

Helge Kragh

La génesis de la teoría relativista de electrones de Dirac (*)

Resumen: *El artículo del notable historiador de la física Dr. Helge Kragh, traducido aquí al español, es un importante estudio histórico de uno de los grandes hitos de la física: la teoría cuántica relativista de electrones de P. A. M. Dirac (1902-1984). Su estudio incluye fuentes no antes utilizadas del Archive for the History of Quantum Physics del Archivo Niels Bohr de Copenhague, y analiza el desarrollo de la mecánica cuántica relativista desde 1926 hasta poco antes de la publicación del artículo del físico inglés en febrero de 1928, en perspectiva crítica de los trabajos y las valoraciones personales del propio Dirac y de otros científicos e historiadores sobre sus contribuciones e invenciones, aportando esclarecimientos novedosos sobre su metodología, trasfondo cultural y, principalmente, sobre el rol que jugaron, en los procedimientos de Dirac, los principios relativistas y mecánico-cuánticos en la elaboración de una síntesis teórica, concordante con su correlativa fenomenología experimental, de la teoría del electrón.*

Palabras claves: *Historia de la ciencia. Filosofía de la ciencia. Historia de la física. Historia de la teoría de la relatividad. Historia de la física cuántica.*

Abstract: *This is a Spanish version of a very important paper, written by a notable historian of physics, Dr. Helge Kragh, which studies one of the great landmarks in the History of Physics: the Relativistic Quantum Theory of Electrons of P. A. M. Dirac (1902-1984). His study includes sources not used before from the Archive for the History of Quantum Physics, from the Niels Bohr Archive in Copenhagen, and analyzes the development*

of the Relativistic Quantum Mechanics from 1927 until close before the publication of the February 1928 paper of the English Physicist, in critical perspective of his works and his personal appraisals and from other colleagues and historians of his contributions and inventions, giving new elucidations on his methodology, cultural background and, principally, on the role that plays, in Dirac's procedures, the relativistic and quantum mechanical principles in working out a theoretical synthesis, concordant with his correlative experimental phenomenology, of the electron theory.

Key words: *History of Science. Philosophy of Science. History of Physics. History of the Theory of Relativity. History of Quantum Physics.*

La mecánica cuántica relativista para electrones de PAUL DIRAC, publicada a principios de 1928, es uno de los grandes hitos de la historia de la ciencia. De acuerdo con NORWOOD RUSSELL HANSON, cuenta con pocos predecesores en grandeza:

Theoretical physics has rarely witnessed such a powerful unification of concepts, data, theories and intuitions: Newton and Universal Gravitation; Maxwell and Electrodynamics; Einstein and Special Relativity; Bohr and the hydrogen atom; these are the high spots before Dirac. From a chaos of apparently unrelated facts and ideas, Newton in his way, and now Dirac in his, built a logically powerful and conceptually beautiful physical theory [...].¹ (**)

A pesar de la grandeza de la teoría de DIRAC, nunca ha sido materia de análisis histórico. Esto puede ser debido a una suposición tácita de muchos historiadores de la física, de que el periodo adecuado para las investigaciones históricas termina alrededor de 1927, cuando la mecánica cuántica se completó conceptualmente.² Lo que queda más allá de ese límite se deja para memorias de los físicos y reseñas sumarias. Como consecuencia, muchos de los recientes desarrollos de la física nunca han estado sujetos a un análisis histórico satisfactorio. No hay, sin embargo, razón de por qué la ciencia reciente no deba ser incluida en el dominio de la historia de la ciencia y sea tratada con el mismo cuidado como el aplicado al estudio de periodos anteriores. El presente ensayo quiere significar una contribución a ese fin.

1. Mecánica cuántica relativista, 1926

Cuando ERWIN SCHRÖDINGER publicó la serie de artículos sobre mecánica ondulatoria, que hicieron época, en la primavera de 1926,³ el corazón de su teoría parecía estar oculto en dos ecuaciones diferenciales, que pronto fueron conocidas como las “ecuaciones de SCHRÖDINGER”:⁴

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

$$y \quad \left(\frac{-\hbar}{2m} \Delta + V \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t), \quad (2)$$

apropiadas para una partícula con energía potencial V . La teoría de SCHRÖDINGER, como fue publicada, no incluía efectos relativistas. Resulta que SCHRÖDINGER, sin embargo, originalmente diseñó su mecánica ondulatoria como una genuina teoría relativista.⁵ La principal razón de por qué no publicó su versión relativista radica en su falla para dar cuenta de los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Así, en su primera comunicación sobre mecánica ondulatoria, reportaba, aunque sólo en palabras, que había calculado

los valores propios de la energía del átomo de hidrógeno relativista, pero con un resultado decepcionante:

Das relativistische Keplerproblem, wenn man es genau nach der eingangs gegebenen Vorschrift durchrechnet [führt] merkwürdigerweise auf *halbzahlige* Teilquanten (Radial- und Azimuthquant).⁶

Con esa observación SCHRÖDINGER se refirió a lo que fue conocido como la estructura fina del espectro del hidrógeno.

Entre 1915 y 1916, ARNOLD SOMMERFELD explicó el espectro del hidrógeno mediante la cuantización del átomo de Bohr relativista. De acuerdo con el resultado de SOMMERFELD, que se encontró estar en concordancia exacta con los experimentos, los niveles de energía están expresados por dos números cuánticos:

$$E_{nk} = \frac{m_0 c^2}{1 + \frac{\alpha^2}{(n-k - \sqrt{k^2 - \alpha^2})^2}} - m_0 c^2. \quad (3)$$

En esta expresión α denota la constante de estructura fina $\frac{e^2}{\hbar c}$, n el número cuántico principal (con valores 1, 2 ...) y k el número cuántico azimutal (con valores 1, 2, ..., n); el entero $n - k$ se conoció también como el número cuántico radial, n_r . Una expansión en potencias de α^2 da la aproximación

$$E_{nk} = \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (4)$$

El tratamiento inédito del átomo de hidrógeno relativista por SCHRÖDINGER estaba basado en la versión relativista de la ecuación de valores propios (1), que es⁷

$$\Delta\psi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[\left(E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] \psi = 0 \quad (5)$$

Si esta ecuación se resuelve de acuerdo con los métodos aplicados a (1), esta ecuación da al menos la ecuación (3), con la única, pero por supuesto crucial diferencia de que $n - k$ y k tienen que ser reemplazados por $n - k + 1/2$ y $k - 1/2$, respectivamente. Eso significa que se destruye su concordancia con los experimentos, y, por consiguiente da cuenta de la observación de SCHRÖDINGER. Fue sólo en la cuarta comunicación que SCHRÖDINGER se ocupó de un examen de la teoría relativista, y aún entonces “nur mit der allergrössten Reserve” (“[...] solo con las más grandes reservas”). Lo que SCHRÖDINGER llamó “die vermutliche relativistisch-magnetische Verallgemeinerung” (“[...] la supuesta generalización magnético-relativista [...]”) de su ecuación (2) fue obtenida de la ecuación de HAMILTON-JACOBI relativista para un electrón en un campo electromagnético. El resultado fue⁸

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{2ie}{\hbar c} \left(\frac{\phi}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{A} \cdot \nabla\psi \right) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \left(\phi^2 - \vec{A}^2 - \frac{m_0^2 c^4}{e^2} \right) \psi = 0 \quad (6)$$

donde A y ϕ son los potenciales electromagnéticos. La ecuación de valores propios (5), que SCHRÖDINGER no publicó, se deriva fácilmente de la ecuación (6): para un electrón sujeto a un campo de COULOMB, pero no a un campo magnético externo, $\psi(\vec{r}, t)$ es reemplazada por la función periódica $\psi(\vec{r}, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right)$ y da la ecuación (5).

Las ecuaciones (5) y (6) son las fórmulas básicas de la mecánica ondulatoria relativista de SCHRÖDINGER. Fueron elaboradas por muchos físicos⁹ en 1926 y son conocidas hoy como las ecuaciones de KLEIN-GORDON (en lo que sigue, las ecuaciones de KG). La prioridad de su publicación pertenece a OSKAR KLEIN, quien propuso las ecuaciones de KG en abril de 1926.¹⁰ El tratamiento más detallado y lúcido de la mecánica ondulatoria relativista es probablemente aquella de VLADIMIR FOCK, quien calculó el movimiento de KEPLER relativista de acuerdo con la mecánica ondulatoria.¹¹ FOCK

naturalmente llegó al resultado que SCHRÖDINGER había ya descrito en palabras.

La derivación más directa de las ecuaciones de KG resulta si aplicamos a la ecuación de movimiento clásica-relativista las substituciones

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t},$$

utilizada por SCHRÖDINGER. Por ejemplo, eso fue realizado por LOUIS DE BROGLIE¹² quien así llegó a las ecuaciones (5) y (6). Considere, en aras de la discusión posterior, el hamiltoniano clásico para una partícula libre:

$$H^2 = c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4 \quad (7)$$

Con las substituciones apropiadas para la mecánica ondulatoria, esto llega a ser la ecuación de KG para un electrón libre:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right)^2 \psi = 0 \quad (8)$$

En 1926 la teoría de KG fue elaborada por muchos autores y se aplicó a muchos problemas. De particular interés es la interpretación del campo escalar relativista ψ . En su cuarta comunicación, SCHRÖDINGER adoptó una interpretación electromagnética, que fue trasladada al dominio relativista por KLEIN y por WALTER GORDON.¹³ SCHRÖDINGER encontró que con las substituciones

$$\rho = \psi\psi^* \quad \text{y} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*), \quad (9)$$

esas cantidades satisfacían una ecuación de continuidad, y si se multiplicaban por e , eran interpretadas por lo tanto como el escalar de densidad de carga y el vector de densidad de corriente. GORDON y KLEIN encontraron que mientras la densidad de corriente no fuera alterada por un tratamiento relativista, la densidad de carga venía a ser

$$\rho_{KG} = -\frac{\hbar}{2mc} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) refieren solamente a electrones libres.

En 1926, y en parte de 1927, la teoría de KG fue tema de numerosos artículos y fue considerada, al menos entre aquellos que tenían interés en la mecánica ondulatoria, la generalización correcta y natural de la teoría de SCHRÖDINGER. Al aparecer con una forma simétrica bella, que automáticamente asegura invarianza de LORENTZ, atraía instintivamente a muchos físicos teóricos. SCHRÖDINGER adoptó la formulación de KG en posteriores trabajos sobre el efecto COMPTON¹⁴ y en un intento de formular las leyes de la conservación de la energía y del momentum en el marco de su campo ψ .¹⁵ El problema con la teoría de KG era, sin embargo, que aunque tenía un atractivo matemático y estético, su rango de aplicabilidad era limitado cuando se le comparó con la mecánica cuántica usual. Como ya se mencionó, fallaba en dar cuenta de la estructura fina del espectro, y por supuesto no fue útil para el efecto anómalo de Zeeman u otros fenómenos de doblete.

La teoría de KG no fue considerada buena por muchos de los principales teóricos cuánticos, y, en particular, los físicos alemanes afiliados a la mecánica matricial. Esa falta de confianza fue reforzada durante 1926 en cuanto llegaron a ser mejor conocidos los principios generales de la mecánica cuántica. WOLFGANG PAULI se ocupó constantemente de tratar de formular una mecánica cuántica relativista sólida; de hecho había derivado las ecuaciones de KG en abril de 1926.¹⁶ Pero entonces, en julio, le dijo a WENTZEL que dudaba de la validez de la teoría de KG. Las dudas de PAULI provenían de haber reconocido las dificultades formales de la teoría de KG, la cual, argüía, no era consonante con la equivalencia entre la mecánica ondulatoria y la mecánica matricial.

Deshalb habe ich das Vertrauen zur Differentialgleichung (eq.(5)) vollständig verloren!¹⁷

PAULI, en colaboración con JOHANN KUDAR, continuó investigando la versión relativista de la teoría de SCHRÖDINGER, pero permaneció escéptico hacia el enfoque de KG. Año y medio después le dijo a SCHRÖDINGER:

Von der relativistischen Gleichung 2-Ordnung mit den vielen Vätern glaube ich aber nicht, dass sie der Wirklichkeit entspricht.¹⁸

Si la “directa” generalización de KG no resultó factible, ¿cómo podría entonces ser elaborada la relatividad dentro de la mecánica cuántica? Una forma posible era incluir los efectos relativistas como perturbaciones o correcciones a la ecuación no relativista. Este enfoque fue seguido por PAULI y otros físicos. En su importante trabajo sobre el espectro del hidrógeno¹⁹ PAULI dedujo los términos de BALMER desde la mecánica de Gotinga y trató de incluir una corrección relativista de primer orden para dar cuenta también de la estructura fina; pero, como admitió, dificultades matemáticas al calcular el tiempo promedio de r^{-2} le habían prevenido de llevar a cabo el programa.²⁰ PAULI, quien en el invierno de 1925-1926 era todavía hostil a la idea del espín, quería resolver el problema de la estructura fina por medio de un desarrollo puramente relativista de la mecánica cuántica, sin ninguna suposición inicial sobre electrones con espín. Él se dio cuenta, sin embargo, de que una hipótesis que combinara relatividad y espín podría eventualmente resolver el problema de la estructura fina.

El programa de PAULI fue además desarrollado por WERNER HEISENBERG y PASQUAL JORDAN, quienes en marzo de 1926 tuvieron éxito donde PAULI había fallado.²¹ Concibiendo que los efectos del espín y la relatividad están dados por dos términos de perturbación agregados al hamiltoniano usual, lograron obtener la fórmula de estructura fina de SOMMERFELD, aunque sólo en su aproximación de primer orden (4).²² El enfoque HEISENBERG-JORDAN fue posible solamente porque la relatividad fue *agregada* como una corrección. Por tanto, podía dar solamente una aproximación para la fórmula exacta de SOMMERFELD. Además, los efectos de relatividad y espín fueron introducidos más bien de una manera *ad hoc*; las fórmulas correctas del doblete, por ejemplo, fueron obtenidas

tomando ventaja del reciente descubrimiento del factor de THOMAS.²³ Los efectos no fueron *explicados*, es decir, los fenómenos de doblete no fueron deducidos de la mecánica cuántica. Es históricamente interesante que HEISENBERG y JORDAN intentaron formular primero la nueva mecánica cuántica de una forma relativista apropiada, y que esperaban así dar cuenta también de la hipótesis del espín.²⁴ Sin embargo, no fueron capaces de llevar a cabo su programa.

Así, en 1926 la posición de la mecánica cuántica con respecto a la relatividad era, por mucho, como sigue. Por un lado, la teoría de KG fue una solución posible del problema. Siendo una teoría cuántica genuinamente relativista, fallaba en dar cuenta satisfactoriamente de los fenómenos de doblete, y pareció difícil reconciliarla con el esquema general de la mecánica cuántica. Por otro lado, el enfoque de HEISENBERG-JORDAN dio cuenta de los fenómenos de doblete y estaba, por supuesto, en concordancia con la mecánica cuántica. Pero, no siendo genuinamente relativista, iba a ser considerada solamente como una respuesta provisional. Lo que se buscaba era una ecuación invariante de LORENTZ que, sin suposiciones adicionales, diera la fórmula exacta de SOMMERFELD y, si fuera posible, también el espín.

El enfoque tomado por PAULI, HEISENBERG y JORDAN fue también seguido por GREGOR WENTZEL en Múnich,²⁵ quien pudo efectivamente derivar la fórmula de SOMMERFELD (3) o, más bien, una fórmula similar a (3). WENTZEL no pudo decidir acerca de la normalización del denominador en (3), es decir, si los números cuánticos eran enteros o semienteros. Que la teoría de WENTZEL no era la respuesta buscada, fue además demostrado porque llegó a la fórmula exacta de la estructura fina por medio de una aproximación relativista de primer orden, sin tomar en consideración el espín. Ni PAULI²⁶ ni SCHRÖDINGER se impresionaron por el resultado de WENTZEL. Comparando los intentos de la mecánica matricial con la suya, SCHRÖDINGER sentía que la última era superior, aunque no la respuesta final:

Dirac (*Proc. Roy. Soc.*) und Wentzel (*Z. f. Phys.*) rechnen Seiten lang am Wasserstoffatom, Wentzel auch relativistisch, wobei im Endresultat bloss *das* fehlt, was

einen eigentlich interessiert: nämlich, ob 'halbzahlig' oder 'ganzzahlig' zu quanteln ist! So findet Wentzel also zwar 'genau die Sommerfeldsche Feinstrukturformel', aber aus dem angegebenen Grunde ist das Resultat für den Erfahrungsvergleich ganz wertlos. – In der Wellenmechanik ergibt die relativistische Behandlung, die ebenso einfach ist, wie die klassische, unzweideutig halb-zahliges Azimuth- und Radialquant. (Ich habe die Rechnung seiner Zeit nicht publiziert, weil dies Ergebnis mir eben zeigte, dass noch etwas fehlt; dieses etwas ist sicher der Gedanke von Uhlenbeck und Goudsmid).²⁷

Muchos de los intentos para construir una mecánica cuántica relativista empleaban el punto de vista de la relatividad *general*. Por ejemplo, ese fue el programa de KLEIN. El intento grandioso de crear una teoría omniabarcadora de la mecánica cuántica, el electromagnetismo y la relatividad general resultó ser un callejón sin salida, pero en ese momento fue perseguido impacientemente por muchos físicos; no sólo KLEIN sino también FOCK, DE BROGLIE, TH. DE DONDER, FRITZ LONDON, LÉON ROSENFELD y NORBERT WIENER.²⁸ En retrospectiva, el enfoque relativista general tuvo una marca especulativa y formalista, que probablemente ayudó a desviar el interés en las cuestiones relativas a la consistencia lógico-cuántica de la ecuación más simple de KG.

