**Javier Pérez Coto**

# El despojo de la intuición mediante los modelos isomorfos en la teoría axiomática

**Resumen:** *Este trabajo se enfoca en el problema epistemológico que supone el desdoblamiento de una teoría axiomática entre formalismo e intuicionismo. La propuesta aquí planteada pretende despojar el intuicionismo originario de los axiomas mediante la evocación a una correspondencia entre los modelos isomorfos, esto es, los modelos cuya estructura lógica es semejante.*

**Palabras clave:** *Filosofía de la matemática. Axiomática. Formalismo. Modelos isomorfos. Intuicionismo.*

**Abstract:** *This paper studies the epistemological problem supposed by the double tendency (formalistic and intuitionistic) in an axiomatic theory. Our proposal seeks to substract from axioms their originary intuitionism, through the appeal to a correspondence between isomorphic models, i.e., models whose logical structure is similar.*

**Keywords:** *Philosophy of Mathematics. Axiomatics. Formalism. Isomorphic models. Intuitionism.*

## I. Introducción

El presente trabajo versa sobre la teoría axiomática o los sistemas axiomáticos, y con ello se enmarca dentro de la problemática de la filosofía de la matemática. Definitivamente no es un trabajo sobre matemática, propiamente –ni pretende serlo-, aunque evidentemente se vale de los problemas planteados dentro de esta disciplina que han llevado a una formulación más bien epistemológica sobre la axiomática.

Haré un breve recorrido histórico del método axiomático con el fin de direccionar la discusión hacia el problema epistemológico que se presenta en dicho método, y luego expondré una propuesta de solución a partir de las tesis de R. Blanché y J. Ladrière, mediante los modelos isomorfos. De este último principalmente, por cuanto, las distinciones entre los distintos sistemas formales han sido tomadas de su obra *Limitaciones internas de los formalismos*, así como las tesis respecto a la obra de David Hilbert. Esto con el fin de delimitar el trabajo en la teoría formal y su problemática tal cual la expone Ladrière, y así evitar una mal dirección hacia los problemas propios de los autores mencionados y sus sistemas.

La teoría axiomática encontró su natalicio en el *Órganon aristotélico*, y posteriormente su desarrollo, así como amplia difusión, en los *Elementos* euclídeos, donde no sólo se cimentó como teoría geométrica, sino también como modelo de teoría deductiva. Esta rigurosidad lógica de la deducción geométrica, le permitió –a la axiomática- presentarse como forma acabada de teoría deductiva. Prueba de ello es que, hasta finales del siglo XIX, esta concepción permaneció básicamente inalterada salvo algunas variaciones terminológicas y epistemológicas de mayor o menor envergadura, *v.gr.*, con la aparición de las geometrías no-euclidianas, propiamente con Bolyai, Gauss y en particular Lobachevsky y Riemann.

Sin embargo, previo a esto, la teoría axiomática así expuesta en su acepción clásica se entiende como un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos -que no se definen-, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas -que no se demuestran-. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición.

Ahora bien, el problema radica en que la intuición se presenta insuficiente como justificación epistémica si queremos alcanzar algún grado de certeza en la verdad del axioma y, si el fin de la axiomatización de una teoría deductiva es desprender a dicha teoría de las significaciones intuitivas sobre las que, en primer lugar, fue cimentada, cabe preguntarse, ¿cómo contender el carácter intuitivo presente en las teorías axiomáticas, si debilita toda rigurosidad lógica?

Este trabajo se enfoca en el problema epistemológico que supone el desdoblamiento de una teoría axiomática entre formalismo e intuicionismo. La propuesta aquí planteada, de la mano con Blanché (1898-1975), pretende despojar el intuicionismo originario de los axiomas mediante la evocación a una correspondencia entre los modelos isomorfos, -aquellos que suponen la correspondencia formal entre varias teorías axiomáticas-, esto es, los modelos cuya estructura lógica es semejante.

