Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

Científico de investigación

DOI: http://doi.org/10.15517/revedu.v48i1.56036

Usos y funcionalidades del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico

Uses and Functionalities of the Angle in the Development of Trigonometric Thinking

Karen Vanessa Sánchez Duart
Universidad de Guadalajara,
Guadalajara, México
karenvanessasandu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1393-4676

Recepción: 31 agosto 2023
Aprobación: 06 noviembre 2023

¿Cómo citar este artículo?

Sánchez-Duarte, K. V. (2024). Usos y funcionalidades del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico. *Revista Educación*, *48*(1). http://doi.org/10.15517/revedu.v48i1.56036

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

RESUMEN:
En diversas investigaciones se reconoce que el tratamiento del ángulo es una actividad fundamental en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, pero que resulta complejo por su propia naturaleza y por su tratamiento indiferenciado dado en la trigonometría. Por lo cual, el objetivo de este documento es mostrar los usos y las siete funcionalidades del ángulo identificados durante la resolución de un diseño didáctico centrado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico que se ejecutó como parte de la investigación en el 2020. Para tal fin se examinan, desde un enfoque cualitativo y desde el marco teórico de la Socioepistemología de la Matemática Educativa (TSME), las soluciones dadas por 12 educandos de secundaria de la Ciudad de México al responder al diseño didáctico elaborado por Scholz en el 2020. El análisis de la información se establece en dos fases: en la fase 1 se realiza una triangulación de las evidencias (provenientes del diario de campo, grabaciones y notas del estudiantado) y se identifican las acciones y actividades (desde la TSME); en la fase 2 se identifican los usos del ángulo según su naturaleza polifacética, posteriormente se determinan las funcionalidades de acuerdo con la intencionalidad del conjunto de usos, acciones y actividades. Entre los principales hallazgos de la investigación del 2020 se encuentran la identificación de siete funcionalidades del ángulo, "como referente para: aplicar una herramienta aritmética-algebraica, aplicar una herramienta aritmética-trigonométrica, estudiar las relaciones dadas en el modelo, operar aritméticamente, emplear una herramienta empírica-métrica, clasificar triángulos" (Sánchez, 2020, p. iv), y como herramienta de construcción. Si bien estos usos y funcionalidades del ángulo son empleados por el estudiantado de manera indirecta y, principalmente, en contextos geométricos, se reconocen como necesarios al ser utilizados como referentes para el tratamiento de otras nociones. Por último, se recomienda para el desarrollo del pensamiento trigonométrico dar especial consideración a la conceptualización y al tratamiento del ángulo, de manera que sea más explícito y visible su empleado, al ser referente necesario para el tratamiento de otras herramientas, operaciones y constructos matemáticos.
PALABRAS CLAVE: Ángulo, Trigonometría, Geometría, Usos, Funcionalidades.

ABSTRACT:
The treatment of the angle is recognized in various research studies as a fundamental activity in the development of trigonometric thinking; however, it is complex due to its very nature and its undifferentiated treatment in trigonometry. Therefore, this paper aims to show the uses and the seven functionalities of the angle identified during the resolution of a didactic design focused on the development of trigonometric thinking that was implemented as part of the research in 2020. To this end, the authors examine, from a qualitative approach and from the theoretical framework of the Socioepistemology of Mathematics Education (TSME), the solutions given by 12 secondary school students from Mexico City when responding to the didactic design developed by Scholz in 2020. Moreover, the investigators established the analysis of the information in two phases: in phase 1, a triangulation of the evidence (from the field diary, recordings, and student notes) was carried out and the actions and activities were identified (from the TSME). Meanwhile, during phase 2, the uses of the angle were determined according to its multifaceted nature. Subsequently, the functionalities are determined according to the intentionality of the set of uses, actions, and activities. Among the main findings of the 2020 research are the identification of seven functionalities of the angle, such as: construction tool, referent for applying an arithmetic-algebraic tool, referent for applying an arithmetic-trigonometric tool, referent for studying the relations given in the model, referent for operating arithmetically, referent for employing an empirical-metric tool and referent for classifying triangles. Although these uses and functionalities of the angle are employed indirectly and mainly in geometric contexts, they are necessary when used as referents in the treatment of other tools, operations, and essential mathematical constructs in the study of trigonometry. Finally, the investigators recommend for the development of trigonometric thinking to give special consideration to the conceptualization and treatment of the angle, so that its use is more explicit and visible, as it is a necessary reference for the treatment of other mathematical tools, operations, and constructs.
KEYWORDS: Angle, Trigonometry, Geometry, Uses, Functionalities.

INTRODUCCIÓN

La motivación para realizar esta investigación sobre el uso del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico tuvo su origen al identificar que el tratamiento del ángulo es soslayado y/o desarticulado en la enseñanza de la trigonometría; a pesar de que varias investigaciones (como la de Buendía y Montiel, 2015; Maldonado, 2005; Weber, 2005 y otras) dan cuenta que el fortalecimiento de diversas nociones matemáticas evidentes o básicas (como las relaciones de proporcionalidad, la medición angular, las construcciones geométricas, entre otras) propician una mejor comprensión de los conocimientos trigonométricos.

En particular, se observa esta desarticulación en la enseñanza tradicional de la trigonometría al iniciar con la introducción de nociones trigonométricas desde la trigonometría clásica (vinculada al estudio de las razones trigonométricas mediante el uso de herramientas geométricas en el contexto estático de los triángulos rectángulos donde se trabaja con ángulos agudos medidos en grados) a la trigonometría analítica (orientada al estudio de las funciones trigonométricas empleando herramientas de análisis considerando los ángulos medidos en radianes para poder trabajar en los números reales y en contextos más dinámicos); este tipo de instrucción es caracterizada y denominada por Buendía y Montiel (2015) como trigonometría escolar.

Si bien en este tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica se emplea el contexto circular, por lo general, es limitado al círculo unitario como una estrategia didáctica. Al no ofrecer explicaciones de las herramientas geométricas, aritméticas y analíticas, ni de las relaciones entre las longitudes de arcos (subtendidos por ángulos centrales) y las cuerdas involucradas en la construcción de las funciones de seno y coseno (Buendía y Montiel, 2015; Montiel, 2013).