2. P. A. M. Dirac: metodología y trasfondo cultural

Originalmente Dirac estudió ingeniería, no física.²⁹ Bajo la tensa situación económica de la Inglaterra de posguerra, deseaba ganarse la vida, por lo que no se atrevió a comprometerse en un campo tan inseguro económicamente como la física pura. Después de haberse graduado como ingeniero eléctrico en 1921, no pudo encontrar un empleo: la depresión económica había causado desempleo masivo también entre los ingenieros. Sólo entonces entró en la Universidad de Cambridge, donde eventualmente comenzó su carrera gloriosa en física teórica. La formación inicial de DIRAC en ingeniería tuvo un profundo impacto

en su visión científica general y, en particular, en su entendimiento del rol jugado por las matemáticas en la teoría física. DIRAC mismo estimaba ese impacto como sigue:

It seemed to me that if one worked with approximations there was an intolerable ugliness in one's work, and I very much wanted to preserve mathematical beauty. Well, the engineering training which I received did teach me to tolerate approximations, and I was able to see that even theories based on approximations could sometimes have a considerable amount of beauty in them [...] I think that if I had not had this engineering training, I should not have had any success with the kind of work that I did later on, because it was really necessary to get away from the point of view that one should deal only with results which could be deduced logically from known exact laws which one accepted, in which one had implicit faith.³⁰

Sin embargo, este enfoque, más bien empirista-pragmatista, a la física teórica, que DIRAC aprendió como estudiante de ingeniería, fue solo un aspecto de su método. DIRAC fue además un físico matemático y siempre tuvo una fuerte inclinación hacia los enfoques matemático-deductivos. Muchas veces expresó su gran confianza en el valor de la consistencia interna y la belleza matemática de las teorías físicas, a expensas de un enfoque empirista-inductivista,

[...] it is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment... if one is working from the point of view of getting beauty in one's equations, and if one has really a sound insight, one is on a sure line of progress.³¹

Después, desarrolló sus visiones acerca del rol heurístico de la belleza matemática en la investigación física dentro de consideraciones metafísicas de una cualidad matemática, que consideraba como inherente al esquema de la naturaleza.³² Deducciones lógicas de consecuencias “from known exact laws which one accepted, in which one had implicit faith” (“desde leyes exactas conocidas que uno aceptara, en las cuales uno

tuviera fe incondicional”) (arriba), jugaron un rol substancial en la forma de hacer física de DIRAC y fueron también significativas en la creación de su teoría de 1928. Lo que enseñó su temprana formación en ingeniería a DIRAC, fue que uno no debe confiar ciegamente en las matemáticas. Incluso las teorías aproximativas pueden hacer frente a los criterios de belleza matemática.

La teoría de la relatividad hizo una inconfundible impresión sobre la vida intelectual de la Europa de posguerra. Como explicó DIRAC:

It is easy to see the reason for this tremendous impact. We had just been living through a terrible and very serious war... Then this terrible war came to an end rather suddenly. The result was that everyone was sick and tired of the war. Everyone wanted to forget it. And then relativity came along as a wonderful idea leading to a new domain of thought. It was an escape from the war.³³

DIRAC fue atraído por el interés general en la relatividad y rápidamente llegó a ser un experto en la teoría de la relatividad. Su principal inspiración vino de los escritos de ARTHUR EDDINGTON, quien sin duda influenció toda su forma de pensar; hay vínculos estrechos entre la filosofía de la ciencia de EDDINGTON y las teorías físicas de DIRAC.³⁴ Mucho de su tiempo como estudiante estuvo ocupado con problemas de relatividad.

There was a sort of general problem which one could take, whenever one saw a bit of physics expressed in a non-relativistic form, to transcribe it to make it fit with special relativity. It was rather like a game, which I indulged in at every opportunity, and sometimes the result was sufficiently interesting for me to be able to write up a little paper about it.³⁵

A lo largo de su carrera, DIRAC permaneció fuertemente comprometido con la relatividad. Una teoría cuántica que no concordara con la relatividad era insatisfactoria, y sólo tendría garantizada una validez temporal hasta que fuera encontrada una mejor teoría, a saber, relativista. Desde su primer encuentro con la mecánica matricial de HEISENBERG, en setiembre de

1925, DIRAC objetaba su forma no relativista e inmediatamente trató de reescribirla de tal forma que fuera compatible con la relatividad, aunque en ese tiempo fue en vano.³⁶

Mientras DIRAC pensaba que la mecánica cuántica tenía que ser formulada al final en completo acuerdo con la teoría de la relatividad, su formación en ingeniería le prevenía contra una síntesis muy comprensiva y grande, incluso una a la que podría haber recurrido debido a su belleza matemática. Él estaba listo para abordar el problema por partes, mejorando y criticando las teorías existentes. Este era opuesto al enfoque de KG, que llevó a una ambiciosa pretensión de que la relatividad y la teoría cuántica habían sido unificadas de un solo golpe. A KLEIN, quien trató de incorporar la relatividad general además de la teoría electromagnética en la mecánica cuántica, señaló DIRAC una vez que la principal razón de su fracaso era que trataba de resolver demasiados problemas al mismo tiempo.³⁷ DIRAC muchas veces ha destacado esa moraleja, a la que atribuyó una buena parte de su propio éxito:

One should not try to accomplish too much in one stage. One should separate the difficulties in physics one from another as far as possible, and then dispose of them one by one.³⁸

3. La relatividad en los trabajos anteriores de Dirac

Antes de su abordaje final de la mecánica cuántica relativista, DIRAC tocó la materia en varias ocasiones, como era, además, compatible con su visión. Ninguno de esos trabajos, como fueran publicados antes de 1928, intentaba directamente hacer la mecánica cuántica relativista, pero mostraron cómo consideraba DIRAC la materia antes del gran avance de fines de 1927.

Incluso en 1924, antes del advenimiento de la mecánica cuántica, DIRAC había considerado la teoría cuántica y la relatividad en una forma que, en retrospectiva, fue característica de su programa de investigación. Insatisfecho con la forma no invariante de la relación de frecuencia de BOHR, $\Delta E = \hbar\nu$, mostró que podía ser de hecho escrita

como una ecuación de cuatri-vectores, $\Delta E_\mu = \hbar\nu_\mu$ y así hacerla cumplir con la relatividad.³⁹

En sus etapas iniciales la mecánica cuántica fue desarrollada por dos campos, uno dedicado a la mecánica matricial, el otro a la mecánica ondulatoria. DIRAC estaba más cercano a la versión matricial de la mecánica cuántica, desarrollada por los físicos de Gotinga. Las ideas de DE BROGLIE le atraían instintivamente debido a su audaz unificación de la teoría cuántica y la teoría de la relatividad. Pero, siendo formado en una tradición enteramente diferente y con una visión totalmente diferente, no podía aceptarlas como físicamente sólidas. “Although I appreciated very much the beauty of de Broglie’s work, I could not take his waves seriously”,⁴⁰ ha recordado DIRAC, expresando sin duda una actitud común a muchos físicos de su tiempo. Cuando la teoría de SCHRÖDINGER apareció, DIRAC había ya desarrollado su propia versión de la mecánica cuántica, a veces conocida como álgebra de números q , y la había aplicado exitosamente a varios problemas. Consecuentemente sintió que la teoría de SCHRÖDINGER no solamente era innecesaria, sino también un paso atrás en el entendimiento de los fenómenos cuánticos. Solo gradualmente abandonó su hostilidad a las ideas de SCHRÖDINGER y reconoció a la mecánica ondulatoria ser un complemento valioso de la mecánica matricial y de la mecánica de números q .

En 1926 DIRAC publicó dos artículos sobre el efecto COMPTON, materia que invita a un tratamiento relativista. En el primero de esos artículos, *Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering*,⁴¹ DIRAC argüía, de la teoría de la relatividad, que el tiempo, t , debía ser tratado en la teoría cuántica como las otras variables dinámicas y , y por tanto, ser considerado como un número q . Entonces DIRAC mostró que en la teoría hamiltoniana clásica, $-E$ y t son variables conjugadas; interpretado en el lenguaje de la mecánica cuántica, esto implica que deben obedecer a las mismas reglas básicas de conmutación como lo hacen las otras variables conjugadas: $tE - Et = i\hbar$.

En ese primer artículo DIRAC no se refirió a las nuevas ideas de SCHRÖDINGER. Él trabajó “on the basis of Heisenberg’s matrix mechanics, which was first modified to be in agreement with

the principle of relativity.”⁴² Pero en su segundo artículo sobre el tema,⁴³ publicado año y medio después, DIRAC reconoció las ventajas de la mecánica ondulatoria. Encontró entonces que

a more natural and more easily understood method of obtaining the matrices is provided by Schrödinger's wave mechanics.⁴⁴

El hecho de que $-E$ y t son variables conjugadas, lo transcribió dentro de la notación de operadores como sigue: $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. La ecuación de onda de SCHRÖDINGER en el caso relativista la escribió esencialmente como⁴⁵

$$\left(m_0^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \right) \psi = 0, \quad (11)$$

con $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$ y $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Esta es la ecuación de KG (8). DIRAC fue capaz de deducir las fórmulas de energía y momentum de COMPTON y calcular la intensidad de la radiación COMPTON emitida en concordancia satisfactoria con los experimentos. En esa época, GORDON y KLEIN⁴⁶ habían tratado ya el efecto COMPTON trabajando estrictamente sobre la base de la mecánica ondulatoria relativista, es decir, partiendo de las expresiones de KG para la densidad de carga y la densidad de corriente. Ese no fue el enfoque de DIRAC, quien expresó que la ecuación de onda (11) fue

used merely as a mathematical help for the calculation of the matrix elements, which are then interpreted in accordance with the assumptions of matrix mechanics.⁴⁷

DIRAC no se convirtió al campo de la mecánica ondulatoria. Pero su actitud hacia la mecánica ondulatoria frente a la mecánica matricial fue, en contraste con algunos de los físicos de Gotinga, no dogmática y pragmática, una actitud que le pudo haber ayudado después cuando creó la teoría relativista del electrón.

Las publicaciones de DIRAC fueron en general difíciles de entender, y los artículos sobre el efecto COMPTON no fueron la excepción. En el otoño de 1926 ALBERT EINSTEIN visitó a

PAUL EHRENFEST y GEORGE UHLENBECK en Leiden, y los tres buscaron entender el artículo de DIRAC. EHRENFEST escribió a DIRAC preguntándole un número de cuestiones para clarificar el contenido del artículo.

Verzeihen Sie bitte, wenn einige der Fragen auf ganz grossen Missverständnissen beruhen sollten. Aber wir können trotz aller Anstrengung nicht durchdringen!⁴⁸

Una de las cuestiones que EHRENFEST preguntó, fue por qué DIRAC escribió la ecuación hamiltoniana como $\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} = m_0^2 c^2$ y no como $m_0 c^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} = E$. “Does it make a difference?” (“¿Hace esto una diferencia?”) preguntó EHRENFEST. Incidentalmente, ese fue el punto crucial, de la posterior teoría relativista del electrón de DIRAC, en donde ella hizo una diferencia; pero ese hecho difícilmente podría haber estado en la mente de Dirac en aquel tiempo.⁴⁹

DIRAC primero consideró la ecuación de KG en la forma (8), en agosto de 1926, en una discusión de la estadística cuántica de un gas de BOSE-EINSTEIN.⁵⁰ Esas consideraciones fueron proseguidas en su importante trabajo sobre la teoría cuántica de radiación, del cual se desarrolló la posterior electrodinámica cuántica.⁵¹ A partir de su entendimiento de que el problema de la aplicación de la mecánica cuántica a los procesos de radiación está conectado con “serious difficulty in making the theory satisfy all the requirements of the restricted principle of relativity”,⁵² DIRAC expresó que

it will be impossible to answer any one question completely without at the same time answering them all”.⁵³

Aún si DIRAC en 1927 no pudo desarrollar una electrodinámica cuántica satisfactoria, es decir, estrictamente relativista, se las arregló para proceder en la dirección correcta sobre una base en gran medida no relativista y para desarrollar sus ideas acerca de la cuantización de fotones de una forma más fructífera. El enfoque de DIRAC

hacia una electrodinámica cuántica fue luego desarrollado por JORDAN y PAULI, quienes en diciembre de 1927 lograron formular principios de cuantización relativísticamente invariantes para el campo electromagnético.⁵⁴ Ellos no consideraron, sin embargo, electrones individuales en esa ocasión.

Los conceptos desarrollados en teoría de radiación fueron las bases del tratamiento de la teoría de dispersión de DIRAC.⁵⁵ Ese trabajo no dio resultados que no se encontraran en los tratamientos previos de la dispersión,⁵⁶ pero abordó el problema de un modo completamente diferente, no basándose ni en argumentos de correspondencia ni en las densidades de carga y corriente de la mecánica ondulatoria. Con el fin de deducir la fórmula de dispersión de KRAMERS-HEISENBERG, DIRAC partió del hamiltoniano relativista para un electrón en un campo electromagnético:⁵⁷

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi \quad (12)$$

Aparentemente no sabiendo qué hacer con esa función, la utilizó solamente en su aproximación clásica;

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^2} + e\varphi - \frac{e}{m_0 c} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2m_0 c} \vec{A}^2. \quad (13)$$

Como esta revisión muestra, el trabajo de DIRAC en mecánica cuántica relativista, antes de su teoría de 1928, fue más bien provisional. Con frecuencia se encontró con problemas en los que era necesario un tratamiento relativista, y reconoció con claridad que la relatividad tenía que elaborarse completamente dentro del formalismo mecánico cuántico. Pero entre 1926-27 dudó en utilizar el enfoque de unificación propuesto en la teoría de KG. Es característico del enfoque de DIRAC que cada vez que se enfrentaba al problema relativista, se contentara con aplicar una aproximación.

4. Espín y mecánica cuántica

En los eventos que condujeron a la teoría relativista de electrones de DIRAC, la introducción del espín fue de importancia decisiva. Incluso si todavía no estaba elaborada una teoría del espín, fue inevitablemente claro en 1926 que espín y relatividad tenían que ser integrados si la teoría cuántica pudiera dar cuenta de las peculiaridades de la espectroscopia. En su tercera comunicación sobre la mecánica ondulatoria, SCHRÖDINGER expresó así que

den Zeemaneffekt [...] erscheint mir unlöslich geknüpft an eine korrekte Formulierung des relativistischen Problems in der Sprache der Wellenmechanik, weil bei vierdimensionaler Formulierung das Vektorpotential von selbst dem skalaren ebenbürtig an die Seite tritt.⁵⁸

En cuanto se dio cuenta de la hipótesis del espín de SAMUEL GOUDSMIT y UHLENBECK, SCHRÖDINGER conjeturó que ese era el vínculo que faltaba para dar cuenta de la discrepancia entre la fórmula de SOMMERFELD y el resultado obtenido por la mecánica ondulatoria relativista.⁵⁹

Mientras el entendimiento del formalismo mecánico cuántico general avanzaba durante 1926, el problema de incluir espín y relatividad en la mecánica cuántica permaneció esencial. Fue ampliamente aceptado, no sólo que espín y relatividad estaban íntimamente relacionados, sino que también el espín encontraría su explicación en la relatividad, ya sea por la teoría especial o la general. En el verano de 1926, SOMMERFELD preguntó a EINSTEIN:

Sie versuchen wohl schon, das Spinnende Elektron (das unentbehrlich ist!) in die allgem[-eine] Relativitätstheorie einzuordnen? Das wäre der grösste Triumph der Relativitäts-Theorie.⁶⁰

Sin embargo, EINSTEIN nunca siguió la sugerencia de SOMMERFELD. Él replicó:

Ich geben Ihnen gerne zu, dab an dem spinnenden Elektron nicht zu zweifeln

ist. Aber einstweilen ist wenig Hoffnung, seine Notwendigkeit von innen heraus zu begreifen.⁶¹

No todos los físicos compartieron las reservas de EINSTEIN. LONDON, por ejemplo, propuso interpretar el espín en la teoría cuántica de cinco dimensiones de KLEIN, identificando el conjugado canónico de su quinta dimensión con el momentum angular del espín.⁶² El primer paso en el programa de un entendimiento mecánico cuántico del espín fue dado por PAULI y CHARLES DARWIN en la primavera de 1927. Esos intentos dieron sólo una respuesta provisional al problema, y fallaron en combinar espín y relatividad. Sin embargo, fueron pasos importantes hacia la creación de una teoría relativista del espín. Al mismo tiempo fueron intentos de relacionar el espín con la teoría de Klein-Gordon. E. GUTH desde Viena argumentó que las expresiones de carga y corriente de la teoría relativista reproducen el radio giromagnético correctamente.⁶³ Y A. CARELLI desde Nápoles partió de la ecuación de KG y trató de introducir el electrón con espín en una interpretación electromagnética de la mecánica ondulatoria.⁶⁴ Sin embargo, los intentos de conectar el espín con la teoría relativista de segundo orden resultaron infructuosos.

Con el fin de hacer uso de la hipótesis de GOUDSMIT y UHLENBECK en la mecánica cuántica, PAULI⁶⁵ consideró una función de onda de SCHRÖDINGER dependiente no solamente de coordenadas espaciales, sino también de las llamadas coordenadas de espín. Ya que la componente de espín en cualquier dirección, digamos s_z , no puede alcanzar sino dos valores, $+\frac{\hbar}{2}$ o $-\frac{\hbar}{2}$, PAULI consideró una función de onda de dos componentes: $\psi(q, s_z) = (\psi_\alpha(q), \psi_\beta(q))$. El índice α refiere a $s_z = +1$ y β a $s_z = -1$, medido en términos de $\hbar/2$. PAULI entonces expresó el problema de valores propios de la energía por medio de dos ecuaciones acopladas del tipo

$$H\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}, \vec{s}\right)\psi = E\psi \quad (14)$$

donde ψ es ψ_α o ψ_β , y donde H y \vec{s} son operadores. Para aplicar esas ecuaciones a problemas

físicos, PAULI tenía primero que encontrar la forma explícita de los operadores de espín. Esto lo hizo en estrecha concordancia con el enfoque de HEISENBERG y JORDAN. Esto produjo lo que pronto fue conocido como las matrices de PAULI:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\hbar} \vec{s}. \quad (15)$$

Escribiendo el hamiltoniano término a término

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad (16)$$

PAULI aplicó (14) a sistemas físicos simples tales como el átomo de hidrógeno en un campo magnético externo \vec{H} . En (16) H_0 es la energía normal, sin perturbación (el operador de energía), mientras H_1 es la contribución de energía debida al campo magnético y la variabilidad relativista de la masa; H_2 es la contribución de energía debida al espín del electrón. En el lenguaje de la mecánica cuántica, PAULI escribió el hamiltoniano como

$$H = \left[\frac{-\hbar^2}{2m_0} \Delta - \frac{e^2}{r} \right] + \left[\frac{-1}{2m_0 c^2} E_0 + 2E_0 \frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{r^2} - i\mu_0 - \vec{H} \cdot (\vec{r} \times \nabla) \right] + \left[\frac{\hbar^2}{4} \cdot \frac{e^2}{m_0^2 c^2} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{i} (\vec{k} \cdot \vec{s}) + \mu_0 \vec{H} \cdot (\vec{s}) \right] \quad (17)$$

donde E_0 es el valor propio de H_0 , μ_0 el momento magnético del electrón y \vec{s} y \vec{k} son los operadores del momentum angular orbital y del espín. PAULI incluyó así los efectos de espín (el último paréntesis), mientras que los efectos relativistas fueron solamente considerados en su aproximación de primer orden (primer término en el segundo paréntesis cuadrado). De hecho PAULI enfocó la materia tal como lo hicieron HEISENBERG y JORDAN antes de él, y con el mismo resultado, a saber (17), como él mismo reconociera. Lo nuevo fueron las matrices de espín explícitas (15). Debido a la equivalencia entre la teoría de PAULI y la de HEISENBERG y JORDAN, no hubo necesidad de resolver la ecuación de valores propios. Se sabía de antemano que daba la ecuación (4) de arriba.

