Jesús E. Sánchez-Guevara y Ronald A. Zúñiga-Rojas

Introducción a la teoría de categorías, lógica y topos elementales para una mente curiosa

Resumen: *En este trabajo se presenta un estudio de cómo la teoría de categorías lleva a la creación de sistemas lógicos diferentes a los clásicos. En particular, se describe el caso del topos elemental de grafos, donde existen otros tres estados de verdad diferentes al falso y verdadero. El abordaje en este artículo de la teoría de categorías no necesita una formación matemática especializada para su comprensión, ya que se busca hacer accesibles las principales ideas de esta rama de las matemáticas a otras disciplinas del conocimiento. Este trabajo fue presentado por el segundo autor, bajo el título de «Lógica y Categorías», en el I Coloquio de Lógica, Epistemología y Metodología organizado por la Escuela de Filosofía de la Universidad de Costa Rica.*

Palabras clave: *categorías, topos elementales, lógica, filosofía.*

Abstract: *This paper presents a study of how the theory of categories leads to the creation of non-classical logical systems. In particular, the case of the elementary topos of graphs, where there are three other truth values different from false and true. The approach in this article to the theory of categories avoids specialized mathematical training to understand it, since it seeks to make accessible the main ideas of this branch of mathematics to other disciplines of knowledge. This work was presented by the second author, under the title of «Logic and Categories», at the I Colloquium on Logic, Epistemology and Methodology organized by the School of Philosophy of the University of Costa Rica.*

Keywords: *categories, elementary topos, Logic, Philosophy.*

Introducción

El comportamiento de las fuerzas físicas en el plano y el espacio es modelado en matemáticas con espacios vectoriales y las transformaciones lineales que operan entre ellos, lo cual imprime una gran importancia al estudio de las propiedades obtenidas de sus interacciones, por ejemplo, la manera en la cual se modifica la estructura de un espacio vectorial cuando es afectado por diferentes tipos de transformaciones lineales. Eilenberg & MacLane (1945) nos dicen que estos nexos también se manifiestan en situaciones de diferente naturaleza, es decir, veríamos un comportamiento análogo con los grupos y sus homomorfismos, con los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, con los complejos simpliciales y las transformaciones simpliciales, con los conjuntos ordenados y los mapeos que preservan el orden. Así, para abordar la generalidad de estas relaciones, sin tomar en cuenta la naturaleza particular de cada situación, se recurre al concepto matemático de categoría.

La teoría de categorías se encuentra presente de forma transversal en las matemáticas modernas. Su versatilidad la ha justificado como herramienta unificadora, capaz de describir y manipular en total generalidad propiedades intrínsecas de diferentes entidades matemáticas. Por ejemplo, una manera de analizar la topología de un espacio es estudiando los diferentes tipos de lazos que se pueden trazar en ellos, es decir, curvas que inician y terminan en el mismo punto del espacio, las cuales se clasifican en clases de homotopía. El punto del espacio seleccionado para trazar estas curvas, se le llama punto de base. En el tercer capítulo de (James 1999) titulado *Desarrollo del concepto de homotopía*, Ria Vanden Eynde nos indica que la preferencia de la topología por las teorías con puntos de base tiene como explicación los conceptos de categorías y funtores presentados por Eilenberg y MacLane en los años cuarenta, ya que, al abordar su estudio desde el punto de vista categórico, entre otras cosas, se pueden identificar en ellas objetos que son al mismo tiempo iniciales y finales, lo cual crea un paralelismo con categorías de propiedades similares como la categoría de anillos o la de grupos, es decir, son más adecuadas para la aplicación de métodos algebraicos. Lo cual no sería posible si se trabajara en categorías de espacios sin puntos de base o en la categoría de los conjuntos.

El alcance de la nueva herramienta matemática de las categorías fue más allá de la reorganización de la información algebraica para clasificar, describir y hallar relaciones importantes. Marquis & Reyes (2011) nos dicen sobre Lawvere que sus trabajos en lógica simbólica lo llevaron a descubrir una forma de interpretar proposiciones lógicas matemáticas en objetos y flechas de ciertas categorías especiales, llamadas topos elementales. Las cuales se pueden ver como entes que generalizan la categoría de los conjuntos y cuyas principales características se derivan de los topos de Grothendieck, introducidos en la década de los sesenta (Grothendieck & Verdier 2006).

Este nuevo punto de vista abrió la posibilidad de replantear las bases axiomáticas de las matemáticas, lo cual implicaría cambiar a los conjuntos como puntos de partida para la fundamentación de todas las matemáticas, ya que algunos especialistas como Jean Bénabou (2014) y Alain Prouté (2010) indican que los axiomas conjuntistas se muestran insuficientes para poder describir la complejidad total de la maquinaria matemática moderna.

Prouté (2010) nos dice que en el estudio de las categorías abordadas por Lawvere la estructura de un topos elemental es lo suficientemente rica para que se pueda considerar como un universo matemático el axioma de elección.

La lógica interna de un topos se puede abordar de forma intuicionista o constructivista, es decir, que la verdad se entiende solamente a través de una prueba y la existencia sólo se reconoce a partir de una construcción explícita. Sin embargo, esta postura intuicionista no implica un rechazo de la lógica clásica en sí, ni aceptación de las relativas posiciones metafísicas del intuicionismo por parte de la mayoría de los matemáticos que se ocupan de la teoría de categorías, ya que es sólo en el abordaje global de todas las posibles categorías de este tipo, donde se los abordajes clásicos se ven limitados.

