ejemplo No. 3:

1. Grafique la recta de ecuación $x = 5$

2. Grafique la recta de ecuación $y = -7$

3. Grafique la recta de ecuación $y = 2x - 3$

4. ¿Podría graficar $y = x^2 - 5$?

5. ¿Podría graficar $y = (x-5)^2$?

6. Grafique una función constante

7. Grafique la función identidad

8. Grafique $y = |x^2 - 5|$

9. Grafique $y = |(x - 5)^2|$

10. ¿A qué valor se acerca y cuando x se acerca a 1 en cada una de las funciones qué graficó?

En la clase en que se trabajó esta secuencia, había 38 estudiantes, 21 hombres y 17 mujeres, de diversas carreras.

Resultados obtenidos al aplicar la secuencia de este ejemplo

Tabla No. 1

HOMBRES

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bien	15	15	12	10	11	15	15	6	6	4
Regular	0	0	4	4	2	1	1	4	2	0
Mal	3	3	2	2	4	0	0	3	2	0
No lo hizo	0	0	0	1	1	0	1	2	4	10
Algebraico	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0
Incompleto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Sólo tabla	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0

Tabla No. 2

MUJERES

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bien	15	15	13	13	9	15	10	3	4	6
Regular	0	0	0	1	4	0	4	3	6	0
Mal	0	0	2	0	1	0	0	5	2	0
No lo hizo	0	1	2	1	1	0	1	2	3	8
Algebraico	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Incompleto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sólo tabla	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Las categorías usadas para sistematizar las respuestas fueron Bien, Regular, Mal, No lo hizo, Incompleto, Sólo la tabla (estas dos últimas, aparecen a partir de la pregunta No. 7). La categoría "solo algebraico" se refiere a intentos de respuesta que se reducían a alguna expresión algebraica relacionada con la pregunta; "solo tabla" indica que la respuesta se redujo a una tabla de valores. Por lo elemental de cada ejercicio anterior al No. 8, se consideró que "regular" indica debilidades que pueden tener que ver con el registro gráfico, o con manejo de los símbolos o con el concepto de valor absoluto entre otros. Aunque las tres categorías últimas no dan resultados relevantes en cuanto a número, sí se incorporan pues permiten incidir en casos particulares que en el contexto de aula quedan identificados. Esta incidencia es también un objetivo de esta técnica. La categorización descrita fue específica para esta secuencia y no necesariamente es aplicable a otras. Además, no siempre es relevante este tipo de mediciones; depende de los objetivos planteados.

Conclusiones

Cuando el aprendizaje de un concepto matemático se da en forma errónea, muchas veces se debe a que no fue aprendido significativamente, sino mecánicamente. Esto vale también para los procesos algorítmicos, que frecuentemente son incorporados por los estudiantes de modo mecánico, meramente como repetición, sin sentido para ellos y sin una actitud crítica de su parte relativa a su proceso de comprensión.

Desde una perspectiva de educación matemática, el aprendizaje significativo promoverá la comprensión de conceptos y dará sentido a los procesos algorítmicos aún en el caso de aquellos que, por su naturaleza y para que sea eficiente su uso, es deseable que lleguen a transformarse en automatismos (ejemplo: reglas de operaciones algebraicas o del cálculo).

Muchos estudiantes han incorporado errores concretos o carecen de algún conocimiento específico necesario para sustentar nuevos aprendizajes por distintas causas, una de las principales, el estilo mecánico referido anteriormente. En el caso de los errores, aunque no es lo más frecuente, pueden incluso haber sido incorporados como aprendizaje significativo para ellos, por su consistencia con sus conocimientos previos. En este último caso, se hará más difícil el cambio.

Para subsanar errores incorporados, construir el conocimiento faltante o indagar sobre lo mecánico o significativo del aprendizaje, tanto el previo como el nuevo en vías de ser incorporado, la autora ha comprobado que son de utilidad las que denomina *secuencias de aprendizaje en matemáticas*, que consisten en la construcción y aplicación a un estudiante de una sucesión de pequeños ejercicios muy estrechamente concatenado cada uno con el siguiente, los primeros deben ser claramente inmediatos para el estudiante y, a partir de ellos, y por variantes casi imperceptibles, debe llegarse tan exactamente como sea posible a incidir en el denominado punto de conexión, donde aparece la confusión, error, noción faltante, generalización indebida, etc., es decir, aquello que ha de ser modificado. Esta llegada se logra con los eslabones de la secuencia y es frecuente que la modificación buscada se dé a través de un conflicto cognitivo.

La estrategia descrita de las secuencias de aprendizaje es útil cuando un estudiante hace manifiesta alguna de las situaciones necesarias de cambio referidas (error, concepto faltante o incompleto, etc.). Por lo dicho y para que se haga visible el punto donde está la dificultad, es una condición que puede considerarse requisito previo al aplicar esta estrategia, lo que la autora denomina un acercamiento matemático entre docente y alumno que dé al último la confianza para exteriorizar sus procesos mentales. Esto a su vez requiere del docente el desarrollo de una observación muy atenta combinada con un sólido dominio de los contenidos a ser enseñados, que le permita comprender y, a partir de allí, conceptualizar sobre las dificultades manifestadas por sus estudiantes.

Cabe suponer que las dificultades aludidas raras veces son excepcionales, sino más bien es frecuente que una y otra vez aparezcan reiteradas en distintos grupos de estudiantes, ya que muchas veces tienen que ver directamente con la naturaleza misma de las matemáticas y su lenguaje específico. Lo anterior indica que pueden desarrollarse a priori secuencias de aprendizaje matemático como parte del diseño didáctico de un curso y luego ser modificadas para adaptarlas a los casos concretos que se presenten, cuando se consideren de utilidad.

Referencias bibliográficas

Méndez, Zayra. *Aprendizaje y Cognición.* San José, Costa Rica, Euned, 1995.

Mondrus, Ana y Campos, Pilar. *Construyendo ùn puente matemático metodológico entre el estudiante y el profesor* en Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigación en Matemática educativa". Cuernavaca, México, 1992.

Moreira, Marco Antonio. *La teoría del aprendizaje significativo de David Aùsubel* en La Enseñanza de la Matemática y de las Ciencias: algunos temas de reflexión. Material de apoyo: Curso Internacional de Postgrado. Santiago, Chile, 1994.

———. *La teoría de Educación de Novak y el Modelo de Enseñanza-Aprendizaje* *de Gowin* en La Enseñanza de la Matemática y de las Ciencias: algunos temas de reflexión. Material de apoyo: Curso Internacional de Postgrado. Santiago, Chile. 1994.

Piaget, Jean. *La Psicología de la Inteligencia.* México, D.F., Editorial Grijalbo S. A. 1967.

Platón. *Diálogos Socráticos.* Editorial Cumbre, S. A. México.D. F. 1979.

Skemp, Richard. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid, Ediciones Morata, S. A. 1980 (Trad. De "The Pshychology of Learning Mathematics", Penguin Books Ltd., Harmondworth, Middlesex, England).

Tallizina, Nina. *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior.* Conferencias. Ángeles Editores, México, D. F. 1993.