Como precisión, es necesario aclarar que, es incorrecto hablar de la axiomática como sistema único, es decir, como si fuera un único sistema con axiomas, definiciones, proposiciones, etc., ya constituido y determinado, el cual se aplicara a diversos temas o problemas como medio de análisis, introduciendo talvez, otras variables que se subsumieran en el tema en cuestión. Tal es el caso de la axiomatización de la geometría de Pasch, así como la axiomatización de Peano para la aritmética, o bien, nuevamente en la geometría, la axiomática de Hilbert. Más aún, se puede hablar de un orden geométrico (= modelo axiomático), empleado por Baruj Spinoza. De manera tal que, al hablar de un método axiomático (o bien geométrico), aludimos a esta estructura hipotético-deductiva en la que, a partir de ciertas nociones primitivas, se enarbola un sistema lógico de proposiciones.

## II. Marco histórico

### 1. Aristóteles

Aristóteles (384 a. C.-322 a. C.) distingue en los *Analíticos posteriores* (1988, 339), dos posibles puntos de partida para las demostraciones, los axiomas y las definiciones. Su preocupación recae sobre el argumento de que deben haber primeros principios (= no demostrables) para cualquier ciencia, para que con ello se evite una regresión infinita en los argumentos. Este texto es de particular interés porque enarbola una teoría científica valiéndose del silogismo demostrativo, que es de carácter apodíctico; esto a su vez evoca el carácter epistémico del método axiomático, al remitir hacia los fundamentos de toda teoría científica. Siendo este el caso, la ciencia depende de un conocimiento más bien pre-científico, bajo el cual surgen las nociones previas que permiten la construcción del edificio argumentativo. Esas nociones previas, como acabo de señalar, son de dos tipos: a) axiomas y principios (como el de no-contradicción), que son verdades universales aplicables a cualquier deducción, aunque pertenezcan a ciencias distintas; b) definiciones, que son aquellos principios inmediatos propios de cada una de las ciencias. Ahora bien, esta es la primera aproximación expositiva al método axiomático, y en ella misma se encuentra el *quid* del problema que nos atañe, a saber, ¿cómo se llega a conocer esas nociones previas, toda vez que la ciencia propiamente dicha, según Aristóteles, no permite obtenerlos, antes bien los presupone? Para atender a este problema, el Estagirita apunta a la contrastación de hipótesis, como etapa de adquisición de esos principios, es así que, en la *Metafísica* (2008, 119-20),«prueba» que el principio de no-contradicción: a) no puede probarse positivamente, puesto que se presupone en toda prueba y el intento de demostrarlo daría lugar a un círculo vicioso, pero b) tampoco puede refutarse, pues en el instante de hacerlo se negaría la validez de esa refutación misma; de manera que, por reducción al absurdo, expone la validez predemostrativa de ese principio fundamental para todo conocimiento discursivo.

Ahora bien, hasta ahora tenemos el problema de: 1) ¿cómo se llegan a conocer las nociones previas?, y podemos añadir un problema que deviene de este, a saber, 2) las nociones comunes o axiomas, son considerados verdades incuestionables, universales y necesarias, que pretenden dar un suelo firme para poder cimentar todo el edificio argumentativo. Un uso correcto de las reglas de inferencia nos conduce a pensar que, si los axiomas a partir de los cuales se demuestran todas las demás proposiciones son verdaderos, estas a su vez, y de manera necesaria, habrán de ser verdaderas. Este sistema, aunque rígido, parece proveer una solidez lógica difícil de franquear. Sin embargo, cabe preguntarse, si sucediera que se incurre en un error, *v.gr.*, alguna de las proposiciones termina por ser falsa, ¿debemos pensar que ha sido un mal uso de las reglas de inferencia, si es el caso imposible que el error esté en aquellos primeros principios necesariamente verdaderos? Ante este segundo problema, la primera interrogante toma mayor relevancia, si es el caso que, verdaderamente, queremos cimentar un edificio sobre suelo firme.