Este artículo está configurado en dos partes, en la primera se discuten las principales características de las categorías en general y en la segunda parte se abordan las propiedades de los topos elementales. El enfoque global de este texto es presentar un abordaje claro de la teoría de categorías para personas no especialistas en matemáticas con el fin de extender sus aportes a otras ramas cognitivas, como la filosofía.

Categorías

Una categoría se puede describir como cualquier sistema donde sea posible identificar flechas de un lugar a otro. Además, el comportamiento de estas flechas va a estar determinado por algunas condiciones sobre sus características. Como primer ejemplo trataremos con una categoría hecha a partir de un conjunto de personas, el cual llamaremos P.

En P vamos a tener una cantidad fija de personas, las cuales serán vistas como objetos entre los cuales vamos a trazar algunas flechas. Así, si A y B son dos personas de nuestra categoría, entonces habrá una flecha que parte de A hacia B, si A puede provocar una reacción de asombro en B. En este trazado de flechas podemos remarcar que no se excluye la posibilidad de que A y B sean la misma persona. De hecho, para que nuestro ejemplo funcione como categoría, sólo resta aceptar que cualquier persona siempre podrá provocar una reacción de asombro en ella misma.

Veamos ahora las principales propiedades de las flechas de P. Primero, siempre vamos a tener al menos tantas flechas como personas, pues por cada persona hay una flecha que sale y llega a ella. Segundo, si de A a B hay una flecha f, y de B a otra persona C hay una flecha g, entonces necesariamente hay una flecha h de A a C, pues si A puede asombrar a B y B puede asombrar a A, entonces es correcto decir que A puede provocar asombro en C, ya que A podría hacerlo al usar a B como intermediario.

En lenguaje matemático, a la flecha h de A a C se le llama la composición de las flechas f y g, y se escribe g°f. La tercera propiedad tiene que ver con la forma en la cual, bajo estas composiciones, se comportan las flechas que salen y entran de una misma persona. Si para una persona cualquiera X escribimos 1_X como la flecha resultada de su capacidad para asombrarse a sí misma, cuando tenemos una flecha f de una persona A a otra B, la composición 1_B°f o f°1_A es de nuevo f, pues en ambos casos la composición indica la misma información que f, es decir, A puede sorprender a B.

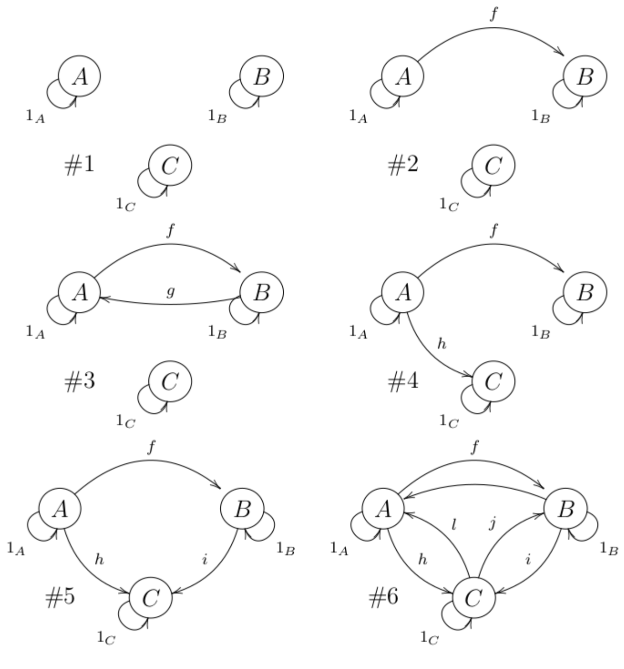

Figura 1. Ejemplos de variaciones de la categoría P con tres objetos donde sólo puede haber como máximo una flecha de un objeto a otro. Tipo 1 representa la categoría con la mínima cantidad de flechas posibles, es decir, cada persona sólo es capaz de asombrarse a sí misma. Tipo 2, A asombra a B. Tipo 3, A asombra a B y a C. Tipo 4, A asombra a B y a C y B asombra a C. Tipo 5, A asombra a B y B asombra a A. Tipo 6, tiene trazadas todas las posibles flechas entre estos objetos.

Notemos el hecho de que A pueda asombrar a B, no asegura que B tenga la capacidad de generar la misma reacción en A, en otras palabras, la existencia de una flecha de A a B no implica la existencia de una flecha de B a A. En la figura 1 se representan diferentes versiones válidas de la categoría *P* con tres personas.

Las situaciones que no son consideradas categorías son aquellas donde la composición de las flechas no se puede realizar o no tiene sentido. Por ejemplo, si en una categoría como *P*, para cada par de personas A y B, admitimos una flecha diferente de A hasta B por cada emoción que A pueda provocar en B. Si A puede asustar a B y B puede hacer sonreír a C, entonces ¿qué reacción puede provocar A en C? Otro ejemplo de una situación donde *P* no sería considerada una categoría, es cuando tomamos en cuenta el acto de contratar, pues no es cierto que si A puede contratar a B para un negocio y B piensa que C es apto para ser contratado, entonces sería falso que A puede contratar a C, ya que los criterios de contratación entre A y B pueden variar. También se puede pensar en la situación donde se trazan las flechas de P a partir del acto de saludar, pues en este caso el resultado tampoco sería necesariamente una categoría, porque saludar implica un reconocimiento del otro (como tal), por lo tanto, saludarse a sí mismo no tendría sentido.

