Mary Sol de Mora Charles

Metafísica y cálculo infinitesimal

Resumen: *Las teorías matemáticas, y en particular el Cálculo infinitesimal y las ideas de cantidades infinitas e infinitesimales, así como de continuidad, han sido aplicadas por Leibniz a las demás ciencias, y en particular a la Metafísica. En esta comunicación trataremos de explicar el alcance y el significado de estas interrelaciones. Se comentan dos cartas que Leibniz escribió en su madurez, 1702 y 1716, cuando la Monadología ya estaba más precisada en la mente de su autor. Estos dos temas, Metafísica y Matemáticas, pueden parecer alejados uno del otro, pero están íntimamente conectados desde el punto de vista de Leibniz, y su puesta en relación es coherente, aunque quizá en la actualidad los estudiosos de cada uno de ellos están muy alejados entre sí y estos papeles intentarán demostrar dicha conexión.*

Palabras clave: *Metafísica. Monadología. Cálculo infinitesimal. Continuidad. Divisibilidad.*

Abstract: *Mathematical theories, and mainly infinitesimal Calculus, was applied by Leibniz to many other sciences; and concepts like infinitesimals, continuity, etc., were also relevant for Leibniz' Metaphysics. In this paper we comment two letters from Leibniz about these subjects.*

Key words: *Metaphysics. Monadology. Infinitesimal Calculus. Continuity. Divisibility.*

La Matemática y la Metafísica son dos disciplinas que, a primera vista, pueden parecer muy poco relacionadas, pero por otra parte, sabemos que en el caso de Leibniz, el pensamiento está siempre interconectado. No obstante, en nuestra época de especialización a ultranza, no es tan usual como en el siglo XVII encontrar *aficionados* o *curiosi* que se interesen o entiendan a la vez en filosofía y matemáticas. Por esa razón intentamos aquí atraer la atención sobre la coherencia de esas dos disciplinas. Para ello vamos a comentar dos cartas de Leibniz, escritas en su madurez, cuando ya había desarrollado su cálculo infinitesimal y también había soportado los injustos ataques de los partidarios de Newton. Y, por otra parte, estaba más cerca del pensamiento metafísico contenido en su Monadología que de las ideas más convencionales utilizadas en sus obras tendentes a suavizar las polémicas entre católicos y protestantes o a defenderse de las acusaciones de no creer en el libre albedrío o de acercarse demasiado al panteísmo de Spinoza. La primera de las cartas data del 18 de agosto de 1702 y forma parte de su diálogo con Bayle. La segunda es de septiembre de 1716, enviada a Dangicourt.

En la respuesta a Bayle, Leibniz insiste sobre todo en el concepto de infinito, y rechaza la idea de un número finito de átomos en el Universo:

> "Es verdad que el mundo no es un compuesto de un número finito de átomos, sino más bien como una máquina compuesta en cada una de sus partes por un número verdaderamente infinito de resortes; pero también es verdad que quien la ha construido, y quien la gobierna, es de una perfección aún más infinita, puesto que ésta va a una infinidad de Mundos posibles que él tiene en el entendimiento y de entre los cuales ha elegido aquel que le ha gustado".

Hay pues varios infinitos, y la infinidad del mundo está basada en la efectiva división al infinito de la materia que lo compone, la cual se ha de entender de forma diferente a la infinitud de un dios que ha elegido entre todos los mundos posibles, el mejor de ellos, para que acceda de la posibilidad a la existencia:

> “Además, no siendo los cuerpos sino átomos, siendo divisibles y estando divididos incluso al infinito, y estando todo lleno, se sigue de ello que el más pequeño de los cuerpos recibe alguna impresión particular del menor cambio en todos los demás, por lejanos y pequeños que sean, y de ese modo tiene que ser un espejo exacto del universo”.