Además, el empleo del ángulo es restringido a ser un medio de referencia posicional de elementos en el círculo unitario y a la conversión de las medidas angulares (dada frecuentemente por una fórmula) donde no se profundiza en la necesidad o relación con el contexto, desatendiendo a la contextualidad de la medición angular.

La importancia de la comprensión de las relaciones entre los elementos geométricos y analíticos con las medidas angulares radica en que la fragmentación entre ellos produce dificultades en la comprensión de las funciones trigonométricas (Akkoc, 2008; Maldonado, 2005; Moore, 2013, 2009), pero a pesar de que se pueden introducir y emplear las funciones trigonométricas desde distintos contextos estas funciones poseen bases comunes como es la medida del ángulo (Moore, 2009) y se identifica como un punto neural el entendimiento de las mediciones angulares para construir y entender la noción funcional de las relaciones trigonométricas, y al no hacerse explícita al estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función (Maldonado, 2005).

Por ejemplo, Akkoc (2008) reporta que al poseer una idea fuerte del radián se logra establecer conexiones entre el círculo unitario y las funciones trigonométricas y tener una empobrecida comprensión de esta medida angular contribuye a que surjan dificultades en el entendimiento de dichas funciones. Siendo necesario retomar el contexto circular de forma más amplia para el desarrollo del pensamiento trigonométrico (Montiel, 2013, 2005; Moore, 2013, 2009; Torres, 2014; Weber, 2005) que involucre una reflexión en torno al trabajo geométrico (desde las relaciones entre los arcos, ángulos y cuerdas) para culminar con el trabajo analítico. Por ejemplo, Scholz (2020, 2014), Torres y Montiel (2021) y Torres (2014) plantean la reconstrucción de lo trigonométrico con su naturaleza geométrica desde las razones trigonométricas.

Para ello proponen introducir las razones trigonométricas desde situaciones reales que se modelan en contextos circulares, como las ruedas de la fortuna (Scholz, 2020, 2014) o velódromos

(Torres y Montiel, 2021 y Torres 2014), para provocar una conciencia de uso coherente de diversas nociones geométricas (como es el ángulo, las cuerdas, los arcos y los triángulos) y las operaciones matemáticas entre las longitudes de los elementos del triángulo para cuantificar la relación entre el ángulo central y la distancia entre dos puntos sobre la circunferencia.

Aunado al tratamiento desarticulado o rehuido del ángulo en la trigonometría escolar, se encuentra que esta noción es compleja por sí sola al ser difícil de conceptualizar en una sola y para todos los contextos (Alyami, 2023; Casas y Luengo, 2005; Mitchelmore y White, 2000; Pachuca y Zubieta, 2020). Al no poder consolidarse en un concepto general debido al hecho que ninguna definición de ángulo parece coincidir o cumplir con todas las exigencias de todos los contextos (Alyami, 2023; Mitchelmore y White, 2000), complejidad atribuida por Mitchelmore y White (2000) por la naturaleza multifacética del ángulo.

Profundizando en esta naturaleza, Rotaeche (2008) establece que no solamente es multifacética, sino polifacética; al identificar tres usos del ángulo: a. Como cualidad al relacionar su forma como abertura, giro o pendiente, b. Como relación al estar relacionado con otros elementos o al estar acotado, y c. Como cantidad al ser susceptible a ser medido, asociados a un carácter dinámico o estático.

Por lo tanto, es necesario abordar el estudio del ángulo desde una perspectiva más amplia, por ser un concepto complejo dada su propia naturaleza, que responde a los contextos donde emerge y al ser resultado de amplios procesos de construcción y abstracción desde escenarios físicos y abstractos (Mitchelmore y White, 2000). Sin embargo, generalmente el ángulo tiene un tratamiento superficial y es soslayado al relacionarse con otros conocimientos matemáticos más avanzados generando dificultades en su aprendizaje (Pachuca y Zubieta, 2020; Rotaeche, 2008).

En síntesis, con la revisión de la literatura se reconoce que el tratamiento del ángulo es una actividad fundamental en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, pero que resulta complejo por su propia naturaleza y por su tratamiento indiferenciado dado en la trigonometría escolar. Por tanto, el objetivo de este documento es mostrar los usos y funcionalidades del ángulo identificados durante la resolución del diseño didáctico elaborado Scholz en el 2020 este diseño está centrado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico mediante contextos de significación pragmáticos: lo geométrico y lo variacional. Para tal fin, primero se argumenta las razones del empleo de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa en el desarrollo de esta investigación, y se esbozan los principios teóricos utilizados (como el Modelo de Anidación de prácticas). En segundo lugar, se expone la metodología desarrolla que se basa en el análisis de los resultados en dos fases donde se articula la información de los medios de registro (consiste en la triangulación de la información de las: notas de campo de la investigadora al realizar observaciones no participantes a un grupo de estudiantes, hojas de trabajo del alumnado y grabaciones de video captadas durante dichas observaciones) y el Modelo de Anidación de Prácticas. Posteriormente, se presentan las siete funcionalidades identidades del ángulo al estudiar los usos del ángulo con las intencionalidades del alumnado y los contextos de las tareas. Por último, se presentan conclusiones y recomendaciones sobre el tratamiento del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

El análisis en esta investigación se fundamenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) al permitir ampliar el estudio del conocimiento matemático, de una epistemología conceptual a una epistemología de prácticas asociadas a la evolución y construcción conceptual y pragmática: del conocimiento matemático al saber matemático, del objeto matemático a la evolución de sus usos.

En la TSME, según Cantoral (2016), las prácticas son los cimientos de la construcción social del conocimiento, por lo cual se enfoca en dar evidencia y explicación de la evolución de las prácticas (principio de normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye en la racionalidad con la cual el sujeto y la comunidad construyen dicho conocimiento al significarlo mediante los usos (principio de la racionalidad contextualizada), estimando el valor de verdad de ese saber según el contexto particular en el que se generó (principio del relativismo epistemológico) mediante un mecanismo que permite proponer y observar su construcción y argumentaciones. Así, a causa de la propia evolución e interacción con los diferentes contextos van surgiendo o adaptándose estos saberes (principio de la significación progresiva).

Los usos de una noción matemática, desde TSME, hace referencia a las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico y estas formas puede ser conscientes e inconscientes, presentes de manera implícita o explicita mediante representaciones típicamente escolares o del contexto (Rotaeche, 2012).