Formalmente**,** una categoría C consiste de una colección de objetos Obj(*C*) y una de flechas Fl(*C*). Además, estas colecciones deberán cumplir con las siguientes condiciones: (1) Toda flecha f de Fl(*C*) inicia y termina en un objeto de Obj(*C*). Cuando una flecha f inicia en A y termina en B, se escribe f:A→ B. (2) Por cada objeto X de Obj(*C*), existe una flecha especial 1_X que inicia y termina en X y se le llama flecha identidad de X. (3) Es posible componer flechas, es decir, por cada par de flechas f:A→ B y g:B→ C, existe una regla que les asocia una única flecha h:A→ C, la cual se escribe g°f:A→ C. Además, el resultado de esta regla al componer varias flechas, no debe de estar afectado por el orden de aplicación, es decir, si tenemos tres flechas f:A→ B, g:B→ C y h:C→ D, aunque es posible componerlas de dos formas diferentes, iniciando con f y g para obtener h°(g°f) o iniciando con g y h para obtener (h°g)°f, en ambos casos la flecha resultante de A hasta D, debe ser la misma, así h°(g°f)=(h°g)°f. (4) Para cualquier flecha f:AB, las identidades 1_A y 1_B satisfacen f=1_B°f= f°1_A, es decir, no afectan el resultado de la composición. En una categoría C, al conjunto de todas las flechas de A hasta B, MacLane (1998) lo escribe Hom(A,B). También, la palabra morfismo es usada como sinónimo de flecha.

En matemáticas, las categorías surgen cuando se estudian estructuras con naturalezas similares. A continuación una lista con algunas de ellas.

La categoría de los conjuntos Set: está formada por todos los conjuntos y las funciones entre ellos, es decir, Set son los conjuntos y Fl(Set) son las funciones.

La categoría de los órdenes parciales Pos: Los conjuntos que poseen una relación de orden parcial, digamos (A,≤) y (B,≤), también constituyen la colección de objetos de una categoría denotada Pos, donde las flechas f en Hom(A,B) son funciones monótonas f:A→ B.

La categoría de los grupos Grp: Un grupo G es un conjunto junto con una operación binaria asociativa y un elemento especial 1_G llamado unidad del grupo, el cual funciona como neutro de la operación. Además, por cada elemento del grupo existe otro que al aplicarles la operación binaria se obtiene como resultado 1_G. Entre grupos hay funciones especiales que preservan la operación binaria, a una función de este tipo se le llama homomorfismo. Los grupos junto con los homomorfismos forman una categoría Grp.

La categoría de los anillos Rng: En un estilo similar al de un grupo, un anillo es un conjunto dotado de dos operaciones binarias +(suma) y *(producto). Por separado con cada operación, el conjunto debe ser un grupo, pero además, debe ser conmutativo bajo la primera operación y satisfacer algunas propiedades de distributividad entre las operaciones. Al igual que en grupos, las funciones importantes entre anillos son aquellas que preservan las operaciones y se llaman homomorfismos de anillos. Los anillos junto con sus homomorfismos forman una categoría denotada Rng.

La categoría de los espacios vectoriales Vec: Los espacios vectoriales junto con sus transformaciones lineales forman uno de los primeros ejemplos de categorías presentados por Eilenberg & MacLane (1945). La categoría de espacios vectoriales se denota por Vect.

La categoría de los espacios topológicos Top: En el cálculo diferencial e integral de una o varias variables se estudian las principales propiedades de las funciones continuas. Dichas propiedades dependen también del dominio de las funciones. Así, el concepto de espacio topológico surge a la hora de generalizar esta teoría a contextos más generales. Un espacio topológico es un conjunto donde se identifica una colección particular de sus subconjuntos, los cuales deben de satisfacer: (1) el conjunto principal y el conjunto vacío forman parte de esta colección. (2) El conjunto resultado de intersecar cualquier cantidad finita de estos subconjuntos, es de nuevo un subconjunto de la colección. (3) Cualquier conjunto resultado de una reunión de conjuntos de la colección es de nuevo un conjunto de la colección. A la colección se le conoce como topología sobre el conjunto y a los conjuntos de la colección, se le llaman abiertos. Una función continua entre dos espacios topológicos es toda aquella cuyo conjunto de preimágenes de cualquier abierto es un abierto. La categoría de espacios topológicos y funciones continuas se escribe Top.

La categoría de las palabras Mots: En esta categoría los objetos son las letras del abecedario y cada palabra representa una flecha desde su letra inicial hasta su letra final. Las palabras de una sola letra, se ven como flechas que salen y llegan a la misma letra. Estas flechas son diferentes a la flecha identidad que acompaña a cada objeto, la cual puede ser etiquetada por comodidad, como la palabra vacía, es decir, la palabra sin letras. La composición es el resultado de la concatenación de las palabras. En Mots las flechas podrían incluso representar palabras que sin significado en español, además de que tendríamos una infinidad de flechas diferentes entre objetos, incluso saliendo y llegando al mismo lugar, como lo son las flechas dadas por las palabras A, AA, AAA, AAAA, todas pertenecientes a Hom(A,A). La figura 2 se hace una representación de algunas flechas en esta categoría.