Dios puede ver y prever todo lo que suceda en cada corpúsculo y fuera de él, y nada de eso puede acontecer sin ser consecuencia de lo que ya hay en él. Leibniz está hablando de las mónadas o entelequias. Pero todo ello, aunque nos parezca metafísico es en realidad físico, es decir, geométrico:

> “El movimiento de cada punto que se pueda tomar en el mundo, se realiza según una línea de una naturaleza determinada, que dicho punto ha tomado una vez por todas, y que nada le hará jamás abandonarla. Y esto es lo más preciso y lo más claro que yo creo poder decir para las mentalidades geométricas (es decir, para los geómetras), aunque ese tipo de líneas superen infinitamente a las que puede entender un espíritu finito. Es cierto que dicha línea será recta, si aquel punto pudiera estar solo en el mundo; y que ahora ella se debe, en virtud de las leyes de la mecánica, al concurso de todos los cuerpos; y también es por ese mismo concurso que dicha línea está preestablecida”.

Es por eso que rige en la infinidad de puntos y líneas geométricos y en las cosas materiales a las que representan, la Armonía Preestablecida. La mónada dominante, el alma o entelequia, expresa esa línea o curva preestablecida y no lo puede hacer un punto sin memoria:

> “Así pues, es propiamente en la entelequia (para la que ese punto es el punto de vista) donde se encuentra la espontaneidad: y mientras el punto no puede tener de sí mismo más que la tendencia en la recta que toda esa línea, porque no tiene memoria, por así decir, ni presentimiento, la entelequia expresa la curva preestablecida misma, y los cuerpos que le rodean no pueden tener ninguna influencia sobre ese alma o entelequia”.

Y del mismo modo que en el momento presente, habría que cambiar la palabra átomo, que significa indivisible, para designar otras cosas que no serían los átomos de Demócrito, puesto que en el siglo XXI tenemos todavía partículas *materiales* a las que no nos atrevemos a llamar *átomos*, porque la prudencia nos hace dudar de su imposibilidad de ser todavía divididas o partidas, y las llamamos *elementales*, así también Leibniz reserva el término para esas partículas no materiales, o metafísicas, que son las mónadas:

> “Yo considero a las almas, o mejor dicho a las mónadas, como átomos de substancia, porque en mi opinión, no hay átomos de materia en la naturaleza, pues la menor parcela de materia tiene todavía partes”.

Así el alma, la mónada principal, es como un universo en miniatura, puede representar lo infinito, aunque de un modo borroso o confuso, porque le falta el grado de perfección necesario, y que sólo podría tener un dios. Hay en este párrafo cierta afinidad con algunas ideas de Spinoza:

> “El Alma, con respecto a la variedad de sus modificaciones, debe ser comparada con el universo, al que representa, desde su punto de vista, e incluso en cierto modo con Dios, cuya infinitud representa finitamente (a causa de su percepción confusa e imperfecta del infinito), más bien que con un átomo material...[Las mónadas] son mundos reducidos, a su manera: simplicidades fecundas; unidades de substancias, pero virtualmente infinitas por la multitud de sus modificaciones; centros que expresan una circunferencia infinita”.

Así lo expresaban algunos pensadores medievales y el propio Pascal. No obstante, los conceptos generales de las matemáticas y algunos de la física pueden ser ideales, conceptos abstractos, pero también son aplicables al mundo real. Los números son siempre los mismos, y son indiferentes a lo que puede ser enumerado y por ello mismo, lo existente puede ser mencionado, aludido, estudiado mediante esos conceptos:

> "Reconozco que el tiempo, la extensión, el movimiento y el continuo en general, de la manera en que se los toma en matemáticas, no son sino objetos ideales, es decir, que expresan posibilidades, igual que lo hacen los números. El propio Hobbes ha definido el espacio como *phantasma existentis*. Pero para hablar con más exactitud, la Extensión es el orden de las coexistencias posibles, como el Tiempo es el orden de las posibilidades inconsistentes, pero que sin embargo tienen conexión. Así, la una considera las cosas simultáneas o que existen juntas, el otro las que son incompatibles y que sin embargo se conciben todas como existentes, y eso es lo que hace que sean sucesivas. Pero el Espacio y el Tiempo tomados conjuntamente, forman los órdenes de posibilidad de todo un Universo, de suerte que esos órdenes cuadran no sólo con lo que existe actualmente, sino también con lo que podría ser puesto en su lugar, igual que los números son indiferentes a todo lo que puede ser *res numerata"*.