En su teoría del espín PAULI parcialmente adoptó un enfoque mecánico ondulatorio, al mismo tiempo destacando la necesidad de cumplir con el formalismo de la mecánica cuántica general. PAULI estaba, en palabras de DARWIN, “more disposed to regard the wave theory as a mathematical convenience and less than a physical reality.”⁶⁶ A ese respecto, el enfoque de PAULI se parecía mucho al de DIRAC. En contraste con PAULI, DARWIN estaba dedicado a la mecánica ondulatoria. En una serie de artículos a principios de 1927,⁶⁷ extendió la teoría de SCHRÖDINGER para cubrir los fenómenos de espín y mostró que el efecto anómalo de ZEEMAN, así como otros enigmas, podían ser reproducidos de ese modo. El programa de DARWIN era

to proceed by empirically constructing a pair of equations to represent the fine-structure of the hydrogen spectrum.⁶⁸

Ese enfoque empírico, que compartió con PAULI, consistió en expresar el hamiltoniano por medio de una suma de términos incluyendo los efectos de espín y efectos relativistas de primer orden, es decir, la ecuación (16). DARWIN resolvió su ecuación de onda por medio de un largo análisis matemático basado en armónicos esféricos y mostró que daba el resultado correcto, la ecuación (4). Su traducción mecánico ondulatoria de las ideas originales de UHLENBECK y GOUDSMIT fue así equivalente al tratamiento de HEISENBERG y JORDAN. Las principales diferencias entre el trabajo de DARWIN y PAULI radican en sus diferentes interpretaciones de la función de onda del espín. DARWIN interpretaba la función de onda de dos componentes como el “vector de onda” del electrón, para entenderlo en analogía con una onda de luz. PAULI objetaba la interpretación de DARWIN, y apuntaba que solamente introduciendo el espín como una coordenada extra en las dos funciones de onda escalares, podía el espín ser propiamente incorporado en la teoría de transformación mecánico-cuántica. A pesar de su completa equivalencia, las teorías de DARWIN y PAULI provocaron un impacto muy diferente en los desarrollos posteriores de la física. Históricamente, la contribución de PAULI

resultó ser la más importante de las dos. En el tiempo en que las teorías de espín emergieron, cada físico las recibió de acuerdo con su propia posición respecto de la mecánica cuántica. La mecánica ondulatoria prefirió el enfoque de DARWIN, mientras muchos otros estuvieron en favor del modo en que PAULI presentara los problemas.⁶⁹

En lo que respecta al problema de un electrón, ni la teoría de PAULI ni la de DARWIN daban resultados no proporcionados ya por la mecánica matricial de HEISENBERG y JORDAN. En particular, sus teorías no cambiaron materialmente la situación respecto de la relatividad. Ambos, PAULI y DARWIN estaban muy al tanto de esa deficiencia. “Die hier formulierte Theorie”, admitió PAULI, es

nur provisorisch anzusehen, da man von einer endgültigen Theorie verlangen muss, dass sie von vornherein relativistisch invariant formuliert ist und auch die höheren Korrekturen zu berechnen erlaubt.⁷⁰

PAULI trató de calcular una aproximación relativista de segundo orden,⁷¹ pero no pudo obtener una mejor aproximación que (4). Los problemas, imaginaba PAULI, eran probablemente causados por un modelo muy primitivo del electrón, visualizado como un dipolo magnético infinitesimal. Él pensaba que un modelo más sofisticado, incluyendo efectos de cuadrupolo y superiores, llevaría a una ecuación invariante de LORENTZ. Pero PAULI admitió,

es ist mir [...] bisher nicht gelungen, zu einer relativistisch invarianten Formulierung der Quantenmechanik des magnetischen Elektrons zu gelangen.⁷²

La teoría de DARWIN enfrentó las mismas dificultades que la de PAULI:

[...] the deduction of the Sommerfeld formula for separation ought to be exact and not merely a first approximation. In view of these considerations we cannot regard the theory as at all complete - as, indeed, is true of the whole interconnection of the quantum theory with relativity [...].⁷³

DARWIN trató de formular las ecuaciones de onda de forma relativista por medio de las ecuaciones de KG, pero tenía que recurrir a una aproximación nula (dejando de lado términos en c^{-2}) y admitir que la teoría de KG no podía elaborarse correctamente.

Así que, en realidad, las ingeniosas teorías de DARWIN y PAULI no contribuyeron mucho al problema aún más delicado de integrar la mecánica cuántica con la teoría de la relatividad. Más bien, sugirieron que la integración debía ser buscada en una dirección completamente diferente.

5. Hacia una teoría relativista

Si algún elemento ha de ser señalado como crucial en la creación de la mecánica cuántica relativista por Dirac, es la comprensión general de la mecánica cuántica tal como emergió entre 1926 y 1927. En el presente contexto, no hay necesidad de discutir el desarrollo de la “mecánica cuántica general”, de la cual MAX JAMMER ha dado una revisión extensiva.⁷⁴ El corazón de la nueva comprensión fue la interpretación en términos de probabilidad, originalmente propuesta por MAX BORN, y la teoría estadística de transformación. DIRAC fue un contribuyente principal en ambos campos, al cual dirigió una gran parte de sus recursos intelectuales entre 1926 y 1927. Sus trabajos sobre métodos generales para la interpretación física de la mecánica cuántica, recuerda DIRAC, le dio

more pleasure than any of the other papers which I have written on quantum mechanics either before or after.”⁷⁵

En la primavera de 1927, la formulación unificada de la mecánica cuántica, dada por la teoría de transformación, fue completada. Ella comprendió las cuatro teorías para entonces existentes (la mecánica matricial de HEISENBERG, el álgebra de números q de DIRAC, la mecánica ondulatoria de SCHRÖDINGER, y el formalismo de operadores de BORN y WIENER) dentro de un esquema general de gran belleza lógica. Durante su trabajo con la teoría de transformación, DIRAC avanzó hacia una firme convicción respecto de la verdad fundamental de la mecánica

cuántica general; la concordancia con ese formalismo llegó a ser el último criterio para la solidez de las teorías en el dominio cuántico. DIRAC destacó, por ejemplo, que el exitoso desarrollo de la teoría de radiación fue posible sólo debido a la teoría general de transformación.⁷⁶ La confianza de DIRAC en la teoría general de transformaciones mecánico-cuántica, estaba enraizada en una idea general de la naturaleza de las leyes físicas. En 1930 expresó esa filosofía así:

The formulation of these laws requires the use of the mathematics of transformations. The important things in the world appear as the invariants (or more generally the nearly invariants, or quantities with simple transformation properties) of these transformations [...] The growth of the use of transformation theory, as applied first to relativity and later to the quantum theory, is the essence of the new method in theoretical physics.⁷⁷

Para la teoría de transformación, sin embargo, era crucial que las ecuaciones de movimiento cuánticas fueran de primer orden en $\partial/\partial t$. Fue así irreconciliable con teorías del tipo de KG y parecía poner en riesgo la unificación de la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. DIRAC reconoció el problema, que se convirtió en una fuente de creciente insatisfacción para él.

There was [...] a real difficulty in making the quantum mechanics agree with relativity. That difficulty bothered me very much at the time, but it did not seem to bother other physicists, for some reason which I am not very clear about.⁷⁸

Como se mencionó en la sección 1, también PAULI y KUDAR reconocieron esas dificultades.⁷⁹ Sus dudas respecto de la ecuación de KG fueron conocidas a DIRAC, para quien KUDAR revisó la materia vista desde Hamburgo. Brindaré un resumen de las dos consideraciones de los físicos de Hamburgo acerca de la mecánica cuántica relativista, como fueron conocidas por DIRAC a fines de 1926.

A diferencia de la ecuación de onda no relativista, se señalaba que la ecuación KG no

es autoadjunta. Sus funciones propias no están sujetas, además, a la relación de ortogonalidad usual. Esto lleva al resultado de que la así llamada regla de multiplicación de la mecánica matricial no se satisface en general. En el tratamiento de GORDON del efecto COMPTON, por ejemplo, las coordenadas matriciales X_{lm} fueron expresadas mecánica-ondulatoriamente como $\frac{1}{e} \int \rho x dx$ donde ρ es la densidad de carga relativista dada por la ecuación (10); pero entonces $(X^2)_{lm}$ no está dada por la regla de multiplicación matricial, es decir, es diferente $\sum_a X_{al} X_{ma}$. Esas objeciones muestran que es difícil interpretar la teoría KG en el mismo marco de la teoría de SCHRÖDINGER, y, por consiguiente, que la teoría no se puede poner en la misma cesta de las distintas teorías no relativistas, es decir, de la mecánica cuántica general. Si la ecuación de KG de segundo orden es poco fiable, uno podría estar dispuesto a considerar su versión correspondiente de primer orden, por ejemplo, una ecuación de la forma

$$\hbar c \sqrt{m_0^2 c^4 - \Delta} \psi = (E - V) \psi \quad (18)$$

Esta ecuación es, en palabras de PAULI,

etwas mathematisch unbequem, aber an sich sinnvoll und auch selbstadjungiert".⁸⁰

Las dificultades matemáticas están conectadas con las interpretaciones del operador raíz cuadrada; si es entendido como una serie de potencias, lleva a una ecuación diferencial de orden infinito.

Cuando DIRAC recibió la carta de KUDAR, los principales físicos conocían bien la estructura general de la mecánica cuántica. Sabían, por ejemplo, que si los valores propios de $H\psi = E\psi$ cumplen el requisito de ortogonalidad, entonces el hamiltoniano debe necesariamente ser expresado como un operador autoadjunto. JORDAN⁸¹ enfatizó ese punto y aprovechó la oportunidad para considerar la ecuación de KG. Sin embargo, en lugar de desestimar la ecuación relativista de segundo orden, sobre el fundamento de que no es autoadjunta en el sentido usual, propuso una

definición extendida de autoadjuntividad; con esa extensión, JORDAN mostró que la ecuación de KG es autoadjunta. Parece que JORDAN no se dio cuenta completamente de cuán incompatible es la ecuación de KG con la mecánica cuántica general. Esa intuición estaba limitada a muy pocos físicos, primero que todo a PAULI y DIRAC.

Ahora vuelvo a la visión de DIRAC concerniente a la posición del espín en la mecánica cuántica. Todo el problema del espín estaba ligado a la espectroscopía, en cuanto a que el concepto de espín fue introducido a fin de proporcionar un entendimiento racional de las estructuras de doblete y anomalías similares. No es de extrañar, entonces, que DIRAC no estuviera ocupado con el espín en sus primeros trabajos. Porque él estuvo fuera del campo de la espectroscopía de la física continental y no tenía interés en los enredados problemas espectroscópicos que llevaron a la introducción del espín. Fue sólo en 1927 que DIRAC se ocupó del problema, aparentemente inspirado por PAULI. De acuerdo con las memorias de DIRAC,⁸² él y PAULI discutieron, en enero de 1927, en Copenhague, sobre cómo el espín podía ser incorporado dentro de la mecánica cuántica. Es característico de la actitud de DIRAC hacia la física, que su interés en el espín no se derivara de problemas empíricos, sino de su tentativa de aplicar las ideas de la mecánica cuántica general también al espín. DIRAC expresa que él y PAULI tuvieron la idea de las tres variables de espín, que fueron publicadas en el artículo de PAULI, independientemente uno del otro.⁸³ De sus notas del curso de otoño de 1927,⁸⁴ podemos entender cómo concibió Dirac las teorías de espín.

Como uno esperaría de la visión de DIRAC, definitivamente prefirió el método de Pauli al de DARWIN, cuyo procedimiento no está justificado, como se mostró, de acuerdo con la "teoría cuántica general". En contraste, DIRAC elogió mucho el método de PAULI:

It consists in abandoning from the beginning any attempt to follow the classical theory. One does not try to take over into the quantum theory the classical treatment of some model, which incorporates the empirical facts, but takes over the empirical

facts directly into the quantum theory. The method provides a very beautiful example of the general quantum theory, and shows that this quantum theory is no longer completely dependent on analogies with the classical theory, but can stand on its own feet.

[Consiste en abandonar desde el comienzo cualquier intento de seguir la teoría clásica. Uno no trata de asumir dentro de la teoría cuántica el tratamiento clásico de algún modelo que incorpore los hechos empíricos, sino de asumir los hechos empíricos directamente dentro de la teoría cuántica. El método proporciona un ejemplo muy bello de la teoría cuántica general, y muestra que esa teoría cuántica ya no depende completamente de analogías con la teoría clásica, sino que puede pararse sobre sus propios pies].

Este es otro ejemplo de la inquebrantable confianza de DIRAC en la mecánica cuántica general, el principio guía para todas sus investigaciones desde 1926 en adelante. Las notas de curso contienen un minucioso tratamiento de la teoría del espín de PAULI, que DIRAC interpretó ligeramente diferente: mostró que la interpretación de PAULI de las matrices no concuerda completamente con la teoría de transformación. En el método de PAULI, σ_x puede, por ejemplo, operar sobre una sola función de onda, digamos ψ_β y entonces dar $\sigma_x \psi_\beta = \psi_\alpha$. Pero DIRAC argüía que σ_x sólo puede ser aplicada significativamente a una función de onda completa con una componente α y una β ; así que en lugar de $\sigma_x \psi_\beta = \psi_\alpha$ uno tiene $(\sigma_x \psi)_\beta = \psi_\alpha$. Esa diferencia de interpretación no exige, sin embargo, una revisión de ninguno de los resultados de PAULI. DIRAC también ejemplificó la teoría del espín con una investigación detallada del átomo de hidrógeno, incluyendo magnetismo y efectos relativistas de primer orden. Usando una versión simplificada y más lúcida del método de DARWIN, resolvió la ecuación de valores propios de PAULI (es decir (14) y (17)) y obtuvo la fórmula de aproximación de SOMMERFELD y el factor g de LANDÉ para dobletes.

Las notas de curso prueban que en octubre de 1927 o más temprano, DIRAC estaba íntimamente familiarizado con la teoría del espín. Estaba al corriente de sus deficiencias, a saber, de su ecuación de valores propios semiempírica y su falla en no concordar más que a primer orden con la teoría aceptada del espectro del hidrógeno. En ese tiempo, él no estaba todavía en el camino hacia una mecánica cuántica relativista que pudiera resolver esos problemas. En cualquier caso, no hay evidencia, en las notas de curso, de un planteamiento para una ecuación de onda lineal.

En 1927 el espectro del hidrógeno no fue considerado más como un enigma crucial que requería una mecánica cuántica relativista completamente nueva. Después de la incorporación del espín dentro de la mecánica cuántica, se daba cuenta de la estructura fina de uno de dos modos: o por medio de la teoría PAULI-DARWIN o introduciendo un número cuántico extra de momentum angular semi-entero en la ecuación de KG. Cuando LLEWELLYN THOMAS encontró la explicación cinemática del factor 2 que había perseguido la hipótesis original de UHLENBECK y GOUDSMIT, HENDRIK KRAMERS informó a RALPH KRÖNIG:

Since further Heisenberg and Pauli have succeeded in finding the quantum mechanical mean values of $[r^2]$ and $[r^3]$ for a Keplerian orbit, we know now that the fine structure of the Hydrogen spectrum and the theory of the doublets in X-ray spectra is in the finest order [...].⁸⁵

Respecto de la estructura fina errónea de la teoría de KG, SCHRÖDINGER expresó en octubre de 1927 que ya no era tan problemática debido al espín:

[...] Ce fait ne nous effraie plus autant que quand il se présente pour la première fois.⁸⁶

DE BROGLIE hizo una observación similar:

Il ne faut pas cependant s'exagérer la portée de cet échec; en réalité on est sûr aujourd'hui que la théorie de structure fine de Sommerfeld est insuffisante, et que les phénomènes de dédoublement des raies

dans les séries optiques et Röntgen sont en rapport étroit avec l'état magnétique interne de l'atome et avec les effets Zeeman anormaux.⁸⁷

Aun si los hechos espectroscópicos no se consideraran suficientes para presionar por una revisión radical de las teorías existentes, había otras razones para estar insatisfechos con la presente teoría cuántica relativista. Como se mencionó, existía la incompatibilidad entre la mecánica cuántica general y la invarianza de LORENTZ. El quinto Congreso de Solvay, celebrado en Bruselas entre el 24 y el 29 de octubre de 1927,⁸⁸ se podía haber constituido en un foro para una discusión de estos problemas. Aunque se reunieron muchas de las figuras clave de la física cuántica, el asunto no fue tocado en la conferencia. Además, la mecánica cuántica relativista fue tratada en los informes dados por DE BROGLIE y SCHRÖDINGER,⁸⁹ quienes discutieron la ecuación de KG. Sin embargo, en sus contribuciones no hay rastros de insatisfacción enraizados en el reconocimiento de las inconsistencias lógicas de la formulación de KG con la mecánica cuántica general. Esto no es sorprendente, ya que SCHRÖDINGER y DE BROGLIE representaban visiones disidentes en cuanto a la interpretación de la mecánica cuántica. SCHRÖDINGER continuó en su intento de desarrollar una mecánica cuántica basada en campos clásicos. Y en París, DE BROGLIE desarrolló su propia alternativa, después conocida como la teoría de la doble solución; esa interpretación causal de la mecánica cuántica en términos de ondas-piloto fue el tema de su disertación en la conferencia de Solvay.