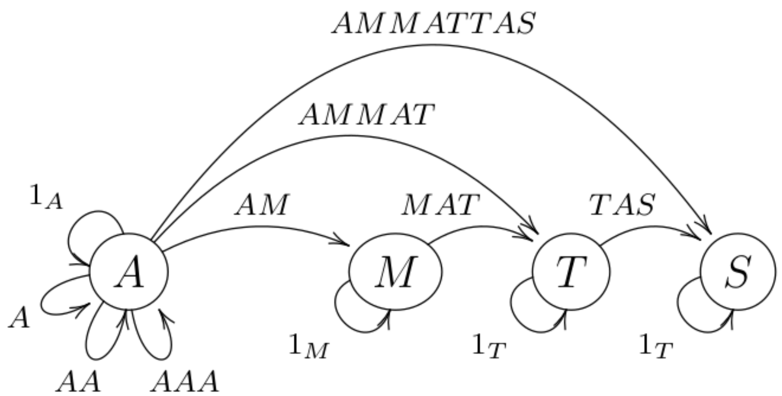

Figura 2. Algunas flechas de la categoría de palabras Mots. La flecha AA se puede obtener al componer la flecha A consigo misma. AAA es el resultado de componer A con AA. AM compuesto con MAT forma la flecha AMMAT, y esta misma compuesta con TAS, forma la flecha AMMATTAS. La flecha SSSS es ejemplo de una palabra que inicia y termina con S. 1_A, 1_M, 1_T y 1_S, son las flechas identidad de cada objeto.

Morfismos especiales

Cuando dos estructuras de la misma naturaleza son indistinguibles se dice que son isomorfas. Esto se refleja en teoría de categorías mediante la existencia entre los objetos de flechas especiales llamadas isomorfismos. La propiedad que las caracteriza es la siguiente: $f{:}A\to B$ es un isomorfismo si y sólo si en la misma categoría existe $g{:}B\to A$ que satisface $f°g = 1_B$ y $g°f=1_A$.

En el caso de la categoría de conjuntos Set, como la propiedad que caracteriza a cada conjunto es sólo la cantidad de sus elementos, dos conjuntos son isomorfos cuando tienen la misma cantidad de elementos. Así, en Set un conjunto con cinco vasos es isomorfo a un conjunto de cinco platos.

Si cambiamos de categoría y nos vamos hacia la categoría de espacios topológicos Top, los isomorfismos son un poco diferentes. Tomemos un objeto cotidiano que podamos ver como un espacio topológico, por ejemplo una pelota antiestrés. Cuando la sostenemos en la palma de la mano y la apretamos entre nuestros dedos, las deformaciones que sufre la pelota la transforman en un objeto con una forma diferente a la original pero no al grado de desgarrarla o destruir su estructura. Este tipo de acción es una representación de una aplicación continua entre dos espacios topológicos, la pelota en su forma original y la pelota bajo la opresión de la mano, como se muestra en la figura 3. Pero nuestra acción también representa un isomorfismo, ya que la pelota no ha sido *desnaturalizada* por la fuerza de nuestra mano. La naturaleza de este isomorfismo se manifiesta al dejar de ejercer fuerza sobre la pelota, pues automáticamente la pelota vuelve a su forma original usando otra aplicación continua, la cual sería inversa a nuestra fuerza original, aunque la manera en la que volvió a su estado original, no repite necesariamente nuestra acción al revés, es sólo otra forma de volver.

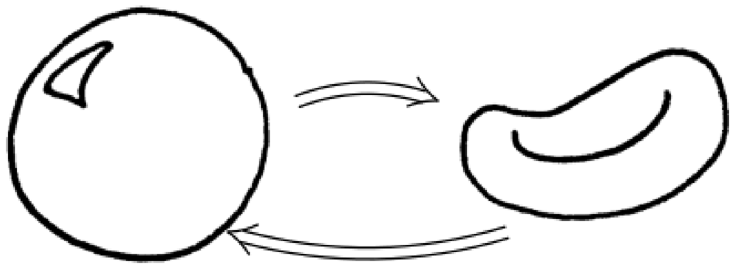

Figura 3. Isomorfismo topológico en una pelota anti-estrés.

Otros tipos importantes de flechas en una categoría son aquellas que generalizan la noción en la categoría Set de subconjunto y proyección. Estas flechas son llamadas monomorfismos y epimorfismos, respectivamente.

En Set un monomorfismo se da cuando un conjunto es un subconjunto de otro mayor, o al menos se puede identificar por un isomorfismo a un subconjunto de un conjunto. Lo interesante es que esta propiedad se puede codificar como una propiedad que habla sólo de flechas: f es un monomorfismo si para cualquier par de flechas g, h, siempre que $f°g=f°h$, se satisface que $g=h$. En Sets, los isomorfismos son exactamente las funciones biyectivas.

Por otro lado, el concepto de proyección entre conjuntos se da cuando se tiene una función desde un conjunto hacia un subconjunto de él mismo, de tal manera que todos los elementos del subconjunto son usados, lo cual coincide con el concepto de función sobreyectiva. Al igual que el caso de los monomorfismos, esta propiedad se puede expresar exclusivamente en términos de flechas y así, se puede exportar a cualquier categoría: se dice que f es un epimorfismo si para todo par de flechas g y h tales que g°f=h°f, se tiene que g=h.

Funtores entre categorías

Las categorías, al igual que los objetos que las forman, se relacionan por entidades que se pueden comprender como flechas entre ellas, llamadas funtores. Estos se dividen en dos tipos, los covariantes y los contravariantes.