Y de ese modo, el concepto de continuidad de Leibniz adquiere todo su significado, no sólo en el mundo de lo real y actualmente existente, sino en la relación entre lo posible y lo existente:

> "Y este envolverse de lo posible con lo existente forma una continuidad uniforme e indiferente a toda división. Y aunque en la naturaleza no se encuentran nunca cambios perfectamente uniformes, tal como que exige la idea que las Matemáticas nos dan del movimiento, ni tampoco en rigor figuras actuales, de la naturaleza de las que la Geometría nos enseña, porque el mundo actual no se ha quedado en la indiferencia de las posibilidades, pues ha llegado a divisiones o multitudes efectivas, cuyos resultados son fenómenos que se presentan y que son variados hasta en sus mínimas partes: no obstante los fenómenos actuales de la naturaleza están controlados y deben estarlo de tal modo que nunca se pueda encontrar nada en lo que la ley de la continuidad y ninguna de las otras reglas, las más exactas de la matemática, sean violadas".

Pero la comprobación de todas estas reglas en su aplicación al mundo real o a las discusiones metafísicas, no interesan a los matemáticos, porque el cálculo infinitesimal les ha enseñado que basta con una regla de aproximación indefinida a una cantidad tan pequeña o tan grande como se quiera, sin que haya que seguir ese camino paso por paso, lo cual por otra parte sería imposible:

> "Los matemáticos no necesitan en absoluto las discusiones metafísicas, ni complicarse con la existencia real de los puntos, de los indivisibles, de los infinitamente pequeños, y de los infinitos propiamente dichos... A los matemáticos les basta, para el rigor de sus demostraciones, con tomar, en lugar de las magnitudes infinitamente pequeñas, otras tan pequeñas como sea necesario, para mostrar que el error es menor que cualquiera que algún adversario quisiera asignarle, y por consiguiente, que no sería posible asignarle ninguno, de suerte que aun cuando los infinitamente pequeños exactos, que terminarían la disminución de las asignaciones, no fueran más que como las raíces imaginarias, ello no perjudicaría en absoluto al cálculo infinitesimal, o a las diferencias y las sumas que yo he propuesto, y que excelentes matemáticos han cultivado tan provechosamente, y donde nadie podría perderse, a no ser por falta de entendimiento o por falta de aplicación, puesto que tiene en sí mismo su demostración".

Y termina ésta su réplica a Bayle introduciendo otra de sus ideas más queridas, la de la Característica Universal, que en este párrafo se podría muy bien conectar con su ensayo de una característica geométrica, redactado más tarde, entre 1677-79.

> "El señor Bayle tiene razón al decir, con los Antiguos, que Dios ejerce la Geometría, y que las Matemáticas forman parte del mundo intelectual, y son las más propias para dar entrada en él. Pero en mi opinión

> hay en su interior alguna cosa más. En otros lugares he insinuado que existe un cálculo más importante que los de la Aritmética y la Geometría, que depende del Análisis de las ideas. Se trataría de una Característica Universal cuya construcción me parece una de las cosas más importantes que se podrían emprender".

Las matemáticas nos dan entrada en el mundo intelectual, en el mundo del pensamiento filosófico. Con el conocimiento de las matemáticas se puede pensar mejor y comprender mejor también el resto de las disciplinas. De esta convicción constante en Leibniz se desprende la satisfacción que experimenta cuando encuentra a alguien que está interesado por ambas cosas, un interlocutor que no era fácil de conseguir. Por ello su carta a Dangicourt comienza así:

> "Estoy encantado de que un espíritu tan matemático como el vuestro se aplique también a investigaciones filosóficas. Eso ayudará a mi intención de hacer demostrativa la filosofía".

Nada nos parece más real que la materia y sin embargo, nada es más engañoso, pues las verdaderas sustancias no están en ella:

> "La materia no es más que un fenómeno reglado y exacto, que no engaña si se observan cuidadosamente las reglas abstractas de la razón. Las verdaderas substancias no son sino las substancias simples, o lo que yo llamo *Mónadas*. y creo que en la naturaleza no hay más que mónadas, el resto son sólo los fenómenos que resultan de ellas. Cada mónada es un espejo del universo según su punto de vista, [y puede estar] acompañada de una multitud de otras mónadas que componen su cuerpo orgánico, del cual ella es la mónada dominante".