Para reconocer los usos de una noción matemática la TSME proporciona el Modelo de Anidación de Prácticas (MAP) como un medio de análisis sistemático de observaciones, de forma: secuenciada, dinámica y evolutiva de las acciones (intuitivas), las actividades (intencionales) y las prácticas socialmente compartidas (culturalmente normadas) considerando aspectos socios-culturales, didácticos e históricos del contexto (Reyes-Gasperini, 2016) que regulan y dotan de sentido al accionar del sujeto y a la misma noción matemática.

En el MAP las acciones son un punto de partida que consisten en la intervención activa del sujeto sobre el objeto (o sobre otras acciones realizadas por el mismo sujeto) a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente. Estas se organizan como actividades para perfilar una práctica de manera iterada, mediadas socialmente para modificar conscientemente su entorno. Dicha secuencia, está determinada y regulada por una práctica de referencia (que es la expresión material e ideológica) desde la cual sea analizada y profundizada en la especificidad, a la vez son normadas por una o varias prácticas sociales (Cantoral, 2016; Reyes-Gasperini, 2016).

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Se efectúan 14 observaciones no participantes durante la aplicación del diseño didáctico elaborado por Scholz en el 2020; para conocer más sobre este diseño se puede consultar el artículo de Scholz y Montiel (2021). Las observaciones fueron a un grupo de 12 estudiantes (entre los 15 a 21 años) del cuarto semestre, del plantel Miguel Hidalgo del Instituto de Educación Medio Superior de la Ciudad de México (IEMS-CDMX). Se elige a este grupo estudiantil como muestra al tener conocimientos previos necesarios (como razones trigonométricas, semejanza, geometría básica, etc.) para desarrollar a cabalidad el diseño; y al iniciar en ese semestre el estudio de la función trigonométrica.

Por otro lado, el motivo del por qué se plantea estudiar los usos y funcionalidades del ángulo en el escenario provocado por este diseño (elaborado por Scholz en el 2020) se debe a que busca propiciar la resignificación de las nociones trigonométricas desde las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas mediante el planteamiento del contexto del movimiento circular (desde la construcción de la rueda de la fortuna y el estudio de las variaciones de las relaciones entre las cuerdas

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

y arcos asociados al movimiento de la rueda); permitiendo analizar si emerge el uso del ángulo en este contexto de manera interconectada con las distintas herramientas empíricas, numéricas, aritméticas, algebraicas necesarias en el estudio de la trigonometría.

Durante las observaciones se realizan anotaciones en el diario de campo de la investigadora y grabaciones de audio-video, además se recolectan las notas del estudiantado donde escribieron los procedimientos y respuestas de las tareas de la experiencia.

Otro dato importante de señalar es que desde el inicio se dividió el grupo estudiantil en 4 subgrupos de 3 integrantes cada uno (segmentación basada según la afinan personal del alumnado). Pero para el análisis de la información solamente se consideran las respuestas de los subgrupos 1 y 4, ya que los subgrupos 2 y 3 no asistieron con regularidad a las lecciones y no lograron concluir todas las tareas planteadas en el diseño.

Para el ordenamiento y análisis de la información, "se emplea el MAP a nivel pragmático (acciones y actividades) debido a que no fue posible identificar las prácticas socialmente compartidas y las prácticas de referencia por el contexto de ejecución de las observaciones" (Sánchez, 2020, p. 37). Sin embargo, el propio diseño didáctico configura un marco de referencia, al no tener como intencionalidad específica provocar la significación ni usos de nociones angulares, sino el desarrollo del pensamiento trigonométrico en los contextos de significación geométrico y variacional (Sánchez, 2020).

Para identificar y caracterizar las acciones (relación directa o intuitiva del alumnado con el ángulo) y las actividades (articulación y coordinación activa de distintas acciones, en las que se pongan en juego dicha noción), se plantean las preguntas: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, y ¿para qué lo hace?, respectivamente. De modo que, son estudiadas las acciones y las actividades en términos del quehacer de la persona estudiante sobre la noción matemática (en específico del ángulo), en el medio (contextos geométrico y variacional) y la intencionalidad. Con el fin de identificar:

a. Usos del ángulo considerando los referentes teóricos dados por Rotaeche (2008) referidos al ángulo como cualidad (al asociarse con giros, aberturas o pendientes), relación (al estar acotado o relacionado con otros elementos geométricos), y cantidad (al asociarse una medida o ser susceptible a medirse) asociados a un carácter dinámico o estático, y,

b. Funcionalidades del ángulo comprendidas desde la intencionalidad de los diversos usos provocados por el conjunto de acciones que dotan de sentido.

En síntesis, el ordenamiento y el análisis de la información y datos se realizan en dos fases:

Fase 1. Análisis de la información, triangulación del ¿qué observamos?, ¿qué escriben? y ¿qué dicen? a partir de la información obtenida de los medios de registro empleados: diario de campo, grabaciones de audio-video y las notas de trabajo. Luego, se organiza y analiza la información con el MAP (al nivel pragmático mediante los cuestionamientos ¿qué hacen?, ¿cómo lo hacen?, y ¿para qué lo hacen?).

Fase 2. Análisis de los datos, complementación y ampliación de los datos provenientes de los medios de registro, de las acciones y de las actividades identificadas en la fase 1. Posteriormente, se infieren los usos y funcionalidades del ángulo.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se analizan las ocho tareas que conforman el diseño didáctico elaborado por Scholz en el 2020, pero por cuestiones de extensión en este escrito se presentan, a modo de ejemplo, el análisis de solo la situación 1 (en específico los enunciados a, b y c de la tarea 1) que está situada en un contexto geométrico.

A continuación, se presenta la tarea 1 que compone la situación 1 de dicho diseño:

Situación 1. Construcción de una rueda de la fortuna

En un parque de diversiones se instaló una rueda de la fortuna de 40 metros de diámetro y con 12 canastas para pasajeros.

Tarea 1. Midiendo distancias

a) Considerando que la distancia entre canastas consecutivas debe ser la misma realiza un bosquejo de la rueda de la fortuna utilizando figuras geométricas.

b) ¿Cómo colocaste las canastas para que haya la misma distancia entre ellas?

c) La siguiente figura representa la distribución de las canastas en un modelo a escala, mide la distancia que hay de la canasta 1 (C1) a cada una de las otras (C2, C3, …, C12) y llena la Tabla 1 con las distancias medidas.