Existe un funtor covariante F de una categoría C a otra categoría D cuando se pueden crear dos tipos de aplicaciones, una entre las colecciones de objetos y otra entre las colecciones de flechas, de tal manera que se respeten las propiedades de la composición y los morfismos unidad. Así, un funtor F:C→D, asocia a cada objeto X en C, un objeto F(X) en D, y a cada flecha f:A→B de C, una flecha F(f):F(A)F(B) de D. Además, se debe de cumplir que $F(1_X)=1_{F(X)}$ y F(g°f)=F(g)°F(f). Cuando el funtor es contravariante, lo que cambia es el sentido de las flechas, es decir, si f:AB en C, entonces F(f) en D sería una flecha F(f):F(B)→F(A). También, en un funtor contravariante cambia el comportamiento de las composiciones, pues F(g°f)=F(f)°F(g).

Si tomamos una categoría cualquiera C y cambiamos la dirección de cada una de sus flechas, entonces se obtiene lo que se llama la categoría opuesta de C la cual se denota como C^{op}. Este acto de invertir las flechas de C, es un ejemplo de funtor contravariante $F:C\to C^{op}$, el cual satisface F(X)=X para todo objeto X de C, y F(f):B→A si f:A→B. Una propiedad de las categorías opuestas es que los conceptos de monomorfismo y epimorfismo son duales, es decir, f es un monomorfimo en C si y sólo si es un epimorfismo en C^{op}.

Un ejemplo trivial de funtor F, es aquel que va de una categoría en ella misma, F:C→C, y asigna a cada objeto, un objeto X fijo de C, y a todo morfismo f, la identidad 1_X.

Otro tipo de funtores muy utilizado son los funtores de olvido. Con ellos se pueden describir importantes construcciones matemáticas como los grupos libres o los espacios vectoriales generados. Un funtor de olvido toma objetos de una categoría y los desliga de algunas de sus propiedades, por ejemplo, un grupo G es un conjunto con una operación binaria de ciertas condiciones, si privamos a G de esta operación, es decir, si se olvida mencionar que G tiene una operación binaria, G es solo un conjunto. En cuanto a los morfismos entre grupos, todos ellos son funciones entre los conjuntos subyacentes. Esta asociación determina un funtor de olvido U:Grp→Sets. De forma similar, se pueden definir otros funtores de olvido U:Rng→Sets, U:Pos→Sets, U:Vect→Sets y U:Top→Sets.

Considere el funtor de olvido U:Top→Sets, se quiere un funtor F:Sets→Top que a cada conjunto le asigne un espacio topológico. Para definir F se debe de pensar en construir un espacio topológico a partir de un conjunto cualquiera X, de tal manera que cualquier función entre conjuntos se convierta en una aplicación continua por la acción de F. Esto se puede resolver, asignándole a cada conjunto X la topología formada por todos los posibles subconjuntos de X. Note que en este caso, si X es un conjunto, el resultado de U(F(X)) es de nuevo el conjunto X, sin embargo, si Y es un espacio topológico, F(U(Y)) no es necesariamente un espacio topológico igual a Y, pues la topología de F(U(Y)) es mayor a la de Y.

Otro funtor topológico es F: Pos→Top, el cual transforma cualquier conjunto ordenado X en un espacio topológico. Este funtor le asigna a X la topología dada por la propiedad: W es un abierto de X si siempre que p esté en W y q sea mayor que p, según el orden de X, entonces q también está en W.

Los funtores pueden aparecer en contextos menos matemáticos, como es el caso cuando analizamos las posturas de una persona para construir una categoría. Esto se puede hacer de la siguiente manera: cada posible postura se considera un objeto de la categoría y existe una flecha de una postura A a otra B por cada forma de mover el cuerpo para llevarlo de la postura A a la postura B. Así, diferentes maneras de llegar a la misma postura representan diferentes flechas. También, podríamos decir que entre dos posturas hay una flecha si existe un video que inicie con una y termine en la otra.

Para dos personas diferentes, las categorías de movimientos asociadas a cada una, en general, serían diferentes, ya que la flexibilidad podría diferir entre ellas.

Entre estas categorías surgen varios funtores que permiten una clara representación gráfica. Un ejemplo de estos funtores está dado por la imitación de los movimientos de una persona por otra persona. La acción del funtor imitación sería: a cada postura copia la misma postura y cada transición de postura se haría de la misma manera por parte de la otra. También podemos pensar en un funtor de imitación en espejo, con el cual cada movimiento en una dirección es imitado en la dirección opuesta. Un tercer ejemplo, es el funtor de no hacer nada, donde cada postura es correspondida por la misma postura estática, y cada cambio de postura es asignado a la acción de quedarse estático en la misma postura. El funtor de imitación y el funtor de imitación en espejo están representados en la figura 4.