Pero sea o no dominante, toda mónada es un espejo del universo entero, más o menos distorsionado o fiel, dependiendo de su grado de perfección. Y los otros conceptos geométricos abstractos o ideales, como el continuo o el infinitesimal, tampoco se encuentran entre las realidades materiales. La materia no está compuesta de puntos geométricos sino de partículas divisibles y en acto:

> "Yo no digo que el continuo esté compuesto de puntos geométricos, pues la materia no es en absoluto el continuo, y la extensión continua no es más que una cosa ideal, que consiste en posibilidad y que no contiene en sí misma partes actuales. Los todos intelectuales no tienen partes más que en potencia. Así la línea recta no tiene partes en acto más que cuando está actualmente subdividida al infinito; pero si existiera otro orden de las cosas, los fenómenos harían que la línea estuviera subdividida de otro modo".

Y lo mismo nos sucede con la Aritmética, donde una simple unidad contiene diferentes partes infinitamente pequeñas en potencia, como las fracciones en que se puede dividir. Números y puntos crean paradojas semejantes:

> "Es como la unidad en la Aritmética, que también es un todo intelectual o ideal divisible en partes, como, por ejemplo, en fracciones, no en sí misma actualmente (pues en ese caso sería reducible a partes mínimas que no se encuentran en los números), sino en la medida que tuviera fracciones asignadas. Así pues, digo que la materia, que es una cosa actual, no resulta sino de las mónadas, es decir, de las substancias simples indivisibles, pero que la extensión o la magnitud geométrica no está compuesta en absoluto de las partes posibles, que sólo le pueden ser asignadas, ni es resoluble en puntos, y que los puntos tampoco son más que extremos y de ningún modo partes o componentes de la línea".

La polémica sobre el cálculo infinitesimal, en la que participan tantos autores de la época, como Herman, Nieuwentyt, Naudé, Gallois, Gouge, etc. le lleva a insistir en que para él las magnitudes infinitamente grandes o infinitesimales no existen realmente, y trata de mostrarlo con una analogía entre las magnitudes matemáticas y el mundo real utilizando un método de aproximación de los errores

> "Por lo que se refiere al cálculo de los Infinitesimales, no estoy totalmente satisfecho

con las expresiones de (...) y así se lo comuniqué, que yo no creía en absoluto que hubiera magnitudes realmente infinitas ni realmente infinitesimales, que no eran más que ficciones pero ficciones útiles para abreviar y para hablar de manera universal, como sucede con las raíces imaginarias en el Algebra, tales como $\sqrt{-1}$; y que hay que concebir, por ejemplo, (1) el diámetro de un pequeño elemento de un grano de arena, (2) el diámetro del grano de arena mismo, (3) el del globo de la tierra, (4) la distancia de nosotros a una estrella fija, (5) la magnitud de todo el sistema de las fijas, como: (1) una diferencial de segundo grado, (2) una diferencial de primer grado, (3) una línea ordinaria mensurable, (4) una línea infinita, (5) una línea infinitamente infinita. Y cuando más grande se hacía la proporción o el intervalo entre esos grados, más se acercaba uno a la exactitud, y más pequeño se podía hacer el error e incluso acortarlo de golpe mediante la ficción de un intervalo infinito, lo que siempre podría realizarse con la forma de demostrar de Arquímedes. Pero como el señor Marqués de l'Hospital creía que así yo traicionaría a la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que ya había dicho en un lugar de las *Actas de Leipzig*, y me fue fácil acceder a su petición".

También los símbolos utilizados para el concepto de infinito en sus relaciones con los números finitos, son convenciones, y su comportamiento no es por lo tanto estrictamente aritmético. Y asimismo los propios conceptos de todo o de nada pueden inducir a error y establecer paradojas que estudiará también la teoría de conjuntos, siglos más tarde:

"Para llegar por fin a $\frac{0}{\infty}$, o cero dividido por infinito, y cosas parecidas, digo que esto tampoco puede tener lugar más que en una interpretación cómoda, tomando cero para un número de una gran pequeñez, e infinito para un número muy grande. Entonces, cuando más disminuyáis el numerador y más aumentéis en proporción el denominador de la fracción, más os acercaréis a cero: $\frac{1:10}{10} = \frac{1}{100}$, y $\frac{1:100}{100} = \frac{1}{10000}$, y $\frac{1:1000}{1000} = \frac{1}{1000000}$, lo que va hacia $\frac{0}{\infty} = 0$, o bien $\frac{1:\infty}{\infty} = 0$, o bien $\frac{1}{\infty\infty} = 0$, de suerte que el cuadrado del infinito, multiplicado por cero, daría la unidad. Pero se puede decir que eso va así, pero no que suceda; pues en rigor *nada*, que es la extremidad de los números al disminuir, debería así ser dividido por *todo*, que es la extremidad de los números al aumentar. Pero el *todo* tomado como *número máximo* es una cosa contradictoria, así como el *número mínimo*. Los dos extremos, *nada* y *todo* están fuera de los números, son *extremos excluidos, no incluidos*".

Con estas ideas mal comprendidas, se podría llegar a pensar que demuestran matemáticamente que el Creador puede fabricar alguna cosa partiendo de la nada, tal como dice la Biblia. Es lo que trata de hacer un matemático italiano, llamado Guido Grandi, al que Leibniz aplica su sutil ironía:

"Es fácil caer en paralogismos cuando no se rectifican estas cosas con las ideas que acabo de dar. Un hábil matemático de Pisa llamado Guido Grandi había sostenido que una infinidad de nadas o ceros sumados entre sí formaban una magnitud asignable, y así, con una elegante alegoría, ilustraba la producción de criaturas de la nada por medio del infinito. El señor Alejandro Marchetti, otro hábil matemático de Pisa, se opuso a ello diciendo que una infinidad de nadas no sería jamás otra cosa que nada. Y tomando la nada con rigor, tenía razón. No obstante el Padre Grandi probaba su proposición mediante la división. Vos sabéis, señor, que al dividir $\frac{1}{1+a}$, , donde 1: $(1 + a) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ etc. al infinito. Luego si a es 1, tendremos $\frac{1}{1+1} = 1:2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. al infinito, lo que haría

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \; etc.$$

Se me ha consultado sobre esto y he aquí cómo creo haber descifrado el enigma. No hay que decir en absoluto que una infinidad de nadas tomadas rigurosamente formen alguna cosa, tampoco esta serie lo dice, aunque parezca decirlo. Para entenderla bien, hay que resolverla en series finitas que se acercan al infinito. Sea pues la serie 1 – 1 + 1 – 1 etc. finita, entonces, si tomamos un número impar, por ejemplo 7 unidades, 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1, el total hace 1. Pero cuando esto se termina en el infinito, donde no hay par ni impar, hay que tomar la media aritmética entre 1 y 0 que es $\frac{1}{2}$. Pues en las estimaciones ambiguas, cuando no hay más razón para lo uno que para lo otro, hay que tomar la media aritmética. Por ejemplo, entre 1 y *m* hay que tomar, $\frac{1+m}{2}$, es decir, $\frac{1+m}{2}$ es decir, $\frac{1}{2}$."

Así que no hay que exagerar con la aplicación de las matemáticas a la naturaleza y forzar que Dios, dueño del infinito, pueda construir alguna cosa de la nada simplemente aplicando estas reglas. La creación del mundo, si alguna vez tuvo lugar, debe continuar siendo un milagro y no una consecuencia de la habilidad del señor Grandi. Pero anécdotas aparte, estos fragmentos constituyen otro ejemplo de la coherencia del pensamiento de Leibniz, donde todo funciona conjuntamente. Está claro que sólo en el caso de las estimaciones ambiguas, en las que no tenemos más razones de esperar un resultado que el contrario, debemos tomar la media aritmética, la equiprobabilidad, como en otros lugares explica cuando estudia el problema de la asignación de probabilidad a una mundo contingente.

Bibliografía

Leibniz,G.W: «Réponse aux réflexions contenues dans la seconde Edition du Dictionnaire Critique de M. Bayle, article Rorarius, sur le système de l'Harmonie préétablie». Manuscrito LH IV, 2,2a Bl.1-2. GP, IV. 554-571.

Leibniz,G.W.: « Lettre à M. Dangicourt sur les monades et le calcul infinitésimal » Septiembre 1716. *Edición utilizada*: Dutens III, 499-502. Sacada del *Recueil* de Kortholt T.III. I. *De las Mónadas*. II, III, IV y V. *Del cálculo de los infinitesimales*.