## 2. Euclides

La obra de mayor consideración histórica de Euclides (325 a. C.-265 a. C.) es sin duda, los *Elementos*, tratado sobre aritmética y geometría que, aunque elemental, se mantuvo incuestionado por siglos. En este libro, el matemático alejandrino básicamente elaboró un ordenamiento lógico y metódico sobre el conocimiento matemático de su época, en el cual, su originalidad no fue ni teórica ni metódica, pero sí lo fue su uso del método. Talvez por esto es que se le suele acuñar el método axiomático a Euclides, pues se valió de teoremas matemáticos ya conocidos en su época, a la vez que implementó la teoría axiomática antes expuesta por Aristóteles, para darle un orden lógico y estructurado al cuerpo de conocimiento en matemáticas. Ahora bien, lo determinante de esto es que, valiéndose de dicho método, alcanzó a reconstruir de manera deductiva los teoremas de la matemática a partir de verdades evidentes y necesarias. En la obra mencionada, Euclides divide sus principios en Definiciones (= que tienen la forma de estipulaciones aunque otras incluyen varias aseveraciones que no son propiamente definiciones *i.e.* la afirmación de que 'Un diámetro divide un círculo por la mitad' (d.17), así como pares de definiciones, donde se puede leer fácilmente como una afirmación 'Una línea es sin amplitud' (d.2), 'Las extremidades de una línea son puntos' (d.3) o 'Las extremidades de una superficie son líneas' (d.6)); Postulados (= los cinco incluyen tres reglas de construcción); y Nociones comunes.

A partir de esta exposición, la geometría clásica en la forma que toma a partir de Euclides en los *Elementos*, se establece como un modelo de teoría deductiva, consideración que le dio a la geometría el estatuto como ciencia racional (= demostrativa).

Directa o indirectamente, todas las proposiciones se comunican entre sí (= cada teorema se encuentra unido por una relación necesaria a las proposiciones); la demostración no puede remontarse al infinito, razón por la cual reposa sobre algunas proposiciones primeras: indubitables. Todo es empíricamente verdadero, pero la experiencia no es criterio justificatorio. La única vía de demostración es deductiva, y las únicas leyes, las de la lógica.

Como se ha mencionado, este sistema permaneció inalterado por varios siglos. La controversia surgió en el último de los postulados euclídeos, el quinto. El problema recaía en su incapacidad de verificación empírica. Y atendiendo a la segunda interrogante antes planteada, si los primeros principios son verdades incuestionables, ¿qué sucede con el carácter evidente de este quinto postulado? Más allá de cuestionarnos las implicaciones que esto pudo tener para la geometría propiamente, nos interesa ver el problema que supuso para tan sólido método.

Hasta el siglo XVIII hubo numerosos intentos por resolver este problema, intentando, ya fuera, obtener un postulado similar aunque más evidente, o trataron de deducirlo de los otros postulados y axiomas (= dándole con ello el carácter de una proposición, más bien). Lo determinante por señalar aquí es que, se emprendió toda una labor centenaria por querer validar una verdad evidente; ahora ciertamente, la distinción clásica entre axiomas y postulados recae sobre el carácter demostrativo de uno y otro, aquellos son indemostrables, estos son demostrables en su correspondencia con la realidad, sin embargo, lo que comparten es el estatuto epistemológico de verdades necesarias. Y, considero, si se puede dudar de una de esas verdades, se puede dudar también de todas las demás. Este tipo de afirmaciones condujo, en el siglo XIX, a la aparición de otras geometrías nuevas, pero más importante, no-euclidianas.

### 3. Geometrías no-euclidianas

Howard Eves, en el primer tomo de su *Estudio de las geometrías*, se explaya al respecto y afirma,

> Poco después de la primera cuarta parte del siglo diecinueve tuvo lugar un evento geométrico que demostró ser de tremenda importancia, no sólo para la geometría, sino para todas las matemáticas; se inventó una geometría que difería radicalmente de la geometría tradicional de Euclides. Antes de este evento se había, y realmente existía, sólo una geometría posible, y que cualquier descripción del espacio contraria a la exposición euclidiana debía ser necesariamente incompatible y contradictoria. (1969, 319)

Ciertamente, las nuevas geometrías no fueron ni necesariamente incompatibles, ni contradictorias. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quien fuera llamado el Príncipe de los matemáticos, nos comenta Ángel Ruiz (1999, 93), inició sus intentos por demostrar una geometría válida sin el quinto postulado euclidiano a la corta edad de 15 años. Unos años después le escribió una carta a Bolyai (1775-1856), quien también fue pionero en las geometrías no-euclidianas, donde le expresaba la imposibilidad de deducir el quinto postulado de los demás postulados euclidianos. Más aún, habría de afirmar luego que, era imposible demostrar que los resultados de la geometría euclidiana fueran tanto autoevidentes como necesarios verdaderamente (= cosa que sí afirmaría de la aritmética).