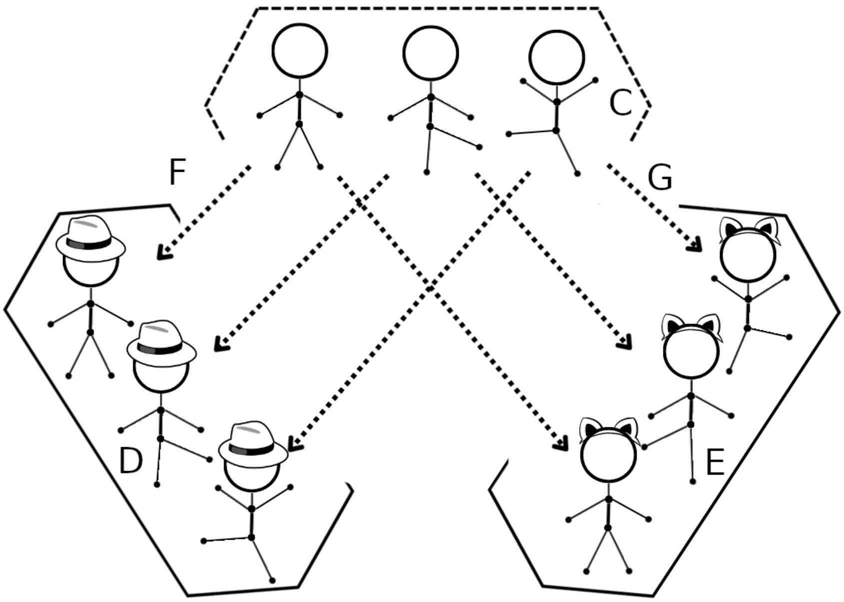

Figura 4. Se representan tres distintas categorías de posturas C, D y E. De C a D está el funtor F de imitación, donde cada movimiento se asocia a la misma postura. De C a E, las líneas punteadas indican el funtor de imitación en espejo.

Transformaciones naturales

Las transformaciones naturales en teoría de categorías son flechas entre funtores de tal manera que, los funtores entre dos categorías forman una categoría. En detalle, se definen de la siguiente manera: si C y D son dos categorías y F:C→D y G:C→D dos funtores entre ellas, una transformación natural del funtor F al funtor G, es una colección de flechas de la categoría D de la forma $_X$:F(X)→G(X), una por cada objeto X en C. Además, estas flechas deben de satisfacer por cada flecha f:A→B de C la condición de naturalidad α_B°F(f)=G(f)°α_A. La figura 5 ilustra esta igualdad en un diagrama.

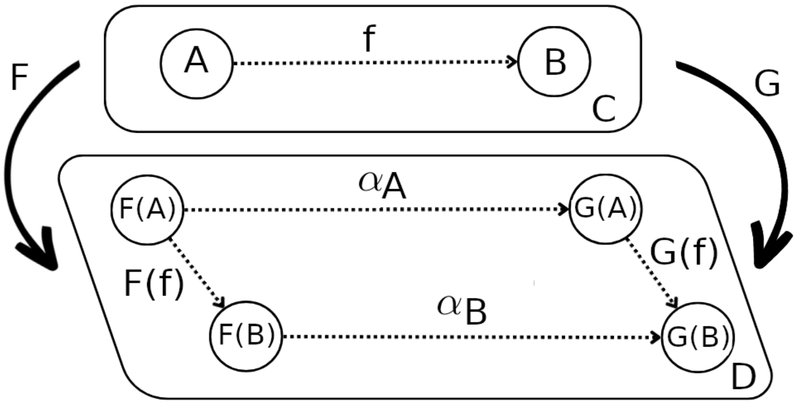

Figura 5. F y G son dos funtores que van de la categoría C a la D, representa una transformación natural de F a G, la cual genera el diagrama mostrado cuando se le aplica a una flecha $f{:}A \rightarrow B$ y que además satisface $\alpha_B \circ F(f)=G(f) \circ \alpha_A$.

Para representar gráficamente una transformación natural, retomemos el ejemplo de la categoría de las posturas de las personas. Pensemos en A y B dos personas, y en sus categorías de posturas P_A y P_B. Los funtores de P_A hacia P_B, representan los diferentes tipos de imitaciones o seguimientos que hace la persona B de las posturas de A. De esta manera, una transformación natural , entre dos funtores o seguimientos de B de las posturas de A, se puede ver como una coreografía de dos copias de la persona B al compás de los movimientos de A, como se puede apreciar en la figura 6.

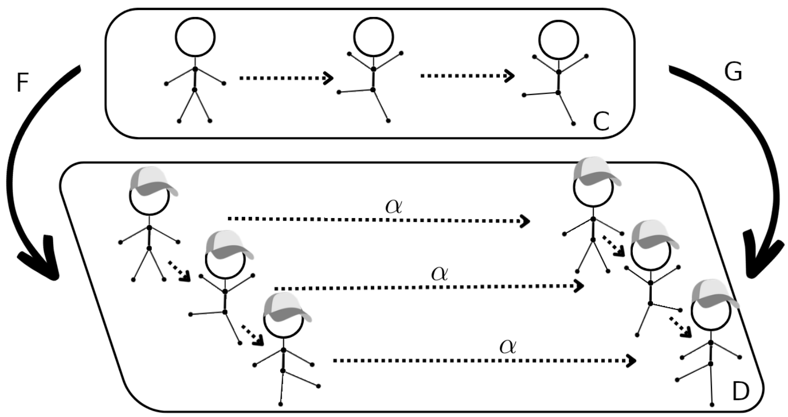

Figura 6. Representación gráfica con las categorías de posturas de personas, de una transformación natural entre dos funtores F y G, como una coreografía entre dos copias de la misma persona que guían sus movimientos con respecto a otra.