DIRAC no tomó parte en la discusión siguiente a la alocución de DE BROGLIE ni de SCHRÖDINGER, y no mencionó la teoría de KG en absoluto. Pero comentó extensamente el informe de BOHR. El mayor interés de DIRAC estaba en el desarrollo lógico de la mecánica cuántica general, que eventualmente le suministró la clave del problema de la relatividad en mecánica cuántica. En el Congreso de Solvay ese problema ciertamente ocupaba la mente de DIRAC, como es ilustrado por un episodio que él recordara así:

During the interval before one of the lectures, Bohr came up to me and asked me:

'What are you working on now?' I tried to explain to him that I was working on the problem on trying to find a satisfactory relativistic quantum theory of the electron. And then Bohr answered that that problem had already been solved by Klein. I tried to explain to Bohr that I was not satisfied with the solution of Klein, and I wanted to give him reasons, but I was not able to do so because the lecture started just then and our discussion was cut short. But it rather opened my eyes to the fact that so many physicists were quite complacent with a theory which involved a radical departure from the basic laws of quantum mechanics, and they did not feel the necessity of keeping to these basic laws in the way that I felt.⁹⁰

Después de su retorno de Bruselas, DIRAC concentró su trabajo en la teoría relativista del electrón. En dos meses había resuelto todo el asunto.⁹¹ Cuando DARWIN fue a Cambridge en la época de Navidad de 1927, estaba completamente sorprendido de enterarse de la nueva teoría de DIRAC, e informó a BOHR:

I was at Cambridge a few days ago and saw Dirac. He has now got a completely new system of equations for the electron which does the spin right in all cases and seems to be 'the thing'. His equations are first order, not second, differential equations! He told me something about them, but I have not yet even succeeded in verifying that they are right for the hydrogen atom.⁹²

El resultado del pensamiento de DIRAC fue *The Quantum Theory of the Electron*,⁹³ recibida por el editor de los *Proceedings* el segundo día del año nuevo de 1928.

6. La génesis de la teoría

Hasta donde pude averiguar, no hay fuentes materiales *prima facie*, tales como cartas o manuscritos que ofrezcan un análisis histórico fehaciente respecto del nacimiento de la teoría de DIRAC. Aparte del artículo mismo publicado, al historiador sólo le están dadas fuentes secundarias, de las cuales las memorias de Dirac son

las más importantes. Esas declaraciones datan de muchos años después del descubrimiento y tienen por tanto que ser utilizadas con alguna precaución; recuerdos de eventos de 40 años atrás suelen contener distorsiones e inexactitudes. El producto final del pensamiento de DIRAC, el artículo de 1928, no puede ser utilizado libremente como evidencia válida de cómo se creó la teoría. La historia de la ciencia ofrece muchos casos en que la presentación publicada de un proceso científico es deficiente para reflejar la trayectoria de descubrimiento. Basarse sólo en el producto final puede distorsionar la reconstrucción histórica hacia un patrón inductivista y demasiado lógico. Esta precaución general, para el historiador de la ciencia, es también ejemplificada por los escritos de DIRAC. En sus primeros trabajos sobre mecánica cuántica, DIRAC constantemente utilizó ideas de geometría proyectiva como medio de visualización, pero cuando fueron publicados, los resultados fueron siempre traducidos en el lenguaje más fácilmente comprensible del análisis matemático.⁹⁴ Debido a la particular forma de trabajo de DIRAC, puede ser más legítimo, sin embargo, usar el artículo publicado como evidencia histórica del caso aquí considerado. DIRAC prefirió producir un artículo en una pieza de esfuerzo concentrado, y muchas veces lo anotó continuamente, con su meticulosa manuscrita. Cuando el borrador era redactado, necesitaba pocas -si alguna-, correcciones,

Most of the papers that I wrote followed the line of presenting the ideas in the order in which they had occurred to me.⁹⁵

Como fue argüido en las dos secciones precedentes, se estimaba, en general, en la primavera de 1927, que si la relatividad podía ser completamente elaborada dentro de la teoría de PAULI, probablemente daría la estructura fina correcta sin aproximación. Desde esa posición uno podría asumir que la forma lógica de proceder era transformar la teoría de PAULI en una formulación invariante de LORENTZ, para proveer generalizaciones relativistas de sus matrices de 2×2 . Hemos dicho muchas veces que hay tanto una conexión lógica como también genética entre la

teoría de PAULI y la de DIRAC. De acuerdo con SOMMERFELD,

the discovery of the Pauli equation was an important step leading to the recognition of the true nature of the electron, i.e., the Dirac equation.⁹⁶

Lo mismo ha sido sugerido también recientemente. KRÖNIG afirma:

Pauli paved the way for the relativistic theory of the electron and of hydrogen-like atoms which we owe to Dirac (1928).⁹⁷

HEISENBERG consideraba la conexión así:

I cannot doubt that Dirac had been led to his discovery by Pauli's paper and especially by the relation $(p_x C_x - p_y C_y - p_z C_z)^2 = p^2$. The essential progress in Dirac's paper was the connection of Pauli's spin matrices with the Lorentz group [...].⁹⁸

Estas consideraciones concuerdan con la conclusión de BARTEL VAN DER WAERDEN, de acuerdo con quien la contribución de Pauli fue el paso decisivo y verdaderamente revolucionario en el camino hacia la teoría relativista del electrón.

Pauli's matrices s_k were used by Dirac to form a relativistic first-order wave equation [...] Dirac's wave equation contains matrices and is similar to Pauli's, but not to the old relativistic wave equation. The step from one to two ψ components is large, whereas the step from two to four components is small [...] in all cases, it was Pauli who made the first decisive step.⁹⁹

La reconstrucción histórica de la ruta de DIRAC a la teoría revela que, sin embargo, no hubo una conexión tan estrecha con las ideas de PAULI como asegura la explicación estándar. Un procedimiento que comenzara desde la teoría de PAULI habría dado el resultado. Pero ese no fue el procedimiento de DIRAC.

Siguiendo su filosofía general de la ciencia, DIRAC deseaba fundar su teoría en principios generales más que recurrir a un modelo del

electrón. Al contrario de PAULI, DARWIN y SCHRÖDINGER, quienes imaginaban que los problemas de integración de espín y relatividad debían ser resueltos a través de un modelo más sofisticado del electrón, DIRAC no estaba interesado en absoluto en hacer modelos.

The question remains as to why Nature should have chosen this particular model for the electron instead of being satisfied with the point-charge [...] [.]

planteaba DIRAC al inicio de su artículo.¹⁰⁰ Por consiguiente, consideró el electrón como una carga puntual.

El punto de partida básico de DIRAC fue que

we should expect the interpretation of the relativistic quantum theory to be just as general as that of the non-relativity theory.¹⁰¹

En completo acuerdo con su visión general de la física, como expresó en el prefacio a *Principles of Quantum Mechanics*, DIRAC se guiaba por dos requisitos de “cuasi-invarianza”: en primer lugar, las propiedades espacio-temporales de la ecuación deben transformar de acuerdo con la teoría de la relatividad; en segundo lugar, las propiedades cuánticas deben transformar de acuerdo con la teoría de transformación de la mecánica cuántica general. DIRAC reconoció que el último requisito excluía la teoría de KG. Solamente si la ecuación de onda es lineal en $\partial/\partial t$ la interpretación probabilista está asegurada. Si la ecuación relativista es también conforme al principio de relatividad, debe además contener energía y momentum de un modo invariante de LORENTZ, es decir, debe aplicarse al hamiltoniano relativista (7). Esos dos requisitos sugieren el procedimiento inicial

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \psi, \quad (19)$$

aplicado a un electrón libre. La ecuación (19) es asumida de la ecuación de KG con el signo menos *arbitrariamente* excluido. Como se mencionó, PAULI había considerado que la ecuación de arriba era una candidata significativa (“sinnvoll”),

pero no había podido desarrollarla más allá. La ecuación no es solo insatisfactoria desde un punto de vista matemático (el operador raíz cuadrada), sino también desde el punto de vista de la relatividad, ya que la energía y momentum no aparecen de una forma verdaderamente simétrica, es decir, invariante de LORENTZ. Si la raíz cuadrada pudiera ser arreglada, se preguntaba DIRAC, de una forma lineal en $p_1, p_2, y p_3$, esa sería una forma de salir del dilema. Pero ¿cómo puede ser linealizable una raíz cuadrada de cuatro cantidades?

Consideraciones como esas fueron el fruto de la creación de DIRAC de su teoría. La idea extraordinariamente simple de linealización, una idea derivada por una aplicación consistente de los principios generales de la relatividad y la teoría cuántica, fue el punto crucial. DIRAC también llamó la atención sobre otra dificultad de la teoría de KG, a saber, que permite soluciones de energía negativa. Se podía por tanto suponer que la extensión de DIRAC de la función de onda de PAULI de dos componentes a una función de onda de cuatro-componentes, le fue forzada por el reconocimiento de los estados de energía negativos: una función de onda que acomodara los estados de espín de una partícula de espín medio tanto como la de su antipartícula, debe tener cuatro componentes. Sin embargo, aparte del hecho de que este argumento es insatisfactorio,¹⁰² no fue la motivación de DIRAC. En 1928, él no acabó con la objeción de la energía negativa, que no jugó ningún rol en la creación de la teoría. La “cuatricidad” (*fourness*) fue causada por las matemáticas, no por la física.

Hasta este punto, no ha habido referencia al espín. ¿Jugó el espín un rol central en la génesis de la teoría, como ha sugerido la explicación estándar? DIRAC afirmó que no:

I was not interested in bringing the spin of the electron into the wave equation, did not consider the question at all and did not make use of Pauli's work. The reason for this is that my dominating interest was to get a relativistic theory agreeing with my general physical interpretation and transformation theory [...] It was a great surprise for me when I later on discovered that the simplest possible case did involve the spin.¹⁰³

Por tanto, podemos concluir que DIRAC no trabajó con un ojo en el espín. Todavía puede dudarse de que “did not make use of Pauli’s work” (“[...] no hiciera uso del trabajo de Pauli [...]”) en absoluto. El conocimiento de las matrices de espín resultó materialmente útil en el razonamiento de DIRAC, aunque fuera solamente de un modo indirecto. DIRAC, quien siempre gustaba de “playing about with mathematics”,¹⁰⁴ se dio cuenta en algún momento de la siguiente identidad:

$$|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3, \quad (20)$$

donde $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ denotan las matrices de espín de PAULI. La identidad se cumple para p conmutando arbitrariamente. Cuando DIRAC enfrentó el problema de elaborar una forma lineal de (19), la ecuación (20) lo atrajo como una posible guía. Si podía ser generalizada a cuatro cuadrados en lugar de tres, indicaría una solución. Para entonces se proporcionó una linealización del tipo deseado,

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + (m_0 c)^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c. \quad (21)$$

Pero, ¿existían coeficientes con esa propiedad?, y si así fuera, ¿cómo se verían? Si uno argumenta que la ecuación de onda lineal, dada por (19) y (21), tenía que contener la ecuación de KG, se deduce el siguiente conjunto de condiciones:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu &= 0 (\mu \neq \nu); \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \\ \alpha_\mu^2 &= 1 \end{aligned} \quad (22)$$

Esas condiciones son de hecho cumplidas por las matrices de espín:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i &= 0 (i \neq k); i, k = 1, 2, 3 \\ \sigma_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

DIRAC naturalmente trató de tomar $\alpha_i = \sigma_i$ y buscó otra matriz 2x2 como candidata para α_4 .

Tal candidata, sin embargo, no existe y DIRAC se dio cuenta de que las matrices 2x2 simplemente no funcionan. Entonces, otra vez, llegó a una de aquellas valiosas ideas caídas del cielo.

I suddenly realized that there was no need to stick to quantities, which can be represented by matrices with just two rows and columns. Why not go to four rows and columns?¹⁰⁵

Esta idea resolvió el problema de la linealización (21), y así se encontró la forma explícita de las matrices α .

En esta fase crucial de la teoría, el problema era puramente matemático, a saber, encontrar cantidades que satisfagan (22). Como fue usual, DIRAC prefirió elaborar la solución por sí mismo, sin consultar a los matemáticos. Si lo hubiera hecho, podría haber hallado la respuesta a ese problema inmediatamente.¹⁰⁶ Los expertos en álgebra en Gotinga, Hamburgo o Berlín habrían reconocido fácilmente las condiciones de DIRAC (22) como definiendo una denominada álgebra de CLIFFORD, basada en las 16 unidades formadas de 1, α_μ , $\alpha_\mu \alpha_\nu$, $\alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\lambda$, y $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Esta álgebra, que fue utilizada por RUDOLF LIPSCHITZ tan temprano como en 1884,¹⁰⁷ se sabía que era isomórfica al álgebra de matrices 4x4. Sin conocer que la solución general estaba ya contenida en la teoría algebraica, DIRAC la elaboró a su modo, “playing about with mathematics”.

Con la exitosa linealización llevada a cabo, se había quebrado el hielo. Las siguientes fases fueron formular la ecuación de onda explícitamente y someterla a una investigación final. De (19) y (21) la ecuación de DIRAC para un electrón libre da:

$$(\vec{p}_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \alpha_4 m_0 c) \psi = 0 \quad (23)$$

DIRAC redujo un problema físico a uno matemático, y las matemáticas lo forzaron a aceptar el uso de matrices 4x4 como coeficientes. Aceptando ese resultado, estaba forzado ahora a aceptar una función de onda de cuatro componentes $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$. Ese paso fue audaz y no menos decisivo que el paso de PAULI de una a dos componentes. Al contrario, mientras las dos

componentes de la función de onda de PAULI estaban empíricamente justificadas, no había en 1927 justificación física alguna para los dos componentes adicionales de DIRAC. Después de todo, el espín puede alcanzar sólo dos valores, pero no cuatro.

Esa primera y crucial fase estaba, en grado considerable, enraizada en la filosofía de la ciencia de DIRAC, en general, y en su visión sobre el rol del formalismo físico, en particular. Si DIRAC hubiera seguido una lógica empirista de la ciencia, nunca habría introducido tales términos no físicos como matrices 4x4. Además, DARWIN reconoció que “DIRAC’s success in finding the accurate equations shows the great superiority of principle over the previous empirical method.”¹⁰⁸ Casi cuarenta años después, DIRAC otra vez describió su filosofía en términos que llaman a recordar la creación de la teoría de 1928:

Any physical or philosophical ideas that one has must be adjusted to fit the mathematics. Not the other way round. Too many physicists are inclined to start from preconceived physical ideas, and then try to develop them and find a mathematical scheme that incorporates them. Such a line of attack is unlikely to lead to success.¹⁰⁹

En la investigación adicional de (23), DIRAC la escribió como

$$(p_0 + \rho_1 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \rho_3 m_0 c) \psi = 0 \quad (24)$$

donde las cantidades ρ_1 , ρ_3 , y $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son nuevas matrices 4x4. En esa fase, la ecuación no fue más que una inspirada suposición. Claramente, tenía la ventaja de ser lineal en $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial x$ y de ajustarse a los estándares de la mecánica cuántica general. La linealidad en $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial x$ no asegura por sí misma invarianza relativista, pero DIRAC mostró que su ecuación, (23) o (24), es de hecho invariante bajo una transformación de LORENTZ. Así, su teoría reúne los requisitos de la mecánica cuántica y la relatividad.

Si la apariencia misteriosa de la ecuación reclamaba más que validez formal, tenía que enfrentar la realidad experimental. Para ese propósito, Dirac investigó el comportamiento de un

electrón cuando se coloca en un campo electromagnético. El procedimiento estándar de reemplazar \vec{p} con $\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ y E por $(E - e\phi)$ convierte la ecuación a la forma

$$\left\{ \left(\frac{E}{c} - \frac{\phi}{c} e \right) + \rho_1 \left(\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) + \rho_3 m_0 c \right\} \psi = 0. \quad (25)$$

Esta fue la alternativa de DIRAC a la ecuación de KG como también a las ecuaciones de la teoría de PAULI-DARWIN. Para explorar el significado físico de (25), DIRAC utilizó el mismo procedimiento que había utilizado para encontrar las matrices α , es decir, comparó la ecuación de primer orden con la ecuación de KG. Elevando al cuadrado (25) se obtiene después de alguna manipulación

$$\left\{ \left(\frac{E}{c} - \frac{\phi}{c} e \right)^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m_0^2 c^2 + \frac{\hbar e}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} + i \rho_1 \frac{\hbar e}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \right\} \psi = 0. \quad (26)$$

Este es un resultado notable, porque muestra que la aproximada equivalencia con la teoría de KG no se cumple por más tiempo: (26) contiene dos términos adicionales, términos que no aparecen en las teorías previas. DIRAC naturalmente interpretó el primer término como debido a un momento magnético del electrón, tomado como $\frac{e\hbar}{2mc} \sigma$. En cuanto al segundo término, que refiere a un momento eléctrico, DIRAC lo descartó como no físico sobre la base de que es una cantidad puramente imaginaria que surge de un hamiltoniano real.¹¹⁰ La existencia de un momento magnético interno fue algo sumamente satisfactorio, y tanto más en cuanto podía mostrarse como debido al correcto momentum angular magnético de espín. DIRAC mostró que en su nueva teoría $\vec{r} \times \vec{p}$ ya no es una constante de movimiento; no conmuta con el hamiltoniano de DIRAC como $\vec{r} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \hbar \sigma$ lo hace. Tiene que ser adscrito al

electrón un momentum angular interno de valor $\frac{1}{2}\hbar\sigma$ en perfecta armonía con la teoría del espín.
 2 Con la bella deducción del espín y el momento magnético del electrón correctos, DIRAC había dado cuenta, en principio, de todos los enigmas espectroscópicos. “The whole of the duplexity phenomena follow without arbitrary assumption...”¹¹¹ expresó. El triunfo fue comprobado por DIRAC en otro artículo, sometido a *Proceedings* un mes después de su primer artículo.¹¹² En el nuevo artículo DIRAC investigó el comportamiento de las líneas espectrales en un campo magnético; mostró que en campos débiles aparece el efecto ZEEMAN, y en campos fuertes el efecto PASCHEN-BACK. Esos resultados no fueron nuevos, pero fue la primera vez que fueron deducidos “without arbitrary assumptions” (“[...] sin suposiciones arbitrarias [...]”) concernientes a electrones con espín u otros modelos. El efecto anómalo de Zeeman había sido tratado anteriormente por DIRAC, quien aplicando su álgebra de números q al modelo nuclear usual, derivó la fórmula g correcta para campos magnéticos débiles.¹¹³ Esta derivación, sin embargo, reposaba en la suposición estándar, pero *ad hoc*, de que el radio giromagnético del centro atómico es dos veces el valor clásico.