Nicolai Lobachevsky (1793-1856), es considerado el padre de la geometría no-euclidiana, pero este título le ha sido otorgado sólo por haber sido el primero en publicar; el caso es que, Lobachevsky, Bolyai y Gauss, todos contemporáneos, trabajan al mismo tiempo, pero por separado en los nuevos problemas de la geometría.

Ahora bien, más importante aún para nuestro propósito, fue la implicación de esta aparición de nuevas geometrías respecto al objeto de análisis de la geometría, *v.gr.*, el espacio físico; de manera tal que, la teoría axiomática en la acepción clásica arriba planteada, esto es, como un conjunto de verdades acerca de un determinado ámbito de la realidad entra en disputa, planteando la interrogante sobre ¿cuál es la geometría verdadera?, o mejor aún, ¿cuál geometría describe adecuadamente el espacio físico?, poniendo con ello en entre dicho la teoría del espacio kantiana propia de la época, la cual, había revalidado los axiomas y postulados euclídeos situándolos como juicios *a priori* impuestos en la mente, lo que a su vez supone que, de ser negados, no es posible hacer ninguna suerte de razonamiento compatible con el espacio. Ante esto, insiste Eves,

> La geometría se liberó de su molde tradicional, y los postulados de la geometría se convirtieron, para el matemático, simplemente en hipótesis, de cuya verdad o falsedad físicas no era necesario preocuparse. […] Un postulado, como lo emplea el matemático no necesita ser autoevidente ni veraz. […] La invención de una geometría no euclidiana, invalidando una creencia tradicional y rompiendo con el hábito de pensar que se había tenido durante siglos, asestó un fuerte golpe a al punto de vista de la verdad absoluta en las matemáticas. (319-320)

Como he mencionado, el presente trabajo no pretende ahondar en problemas propias de la matemática sino señalarlos indirectamente, con el fin de direccionar nuestro problema. De manera que, lo que nos compete son las consecuencias de los mismos en un plano epistemológico y propiamente para la teoría axiomática como sistema. Es así que, podemos aseverar, ante el surgimiento de las geometrías no euclidianas, la intuición ya no comprende una necesidad para cualesquiera razonamientos acerca del espacio físico, sino que, pone en entredicho el valor mismo de verdad, y más aún, respecto al carácter no sólo verdadero, sino apodíctico y autoevidente de quienes ocuparan el más alto lugar de la jerarquía epistemológica: los axiomas.

## 4. La axiomática

Por otro lado, en el mismo siglo XIX, propiamente en 1882, Moritz Pasch (1843-1930) publicaría sus *Conferencias sobre una nueva geometría*, en las que pretende basamentar la geometría euclidiana en nociones y axiomas primitivos más precisos, haciendo hincapié en los métodos deductivos empleados para desarrollar el tema, y argumentó que el razonamiento matemático no debería apelar a la interpretación física de los términos primitivos (= correspondencia material), sino que debería basarse únicamente en manipulaciones formales justificadas por axiomas.

> Para que la geometría llegue a ser verdaderamente una ciencia deductiva, es necesario que la manera como se sacan las consecuencias sea en todas partes independiente del sentido de los conceptos geométricos, como debe serlo de las figuras; sólo debe tomarse en consideración las relaciones establecidas por las proposiciones (que hacen oficio de definiciones) entre los conceptos geométricos. (Blanché, 1965, 24)

Con esto expone una serie de reglas que puntualicen los términos primitivos a partir de los cuales se va a desarrollar el sistema geométrico, e igualmente esgrime en favor del énfasis sobre las relaciones lógicas entre los términos primeros, antes que considerar el sentido que se les pueda dar. Esto supone un conocimiento si no teórico, al menos operatorio de la lógica aquí presupuesta, de manera que sea anterior a la teoría axiomatizada.