Lema de Yoneda

MacLane (1998) presenta al lema de Yoneda como una propiedad importante en el estudio de los funtores que llegan a la categoría de los conjuntos. Su enunciado dice que para cualquier funtor de la forma F:C→Sets y cualquier objeto X de la categoría C, va a existir una relación uno a uno entre todas las posibles transformaciones naturales del funtor Hom(X,-) al funtor F, y los elementos del conjunto F(X). El funtor Hom(X,-), al igual que F, va de la categoría C a la categoría Sets, y funciona de la siguiente manera: a cada objeto Y de C le asigna el conjunto de todas los morfismos en C que salen de X y llegan a Y, el cual se escribe Hom(X,Y). Además, la relación entre los funtores F y Hom(X,-) es natural, es decir, se conserva a través de cualquier morfismo f:X→Y. En otras palabras, el lema Yoneda dice que los elementos de F(X) codifican las transformaciones naturales entre Hom(X,-) y F.

Para una representación del lema de Yoneda, pensemos en una persona A y su categoría de posturas C. Un funtor del tipo F:CSets puede ser uno que a cada postura le asigne un conjunto de números que codifican algunos puntos importantes de las posturas, como las posiciones de los brazos o piernas. Es claro que la complejidad del funtor dependerá de qué tan detallada queremos nuestra descripción de las posturas. Por ejemplo, a cada postura se le pueden asignar cuatro secuencias (códigos) de tres cifras con los dígitos 0 y 1, de tal manera que los códigos asociados a una postura se lean de izquierda a derecha así: primera cifra: 1 se refiere a un brazo, 0 a una pierna; segunda cifra: 1 indica si es derecha, 0 si es izquierda; tercera cifra: 1 si está hacia arriba, 0 si no. Si fijamos una postura X, para cualquier otra postura Y de la persona, el conjunto $Hom_X(Y)$=Hom(X,Y) son todos los movimientos posibles que puede hacer la persona para pasar de la postura X a la Y.

Ahora, una transformación natural de Hom_X a F es una correspondencia entre los movimientos de X a Y, con los códigos de la postura Y, para cualquier Y. En particular, si Y=X y se toma el movimiento constante de X a X, denotado 1_X, entonces corresponde 1_X con un código de X, es decir, un elemento x de F(X).

Por otro lado, un código x de la postura X, se refiere a cómo se encuentra una parte del cuerpo de la persona. Cuando sucede un movimiento f de X a Y, si nos concentramos en la parte descrita por el código x, este pasa a ser bajo f, el código F(f)(x) en F(Y), es decir, el código de la parte del cuerpo que representa x pero con el valor de la postura Y, lo cual es una transformación natural de Hom_X a F. En resumen, en el caso de las categorías de posturas, el lema de Yoneda nos dice que los números de una codificación F de una postura X, representan todas las posibles imitaciones que puede hacer el funtor codificador F del funtor de movimientos Hom_X. La figura 7 muestra la correspondencia del lema de Yoneda en este contexto.

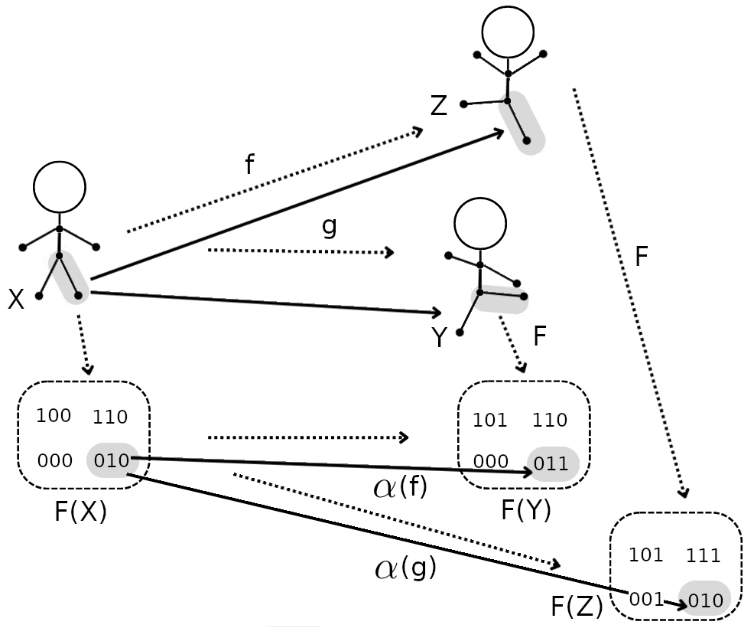

Figura 7. Representación gráfica del lema de Yoneda. Se usan dos variaciones Y y Z de posturas de una persona a partir de una postura fija X. El funtor F asigna a cada postura el conjunto de códigos. La correspondencia expuesta en el lema de Yoneda dice que cada código en F(X) de la postura base X tiene un único seguimiento a lo largo de los cambios de postura, dado por una única transformación natural entre Hom_X y F.

Topos elementales

Más allá del conocido universo de los conjuntos, donde la matemática clásica toma lugar, se encuentran categorías cuyas estructuras llevan diferentes tipos de lógicas. Algunas veces, estas estructuras son lo suficientemente robustas para ser consideradas universos matemáticos por sí mismas, es decir, en ellas se pueden interpretar axiomas matemáticos y reglas de deducción que permitan demostrar teoremas, todo esto a partir de los objetos y flechas que pueblan la categoría. A este tipo de categorías se les llama topos elementales (Johnstone 2002).