En 1927 ni la teoría de KG ni la de SCHRÖDINGER, en su formulación de espín, pudieron dar cuenta de la estructura fina del hidrógeno. Incluso si la teoría PAULI-DARWIN daba cuenta de la estructura fina para todo propósito práctico, la concordancia fue incompleta por dos razones: en primer lugar, estaba basada en un método semi-empírico que todavía contenía suposiciones *ad hoc*; en segundo lugar, la concordancia no podía ser extendida más allá de una aproximación de primer orden. En la nueva teoría de DIRAC la primera objeción fue removida. Pero si la teoría debía considerarse como completamente exitosa, se debería poder deducir de ella la fórmula exacta de SOMMERFELD. DIRAC reconoció que la deducción de la ecuación (3) fue esencial a su teoría y que debía ser, a lo sumo, incompleta sin ese requisito. En su artículo fundamental, consagró la última parte a una confrontación con esa cuestión. Logró mostrar que la teoría, en su primera aproximación, conduce a los mismos resultados de la teoría PAULI-DARWIN.

DIRAC mostró que en un campo central, V , la ecuación (25) da una ecuación radial que combina características de la teoría de KG y la teoría de PAULI-DARWIN. La ecuación exacta es:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \chi + \left[\left(\frac{p_0 + V}{\hbar} \right)^2 - \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right) - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \chi - (p_0 + V + m_0 c) \frac{\partial V}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1}{r} \right) \chi = 0. \quad (27)$$

J es un nuevo número cuántico, definido por $\bar{M}^2 = (\bar{m} + \bar{s})^2 = \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) \hbar^2$; puede tener cualquier valor entero excepto cero, y juega el mismo rol de k en las teorías anteriores de DARWIN y PAULI. χ es igual a $\psi_\beta r^{-1}$ con ψ_β siendo la mitad de los componentes de la función de onda de DIRAC. Si (27) es comparada con la parte radial de la ecuación de valores propios de KG, resulta que son formalmente idénticas, aparte del último término en (27). DIRAC mostró que ese término, en su aproximación de primer orden, corresponde al término de espín orbital, como se encuentra en THOMAS y es asumido por DARWIN y PAULI. Demostrando así que la ecuación de valores propios incluye los mismos términos que tenían las teorías más viejas, DIRAC no tenía que resolverla explícitamente. Concluyó su artículo así:

The present theory will thus, in the first approximation, lead to the same energy levels as those obtained by DARWIN, which are in agreement with experiment.¹¹⁴

Cuando la teoría de DIRAC apareció, su fuerza radicaba en el nivel metodológico y conceptual. De hecho, la teoría no dio un resultado, o explicó un hecho experimental que no estuviera ya cubierto por las teorías anteriores. Dado que proporcionar la fórmula SOMMERFELD (3) habría sido ir más lejos para establecer la nueva teoría, uno puede preguntarse por qué DIRAC no abordó el problema con más determinación, es decir, ya sea por medio de un cálculo exacto o incluyendo correcciones mayores. De acuerdo con el propio reporte de DIRAC, él ni siquiera intentó

resolver la ecuación (27) exactamente, sino que buscó desde el principio una aproximación.¹¹⁵

En cuanto a los motivos para restringir su esfuerzo a una solución aproximada, DIRAC lo explica en términos de una idea molesta para él, a saber, que los científicos están muchas veces motivados por el temor en sus actividades.

I was afraid that maybe they [i. e. the higher order corrections] would not come out right. Perhaps the whole basis of the idea would have to be abandoned if it should turn out that it was not right to the higher orders and I just could not face that prospect. So I hastily wrote up a paper giving the first order of approximation and showing it to that accuracy; at any rate, we had agreement between the theory and experiment. In that way I was consolidating a limited amount of success that would be something that one could stand on independently of what the future would hold. One very much fears the need for some consolidated success under circumstances like that, and I was in a great hurry to get this first approximation published before anything could happen which might just knock the whole thing on the head.¹¹⁶

Evidentemente hay mucha verdad en la moraleja de DIRAC sobre el temor: factores psicológicos como temor y ambición juegan un rol considerable en el trabajo de los científicos. Con todo, DIRAC probablemente sobrestima su moraleja,¹¹⁷ que no concuerda muy bien con su filosofía general de la ciencia. DIRAC enfatiza la confianza que uno debe tener en la belleza formal asociada con propiedades simples de transformación; tales cosas deben estar primero en concordancia experimental, explica. DIRAC se guió en realidad por su filosofía cuando creó su teoría relativista del electrón. Parece, por tanto, improbable que realmente temiera que la teoría podía fracasar si fuera aplicada al átomo de hidrógeno.

Propondré una versión algo diferente de por qué DIRAC no incluyó un tratamiento exacto del espectro del hidrógeno. Al haber encontrado la ecuación (26) y dado cuenta que contenía el espín correcto, DIRAC tuvo prisa en publicar y no estaba preparado para perder el tiempo en un examen

detallado de los niveles de energía exactos del átomo de hidrógeno. Entendió que no era un problema matemáticamente simple y decidió publicar la primera aproximación. En eso tenía razón, en vista de los brillantes resultados ya obtenidos y la nitidez lógica de todo el procedimiento. Y DIRAC estaba, sugiero, motivado por la competencia. Como nuestro abajo, en 1927 había una competencia por obtener la correcta ecuación relativista de espín. DIRAC sabía que otros físicos estaban también sobre la pista, así que pudo además haber estado motivado por el “temor”. Pero fue, supongo, temor a no ser el primero en publicar, no temor de que la teoría tuviera serias deficiencias. Esa conjetura está justificada por el hecho de que no *intentó* obtener la concordancia exacta, ni aún después de que había publicado su teoría. Si la concordancia fuera realmente tan importante para la teoría, como estaría implícita en la moraleja del “temor” de DIRAC, ¿por qué no abordó la materia? Creo que DIRAC estaba completamente satisfecho con la concordancia aproximada y tenía completa confianza en que la teoría podía también proporcionar una concordancia exacta. Simplemente no vio el interés de ocuparse en las complicadas matemáticas de la ecuación (27).

Esa tarea fue realizada independientemente por DARWIN¹¹⁸ y por GORDON,¹¹⁹ ambos expertos en el tipo de análisis matemático requerido para la solución de ecuaciones de valores propios. En febrero de 1927, PAULI comunicó a KRONIG

Nun ist ja die Diracsche Arbeit erschienen. Es ist ja wunderbar, wie das alles stimmt! Herr Gordon konnte ohne Schwierigkeiten nachrechnen, dass aus Diracs Gleichungen auf S. 622 unten, für $V = \frac{e^2}{r}$ die alte Sommerfeldsche Formel^{cr} für die Energieniveaus in Strenge folgt.¹²⁰

Para el tiempo en que DIRAC creó su teoría, muchos otros físicos trabajaron duro para construir una teoría cuántica relativista de espín. Ninguno de esos poco conocidos intentos tuvo alguna influencia en el posterior desarrollo de la física cuántica, ya que fueron superados por

la teoría de DIRAC. Pero pueden ilustrar la atmósfera competitiva de la época y la manera en que otros físicos abordaron el problema que DIRAC resolvió.

En Utrecht, KRAMERS presumiblemente inició desde la ecuación de KG, a la que agregó un término de espín relativísticamente invariante, y obtuvo de esa manera una ecuación de espín invariante de LORENTZ.¹²¹ Esa ecuación era equivalente a la ecuación de DIRAC (25), pero utilizaba una función de onda de PAULI de dos componentes. La ecuación de KRAMERS puede escribirse como dos ecuaciones lineales, equivalentes a la ecuación de DIRAC, sin embargo, aún si KRAMER parece haber estado cerca de una “ecuación de DIRAC”, la había obtenido solamente introduciendo a mano el espín, es decir, completando el programa adelantado por PAULI y DARWIN. En Gotinga, intentos similares fueron hechos por EUGENE WIGNER en colaboración con JORDAN. El intento de JORDAN puede entreverse en la siguiente observación del físico de Cambridge GEORGE BIRTWISTLE:

Pauli has recently done some work on the application of quantum mechanics to the spinning electron, which is now being extended by Jordan so as to include relativity.¹²²

En Gotinga, no hubo intentos de iniciar con la construcción de un hamiltoniano lineal.

We were very near to it, and I cannot forgive myself that I didn't see that the point was linearization....,

ha dicho JORDAN.¹²³ JORDAN y WIGNER conocieron de la ecuación de DIRAC, por una carta que DIRAC envió a MAX BORN antes de la publicación de su artículo.¹²⁴ JORDAN y WIGNER enseguida se dieron cuenta de que la teoría de DIRAC era superior a su propio intento.

We were not satisfied with any of the equations we had found but were not yet ready to give up. The letter to Born changed all that. As Jordan put it “Well, of course, it would have been better had we found the equation but the derivation is so beautiful,

and the equation so concise, that we must be happy to have it”.¹²⁵

En Leningrado, la mecánica cuántica relativista de espín fue investigada por JAKOV FRENKEL¹²⁶ y también por DMITRI IWANENKO y LEV LANDAU.¹²⁷ Ellos elaboraron teorías que en algunos aspectos eran similares a la teoría de DIRAC. Los físicos soviéticos desarrollaron el enfoque adoptado por DARWIN y establecieron ecuaciones de onda invariantes de LORENTZ en las que la función de onda de SCHRÖDINGER se generalizaba como un tensor. Aunque las ecuaciones encontradas por FRENKEL y por LANDAU e IWANENKO estaban basadas en la teoría de KG, es decir, en ecuaciones diferenciales de segundo orden, lograron dar cuenta de los efectos de espín sin introducir el espín empíricamente. Las trabajosas teorías tensoriales de los físicos de Leningrado aparecen, sin embargo, incomprensibles y muy complicadas cuando son comparadas con la teoría de DIRAC.

7. Factores determinantes del procedimiento de Dirac

Los libros de texto estándar de la mecánica cuántica introducen la ecuación de DIRAC a través de la ecuación de KG, lo cual se muestra que es insatisfactorio debido a varias razones. La ecuación de DIRAC entonces aparece como el intento lógico de enfrentarse a esas dificultades. Las objeciones normales en contra de la ecuación de KG usualmente recaen en cuatro partes: (1) No es lineal en la derivada temporal. (2) Implica soluciones de energía negativa. (3) La densidad de probabilidad no está definida positivamente. Esas tres objeciones son de naturaleza teórica, se refieren a la interpretación y estructura lógica de la teoría de KG; están, además, estrechamente interrelacionadas.¹²⁸ (4) La ecuación de KG no logra reproducir la fórmula de SOMMERFELD y no puede dar cuenta del espín.

Como se señaló, la primera objeción formaba el punto de partida decisivo de DIRAC, quien reconoció que una ecuación de movimiento, que es cuadrática en la derivada temporal, no puede

ser puesta posiblemente en armonía con la teoría de transformación de la mecánica cuántica. En cuanto al segundo punto, el de las energías negativas, las cosas son más complejas. En su artículo clásico de 1928, DIRAC conocía muy bien esa dificultad. La ecuación de KG para un electrón en un campo electromagnético, se refiere igualmente bien tanto a una carga positiva como a una negativa, apuntó DIRAC, solamente la solución de carga positiva está asociada con la energía negativa.

One gets over the difficulty of the classical theory by arbitrarily excluding those solutions that have a negative W . One cannot do this in the quantum theory, since in general a perturbation will cause transitions from states with W positive to states with W negative. Such a transition would appear experimentally as the electron suddenly changing its charge from $-e$ to e , a phenomenon which has not been observed.¹²⁹

Que la ecuación de KG formalmente permite energías negativas, es evidente del hecho de que es la traducción mecánico-ondulatoria de la fórmula clásica relativista (7) la que puede ser escrita como

$$E = (c^2 p^2 + m_0^2 c^4)^{1/2}, \text{ o, } E = -(c^2 p^2 + m_0^2 c^4)^{1/2}.$$

Las energías negativas no son, así, particulares a la mecánica cuántica. Como DIRAC escribió dos años después:

The difficulty is not a special one connected with the quantum theory of the electron, but is a general one appearing in all relativity theories, also in the classical theory.¹³⁰

Ya que las problemáticas energías negativas aparecían también en la ecuación de DIRAC, y como él estaba al tanto de esto, difícilmente podían haber motivado su búsqueda de una nueva teoría.

El problema de los estados de energía negativa estuvo allí en todo el periodo de la mecánica cuántica, pero sólo se tomó seriamente después de 1930. Aún si la existencia indeseable de energías negativas había escapado a la detección, los físicos las ignoraban totalmente. Ellas fueron descartadas como “no físicas”, no reconocidas como problemas de relevancia. Esta es, creo, la razón de

por qué las energías negativas no aparecieron en la literatura antes de 1928. Cuando, por ejemplo, FOCK resolvió la ecuación de valores propios de energía de KG para el átomo de hidrógeno, llegó a una ecuación algebraica de segundo orden con dos soluciones de la forma $E=mc^2 (1\pm F(n, k))$, donde $F>1$; pero no le molestó mencionar el signo menos, que consideró como trivialmente no físico porque se refiere a energía negativa total. RUSSELL HANSON, en su análisis sobre el descubrimiento del positrón, erróneamente sugirió que el nombre más apropiado para el “salto de DIRAC” (transición de un “hoyo” (“hole”)) de energía negativa a un electrón de energía positiva con carga positiva) sería “salto de GORDON”. “The original ‘negative energy solutions’ were in print in 1926”, expresó RUSSELL HANSON, refiriéndose al artículo de GORDON.¹³¹ Pero la afirmación según la cual las energías negativas estaban publicadas en 1926, puede ser aceptada sólo si se toma en un sentido muy implícito. De hecho, GORDON no menciona las energías negativas en absoluto, ni aún con el menor indicio. El único, creo, que siempre mencionó el problema fue KLEIN, quien, en una nota de pie de página a la ecuación de KG, señaló que “diese Gleichung [ergibt] eine Klasse von Lösungen, bei denen die Energie negativ ausfällt, und die in keiner direkten Beziehung zu der Bewegung des Elektrons stehen.” KLEIN terminó su breve comentario así: “Diese werden wir naturgemäss von der Betrachtung ausschliessen”.¹³²

El tercer punto, sobre la densidad de carga, es usualmente presentado como el argumento en contra de la teoría de KG. Ya que ρ , según es dada por (10), no está definida positivamente, no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad, como se hace en la mecánica cuántica general. La situación así, parece implicar que uno debe abandonar la teoría de KG o la interpretación de probabilidad (y con ello todo el esquema completo de la mecánica cuántica general). De hecho, sin embargo, dificultades de ese tipo no aparecen en la literatura del periodo; entre 1926 y 1928 las densidades de energía de KG no fueron mencionadas en absoluto. La dificultad depende de la aceptación de la interpretación de probabilidad; KLEIN, GORDON y otros contribuidores anteriores a la materia, prefirieron considerar ρ como siendo realmente $e\rho$, una densidad de carga

eléctrica de acuerdo con la visión de SCHRÖDINGER. En su interpretación de partículas eléctricas múltiples, ellos no tenían una razón obvia para descartar $e\rho < 0$. Cabría esperar, no obstante, que el problema, durante la mayor parte de 1927, cuando la interpretación de probabilidad fue generalmente aceptada, se reconocía como crucial en la teoría de KG. Si ese fue el caso o no, es incierto. DIRAC no mencionó el problema en 1927; ni jugó algún rol en *The Quantum Theory of the Electron*, en la primera edición de la cual, en ningún lugar se refiere a densidades negativas en conexión con la nueva ecuación.¹³³ El hecho de que el problema no fuera explícitamente mencionado no prueba que no entrara en las consideraciones de DIRAC. Quizás para él era obvio, así que no se molestó en mencionarlo. Después de todo, es el mismo problema de la no linealidad en $\partial/\partial t$, sólo que vista desde otro ángulo: ya que a $\psi_{t=t_0}$ y $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=t_0}$ le pueden ser asignados valores arbitrarios e independientes en el tiempo t_0 , la teoría de KG no prohíbe que $\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} < \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t}$ y entonces, de acuerdo con la ecuación (10), $\rho < 0$.

Probablemente la densidad de KG, como un elemento separado, no determinó la ruta de DIRAC a la mecánica cuántica relativista. El concepto mismo mecánico ondulatorio de densidades de carga y densidades de corriente fue central al campo de la mecánica ondulatoria, pero estuvo en gran medida fuera del programa de investigación de DIRAC. Fue primero, en junio de 1928, en una conferencia presentada durante la *Leipziger Universitätswoche*, que DIRAC explícitamente se refirió a la materia.¹³⁴ Cuando se conoce $\psi(t_0)$, argumentó en esa ocasión, la ecuación de KG implica que $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=t_0}$ es totalmente indeterminada y entonces $\psi(t > t_0)$ es también indeterminada. Ya que ρ es una función de ψ y $\partial\psi/\partial t$, el conocimiento de $\rho(t_0)$ deja $\rho(t > t_0)$ indeterminada, así que la carga eléctrica $\int \rho dV$ puede alcanzar cualquier valor.

Damit würde das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität verletzt sein. Folglich muss die Wellengleichung linear in $\partial/\partial t$ sein [...].¹³⁵

Finalmente, la deficiencia de la ecuación de KG de proporcionar el espectro del hidrógeno exactamente, no constituyó un gran desafío para DIRAC, como he argumentado; y tampoco la deficiencia, de la ecuación de KG, para proporcionar el espín. En la génesis de la teoría relativista del electrón, como en muchos de los trabajos de DIRAC, las cuestiones empíricas estaban subordinadas a consideraciones teóricas, derivadas de principios.

8. Consecuencias

La teoría de DIRAC causó gran excitación entre los teóricos cuánticos, quienes inmediatamente le reconocieron ser la solución correcta al problema del espín, la relatividad y la mecánica cuántica. En particular, su deducción de las matrices de espín impresionó a los físicos. JORDAN consideró el procedimiento de linealización como “a beautifully clever trick” (“[...] un truco ingenioso hermoso [...]”), y ROSENFELD recordó cómo la ecuación de DIRAC “was regarded as a miracle [...] an absolute wonder”.¹³⁶ Pero por supuesto, la nueva teoría planteó tantas preguntas como las respondidas. En los años siguientes, fue dedicado mucho trabajo a explorar los detalles de la teoría y a aplicarla a varios problemas. En ese desarrollo, DIRAC no tomó parte. Aparentemente estaba satisfecho de haber quebrado el hielo y no le importaban mucho los más finos detalles de la teoría. Sólo en 1930 DIRAC volvió a su propia teoría.