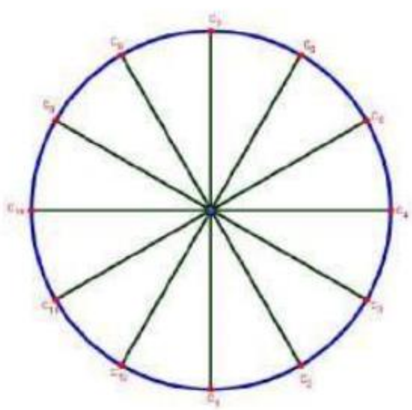


Tabla 1

Canastas	Distancia
$\overline{C1C2}$	
$\overline{C1C3}$	
$\overline{C1C4}$	
$\overline{C1C5}$	
$\overline{C1C6}$	
$\overline{C1C7}$	
$\overline{C1C8}$	
$\overline{C1C9}$	
$\overline{C1C10}$	
$\overline{C1C11}$	
$\overline{C1C12}$	

c) ¿A qué se debe que la distancia entre ciertas canastas sea la misma? (Scholz, 2020, p. 107-110).

Fase 1. Análisis de la información

Se presenta la Tabla 1 constituida por tres columnas: evidencias (se presenta lo registrado en las notas de campo, hojas de trabajo y grabaciones de video), acciones (se describe el quehacer de la persona estudiante asociado con el ángulo) y actividades (se articulan las distintas acciones relacionadas con un quehacer).

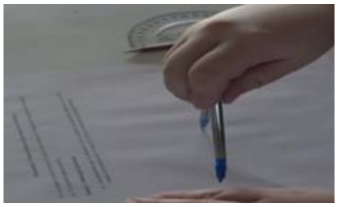
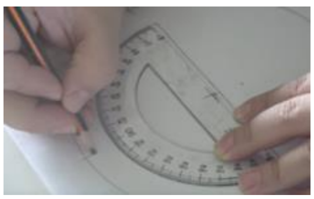
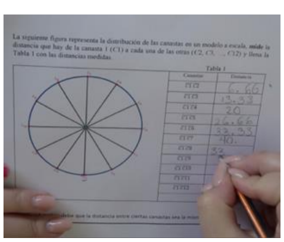
Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

Tabla 1.
Análisis de la información de los enunciados a, b y c de la tarea 1

Medios de registro	Acciones		Actividad
	¿qué hacen?	¿cómo lo hacen?	¿para qué lo hacen?
Notas de campo			
Dividen 360° entre 12, luego marcan cada 30º un punto en la circunferencia, luego trazan un segmento desde los puntos marcados al centro del círculo. Señalan la abertura entre dos segmentos consecutivos	Establecen una relación entre las distancias de las canastas con la vuelta completa.	Reconocen el ángulo central de 360° asociado a una vuelta.	
	Ubican la posición de las canastas en la circunferencia.	Dividen 360° entre 12 Miden con el transportador la amplitud de los ángulos de 30°	
	Identifican el ángulo central.	Trazan segmentos desde el centro del círculo a los puntos marcados sobre la circunferencia. Señalan la abertura de dos segmentos consecutivos	Construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna.
En el subgrupo 4 miden la distancia de los arcos $\widehat{C1C2}, \widehat{C1C3}, \dots, \widehat{C1C12}$ ubicando el transportador sobre la circunferencia correspondiendo el punto C1 con el 0° del transportador.	Miden $\widehat{C1C2}, \dots, \widehat{C1C12}$	Utilizan el transportador como regla.	Determinar las medidas de $\overline{C1C2}, \dots, \overline{C1C12}$

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

En el subgrupo 1 miden con una regla la longitud de las cuerdas entre las canastas C1, C2, C3 hasta C7. Mencionan que $\overline{C1C7}$ es la mayor longitud y que las distancias entre las canastas consecutivas se mantiene a 30°, por lo tanto, se van a repetir las medidas de las cuerdas de la otra mitad.1	Miden $\overline{C1C2}$, …, $\overline{C1C12}$	Utilizan la regla para medir las cuerdas hasta C7	
		Identifican la longitud máxima de las cuerdas.	
		Determinan que las longitudes de las cuerdas se repiten a partir de la canasta C7, al mantener entre canastas consecutivas una abertura de 30º	
Hojas de trabajo			
Divide la circunferencia (360°) entre el número de las canastas (12, en este caso). Me dio 30° Coloqué mi transportador en el centro y fui marcando los ángulos. Al final solo uní las líneas al centro del círculo (transcripción de comunicación personal del subgrupo 1, 14 de agosto de 2019).	Establecen una relación entre las distancias de las canastas y la vuelta completa con el círculo.	Dividen 360° entre 12	Construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna.
	Ubican la posición de las canastas en la circunferencia.	Utilizan el transportador para ubicar los ángulos que miden 30º	
	Identifican el ángulo central.	Trazan segmentos desde el centro del círculo a los puntos marcados sobre la circunferencia.	
Grabaciones			

S1v01t0:47 Subgrupo 1 	Establecen una relación entre una vuelta de la rueda con la circunferencia completa.	Reconocen que a una vuelta completa le corresponde un ángulo que mide 360°	Construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna.
S1v03t0:37 Subgrupo 1 	Ubican la posición de las canastas sobre la circunferencia.	Dividen 360° entre 12	
		Marcan empleando el transportador los ángulos múltiplos de 30°	
S1v04t0:15 Subgrupo1 	Identifican el ángulo central.	Trazan los segmentos que unen el centro con los puntos marcados.	
S1v10t1:00-2:40 Subgrupo 4 	Miden $\widehat{C1C2}, \dots, \widehat{C1C12}$	Utilizan el transportador como regla para medir arcos.	Determinar las medidas de $\overline{C1C2}, \dots, \overline{C1C12}$
S1v13t0:59 Subgrupo 1 	Relacionan linealmente longitudes de las cuerdas desde C1 a C7	Cuentan 6 aberturas existentes desde C1 a C7	
		Dividen 40 (el diámetro $\overline{C1C7}$) entre 6	

Fuente: Elaboración propia.