El problema que supone esta formalización de la axiomática es que, en honor del espíritu propio de la axiomática, la presuposición de conocimientos es inadecuada, toda vez que esta pretende explicitarlo todo sin presuponer nada. Ella misma proporciona los cimientos del edificio, no considera ningún otro tipo de pieza anterior a los cimientos mismos. Esto ciertamente es problemático, y es talvez el tercer problema por enlistar junto a los dos mencionados anteriormente, a saber 3) ¿Qué tanto conocimiento es permitido presuponer previo al sistema propiamente? ¿cuánto de ello está tácito en las nociones primitivas y qué tan necesario es explicitarlo en la edificación del sistema? Más adelante volveré a esto.

Hasta ahora, el desarrollo de la axiomática como modelo deductivo ha llevado a considerar los postulados de una teoría no susceptibles de verdad o falsedad, pues contienen variables relativamente indeterminadas. Es necesario dar a estas variables ciertos valores a modo de constantes, para poder someterlas a juicios de verdad o falsedad; sin embargo, esgrime Blanché, esto ya excede a la axiomática como tal y da lugar a sus aplicaciones.

Posteriormente a Pasch, hubo al menos dos sistemas axiomáticos que alcanzaron gran relevancia histórica; de los cuales, le habremos de prestar un poco más de atención al segundo.

a. Giuseppe Peano (1858-1932): construyó una axiomática para la teoría de los números naturales.
b. David Hilbert (1862-1943): en sus Fundamentos de la Geometría, expone una axiomática sobre la geometría euclídea. No se preocupó mucho por reducir el número de los términos primitivos, los cuales incorporó a los axiomas; mismos que repartió en cinco grupos según el dominio de los teoremas que determinan.

Ahora bien, en el programa de Hilbert, de la mano de Kant, esgrime que las matemáticas gozan de un contenido que les es asegurado independientemente de toda lógica, y, en consecuencia no pueden fundarse en ella. Contrario a esto, la condición que permite la aplicación de razonamientos lógicos es que se dé algo a la representación: objetos concretos, presentes en la intuición de forma inmediata; y, en este caso, ese objeto son los signos. La solidez del razonamiento matemático recae sobre la intuición del signo, cuya evidencia es privilegiada. Sin embargo, en algún momento, estas evidencias fueron puestas en discusión, develando un exceso de confianza en ellas y, reconociendo que, tales evidencias sobre las que se descansaba, no podían ser consideradas como criterios de verdad.

### 5. La crisis de los fundamentos

Respecto a lo recién planteado, Ladrière cita a Hilbert,

> […] No se puede suprimir el recurso a la evidencia: toda demostración debe poder sustentarse, en definitiva, sobre evidencias, y lo que se denomina razonamiento no es sino un procedimiento por medio del cual se propaga la evidencia de ciertos términos tenidos directamente por otros cuya verdad no se manifiesta de manera inmediata. Y la evidencia se realiza en la intuición: es pues, necesario precisar sobre qué intuiciones hay que apoyarse y justificar el papel que se les atribuye. (1969, 27)

Este cuestionamiento sobre las intuiciones primeras es lo que se ha venido a llamar: la crisis de los fundamentos. Esta crisis, dice Ladrière lo que supone es un examen crítico de los conceptos básicos así como de los métodos de razonamiento empleados, propiamente en relación con el sistema aceptado de evidencias.

La propuesta de Hilbert ante esta crisis radica en el peso otorgado a la intuición sensible del signo (= objeto-signo), para la cual, antes bien, formula una distinción entre matemática y metamatemática. Para su programa sobre la fundamentación de las matemáticas planeta dos puntos de vista:

a. Todo lo que hasta aquí ha constituido la matemática propiamente dicha, queda estrictamente formalizado, de manera que la matemática propiamente dicha (= matemática en sentido estricto), se convierte en un cuerpo de fórmulas demostrables.

b. A (a) se le viene a añadir otra disciplina, la metamatemática, que sirve para asegurar la verdad de aquella. En esta se aplica un carácter intuitivo que se aplica para establecer el carácter no-contradictorio de los axiomas.

Con esto, Hilbert pretende convertir los axiomas, fórmulas y demostraciones de las teorías matemáticas en objetos de la intuición; pero, para ello, es necesario realizar una formalización estricta de todas las teorías matemáticas.