Las matemáticas envueltas en la teoría de DIRAC fueron, en su emergencia, intuitivas y mal fundadas.¹³⁷ Ahora los aspectos matemáticos fueron retomados con entusiasmo por físicos de mentalidad matemática y matemáticos de mentalidad física. Las matemáticas fueron rápidamente exploradas por JOHANN VON NEUMANN, E. MÖGLICH, FOCK y otros.¹³⁸ La naturaleza de la nueva función de onda de DIRAC y sus propiedades bajo transformación, fueron estudiadas por HERMANN WEYL y también por VAN DER WAERDEN.¹³⁹ Se afirmó que la teoría de DIRAC tenía grandes implicaciones filosóficas. EDDINGTON, en particular, hizo de la teoría de DIRAC la base de especulaciones filosóficas y cosmológicas.¹⁴⁰

Los primeros intentos de combinar la mecánica cuántica con la relatividad general continuaron después de 1928, ahora sobre la base de la ecuación de DIRAC. Entre los años 1928 y 1933 WEYL, FOCK, SCHRÖDINGER y otros físicos lograron mostrar que la ecuación de onda lineal podía ser incorporada dentro del marco de la relatividad general.¹⁴¹ También la física de la ecuación de DIRAC fue rápidamente explorada. Las expresiones para la densidad de carga y la densidad de corriente fueron obtenidas por DARWIN y luego desarrolladas por GREGORY BREIT y por GORDON.¹⁴² La teoría de DIRAC fue particularmente exitosa en el estudio de los procesos de dispersión (*scattering*) relativistas, primero investigados por NEVILLE MOTT, y, KLEIN y YOSHIO NISHINA.¹⁴³

El gran éxito de la ecuación de DIRAC causó que el interés en la ecuación de KG se apagara; desde 1928 fue en gran medida ignorada por los físicos. Que la ecuación de KG es realmente tan buena como cualquier ecuación mecánico-cuántico, quedó claro sólo en 1934, cuando PAULI y VICTOR WEISSKOPF revivieron la teoría de KG.¹⁴⁴ Si se interpreta correctamente, es decir, como una teoría de campo para partículas de BOSE-EINSTEIN, no hay nada erróneo en la ecuación de KG, argumentaban PAULI y WEISSKOPF. Desde entonces la ecuación de KG ha demostrado ser una herramienta indispensable en la teoría cuántica de campo.

No obstante, cuán exitosa fue la ecuación de DIRAC, encontró también grandes dificultades. Por un lado, la teoría de DIRAC fue una teoría para un solo electrón, y demostraba ser difícil extenderla para incluir fenómenos de múltiples partículas. Más seriamente, poseía el problema de las energías negativas. Esa dificultad fue aclarada por KLEIN,¹⁴⁵ quien mostró que la teoría de DIRAC hace posible las transiciones desde estados positivos a negativos. El trabajo de KLEIN causó muchos intentos de eliminar las soluciones de energía negativa, no siendo el menos importante de parte de SCHRÖDINGER.¹⁴⁶ Esos intentos, sin embargo, sólo mostraron que las energías negativas fueron parte y parcela de la teoría. DIRAC asumió la materia en 1930, en su *Theory of Electrons and Protons*, donde proponía lo que fue entonces considerado como una teoría

más bien especulativa acerca de un “mar” infinito de electrones de estados de energía negativos, sólo excepcionalmente interrumpidos por estados desocupados u “hoyos”. Cómo fue creada la teoría de hoyos de Dirac y cómo se desarrolló para llegar a ser una teoría de positrones, celebrada y ganadora del Premio Nobel, es una historia fascinante. Pero esa historia va más allá de los límites del presente ensayo.¹⁴⁷

Notas

* Traducción (San José, Costa Rica, octubre de 2013) al español de Juan Manuel Vásquez May (***) de la versión original en inglés del artículo (y autorizada por su autor, el Dr. Helge Kragh), intitulado “The Genesis of Dirac’s Relativistic Theory of Electrons”, comunicado por OLAF PEDERSEN y B. L. VAN DER WAERDEN para su publicación en *Archive for History of Exact Sciences*, Volumen 24, Springer-Verlag, 1981.

El traductor agradece la gentileza, atención y amabilidad con que ha recibido y contestado el Dr. Kragh la solicitud de autorizar la publicación de la traducción de su artículo; a la Editorial *Springer* su permiso para reutilizar el presente material, y al director de la *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica* su asistencia durante el proceso de revisión y publicación del texto.

With kind permission of Springer Science+Business Media.

** Las citas dentro del texto original que corresponden a otras lenguas también han sido traducidas en notas al pie de página, opción que hemos elegido para dejar en el texto principal la cita en su lengua original, lo cual enriquece y da singularidad a la obra respecto de su valor como producción histórica y multicultural.

1. “La física teórica ha presenciado rara vez tan poderosa unificación de conceptos, datos, teorías e intuiciones: Newton y la gravitación universal; Maxwell y la electrodinámica; Einstein y la relatividad especial; Bohr y el átomo de hidrógeno; estos son los puntos altos antes de Dirac. Desde un caos de hechos e ideas aparentemente sin relación, Newton a su modo, y ahora Dirac, en el suyo, construyó una teoría física lógicamente poderosa y conceptualmente bella (...).” N. RUSSELL HANSON, *The Concept of the Positron*, Cambridge, 1963, p. 146.

2. De los libros estándar de historia de la física cuántica, el libro de HUND es el único que trata el desarrollo de la mecánica cuántica después de 1927, incluyendo un capítulo sobre la teoría de DIRAC (F. HUND, *Geschichte der Quantentheorie*, Mannheim, 1967, pp. 180-195). Otras contribuciones, debidas a VAN DER WAERDEN, MEHRA, BROMBERG y otros, son mencionadas más abajo. Más recientemente WEINBERG ha abogado por investigaciones históricas del desarrollo de la teoría cuántica de campo. Ver S. WEINBERG, "The Search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory". *Daedalus*, 1977, 17-34.
3. E. SCHRÖDINGER, "Quantisierung als Eigenwertproblem." Erste Mitteilung, *Ann. d. Phys.*, 79 (1926), pp. 361-376 (recibido el 27 de enero); Zweite Mitteilung, *ibid.*, pp. 489-527 (recibido el 23 de febrero); Dritte Mitteilung, *Ann. d. Phys.*, 80 (1926), pp. 437-490 (recibido el 10 de mayo); Vierte Mitteilung, *Ann. d. Phys.*, 81 (1926), pp. 109-139 (recibido el 21 de junio).
4. La ecuación (1), la ecuación de valores propios, apareció primero en la *Erste Mitteilung*, mientras que la ecuación (2), la ecuación dependiente del tiempo, apareció primero en la *Vierte Mitteilung*. En lo que sigue, el término "ecuación de SCHRÖDINGER" se refiere, si nada más es mencionado, a la ecuación de valores propios.
5. Cf. J. U. GERBER, "Geschichte der Wellenmechanik". *Arch. Hist. Exact Sci.* 5 (1969), pp. 349-416; L. A. WESSELS, "Schrödinger's Route to Wave Mechanics." *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 10 (1979), pp. 311-340. Una historia más completa de la teoría relativista de SCHRÖDINGER puede encontrarse en H. KRAGH, "On the History of Early Wave Mechanics, with Special Emphasis on the Role of Relativity." (mimeografiado). Roskilde University Centre, 1979.
6. "El problema de Kepler relativista, cuando se calcula exactamente con el procedimiento dado [lleva] curiosamente a cuantos de *partes semienteras* (cuantos radial y azimutal)". *Erste Mitteilung*, 372.
7. Esta ecuación aparece en el cuaderno de investigación de SCHRÖDINGER intitolado "H-Atom, Eigenschwingungen". (*Archive for the History of Quantum Physics* (en adelante *AHQP*), 41, sección 5), que presumiblemente fue escrita cerca del día de año nuevo de 1925.
8. *Vierte Mitteilung*, p. 133.
9. Las ecuaciones fueron encontradas independientemente por V. FOCK, L. DE BROGLIE, W. PAULI, y VAN DUNGEN y TH. DE DONDER. Para referencias, ver KRAGH, op. cit. (nota 5).
10. O. KLEIN, "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie". *Zs. f. Phys.*, 37 (1926), pp. 895-906 (recibido el 28 de abril de 1926).
11. V. FOCK, "Zur Schrödingerschen Wellenmechanik". *Zs. f. Phys.*, 38 (1926), pp. 242-250 (recibido el 5 de junio de 1926).
12. L. DE BROGLIE, "Remarques sur la nouvelle mécanique ondulatoire". *Comp. Rend.*, 183 (1926), p. 272 (19 de julio de 1926).
13. W. GORDON, "Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie". *Zs. f. Phys.*, 40 (1927), pp. 117-133 (recibido el 29 de setiembre de 1926).
14. O. KLEIN, "Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips". *Zs. f. Phys.*, 41 (1927), pp. 407-442 (recibido el 6 de diciembre de 1926).
15. E. SCHRÖDINGER, "Über den Comptoneffekt". *Ann. d. Phys.*, 82 (1927), pp. 257-264.
16. E. SCHRÖDINGER, "Der Energieimpulssatz der Materiewellen". *Ann. d. Phys.*, 82 (1927), pp. 265-272.
17. Carta de PAULI a JORDAN, 12 de abril de 1926. Reimpresa y comentada en B. L. VAN DER WAERDEN, "From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics". En J. MEHRA (ed.), *The Physicist's Conception of Nature*. Dordrecht, 1973, pp. 276-293. La correspondencia científica de PAULI hasta 1929 ha sido recientemente publicada. Ver A. HERMANN, K. V. MEYENN y V. F. WEISSKOPF (eds.), *Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.*, Tomo I: 1919-1929, New York, 1979.
18. "Por eso, he perdido completamente la confianza en la ecuación diferencial (ecuación (5))." Carta de PAULI a WENTZEL, 5 de julio de 1926 (en *AHQP*).
19. "Pero con tantos padres de las ecuaciones relativistas de segundo orden, no creo que corresponda a la realidad". Carta de PAULI a SCHRÖDINGER, 22 de noviembre de 1926 (en *AHQP*). También KUDAR a DIRAC, 21 de diciembre de 1926 (en *AHQP*): "Herr Pauli, mit dem ich darüber vielfach diskutiert habe, betrachtet [...] die relativistische Wellengleichung zweiter Ordnung sehr misstrauisch... es scheint uns aber, dass diese Diskrepanz mit formalmathematischer Untersuchung nicht erledigt werden kann". [El Sr. Pauli, con quien he discutido muchas veces, consideraba... la ecuación de onda relativista de segundo orden muy sospechosa... pero nos parecía

que esa discrepancia no se podía arreglar sólo con una investigación matemático formal]. La confianza de PAULI en el enfoque de KG parece haber vacilado. En diciembre de 1926 comentó sobre el intento de SCHRÖDINGER de expresar la ley de conservación de energía-momentum en términos de la mecánica ondulatoria y escribió que había “in letzter Zeit viel über die relativistischen Gleichungen nachgedacht...”. [(...) en el último tiempo he pensado mucho sobre las ecuaciones relativistas (...)]. La carta continúa: “Ich glaube jetzt ganz sicher, dass Du mit Deinem Standpunkt, dass diese Gleichungen sinnvoll sind und dass der Operatoralkül verallgemeinert werden muss, Recht hast. Denn ich bin auf verschiedene Eigenschaften der relativistischen Gleichungen und der Ausdrücke für Ladungsdichte u. Stromdichte gekommen, die mein Vertrauen zu dieser sehr gestärkt haben” [Creo estar completamente seguro ahora de que tienes razón en tu punto de vista de que esas ecuaciones son significativas y que el cálculo de operadores debe ser generalizado. Porque he llegado a varias propiedades de las ecuaciones relativistas y expresiones de la densidad de carga y de la densidad de corriente que han reforzado mucho mi confianza]. PAULI a SCHRÖDINGER, 12 de diciembre de 1926 (en *AHQP*).

19. W. PAULI, “Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik.” *Zs. f. Phys.*, 36 (1926), pp. 336-363 (recibido el 17 de enero de 1926). Traducido en B. L. VAN DER WAERDEN (ed.), *Sources of Quantum Mechanics*. New York, 1967.
20. La energía adicional debida a la corrección relativista está dada por $\Delta E = (2m_0c^2)^{-1} \left\{ E_0^2 + 2e^2 E_0 \left(r^{-1} \right) + e^4 \left(r^{-2} \right) \right\}$, donde E_0 es la energía de la órbita no perturbada y las barras denotan valores medios tomados sobre la trayectoria no perturbada.
21. W. HEISENBERG & P. JORDAN, “Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der anomalen Zeemanefekte”. *Zs. f. Phys.*, 37 (1926), pp. 263-277 (recibido el 16 de marzo de 1926).
22. Como fue advertido muchos años después por VAN VLECK, la concordancia de los cálculos de HEISENBERG y JORDAN con los experimentos fue más bien coincidencial. HEISENBERG y JORDAN usaron un modelo bidimensional del átomo de hidrógeno para calcular los valores medios de r^2 y r^3 . Sin embargo, un cálculo riguroso basado en dos dimensiones da la respuesta

errónea para la corrección de energía. Solamente debido a “a happy combination of empiricism and intuition” [(...) una feliz combinación de empirismo e intuición (...)] HEISENBERG y PAULI aplicaron las fórmulas correctas para calcular los valores medios, de hecho sólo válidos para tres dimensiones. Ver J. H. VAN VLECK, “Central Fields in Two Vis-a-Vis Three Dimensions: an Historical Divertissement”. En W. C. PRICE et al. (eds.), *Wave Mechanics: the First Fifty Years*. New York, 1973, pp. 26-37.

23. L. H. THOMAS demostró mientras estuvo en el Instituto BOHR, en febrero de 1926, que un tratamiento relativista de un electrón en precesión da la correcta separación del doblete, excepto por un factor de 2 en la hipótesis original del espín. El factor de THOMAS agrega al hamiltoniano un término de la forma $\frac{Z^2}{2m_0^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\vec{k} \cdot \vec{s})$, o, en el caso del átomo de hidrógeno, $\frac{e^2}{2m_0^2 c^2} \frac{1}{r} (\vec{k} \cdot \vec{s})$.
24. “Freilich glaub ich doch auch, dass die endgültige Lösung noch tiefer liegt und wesentlich mit einer vierdimensional-Invarianten Formulierung der Quantenmechanik zu tun hat ... Ich versuche hier jetzt mit Jordan eine vier-dimensionale Formulierung der Quantenmechanik und bin neugierig, was dabei herauskommt”. [Por supuesto, pero creo también que la solución final es más profunda y tiene mucho que ver con la formulación invariante en cuatro dimensiones de la mecánica cuántica... Estoy aquí tratando ahora con Jordan de desarrollar una formulación en cuatro dimensiones de la mecánica cuántica, y estoy curioso de saber lo que sale]. HEISENBERG a GOUDSMIT, 9 de diciembre de 1925 (en *AHQP*). Citado de D. SERWER, “Unmechanischer Zwang: Pauli, Heisenberg, and the Rejection of the Mechanical Atom, 1923-1925”. *Hist. Stud. Phys. Sci.*, 8 (1977), pp. 189-258; p. 252.
25. G. WENTZEL, “Die mehrfach periodischen Systeme in der Quantenmechanik”. *Zs. f. Phys.*, 37 (1926), pp. 80-94 (recibido el 27 de marzo de 1926).
26. Op. cit. (nota 17).
27. “Dirac (Proc. Roy. Soc.) y Wentzel (*Z. f. Phys.*) calcularon en largas páginas el átomo de hidrógeno, Wentzel también el relativista, con el resultado final de que sólo falta lo que propiamente interesa: a saber, si para cuantizar es “semientero” o “entero”! Así Wentzel encontró también sin duda “exactamente la fórmula de estructura fina de Sommerfeld”, pero de los motivos expuestos

- resultó, de su comparación con la experiencia, completamente sin valor. En la mecánica ondulatoria el tratamiento relativista, que es tan simple, como el clásico, da inequívocamente cuantos radial y azimutal semienteros. (No he publicado a tiempo el cálculo porque ese resultado sólo me mostraba que algo faltaba; ese algo es seguro lo pensado por Uhlenbeck y Goudsmidt)". Ver Carta de SCHRÖDINGER a LORENTZ, 6 de Junio de 1926. Reimpresa en K. PRZIBRAM (ed.), *Schrödinger, Planck, Einstein, Lorentz. Briefe zur Wellenmechanik*. Wien, 1963.
28. Para referencias y detalles, ver KRAGH, op. cit. (nota 5).
 29. Ver P. A. M. DIRAC, "Recollections of an Exciting Era". En: C. WEINER (ed.), *History of Twentieth Century Physics*. New York, 1977, pp. 109-146. En lo que sigue, este artículo será referido como *Recollections*. Ver también J. MEHRA, "The Golden Age of Theoretical Physics: P. A. M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933". En: A. NALAM y E. P. WIGNER (eds.), *Aspects of Quantum Theory*. Cambridge, 1972, pp. 17-60.
 30. "Me parecía que si uno trabajaba con aproximaciones existía una intolerable fealdad en su propio trabajo, y quería preservar muchísimo la belleza matemática. Bien, la formación ingenieril que recibí me enseñó a tolerar aproximaciones, y pude ver que aún teorías basadas en aproximaciones podían tener algunas veces una suma considerable de belleza en ellas (...) Pienso que si no hubiera tenido esa formación ingenieril, no habría tenido ningún éxito con el tipo de trabajo que hice después, porque era realmente necesario alejarse del punto de vista de que uno debe ocuparse sólo de resultados que puedan ser deducidos lógicamente de leyes exactas conocidas que uno aceptara, en las que tuviera una fe incondicional". *Recollections*, pp. 112-113.
 31. "(...) es más importante tener belleza en las ecuaciones que hacerlas ajustarse a los experimentos (...), si se está trabajando desde el punto de vista de tener belleza en sus ecuaciones, y si tiene realmente una intuición sólida, uno está en una línea segura de progreso". P. A. M. DIRAC, "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature". *Sci. Amer.*, 208 (1963), pp. 45-53; p. 47.
 32. P. A. M. DIRAC, "The Relation between Mathematics and Physics". *Proc. Roy. Soc.* (Edimburgo), 59 (1938-39), pp. 122-129.
 33. "Es fácil ver la razón de ese tremendo impacto. Acabábamos de estar viviendo en medio de una guerra terrible y muy seria (...) Entonces esa terrible guerra llegó a un final repentinamente. El resultado fue que todo el mundo estaba enfermo y cansado de la guerra. Todos querían olvidarla. Y entonces la relatividad vino a presentarse como una idea maravillosa que llevaba a un nuevo dominio de pensamiento. Era un escape de la guerra". *Recollections*, p. 110. Ver también V. V. RAMAN, "Relativity in the Early Twenties: Many-Sided Reactions to a Great Theory", *Indian Journal of History of Science*, 7 (1972), pp. 119-145.
 34. Ver J. MERLEAU-PONTY, *Philosophie et théorie physique chez Eddington*. Paris, 1965; pp. 111-115. Ver también H. KRAGH, "Methodology and Philosophy of Science in Paul Dirac's Physics." Roskilde University Centre, 1979.
 35. "Había una clase de problema general que uno se podía ocupar, cada vez que veía un poco de física expresada en una forma no relativista, de transcribirlo de acuerdo con la relatividad especial. Fue más bien como un juego, en el que me complacía a cada oportunidad, y a veces el resultado fue suficientemente interesante para mí como para ser capaz de redactar un pequeño artículo sobre ello". *Recollections*, p. 120.
 36. *Recollections*, p. 120.
 37. O. KLEIN, "Ur mit liv i fysiken." 159-172 en *Svensk Naturvetenskap*, 1973, p. 164.
 38. "Uno no debe tratar de llevar a cabo demasiado en una etapa. Debe separar en la física las dificultades una de otra lo más posible, y entonces deshacerse de ellas una por una". P. A. M. DIRAC, "Methods in Theoretical Physics". En: *From a Life in Physics*, IAEA Bulletin, 1969, pp. 21-28; p. 22.
 39. P. A. M. DIRAC, "Note on the Doppler Principle and Bohr's Frequency Condition". *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 22 (1924), p. 432.
 40. "Aunque apreciaba muchísimo la belleza del trabajo de (L.) de Broglie, no podía tomar sus ondas seriamente". *Recollections*, p. 118.
 41. *Proc. Roy. Soc.* (London), A 111 (1926), pp. 405-423 (recibido el 29 de abril de 1926).
 42. "(...) sobre la base de la mecánica matricial de Heisenberg, que fue primero modificada para estar en concordancia con el principio de relatividad". P. A. M. DIRAC, "The Compton Effect in Wave Mechanics". *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 23 (1926), pp. 500-507 (recibido el 8 de noviembre de 1926); p. 500.
 43. *Ibidem*.
 44. "(...) un método más natural y de más fácil comprensión para obtener las matrices es