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

Fase 2. Análisis de los datos

Se presenta la Tabla 2 y Tabla 3 compuesta por: a. Las evidencias conjugadas de los tres medios de registro empleados; b. Las acciones y actividades; e. Los usos del ángulo según el tratamiento dado, como relación, cualidad y cantidad; f. El carácter en estático o dinámico y; g. Las funcionalidades que responden a la intencionalidad del conjunto de usos, acciones y actividades.

Tabla 2.

Análisis de los datos de los enunciados a y b de la tarea 1

Evidencia triangulación de las fuentes de registro	**Acciones** ¿qué hacen? / ¿cómo lo hacen?
Dividen 360° entre 12, luego marcan sobre la circunferencia la distribución de las canastas (utilizan el transportador para medir las distancias entre las canastas cada 30°) y unen con segmentos el centro del círculo con los puntos marcados en la circunferencia. Además, señalan los ángulos centrales entre dos segmentos consecutivos con una curvita y la medida.	a. Ubican la distribución de las canastas en la rueda: * Identifican que 1 vuelta completa de la rueda le corresponde un ángulo central de 360° * Dividen 360° entre 12 * Miden con el transportador cada 30° las distancias entre las canastas. b. Identifican los ángulos centrales de 30° *Trazan segmentos desde el centro del círculo a los puntos marcados sobre la circunferencia. *Identifican el ángulo formado entre dos segmentos consecutivos. *Señalan la amplitud entre dos segmentos consecutivos con un símbolo o escriben su medida en grados.
Actividad: Construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna.	
Usos: Se reconocen tres usos del ángulo; como relación y cualidad-abertura al determinar y trazar los ángulos centrales acotados por dos segmentos consecutivos que unen el centro del círculo a los puntos marcados sobre él (canastas), y como cantidad al asociar un ángulo central de 360° a 1 vuelta de la rueda y al dividir 360° entre 12 para ubicar los puntos sobre la circunferencia midiendo con el transportador cada 30°	

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

Carácter: El carácter de las nociones de ángulo es estático debido a que ubican y trazan ángulos centrales de 30° acotados por los segmentos y arcos que determinan la posición de las canastas sobre la circunferencia.
Funcionalidad: El uso del ángulo como cualidad, relación y cantida*d* al determinar y trazar los ángulos centrales de 30° acotados por dos segmentos consecutivos que unen el centro del círculo a los puntos marcados (canastas) sobre la circunferencia para distribuir las doce canastas, implica una *funcionalidad como herramienta de construcción* en el modelo a escala de la rueda.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presenta la Tabla 3 donde se muestra el análisis del enunciado c de la tarea 1 de la situación 1 que compone el diseño didáctico.

Tabla 3.

Análisis de los datos del enunciado c de la tarea 1

Evidencia triangulación de las fuentes de registro	**Acciones** ¿qué hacen? / ¿cómo lo hacen?
El subgrupo 1 argumenta que la distancia entre las canastas consecutivas se mantiene a 30°, por lo tanto, se van a repetir las longitudes de las cuerdas de la otra mitad del círculo y miden con una regla las cuerdas desde C1 hasta C7. Mientras el subgrupo 4 emplean el transportador como regla para medir los arcos de C1 hasta C12.	Determinan que las medidas de $\overline{C1C2}$, $\overline{C1C3}$, $\overline{C1C4}$, $\overline{C1C5}$ y $\overline{C1C6}$ se repiten a partir de C7: *Identifican que las distancias entre las canastas varían según el ángulo central que abarcan.
Actividad: Establecer relaciones entre ángulos centrales y cuerdas en el modelo.	
Usos: Se reconocen los usos de la noción de ángulo; como relación y cualidad-abertura al identificar que las distancias entre las canastas dependen del ángulo central (que fue acotado anteriormente por los segmentos que unen el centro del círculo con las canastas distribuidas sobre la	

circunferencia).
Carácter: El carácter de las nociones de ángulo es estático al acotar los ángulos centrales por segmentos que unen el centro del círculo a Cn sobre la circunferencia.
Funcionalidad: Los usos como relación y cualidad al relacionar la distribución de las canastas con las cuerdas que subtienden los ángulos centrales para determinar que las medidas de $\overline{C1C2}$, $\overline{C1C3}$, $\overline{C1C4}$, $\overline{C1C5}$ y $\overline{C1C6}$ se repiten a partir de C7, implica una *funcionalidad como referente para estudiar las relaciones existentes en el modelo.*

Fuente: Elaboración propia.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Del análisis realizado se identifican siete funcionalidades del ángulo, principalmente que emergen en el contexto geométrico, asociadas a los usos dados por el estudiantado en el desarrollo de las tareas del diseño didáctico. A continuación, se detallan estas funcionalidades:

Funcionalidad como herramienta de construcción

Descripción: Para construir una representación geométrica (que incluya círculos, triángulos, cuerdas, etc.) partiendo del trazo del ángulo, con el fin de modelar la situación o visualizar para poder aplicar otras herramientas matemáticas.

Este tipo de funcionalidad involucra tres usos del ángulo como: relación, cualidad-abertura y cantidad, con carácter estático.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna, determinar la medida del lado-cuerda faltante del triángulo isósceles, determinar la medida de la cuerda subtendida por el ángulo central de 90°, determinar las medidas de la cuerda subtendida por un ángulo central en círculos de 20, 40 y 60 m de diámetro, y determinar la distancia al suelo de las canastas dado el ángulo central.

Pero solo para la primera actividad (construir un modelo a escala de la rueda de la fortuna) es suficiente esta funcionalidad, ya que se logra responder de manera completa y directa. Sin embargo, para completar las otras cuatro actividades dicha funcionalidad debe ser acompañada por otras.

Por ejemplo, para determinar la medida de la cuerda subtendida por el ángulo central de 90°, además de aplicar la funcionalidad del ángulo como herramienta de construcción también emplean la funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-algebraica.

Funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-algebraica

Descripción: Al ubicar o identificar la hipotenusa y catetos considerando como referencia la posición de un ángulo del triángulo para aplicar el teorema de Pitágoras, con el fin de determinar la medida de un segmento, cuerda o lado. Este tipo de funcionalidad involucra tres usos del ángulo como: relación, cualidad-abertura y cantidad, con carácter estático.