## III. Sistemas formales

Para demostrar que un sistema es auto-consistente, hay que demostrar que no contiene proposiciones contradictorias. Tal condición supone que el sistema esté adecuadamente formalizado, y esto se puede lograr mediante la axiomatización, esto es, estableciendo los conceptos indefinidos, así como los supuestos indemostrados junto con las reglas de inferencia.

Ahora bien, la axiomática, la cual es nuestro sistema de interés, como hemos visto, ha mutado mucho a lo largo de los años. Ladrière (1969) distingue la axiomática clásica de la moderna, como de contenido y pura, respectivamente; de esta manera, en la acepción clásica, es decir, la axiomática de contenido, los conceptos fundamentales estaban dados intuitivamente, y a partir de ellos se establecían proposiciones consideradas como evidentes. Por otro lado, la axiomática moderna, es más bien pura, es decir, los conceptos de los que se vale son introducidos explícitamente y definidos por relaciones que establecen entre ellos. Los axiomas no se consideran ya, como verdades evidentes, sino que, se exponen como hipótesis cuya validez es probada en función de qué se puede deducir de ellos.

Por otro lado, otro sistema formal que emergió durante el siglo XIX fue el de la logística, a partir de los trabajos de Boole. Es de corte analítico puesto que recurre a las operaciones puramente elementales, elaborando procedimientos a partir de ellas que den lugar a operaciones más complejas. La logística, desde sus inicios ha tomado la forma del cálculo, con operaciones dadas y definidas por un conjunto de reglas. Sin embargo, esgrime Ladrière, «[…] esta debería adoptar en algún momento una forma axiomática y deductiva: las propiedades de las operaciones fundamentales quedan fijadas por ciertas relaciones, enunciadas a manera de axiomas, y se dan reglas que permitan deducir de estos axiomas proposiciones válidas» (1969, 37).

A su vez, y en relación con el problema sobre los fundamentos, los logicistas consideran que los conceptos matemáticos se pueden derivar de conceptos lógicos enteramente, más aún, la matemática es tan solo una parte de la lógica y no existen conceptos matemáticos ajenos a esta.

## IV. Intuicionismo

Un caso anverso de los modelos formales recién expuestos, lo presenta el intuicionismo, esgrimido por Brouwer y su escuela, para quienes la matemática es independiente del lenguaje matemático y de la lógica. Así lo expone Ladrière,

> El ente matemático no posee realidad autónoma, antes bien, existe solamente en el acto por el cual es engendrado. […] El pensamiento matemático se fundamenta en una intuición originaria, a saber, la división de la unidad, fuente de la dualidad. Esta intuición es esencialmente la de la estructura del tiempo, y constituye la base de la noción de número entero. (1969, 44)

Con esto, se elimina todo tipo de aprioricidad, toda vez que no se puede afirmar x o no-x, sin haber resuelto un procedimiento efectivo que permita obtener tal solución. Ahora bien, ante el problema de los fundamentos, los intuicionistas desdeñan un marco sistemático y piensan, más bien, que las matemáticas están en constante devenir, de manera que la constructibilidad avanza a medida que avanza la matemática. De manera que, realmente, no aportan ninguna solución al problema, sino que, proponen una suerte de estilo matemático que consiste en la refundición de todas las teorías.

Mientras tanto, como se señaló con brevedad anteriormente, Hilbert buscó una conciliación entre las teorías expuestas (= logicismo, axiomática, intuicionismo), dándole a los sistemas formales el lugar de la metamatemática o teoría de la demostración, destinada al problema de los fundamentos, esto es, sus términos elementales; mientras que a la matemática le asignó todos los tipos de razonamiento, que a su vez deberían adecuarse a prescripciones más bien constructivistas.

## V. Modelos isomorfos

Sin embargo, todas estas propuestas de una u otra manera, nos llevan a la elaboración de sistemas formales. Y, más importante aún, el formalismo es la concepción dominante ante el problema de los fundamentos.