- proporcionado por la mecánica cuántica de Schrödinger". Ibid., p. 500.
45. Para tratar el efecto COMPTON, DIRAC incluyó un término periódico en la componente p_y , refiriéndose a la perturbación causada por la radiación incidente.
 46. Op. cit. (nota 13). Ver también SCHRÖDINGER, op. cit. (nota 14). El efecto COMPTON fue también tratado mecánico-ondulatoriamente. Ver G. BECK, "Comptoneffekt und Quantenmechanik." *Zs. f Phys.*, 38 (1926), pp. 144-148; G. WENTZEL, "Zur Theorie des Comptoneffekts". 43 (1927), pp. 1-8 y pp. 779-787.
 47. "(...) utilizada sólo como una ayuda matemática para el cálculo de los elementos matriciales, que son entonces interpretados de acuerdo con las suposiciones de la mecánica matricial". Op. cit. (nota 42), p. 507.
 48. "Por favor, permíteme si alguna de las preguntas se basa en un gran malentendido. Pero no podemos conseguirlo pese a todos los esfuerzos". Carta de EHRENFEST a DIRAC, 1 de octubre de 1926 (en *AHQP*).
 49. Lo que pudo haber estado en la mente de DIRAC es que la expresión E^2 es verdaderamente invariante de LORENTZ, mientras que la expresión E no lo es. La respuesta de DIRAC no está completa en los *AHQP*.
 50. P. A. M. DIRAC, "On the Theory of Quantum Mechanics", *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 112 (1926), pp. 661-677 (recibido el 26 de agosto de 1926); p. 670.
 51. P. A. M. DIRAC, "The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 114 (1927), pp. 243-265 (recibido el 2 de Febrero de 1927). El artículo fue materia de un análisis histórico por J. BROMBERG, "Dirac's Quantum Electrodynamics and the Wave-Particle Equivalence". En WEINER (ed.), op. cit., pp. 147-157 (nota 29). Ver también R. Jost, "Foundation of Quantum Field Theory". En: SALAM y WIGNER (eds.), op. cit.; pp. 61-77 (nota 29).
 52. "(...) serías dificultades en hacer la teoría satisfacer todos los requisitos del principio restringido de relatividad". DIRAC, op. cit., p. 243 (nota 51).
 53. "(...) sería imposible responder cualquier pregunta completamente, sin al mismo tiempo responderlas todas". DIRAC, Op. cit., p. 244 (nota 51).
 54. P. JORDAN y W. PAULI, "Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder". *Zs. f Phys.*, 47 (1928), pp. 151-173 (recibido el 7 de diciembre de 1927).
 55. P. A. M. DIRAC, "The Quantum Theory of Dispersion". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 114 (1927), pp. 710-728 (recibido el 4 de abril de 1927). Comentado arriba en JOST, op. cit. (nota 51).
 56. Ver H.A. KRAMERS y W. HEISENBERG, "Über die Streuung von Strahlen durch Atome". *Zs. f Phys.*, 31 (1925), pp. 681-708. M. BORN, W. HEISENBERG y P. JORDAN, "Zur Quantenmechanik, II". *Zs. f Phys.*, 35 (1926), pp. 557-615. Ambos artículos están traducidos en VAN DER WAERDEN, op. cit. (nota 19). La dispersión de acuerdo con la mecánica ondulatoria fue tratada por SCHRÖDINGER en su cuarta comunicación, op. cit. (nota 3). KLEIN dio un tratamiento relativista, op. cit. (nota 13); y por V. BURSIAEN en "Notiz zu den Grundlagen der Dispersionstheorie von E. Schrödinger". *Zs. f Phys.*, 40 (1927), pp. 708-713.
 57. En el artículo original de DIRAC hay una errata en su ecuación 11, que aparece en la página 716, donde fue omitido un signo de más.
 58. "(...) el efecto Zeeman (...) me parece insoluble, ligado a una formulación correcta del problema relativista en el lenguaje de la mecánica ondulatoria, porque en la formulación cuatridimensional del vector potencial, este aparece sustituyendo a la vez al escalar". Op. cit. (nota 3), p. 439.
 59. Ibid., p. 440.
 60. "¿Trata usted ya probablemente de categorizar el electrón con espín (¡lo que resulta indispensable!) en la teoría general de la relatividad? Ese sería el mayor triunfo de la teoría de la relatividad". *Sic*. En: Carta de SOMMERFELD a EINSTEIN, 5 de agosto de 1926.
 61. "Con mucho gusto admito que no se puede dudar del electrón con espín, pero entretanto hay poca esperanza de comprender su necesidad desde el interior hacia afuera". Carta de EINSTEIN a SOMMERFELD, 21 de agosto de 1926. Ambos pasajes son citados de A. HERMANN (ed.), *Albert Einstein, Arnold Sommerfeld: Briefwechsel*. Basel, 1968.
 62. F. LONDON, "Über eine Deutungsmöglichkeit der Kleinschen fünfdimensionalen Welt". *Die Naturwissenschaften*, 15 (1927), pp. 15-16 (fechaado el 17 de noviembre de 1926).
 63. E. GUTH, "Spinning Electrons and Wave Mechanics". *Nature*, 119 (21 de mayo de 1927), p. 744.
 64. A. CARELLI, "The Spinning Electron in Wave Mechanics". *Nature*, 119 (2 de abril de 1927), pp. 492-493.

65. W. PAULI, "Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons". *Zs. f. Phys.*, 43 (1927), pp. 601-623 (recibido el 3 de mayo de 1927). Para comentarios sobre esta y otras consideraciones de la teoría del espín, ver B. L. VAN DER WAERDEN, "Exclusion Principle and Spin". En: M. FIERZ y V. F. WEISSKOPF (eds.), *Theoretical Physics in the Twentieth Century*. New York, 1960, pp. 199-244.
66. "Más dispuesto a considerar la teoría ondulatoria como una conveniencia matemática y menos que una realidad física". C. G. DARWIN, "The Electron as a Vector Wave". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 116 (1927), pp. 227-253 (recibido el 30 de julio de 1927); p. 227.
67. C. G. DARWIN, "The Electron as a Vector Wave". *Nature*, 119 (1927), pp. 282-284 (19 February 1927); "The Zeeman Effect and Spherical Harmonics". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 115 (1927), pp. 1-19 (recibido el 23 de marzo de 1927); Op. cit. (nota 66); "Free Motion in Wave Mechanics". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 117 (1927), pp. 258-293 (recibido el 25 de octubre de 1927).
68. "Proceder a construir empíricamente un par de ecuaciones para representar la estructura fina del átomo de hidrógeno". Op. cit. (nota 66), p. 230.
69. Las reacciones de SCHRÖDINGER y BORN acerca de cómo las dos teorías del espín fueron recibidas pueden ser típicas: "You can easily guess that I am very much interested in your work on the spinning electron and that I infinitely prefer your view of a vector-wave to that of my friend Pauli, whose formalism I am hardly able to understand". [Puedes fácilmente suponer que estoy muy interesado en tu trabajo sobre el electrón con espín y que prefiero infinitamente tu visión de un vector de onda a la de mi amigo Pauli, cuyo formalismo difícilmente soy capaz de entender]. (Carta de SCHRÖDINGER a DARWIN, 4 de octubre de 1927; en *AHQP*). "I was much interested in your attempt to interpret the electron as a vector wave, but I do not believe that this is the right way. Pauli has shown (not yet published) that the spinning electron can be described by an operator of a particular kind, and he finds two differential equations (coupled, of course) instead of the one of Schrödinger. But he finds great difficulty in generalizing his results to take account of the relativity modifications". [Estoy muy interesado en tu intento de interpretar el electrón como un vector de onda, pero no creo que esa sea la forma correcta. Pauli ha mostrado (no aún publicado) que el electrón con espín puede ser descrito por un operador de un tipo particular, y encuentra dos ecuaciones diferenciales (acopladas, por supuesto) en lugar de la de Schrödinger. Pero encuentra gran dificultad en la generalización de sus resultados para tomar en cuenta las modificaciones de la relatividad]. (Carta de BORN a DARWIN, 7 de abril de 1927; en *AHQP*).
70. "La teoría aquí formulada (...)", "(...) solo debe considerarse como provisional, lo que debe pedirse a una teoría definitiva es que desde el principio se formule como invariante relativista y además permita calcular las correcciones más altas". PAULI, op. cit. (nota 65), p. 619.
71. De acuerdo con DARWIN, op. cit. (nota 66), nota al pie en p. 236.
72. "(...) en cuanto a mí (...) hasta ahora no he logrado llegar a una formulación relativista invariante de la mecánica cuántica del electrón magnético". PAULI, op. cit. (nota 65), p. 619.
73. "(...) la deducción de la fórmula de Sommerfeld por separación tiene que ser exacta y no meramente una primera aproximación. En vista de estas consideraciones no podemos considerar la teoría en absoluto como completa -como, además, ocurre con la completa interconexión de la teoría cuántica con la relatividad (...)" Op. cit. (nota 66), p. 253.
74. M. JAMMER, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York, 1966, cap. 6.
75. "(...) más placer que cualquiera de los otros artículos que he escrito sobre mecánica cuántica tanto antes como después". *Recollections*, p. 137.
76. DIRAC, op. cit. (nota 51), p. 245.
77. "La formulación de esas leyes requiere el uso de la matemática de transformaciones. Las cosas importantes del mundo aparecen como invariantes (o más generalmente como cuasi-invariantes, o cantidades con propiedades de transformación simples) de esas transformaciones (...) El desarrollo del uso de la teoría de transformación, como se aplicó primero a la relatividad y después a la teoría cuántica, es la esencia del nuevo método en física teórica". P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, 1930, p. V. Para una evaluación de esa filosofía, ver KRAGH, op. cit. (nota 34).
78. "Había (...) una dificultad real para hacer concordar la mecánica cuántica con la relatividad. La dificultad me molestaba muchísimo en ese tiempo, pero no parecía molestar a otros físicos, por alguna razón que no tengo muy clara". P. A.

- M. DIRAC, *Directions in Physics*. New York, 1978, p. 14.
79. PAULI a WENTZEL. 5 de julio de 1926, y 5 de diciembre de 1926. KUDAR a SCHRÖDINGER, 20 de noviembre de 1926, y 8 de noviembre de 1926. PAULI a SCHRÖDINGER, 22 de noviembre de 1926. KUDAR a DIRAC, 21 de diciembre de 1926. (Todas en *AHQP*). Cuando KUDAR estaba todavía en Budapest, trabajaba sobre la ecuación de SCHRÖDINGER relativista, pero aparentemente sin reconocimiento de sus dificultades conceptuales. Ver J. KUDAR, "Zur vierdimensionalen Formulierung der undulatorischen Mechanik". *Ann. d. Phys.*, 81 (1926), pp. 632-636; "Schrödingersche Wellengleichung und vierdimensionale Relativitätsmechanik". *Phys. Zeits.*, 27 (1926), p. 724; ver también la carta de KUDAR a SCHRÖDINGER, del 8 de setiembre de 1926 (en *AHQP*). Solamente cuando KUDAR dejó Budapest para hacerse asistente de PAULI en Hamburgo, concibió la teoría de KG con una luz nueva y crítica. La réplica de DIRAC a la carta de KUDAR del 21 de diciembre no está completa en los archivos de la AHQP, pero aparentemente él propuso introducir un tiempo relativista en las matrices. Ver la carta a DIRAC del 20 de enero, escrita por GORDON y KUDAR.
80. "(...) algo matemáticamente inconveniente, pero significativo en sí mismo y también autoadjunto". Carta de PAULI a SCHRÖDINGER, 22 de noviembre de 1926 (en *AHQP*).
81. P. JORDAN, "Über eine neue Begründung der Quantenmechanik". *Zs. f. Phys.*, 40 (1927), pp. 809-838 (recibido el 18 de diciembre de 1926), pp. 818-821.
82. *Recollections*, p. 138.
83. "I believe I got these variables independently of Pauli, and possibly Pauli also got them independently of me". [Creo que llegué a esas variables independientemente de Pauli, y posiblemente Pauli también llegó a ellas independientemente de mí]. *Recollections*, p. 138. Que DIRAC habría obtenido independientemente las variables de espín en 1927, no está indicado en la literatura. Ni en correspondencia privada ni en los artículos de PAULI y DARWIN he encontrado evidencia en apoyo de esa pretensión.
84. P. A. M. DIRAC, "Lectures on Modern Quantum Mechanics". Manuscrito (en *AHQP*); sin fecha, pero probablemente de octubre de 1927.
85. "Ya que Heisenberg y Pauli además habían tenido éxito en encontrar los valores medios mecánico-cuánticos de (r^2) y (r^3) para un órbita kepleriana, sabemos ahora que la estructura fina del espectro del hidrógeno y la teoría de los dobletes del espectro de rayos X están en los órdenes más finos (...)". Carta de KRAMERS a KRONIG, 26 de febrero de 1926 (en *AHQP*). Los términos r^2 y r^3 han sido introducidos por mí.
86. "Ese hecho nos asusta mucho más que cuando se presentó por primera vez." E. SCHRÖDINGER, "La mécanique des ondes". En: *Electrons et photons. Rapports et discussions du cinquième conseil de physique*. París, 1928, pp. 185-206.
87. "No debemos, sin embargo, exagerar la importancia de este fracaso; en realidad estamos seguros en la actualidad de que la teoría de la estructura fina de Sommerfeld es insuficiente, y de que los fenómenos de desdoblamiento de las líneas de las series ópticas y de Röntgen están estrechamente relacionados con el estado magnético interno del átomo y con los efectos anómalos de Zeeman". L. DE BROGLIE, *La mécanique ondulatoire*. París, 1928, p. 46.
88. Ver el informe, op. cit. (nota 86). Ver también J. MEHRA, *The Solvay Conferences on Physics*. Dordrecht, 1975.
89. E. SCHRÖDINGER, op. cit. (nota 86) y L. DE BROGLIE, "La nouvelle dynamique des quanta", pp. 105-132 en el mismo volumen.
90. "Durante el intervalo anterior a las conferencias, Bohr vino a mí y me preguntó: "¿En qué estás trabajando ahora?" Traté de explicarle que estaba trabajando en el problema tratando de encontrar una teoría cuántica relativista del electrón satisfactoria. Y entonces Bohr respondió que ese problema había sido ya resuelto por Klein. Traté de explicar a Bohr que no estaba satisfecho con la solución de Klein, y quería darle razones, pero no pude hacerlo así porque la conferencia acababa de comenzar y nuestra discusión fue interrumpida. Pero ello más bien abrió mis ojos al hecho de que muchos físicos eran completamente complacientes con una teoría que envolvía una partida radical de las leyes básicas de la mecánica cuántica, y no sentían la necesidad de mantener esas leyes en la forma que yo la sentía". Op. cit. (nota 78), p. 15. Una versión similar aparece en *Recollections*, p. 141. Las versiones de DIRAC del evento no son enteramente concordantes. En la entrevista de AHQP conducida por THOMAS KUHN y también en una conversación con JAGDISH MEHRA (del 28 de marzo de 1969; op. cit. (nota 29), p. 44), DIRAC recuerda que su conversación interrumpida con BOHR tuvo lugar en Copenhague.