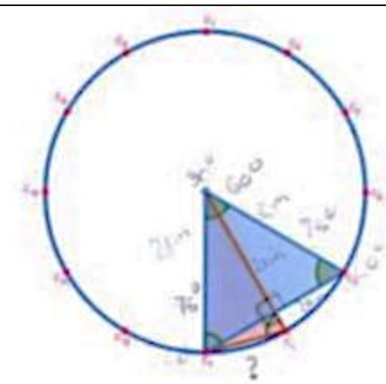
Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para determinar la medida del lado-cuerda faltante del triángulo isósceles, determinar la medida de la cuerda subtendida por el ángulo central de 90°, y determinar las medidas de los lados de los triángulos inscritos en las circunferencias de 20 m, 40 m y 60 m de diámetro. Sin embargo, únicamente en la tercera actividad (determinar las medidas de los lados de los triángulos inscritos en las circunferencias de 20 m, 40 m y 60 m de diámetro) les es suficiente esta funcionalidad. Probablemente se debe a que en dicha tarea se les proporciona la representación geométrica con los triángulos donde se favorece visualmente el establecimiento de la relación entre ángulos y lados de triángulos formados por los radios, cuerdas, bisectriz y semicuerdas; y no tienen que hacer por ellos mismo la representación. Por ende, se percibe que la funcionalidad como herramienta de construcción y la funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-algebraica vayan a estar presentes simultáneamente.

Por ejemplo, en la Tabla 4 se observa que el subgrupo 1 primeramente hace uso de la *funcionalidad del ángulo como herramienta de construcción* (procesos 1 y 4) y posteriormente de la *funcionalidad del ángulo como referente para emplear el teorema de Pitágoras* (procesos 2, 5 y 6).

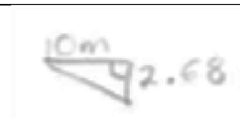
No obstante, en los procesos 5 y 6 se percibe una dificultad en establecer de manera correcta la relación entre el ángulo recto y los lados del triángulo para determinar la hipotenusa y catetos, y así, poder aplicar el teorema de Pitágoras. En particular, en las respuestas del subgrupo 1 se observa que en el proceso 5 aplican de manera incorrecta el teorema de Pitágoras al no lograr identificar que la x representa la longitud desconocida de la hipotenusa; pero luego, logran identificar de manera correcta en el proceso 6.

Tabla 4.

Procesos de resolución para determinar la medida del lado-cuerda faltante del triángulo isósceles

Procesos	Evidencia
1	
2	$20^2 = 10^2 + x^2$ $400 = 100 + x^2$ $\sqrt{300} = x$ $17.320 = x$
3	$20 - 17.32 = 2.68$

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

4	
5	$10^2\text{m} = 2.68^2 + x^2$ $100 = 5.36 + x^2$ $\sqrt{94.64} = x^2$ 9.728
6	$x^2 = 10^2 + 2.68^2$ $x = 100 + 5.36$ $x = \sqrt{105.36}$ $x = 10.264\ \text{m}$

Nota: En la respuesta dada por el subgrupo 1 se identifica el empleo de la variable x en tres distintas maneras: a. En el proceso 2, x representa el valor desconocido de la longitud de un cateto del triángulo recto formado por la intersección del triángulo equilátero (de color azul) y el triángulo isósceles (de color rojo), b. En el proceso 5, x representa la longitud de un cateto del triángulo recto pequeño (de color rojo), c. En el proceso 6, x representa la longitud de la hipotenusa del triángulo recto pequeño (de color rojo)

Fuente: Elaboración propia a partir de las hojas de trabajo del subgrupo 1.

En el caso que no se hace uso de la funcionalidad como herramienta de construcción antes de emplear la funcionalidad como referente de una herramienta aritmética-algebraica se presentan más dificultades. Por ejemplo, los integrantes del subgrupo 4 se remiten a consultar las notas de cursos anteriores en búsqueda de estrategias para resolver la tarea, de modo que determinan aplicar el teorema de Pitágoras porque observan que lo aplicaban a triángulos. Pero aplican el teorema indistintamente a cualquier tipo de triángulo, y al continuar con los otros triángulos perciben que están obteniendo la misma respuesta para todos los triángulos de las tareas (al tener dos lados-radios de la misma medida y lo que varían son los ángulos y la longitud de la cuerda que subtiende el ángulo central).

Por lo cual, llaman a la docente y entablan el siguiente diálogo

[S03V09T0:46-1:22]: Estudiantado- Es que lo intentamos así con la idea de la hipotenusa.

Docente- Ajá, ¿y luego?

Estudiantado - Nos da 28.2

Docente- 28.2, pues no, ¿verdad?

Estudiantado - Y por regla de tres, pero no.

Docente- ¿Por qué 28.2?

Estudiantado - Porque de igual forma si lo seguimos haciendo así nos va a dar lo mismo en todas, porque sacamos que los radios miden 20 (señalando los catetos del triángulo rectángulo), entonces lo que queremos saber es esto de aquí (señalando la cuerda subtendida por el ángulo central) y si hacemos 20 y 20 va a dar el mismo resultado.

Docente- Pero ¿por qué 28.2 , va a dar lo mismo en todas?

Estudiantado - ¡Ah, bueno! a lo mejor está si da (señalando el triángulo rectángulo), pero si lo hacemos por ejemplo para está (señalando un triángulo obtusángulo) va a dar lo mismo.
Docente- Y el teorema de Pitágoras, ¿en qué tipos de triángulos aplica?
Estudiantado - Triángulo rectángulo.
Docente- ¿Esté es triángulo rectángulo?
Estudiantado - No.
Docente- ¿Cómo lo va a aplicar ahí?, ¿esté es triángulo rectángulo? (señalando un triángulo obtusángulo).
Estudiantado - No, solo este y este (señalando otros dos triángulos rectángulos), sí, solo estos dos (mira los otros triángulos y señala los ángulos)

De modo que la funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-algebraica al identificar la relación del ángulo recto y lados del triángulo para aplicar o descartar el teorema de Pitágoras, es necesaria en los procedimientos para la ubicación de los catetos y la hipotenusa en la aplicación del teorema de Pitágoras o determinar otra herramienta matemática.

Funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-trigonométrica

Descripción: Al identificar la relación entre un ángulo y lados del triángulo rectángulo para establecer una razón trigonométrica con el fin de determinar la medida de un segmento, cuerda o lado. Este tipo de funcionalidad involucra tres usos del ángulo como: relación, cualidad-abertura y cantidad, con carácter estático.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para hallar una herramienta matemática que relacione las medidas de los ángulos centrales con las longitudes de los arcos o cuerdas subtendidas, determinar la medida de la cuerda subtendida por el ángulo central de 80° en un círculo de 20, 40 y 60 m de diámetro, y determinar la distancia al suelo de las canastas dado el ángulo central.