La axiomática, argumenta Ladrière -así como la posición hilbertiana-, tiene un carácter platónico, es decir, considera el ente matemático como existente en sí, de manera que un sistema formal es tan sólo la transposición (= representación simbólica) de una realidad matemática autónoma; sin embargo, asevera que, el sistema sólo puede construirse en la prolongación de una matemática intuitiva, de otra manera, que esta realidad matemática se haya expresado previamente de alguna manera.

Pero, indistintamente de su consideración platónica o empirista, parece haber siempre una dualidad reducible a dos niveles teóricos, *v.gr.*, nivel intuitivo (= estadio no crítico de las teorías matemáticas) y un nivel formalizado (= estadio crítico). Esto tira por la borda la propuesta hilbertiana de distinción entre ciencia y metaciencia, reduciéndola a teorías intuitivas y formales. Puesto que, si la metaciencia es la ciencia de los fundamentos, se termina por identificar con aquellos que desea fundamentar. La tarea ahora es la de reducir la intuición a un mínimo absoluto.

Ahora, hablar de un sistema formal = hablar de un perfeccionamiento del método axiomático en su máxima abstracción. Este método consiste en un aislamiento –en un determinado marco teórico- de ciertos enunciados considerados fundamentales, a partir de los cuales se pueden derivar otros nuevos mediante reglas lógicas de inferencia. Este tipo de exposición presenta una forma ordenada en la cual se procede desde lo más conocido a lo menos conocido, de lo más simple a lo más complejo.

Algunos ejemplos de la presencia intuitiva en la axiomática son los siguientes:

1. *A. intuitiva*: aísla los conceptos y enunciados fundamentales a partir de los cuales se deducen los demás; sin embargo, los primeros se consideran como intuitivos y los segundos como evidentes. Este es el caso de la geometría euclidiana.
2. *A. abstracta*: se precisa completamente el contenido de los conceptos fundamentales, haciendo uso de propiedades enunciadas explícitamente. Pero, hacen referencia a la significación intuitiva de los términos utilizados. Esto sucede en la definición ordinaria de grupos en álgebra.
3. *A. formal*: el contenido de los conceptos fundamentales ya no desempeña ningún papel. Su significación queda fijada de manera absoluta por las relaciones establecida entre los conceptos mediante los axiomas. Sin embargo, los axiomas siguen apelando a expresiones del lenguaje común, por lo que su sentido viene dado por la intuición.
4. *Sistema formal puro*: toda referencia a un orden de significados exteriores al sistema queda eliminado mediante el empleo de un lenguaje simbólico rigurosamente definido, a la vez que se explicitan totalmente los modelos de deducción. Aunque la intuición no es eliminada por completo, no afecta el contenido de los conceptos o expresiones.

Esta transición en la axiomática modifica su sentido: su fundamento ya no es la evidencia, sino la comodidad. Los enunciados iniciales se eligen arbitrariamente = lo único relevante es que, del cuerpo de axiomas pueda deducirse la teoría.

Ahora bien, la precisión de sistema formal requiere la distinción entre presentación, representación e interpelación de un sistema:

1. Presentación: formulación de una elección particular de símbolos.
2. Representación: correspondencia biunívoca entre sus componentes primitivos y una clase de objetos.
3. Interpretación: correspondencia entre una las proposiciones primitivas de un sistema con una determinada clase de enunciados cuya verdad o falsedad se determina independientemente del sistema, de manera que a las proposiciones derivables del sistema, le corresponden enunciados verdaderos.
4. Modelo: conjunto de elementos (En) que se encuentra en correspondencia con los componentes de un sistema formal. De manera tal que:
   4.1. A las proposiciones del sistema formal corresponden enunciados formados mediante elementos del conjunto (En).
   4.2. Sea posible determinar independientemente del sistema formal, si un determinado enunciado es verdadero o falso.
   4.3. A las proposiciones derivables del sistema formal corresponden enunciados verdaderos.
5. 3 = 4

Dos modelos $M_1$ y $M_2$ se denominan isomorfos si entre los elementos de sus campos respectivos existe una correspondencia biunívoca (= a cada elemento $M_1$ corresponde un elemento $M_2$, sólo uno y de manera recíproca), de manera tal que, si un elemento de M1 es verdadero, asimismo lo es su correspondiente en $M_2$.