91. Entrevista en *AHQP*.
92. “Estuve en Cambridge hace unos pocos días y vi a Dirac. Él tiene ahora un sistema de ecuaciones completamente nuevo para el electrón que dan el espín correcto en todos los casos y parece ser “la cosa”. ¡Sus ecuaciones son ecuaciones diferenciales de primer orden, no de segundo! Me dijo algo acerca de ellas, pero todavía no he tenido éxito aún de verificar que son correctas para el átomo de hidrógeno”. Carta de DARWIN a BOHR, 26 de diciembre de 1927 (en *AHQP*).
93. P. A. M. DIRAC, “The Quantum Theory of the Electron, I”. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 117 (1928), pp. 610-624 (recibido el 2 de enero de 1928). Reimpresa en J. SCHWINGER (ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. New York, 1958.
94. *Recollections*, p. 114 y p. 124.
95. “Muchos de los artículos que escribí siguieron la línea de presentación de las ideas en el orden en el que se me habían ocurrido”. *Ibid.*, p. 124.
96. “(...) el descubrimiento de la ecuación de Pauli fue un paso importante que conduce al reconocimiento de la verdadera naturaleza del electrón, es decir, a la ecuación de Dirac”. En: A. SOMMERFELD, *Wave-Mechanics*. London, 1930, p. 270.
97. “Pauli allanó el camino para la teoría relativista del electrón y de los átomos similares al hidrógeno que debemos a Dirac (1928)”. R. KRÖNIG, “The Turning Point”. En FIERZ & WEISSKOPF (eds.), op. cit. (nota 65), pp. 5-39, p. 32.
98. “No puedo dudar de que Dirac había sido conducido a su descubrimiento por el artículo de Pauli y especialmente por la relación $(p_x C_x - p_y C_y - p_z C_z)^2 = p^2$. El progreso esencial del artículo de Dirac fue la conexión de las matrices de espín con el grupo de Lorentz (...)”. Carta de HEISENBERG a RUSSELL HANSON, 19 de setiembre de 1960. Citado de op. cit. (nota 1), p. 218. Si las C denotan las matrices de espín usuales, la relación expresada en la carta de HEISENBERG es incorrecta; cf. ecuación (20) de este trabajo.
99. “Las matrices s_k de Pauli fueron utilizadas por Dirac para formar una ecuación de onda relativista de primer orden (...) La ecuación de onda de Dirac contiene matrices y es similar a la de Pauli, pero no a la antigua ecuación de onda relativista. El paso de una ψ de una a dos componentes es grande, mientras el paso de dos a cuatro componentes es pequeño, en todo caso fue Pauli quien hizo el primer paso decisivo.” VAN DER WAERDEN, op. cit. (nota 65), p. 223. Aunque es normal enfatizar el rol del espín en la creación de la ecuación de DIRAC, hay excepciones. Cf. la consideración de WHITTAKER: “In the process of deriving his equation, Dirac took no account of spin: his attention was focused on securing that the equation would be relativistically invariant”. [En el proceso de derivación de su ecuación, Dirac no tomó en consideración el espín: su atención estaba enfocada en asegurar que la ecuación sería relativísticamente invariante]. E. WHITTAKER, *From Euclid to Eddington*. Cambridge, 1949, p. 177.
100. “La cuestión sigue siendo de por qué la naturaleza habría escogido ese modelo particular para el electrón en lugar de estar satisfecha con la carga puntual (...)”. DIRAC, op. cit. (nota 93), p. 610.
101. “(...) debemos esperar que la interpretación de la teoría cuántica relativista sea tan general como la de la teoría no relativista”. *Ibid.*, p. 612.
102. Cf. que el espín cero de las partículas (por ejemplo, de los piones), como los de sus antipartículas, son descritos adecuadamente por la ecuación escalar de KG.
103. “No estaba interesado en llevar el espín del electrón a la ecuación de onda, no consideré la cuestión en absoluto y no hice uso del trabajo de Pauli. La razón para eso es que mi interés dominante era tener una teoría relativista concordante con mi interpretación física general y la teoría de transformación [...] Fue una gran sorpresa para mí cuando después descubrí que el caso más simple posible envolvía el espín”. *Recollections*, p. 139. También entrevista en *AHQP*, tercera sesión, 1963.
104. *Recollections*, p. 142. DIRAC ha expresado muchas veces su modo peculiar de producir teorías físicas. Por ejemplo: “A great deal of my work is just playing with equations and seeing what they give.... I don't suppose that applies so much to other physicists; I think it's a peculiarity of myself that I like to play about with equations, just looking for beautiful mathematical relations which maybe can't have any physical meaning at all. Sometimes they do.” [Una gran parte de mi trabajo es sólo jugar con ecuaciones y ver lo que dan... No supongo que ello se aplique mucho a otros físicos. Pienso que es una peculiaridad mía que me guste jugar con ecuaciones, sólo buscando relaciones matemáticas bellas que talvez no pueden tener ningún significado físico en absoluto. Algunas veces lo hacen.]. Entrevista en *AHQP*, 1963.

105. *Recollections*, p. 142.
106. Por las siguientes observaciones, estoy agradecido con una comunicación privada de B. L. VAN DER WAERDEN.
107. R. LIPSCHITZ, *Untersuchungen über Summen von Quadraten*. Bonn, 1884.
108. C. G. DARWIN, "The Wave Equation of the Electron". *Proc. Roy. Soc.* (London), A 118 (1928), pp. 654-680 (recibido el 6 de marzo de 1928), p. 664.
109. "Cualquier idea filosófica o física que uno tenga debe ajustarse para encajar con las matemáticas. No de forma inversa. Muchos físicos están inclinados a iniciar desde ideas físicas preconcebidas, y entonces tratar de desarrollarlas y encontrar un esquema matemático que las incorpore. Tal línea de abordaje es improbable que lleve a éxito." P. A. M. DIRAC, "The Mathematical Foundation of Quantum Theory." En A.R. MARLOW (ed.), *Mathematical Foundations of Quantum Theory*. New York, 1978, pp. 1-8; p. 1.
110. También en la formulación de SCHRÖDINGER de las ecuaciones de KG, aparecen cantidades imaginarias. DE BROGLIE se sentía inquieto con esa situación. Expresó: "Il faut cependant remarquer que [ec. (6) del presente artículo] contient des termes imaginaires... et ceci souleve peut-être quelques objections au point de vue physique" [Es necesario anotar entonces que [la ec. (6) del presente artículo] contiene algunos términos imaginarios (...) y esto suscita tal vez algunas objeciones al punto de vista físico]. L. DE BROGLIE, "Les principes de la nouvelle mécanique ondulatoire". *Journal de Physique*, 7 (1926), pp. 321-337; p. 332. DE BROGLIE consideraba que la teoría en cinco dimensiones de la mecánica ondulatoria relativista proporciona un escape al problema. Ver L. DE BROGLIE, "L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire". *Journal de Physique*, 8 (1927), pp. 66-73.
111. "La totalidad de los fenómenos de duplicidad resulta sin suposiciones arbitrarias". DIRAC, op. cit. (nota 93), p. 610.
112. P. A. M. DIRAC, "The Quantum Theory of the Electron, II". *Proc. Roy. Soc.* (London), A 118 (1928), pp. 351-361 (recibido el 2 de febrero de 1928).
113. P. A. M. DIRAC, "The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics". *Proc. Roy. Soc.* (London), A 111 (1926), pp. 281-305 (recibido el 27 de marzo de 1926).
114. "La presente teoría, en la primera aproximación, conduce así a los mismos niveles de energía como aquellos obtenidos por DARWIN, los cuales están en concordancia con los experimentos". DIRAC, op. cit. (nota 93), p. 624.
115. P. A. M. DIRAC, *The Development of Quantum Theory*. New York, 1971, p. 42.
116. "Temía que talvez ellas (es decir, las correcciones de orden más alto) no salieran correctas. Quizás la base completa de la idea tenía que ser abandonada si resultara que no fuera correcta a órdenes más altos y yo precisamente no podía encarar esa posibilidad. Así que apresuradamente redacté un artículo dando la aproximación de primer orden y la demostré a esa precisión; a ese precio, teníamos concordancia entre la teoría y el experimento. De esa forma estaba consolidando una cantidad limitada de éxito que debía ser algo que podía hacer valer independientemente de lo que el futuro mantuviera. Uno teme muchísimo la necesidad de algún éxito consolidado bajo circunstancias como esas, y yo estaba en gran prisa de tener esa primera aproximación publicada antes de que cualquier cosa pasara que pudiera simplemente golpear todo esto en la cabeza". Ibid., p. 42.
117. DIRAC creía que su moraleja acerca del temor y la audacia en la creatividad científica "is fairly common and you can accept it as a general rule applying to all research workers who are concerned with the foundations of physical theory". [(...) es bastante común y puedes aceptarlo como una regla general referida a todos los investigadores que se interesan en los fundamentos de la teoría física.]. Op. cit. (nota 115), p. 13. Ver también P. A. M. DIRAC, "Hopes and Fears". *Eureka*, 32 (1969), pp. 2-4.
118. Op. cit. (nota 108).
119. W. GORDON, "Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Electrons". *Zs. f Phys.*, 48 (1928), pp. 11-14 (recibido el 23 de febrero de 1928).
120. "Ahora sí está publicado el trabajo de Dirac. ¡Es además maravilloso cómo todo es correcto! El Sr. Gordon podría recalcular sin dificultad que se deriva estrictamente, para $V = \frac{e^2}{cr}$, de las ecuaciones de Dirac de la p. 622 abajo, la antigua fórmula de Sommerfeld". Carta de PAULI a KRONIG, 15 de febrero de 1928 (AHQP).
121. La escasa información respecto de la ecuación relativista de KRAMERS es solo de segunda mano. Ver entrevista en AHQP con KLEIN, y *Recollections*, p. 139. El enfoque de KRAMERS probablemente fue similar al que aparece en el §64 de H. A. KRAMERS, *Quantum Mechanics*, Amsterdam, 1957. Formulaciones del mismo

- método fueron primero publicadas en H. A. KRAMERS, "On the Classical Theory of the Spinning Electron". *Physica*, 1 (1934), pp. 825-828, y en H.A. KRAMERS, "Classical Relativistic Spin Theory and its Quantization". *Verh. Zeeman Jubil.*, 1935, pp. 403-412. Ambos artículos están reimpresos en KRAMERS *Collected Scientific Works*. Amsterdam, 1956.
122. "Pauli ha hecho recientemente algún trabajo sobre la aplicación de la mecánica cuántica al electrón con espín, que está ahora siendo extendido así por Jordan para incluir la relatividad". B. BIRTWISTLE, *The New Quantum Mechanics*, Cambridge, 1928. Prefacio fechado el 1 Octubre de 1927, p. 213.
123. "Estábamos muy cerca de ello, y no puedo perdonarme que no viera ese punto que era la linealización". De acuerdo con ROSENFELD, quien estuvo en Gotinga en el tiempo en el cual apareció la teoría de DIRAC. Entrevista en *AHQF*.
124. Ver E. P. WIGNER, "Relativistic Equations in Quantum Mechanics". En J. MEHRA (ed.), *The Physicist's Conception of Nature*. Dordrecht, 1973, pp. 320-331.
125. "No estábamos satisfechos con ninguna de las ecuaciones que habíamos encontrado pero no estábamos todavía dispuestos a renunciar. La carta a Born cambió todo eso. Como Jordan dijo "Bien, por supuesto, habría sido mejor que encontráramos la ecuación pero la derivación es tan bella, y la ecuación tan concisa, que debemos estar felices de tenerla"". *Ibid.*, p. 320.
126. J. FRENKEL, "Zür Wellenmechanik des rotierenden Elektrons". *Zs. f Phys.*, 47 (1928), pp. 786-803 (recibido el 3 de febrero de 1928). Desde consideraciones sobre invarianza clásica relativista, FRENKEL anticipó algunos resultados de DIRAC. En 1926 FRENKEL mostró que al electrón con espín puede ser adscrito un momento sexa-vectorial, conteniendo tres componentes magnéticas reales y tres eléctricas imaginarias. J. FRENKEL, "Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons". *Zs. f Phys.*, 37 (1926), pp. 243-262.
127. D. IWANENKO y L. LANDAU, "Zur Theorie des magnetischen Elektrons, I". *Zs. f Phys.*, 48 (1928), pp. 340-348 (recibido el 8 de marzo de 1928).
128. Ver, por ejemplo, J. J. SAKURAI, *Advanced Quantum Mechanics*. Reading (Mass.), 1967, p. 75 y siguientes.
129. "Uno vence la dificultad de la teoría clásica excluyendo arbitrariamente aquellas soluciones que tienen un W negativo. Uno no puede hacer esto en la teoría cuántica, ya que en general una perturbación puede causar transiciones de estados con W positivo a estados con W negativo. Una transición tal debe aparecer experimentalmente cuando el electrón repentinamente cambia su carga de $-e$ a e , un fenómeno que no ha sido observado". DIRAC, op. cit. (nota 93), p. 612.
130. "Esa no es una dificultad especial conectada con la teoría cuántica del electrón, sino que es general y aparece en todas las teorías de la relatividad, también en la teoría clásica." P. A. M. DIRAC, "A Theory of Electrons and Protons". *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 126 (1930), pp. 360-365; p. 360.
131. "Las "soluciones de energía negativa" originales fueron publicadas en 1926". Op. cit. (nota 1), p. 146.
132. "(...) esa ecuación da una clase de soluciones en que la energía resulta ser negativa, que no están directamente relacionadas con el movimiento del electrón". "Esto, naturalmente, lo excluiríamos de consideración". KLEIN, op. cit. (nota 13), p. 411. La idea de "positrones" también apareció en conexión con la relatividad general. EINSTEIN, por ejemplo, mostró en 1925 que si las ecuaciones gravitacionales y electromagnéticas tienen soluciones, que representen un electrón con masa m y carga negativa $+e$, habrá también soluciones con masa m y carga $-e$, es decir, electrones positivos. A. EINSTEIN, "Electron und allgemeine Relativitätstheorie". *Physica*, 5 (1925), pp. 330-334
133. La única referencia de DIRAC al rol jugado por las probabilidades negativas de KG en la creación de su teoría data de más de cuarenta años después: "A difficulty now appeared in connection with the relativistic equation of Klein and Gordon. The theory sometimes gave negative probabilities. It was a satisfactory theory only when it was used non-relativistically. I puzzled over this for some time and eventually thought of a new wave equation which avoided the negative probabilities" [Una dificultad aparece ahora en conexión con la ecuación relativista de Klein y Gordon. La teoría algunas veces daba probabilidades negativas. Fue una teoría satisfactoria sólo cuando fue utilizada de modo no relativista. Estuve perplejo con esto por algún tiempo y eventualmente pensé en una nueva ecuación de onda que evitara las probabilidades negativas]. P. A. M. DIRAC, "Hopes and Fears." *Eureka*, 32 (1969), pp. 2-4; p. 3.
134. P. A. M. DIRAC, "Über die Quantentheorie des Elektrons". *Phys. Zeits.*, 29 (1928), pp. 561-563.

135. “Por lo tanto, el principio sería violado por la conservación de la electricidad. En consecuencia, la ecuación de onda debe ser lineal en $\partial/\partial t$ (...)”. Ibid., p. 561.
136. “Fue considerada como un milagro (...) una maravilla absoluta”. Entrevistas en *AHQP*.
137. HENRY MARGENAU contrastó el uso de las matemáticas de DIRAC con el de VON NEUMANN: “While Dirac presents his reasoning with admirable simplicity and allows himself to be guided at every step by physical intuition –refusing at several places to be burdened by the impediment of mathematical rigor- von Neumann goes at his problem equipped with the nicest of modern mathematical tools and analyses it to the satisfaction of those whose demands for logical completeness are most exacting” [Mientras Dirac presenta su razonamiento con admirable simplicidad y se permite a sí mismo estar guiado a cada paso por la intuición física -rehusando en muchos lugares estar agobiado por el impedimento del rigor matemático- von Neumann va a su problema equipado con lo mejor de las herramientas matemáticas modernas y las analiza para la satisfacción de aquellos cuyas demandas de completitud lógica son más exigentes]. *Mathematical Gazette*, 17 (1933), p. 493. Citado de JAMMER, op. cit. (nota 74), p. 367.
138. J. V. NEUMANN, “Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrons”. *Zs. f. Phys.*, 48 (1928), pp. 868-881. F. MÖGLICH, “Zur Quantentheorie des rotierenden Elektrons”. Ibid., p. 852-867. V. FOCK, “Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons”. *Zs. f. Phys.*, 57 (1929), pp. 261-277.
139. H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig, 1928. B. L. VAN DER WAERDEN, “Spinoranalyse”. *Nach Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys.*, 1929, pp. 100-109.
140. A. S. EDDINGTON, “On the Value of the Cosmical Constant”. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 133 (1931), pp. 605-615. La presentación más elaborada del proyecto de EDDINGTON es su *Relativity Theory of Protons and Electrons*, Cambridge, 1936.
141. Ver VAN DER WAERDEN, op. cit. (nota 65), p. 233.
142. DARWIN, op. cit. (nota 108). G. BREIT, “An Interpretation of Dirac’s Theory of the Electron”. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 14 (1928), pp. 553-559. W. GORDON, “Der Strom der Diracschen Elektrodynamik”. *Zs. f. Phys.*, 50 (1928), pp. 630-632.
143. N. F. MOTT, “The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei”. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 124 (1929), pp. 425-442. O. KLEIN y Y. NISHINA, “Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac”. *Zs. f. Phys.*, 52 (1928), pp. 853-868.
144. W. PAULI y V. WEISSKOPF, “Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung”. *Helv. Phys. Acta*, 7 (1934), pp. 709-731.
145. O. KLEIN, “Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac”. *Zs. f. Phys.*, 53 (1928), pp. 157-165.
146. E. SCHRÖDINGER, “Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantendynamik”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1930, pp. 418-431. “Zur Quantendynamik des Elektrons”. Ibid., 1931, pp. 63-73. “Sur la théorie relativiste de l’électron et l’interprétation de la mécanique quantique”. *Ann. Inst. Poincaré*. 2 (1932), pp. 269-310.
147. *Reconocimientos del Dr. Kragh*: Estoy agradecido con ERIK RÜDINGER, del *Archivo Niels Bohr* en Copenhague, por su permiso para usar el material del *AHQP*. JOAN BROMBERG, del *Smithsonian Institution* ha comentado amablemente un primer borrador de mi artículo. En particular, me beneficié de muchos comentarios informativos y críticos de B. L. VAN DER WAERDEN, *Institute for Study of Mathematics and Physics*, Roskilde University Centre, 4000 Roskilde, Denmark. (Recibido el 1 de febrero de 1980; en forma revisada, 1 de octubre de 1980).

Helge Kragh. (Helge.kragh@css.au.dk).

Centre for Science Studies (Centro para Estudios de la Ciencia). Department of Physics and Astronomy, Aarhus University. Denmark. (Departamento de Física y Astronomía de la Universidad de Aarhus. Dinamarca).

El autor, nacido en 1944, es licenciado en Física y en Química, y doctor en Física. Es catedrático de Historia de la Ciencia en la Universidad de Aarhus. Ha sido docente de las universidades de Oslo y de Cornell. Es el autor de *Niels Bohr and the Quantum Atom: The Bohr Model of Atomic Structure, 1913-1925* (Oxford University Press, 2012).

(***) **Juan Manuel Vásquez May**, el traductor del artículo, era licenciado en Filosofía por la Universidad Nacional (Heredia, Costa Rica) y bachiller en Filosofía por la Universidad de Costa Rica. Cursó estudios de Análisis del Discurso en la Universidad de Buenos Aires,

y de Maestría en Filosofía en el Programa de Postgrado en Filosofía de la Universidad de Costa Rica.

Recibida el lunes 21 de octubre de 2013.
Aprobada el viernes 28 de noviembre de 2014.