Al respecto del uso del ángulo en la primera actividad (hallar una herramienta matemática que relacione las medidas de los ángulos centrales con las longitudes de los arcos o cuerdas subtendidos) se registran como relación y como cantidad al considerar solamente la relación entre los ángulos y cuerdas para aplicar la herramienta matemática. No obstante, al no considerar el uso del ángulo como cualidad en la visualización de los triángulos que se forman en la situación no se logra establecer correctamente la relación de los ángulos y lados del triángulo rectángulo para establecer una razón trigonométrica.

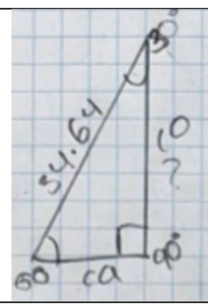
Además, en las dos últimas actividades (determinar la medida de la cuerda subtendida por el ángulo central de 80° en un círculo de 20, 40 y 60 m de diámetro, y determinar la distancia al suelo de las canastas dado el ángulo central) es necesario previamente la funcionalidad de la noción del ángulo como herramienta de construcción; para realizar una representación general de la situación o bien solamente del triángulo rectángulo facilitando establecer la relación entre un ángulo y lados del triángulo rectángulo en determinar la razón trigonométrica.

Por ejemplo: El alumnado dibuja un triángulo como referente para aplicar una razón trigonométrica. Sin embargo, reconsideran la respuesta debido a que no les brinda información para determinar la medida de la cuerda. Donde se evidencia que la funcionalidad del ángulo como herramienta de construcción y la funcionalidad como referente para emplear la herramienta aritmética-trigonométrica no fueron consideradas, pues trabajan solo con el triángulo como referente.

Al retomar la tarea y al considerar la funcionalidad de la noción de ángulo como herramienta de construcción construyen una representación de la situación trazando el ángulo central, ángulo recto (entre la intersección de la bisectriz y cuerda que subtiende el ángulo central) y ángulos internos del triángulo rectángulo. Para luego, establecer la relación entre un ángulo y lados del triángulo y aplicar una razón trigonométrica en la determinación de la medida de la semicuerda; haciendo usos de las nociones del ángulo y de su funcionalidad como referente para aplicar una herramienta aritmética-trigonométrica.

Por ejemplo, en las hojas de trabajo del subgrupo 4 (ver Tabla 5) se muestra que para determinar la distancia vertical dado el ángulo central de 120°. Primero, construyen la representación geométrica ubicando el cateto opuesto (denotado con co) y el cateto adyacente (denotado con ca) según la posición del ángulo central de 60° y el ángulo recto obtenido de la intersección de la bisectriz del ángulo central (proceso 1). Posteriormente, utilzan la razón trigonométrica de seno (proceso 2) para determiner la medida del cateto opuesto (proceso 3).

Tabla 5.
Procesos de resolución para determinar la distancia al suelo de las canastas dado el ángulo central de 120°

Procesos	Evidencias
1	
2	$34.64\ (sen\ 60°) = co$
3	$co = 30$

Fuente: Elaboración propia a partir de las hojas de trabajo del subgrupo 4.

Funcionalidad como referente para estudiar las relaciones dadas en el modelo

Descripción: Al establecer una relación entre el ángulo central y un elemento que contenga cuerdas o arcos. Este tipo de funcionalidad involucra los usos del ángulo como relación, cualidad-abertura y cantidad, con carácter estático.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para establecer relaciones entre ángulos centrales y cuerdas, estudiar las distancias dadas por la distribución de las canastas en el modelo, y hallar una herramienta matemática que relacione las medidas de los ángulos centrales con las longitudes de los arcos o cuerdas subtendidos.

Por ejemplo, para resolver la primera tarea (establecer relaciones entre ángulos centrales y cuerdas) relacionan la distribución de las canastas con las cuerdas que subtienden los ángulos centrales para determinar que las medidas de $\overline{C1C2}, \overline{C1C3}, \overline{C1C4}, \overline{C1C5}, \overline{C1C6}$ se repiten a partir de C7; donde consideran el ángulo central como la distancia que se mantiene entre las canastas consecutivas.

Revista Educación, 2024, 48(1), enero-junio, ISSN: 0379-7082 / e-ISSN 2215-2644

Funcionalidad como referente para operar aritméticamente

Descripción: Al considerar la relación entre las medidas de los ángulos centrales y los elementos que subtienden, con el fin de aplicar una herramienta aritmética como suma o regla de tres. Este tipo de funcionalidad involucra los usos del ángulo como relación, cualidad-abertura y cantidad, con carácter estático.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para hallar una herramienta matemática que relacione las medidas de los ángulos centrales con las longitudes de los arcos o cuerdas subtendidos, determinar la medida del ángulo central correspondiente al arco asociado a 1 vuelta completa, y determinar la distancia recorrida por 1 vuelta, $\frac{1}{2}$ de vuelta, $\frac{1}{3}$ de vuelta, etc.

Por ejemplo, en las acciones de la última actividad (determinar la distancia recorrida por 1 vuelta, $\frac{1}{2}$ de vuelta, $\frac{1}{3}$ de vuelta, etc.) se observa la funcionalidad del ángulo como referente para operar aritméticamente al aplicar regla de tres para determinar las medidas de los ángulos centrales considerando las longitudes de los arcos subtendidos; implica previamente considerar la relación proporcional entre las medidas de ángulos centrales y arcos subtendidos, es decir, también es necesario la funcionalidad del ángulo como referente para estudiar las relaciones dadas en el modelo.

Funcionalidad como referente para emplear una herramienta empírica-métrica

Descripción: Al considerar el ángulo para delimitar los elementos a medir directamente con algún instrumento. Este tipo de funcionalidad involucra los usos del ángulo como relación, cualidad y abertura, con carácter estático.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para determinar la longitud de los arcos subtendidos por los ángulos centrales dados, y determinar las distancias recorridas por $\overline{CnS}$.