Concatenado con esto, Blanché elabora una serie de tesis sobre los indefinibles y los indemostrables en las que afirma que:

1. No es lógicamente indispensable que la totalidad de los términos fundamentales y de los postulados sea presentada en bloque desde el principio de la teoría, así como agotada antes de que comiencen las definiciones y las demostraciones.
   1.1. (1) alcanzaría a entorpecer la exposición, sin ningún tipo de ventaja lógica.
2. Para evitar (1.1), es preferible proceder por grados sucesivos e introducir a medida que sea necesario, aislada o grupalmente, nuevas nociones fundamentales.

- 2.1. (2) puede ser ilustrado en el proceder geométrico que emplea Spinoza en la *Ética*, donde el lector puede observar cinco partes en las que está dividido el texto, cada una con sus propios axiomas, definiciones, etc., pero que a su vez, cada parte sucedente se puede retrotraer a las partes anteriores con sus respectivos axiomas, definiciones, etc., es decir, cada una de las partes está supuesta en las siguientes, pero exponen términos primitivos nuevos según el problema atinente. Si el filósofo holandés hubiera expuesto en un primer libro todos los axiomas, definiciones, etc., la oscuridad del texto sería poco menos que absoluta.

3. Dos maneras de entender ‘sistema’: (a) conjunto de nociones y proposiciones que lo componen, primitivas y derivadas; (b) tal o cual organización lógica que es posible darle a (a).
   - 3.1. (a) = (b)
   - 3.2. Todas las reconstrucciones axiomáticas de la geometría euclidiana son equivalentes, puesto que contienen en el fondo el mismo conjunto de términos y proposiciones.
   - 3.3. La diferencia recae en la distribución entre primitivos y derivados.
   - 3.4. Dos sistemas de proposiciones son equivalentes si, cualquier proposición del uno, se puede demostrar con la sola ayuda de las proposiciones del otro.
4. Estando dada una teoría deductiva concreta, siempre es posible reconstruirla sobre bases diferentes.
   - 4.1. Si el sentido de los términos no está determinado de manera unívoca (= equívoca), siempre que haya un sistema de valores que satisfaga igualmente el conjunto de relaciones enunciadas por los postulados, dar varias interpretaciones concretas diversas, estas devienen en modelos, siendo el sistema original uno de estos, aunque no el único, ciertamente.
   - 4.2. Si es el caso que (4.1), y hay una coincidencia en la abstracción = modelos isomorfos (= estructura lógica).
   - 4.3. El método axiomático tiene la pretensión de establecer (4.2).

Considero que esto si no elimina el lugar original de la intuición entre los términos primitivos, al menos despoja a la intuición de su lugar dentro del sistema, toda vez que ya no supone remontarse hacia ella en algún tipo de significación, sino que la verdad de los enunciados es satisfecha mediante su correspondencia entre modelos. De esta manera al llevar a la axiomática hacia la formulación de un sistema formal puro, sus verdades ya no se reducen a la elección arbitraria y a la validez deductiva que toman sus derivables, sino que encuentra su valor epistémico mediante la función que cumple en otro modelo lógicamente semejante.

## Bibliografía

Aristóteles. (1988). *Tratados de lógica. Órganon II.* (Introducción, traducción y notas de Miguel Candel Sanmartín). Madrid: Gredos.

________. (2008). *Metafísica* (Introducción, traducción y notas de María Luis Alía Alberca). Madrid: Alianza.

Blanché, R. (1965). *La axiomática* (Traducción de Federico Osorio Altúzar). México: UNAM.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías. Tomo I* (Traducción de Susana Blumovicz de Siperstein). México: Uteha.

Ladrière, J. (1969). *Limitaciones internas de los formalismos. Estudio sobre la significación del Teorema de Gödel y teoremas conexos en la teoría de los fundamentos de las matemáticas.* Madrid: Tecnos.

Ruiz, A. (1999). *Geometría no-euclidianas: breve historia de una gran revolución industrial.* San José: Ed. de la Universidad de Costa Rica.

**Javier Pérez Coto** (Japeco1@hotmail.com). Estudiante de Filosofía de la Universidad de Costa Rica.

Recibido: 12 de abril de 2019
Aprobado: 20 de agosto de 2019