La ejecución completa de las dos actividades implica la funcionalidad del ángulo como referente para aplicar una herramienta empírica-métrica, en el cual, el ángulo es usado principalmente desde su relación con otros elementos para determinar los objetos a medir con un hilo, posteriormente a esa medición se opera considerando las escalas del diámetro del modelo y los 20 m del diámetro de la rueda de la fortuna. Por ejemplo, para determinar las distancias recorridas por $\overline{CnS}$ primero identifican los arcos subtendidos por los $\overline{CnS}$, y luego miden con un hilo dichos arcos.

Funcionalidad como referente para clasificar triángulos

Descripción: Al identificar y clasificar uno o varios ángulos del triángulo para clasificarlo. En esta funcionalidad se mantiene el uso del ángulo como relación, sin embargo, como cualidad o cantidad varía según las estrategias empleadas por el alumnado.

Discusión: Esta funcionalidad fue empleada para clasificar los triángulos formados por dos radios y la cuerda que subtiende un ángulo central, para ello identifican los ángulos centrales acotados por dos lados-radios del triángulo, luego consideran la forma o medida del ángulo para clasificar el triángulo.

Por ejemplo, para clasificar los triángulos en rectángulos o equiláteros consideran el ángulo central perteneciente del triángulo. Pero en el subgrupo 1 observan la forma del ángulo (haciendo uso del ángulo como cualidad) mientras el subgrupo 4 miden con el transportador la amplitud el ángulo (haciendo uso del ángulo como cantidad).

Conclusiones

El estudiantado emplea el ángulo de manera distinta según el contexto y de los elementos matemáticos disponibles; por lo general, es de forma inconsciente e indirecta al ser parte de sus estrategias en la resolución de las tareas. En particular, las siete funcionalidades del ángulo identificadas (como referentes para: aplicar una herramienta aritmética-algebraica, aplicar una herramienta aritmética-trigonométrica, estudiar las relaciones dadas en el modelo, operar aritméticamente, emplear una herramienta empírica-métrica, clasificar triángulos y como herramienta de construcción) dan evidencia de la necesidad del tratamiento del ángulo en los procesos de resolución de tareas enfocadas al desarrollo del pensamiento trigonométrico.

Si bien estos usos y funcionalidades del ángulo se emplean de manera indirecta, son necesarios al ser utilizados como referentes en el tratamiento de otras herramientas, operaciones y constructos matemáticos. Y a pesar de que este reconocimiento yace principalmente en contextos geométricos, se puede señalar que el tratamiento del ángulo es esencial en el estudio de la trigonometría al ser recomendable integrar elementos y propiedades geométricas al iniciar el estudio de la razón trigonométrica para posteriormente lograr dar significado a la función trigonométrica (Moore, 2009, 2013; Weber, 2005).

Por tanto, se recomienda para la enseñanza de la trigonometría y para estudios futuros (referidos a este tema) dar especial consideración a los distintos usos y funcionalidades del ángulo, ya que se evidencia que están presentes en el desarrollo de diversas nociones trigonométricas. Además, se sugiere hacer de manera más explícita y visible el tratamiento del ángulo, pues, no se puede esperar que las experiencias vividas en un contexto específico del ángulo se transfieran a otro contexto, a menos se dé la oportunidad de enlazarlos (Alyami, 2023; Mitchelmore y White, 2000).

De modo que se invita a proporcionar al estudiantado la oportunidad de conceptualizar el ángulo desde distintos contextos mediante la incorporación de diversos usos y múltiples representaciones de dicha noción, para facilitar de manera más natural el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica.

Referencias

Alyami, H. (2023). Defining radian: provoked concept definitions of radian angle measure [Definición del radián: definiciones conceptuales provocadas de la medida del ángulo radiano]. *Research in Mathematics Education*, *25*(2), 154-177. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2041470

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian [Imágenes conceptuales del radian de profesores de matemáticas en formación]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(7), 857-878. https://doi.org/10.1080/00207390802054458

Buendía, G. y Montiel, G. (2015). Desarrollo del pensamiento Funcional-Trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Eds.). *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169–205). Díaz de Santos.

Casas, L. y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 201-216. https://www.researchgate.net/publication/39077867_Conceptos_nucleares_en_la_construccion_del_concepto_de_angulo

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica* [tesis de maestría inédita]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive. Abstactiones and generalization [Desarrollo de conceptos de ángulos mediante abstracción y generalización progresiva]. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 209-238. https://doi.org/10.1023/A:1003927811079

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función Trigonométrica* [tesis de doctorado inédita]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico 360°*. Secretaría de Educación Pública.

Moore, K. (2009, 26 febrero-1 marzo). *An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure* [Una investigación sobre las concepciones de la medida de ángulos de los estudiantes de precálculo] [Sesión del congreso]. Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, North Carolina State University, Estados Unidos. http://sigmaa.maa.org/rume/crume2009/proceedings.html

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure [Dar sentido al medir arcos: un experimento didáctico sobre la medida de ángulos]. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225-245. http://www.jstor.org/stable/23434218

Pachuca, Y. y Zubieta, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación matemática*, *32*(1), 38-66. https://doi.org/10.24844/em3201.03

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología*: *Un estudio sobre la transformación educativa en Matemamáticas*. Gedisa.

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria* [tesis de maestría inédita]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Rotaeche, A. (2012). *Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico* [Memoria predoctoral inédita]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Sánchez, K. (2020). *Un estudio de la angularidad como noción transversal en el desarrollo del pensamiento Trigonométrico* [tesis de maestría inédita]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo* [tesis de maestría inédita]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Scholz, O. (2020). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico, en el tránsito de lo geométrico a lo variacional* [tesis de doctorado, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio CINVESTAV Zacatenco-CDMX https://repositorio.cinvestav.mx/bitstream/handle/cinvestav/3902/SSIT0016954.pdf?isAllowed=y&sequence=1

Scholz, O. y Montiel, G (2021). Entre la razón y la función. Construcción de significados sobre la relación trigonométrica en bachillerato. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* (91), 10-17. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7809981

Torres, D. y Montiel, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación matemática, 33*(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/em3303.08

Torres, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería* [tesis de maestría inédita]. Instituto Tecnológico de Sonora.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions [Comprensión de los estudiantes de funciones trigonométricas]. *Mathematics Education Research Journal, 17,* 91-112. https://doi.org/10.1007/BF03217423