La palabra topos, de origen griego y que significa lugar, es elegida por Alexander Grothendieck al inicio de la década de los sesenta cuando usa este concepto como base de la teoría de cohomología etale, desarrollada por él mismo en (Grothendieck & Verdier 2006).

Marquis & Reyes (2012) indican que en su tesis, Lawvere ofrece una versión categórica de teorías algebraicas. También, sugiere que la categoría de categorías podría tomarse como fundamento para las matemáticas y que los conjuntos podrían ser analizados en una forma categórica. Por lo tanto, en los años siguientes, Lawvere trató de extender su análisis y creó una primera versión categórica de teorías de primer orden bajo el nombre de teorías elementales. Luego, en 1969, en colaboración con Myles Tierney, Lawvere introdujo la noción de topos elemental, haciendo explícita la conexión entre la lógica de orden superior y la teorías de tipos.

Los topos elementales fueron definidos con la idea de establecer condiciones mínimas para hacer posible la construcción de toda la maquinaria lógica matemática, tomando como punto de partida el concepto más especializado de topos presentado por Grothendieck, los cuales aparecen naturalmente en el estudio de fibrados de espacios topológicos (Grothendieck & Verdier 2006). Esto último, sugiere una relación en términos de fundación de la matemática entre las propiedades homotópicas de un espacio y sus propiedades como topos elemental.

Funtores de subobjetos

En aspectos más técnicos, el concepto más importante en teoría de categorías utilizado en la construcción de topos elementales es el funtor de subobjetos. Este funtor contravariante y cuya categoría de llegada es Sets, se puede ver como una generalización del funtor asociado al conjunto de partes, el cual asigna a cada conjunto, el conjunto de todos sus subconjuntos.

Así, el funtor de subobjetos, a cada objeto de una categoría, asocia el conjunto de todos los monomorfismos que llegan a él, eligiendo un solo representante cuando los monomorfismos tienen objetos de salida isomorfos. Cuando esto se realiza sobre la categoría Sets, obtenemos el funtor de partes.

El funtor de subobjetos posee una característica importante, es representable. Para ilustrar esto, pasemos al contexto de Sets. En Sets el conjunto de partes de un conjunto tiene exactamente la misma cantidad de elementos que el conjunto de todas las funciones que salen del conjunto y llegan al conjunto formado por los dos elementos: falso y verdad.

De esta forma, para describir a los subconjuntos de un conjunto necesitaremos al conjunto {falso, verdad} y un elemento particular de él, *verdad*. En efecto, dada cualquier función desde nuestro conjunto hasta {falso, verdad}, basta ver quiénes son asignados a verdad, para identificar a un único subconjunto, como se muestra en la figura 8. En un contexto más general, la calidad de representable del funtor de subobjetos se refiere a la capacidad de poderlo describir a partir de un conjunto fijo de subobjetos, llamado valores de verdad, y un elemento distinguible en él, llamado *verdad*.

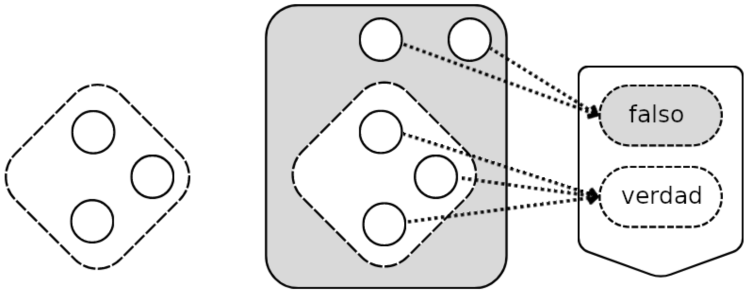

Figura 8. Al medio se tiene un conjunto de cinco elementos, del cual se distingue un subconjunto de tres elementos, representado a la izquierda. A la derecha se tiene el conjunto de valores de verdad, el cual representa los estados de pertenencia de cada elemento del conjunto con respecto al subconjunto señalado. Las flechas punteadas representan la función que asigna a cada elemento del conjunto su estado de verdad: el elemento pertenece al subconjunto, se le asigna el valor de verdad, si no, se le asigna el valor falso.

Prouté (2010) define los topos elementales como categorías donde todos los límites finitos existen y donde para cualquier objeto, el funtor que asigna a un objeto arbitrario el conjunto de subobjetos del producto cartesiano de él con el objeto inicial, es un funtor representable.

Lógica en topos elementales

En un topos elemental la existencia de límites implica posibilidad de trabajar con productos fibrados (pullbacks) y la existencia de un objeto terminal 1, el cual tiene la característica de no modificar a un objeto cuando se hace el producto cartesiano con él. Los productos fibrados se pueden ver como una generalización categórica del producto cartesiano de conjuntos, y además, describen el producto de esquemas en geometría algebraica.

La segunda condición de un topos elemental dice que el funtor de subobjetos es representable, pues es el mismo funtor que asigna a cada objeto el conjunto de subobjetos del producto cartesiano de él con 1. De este funtor en particular se obtiene el conjunto de valores de verdad y el elemento verdad de su lógica interna.

Veamos un caso de un topos con más de dos valores de verdad. En la categoría de conjuntos, un elemento solo puede tener dos estados con respecto a un conjunto dado, no pertenece (falso) o pertenece al conjunto (verdad). Cuando cambiamos a la categoría de grafos la situación es ligeramente diferente. Recuerde que un grafo dirigido está formado por nodos y aristas dirigidas o flechas, las cuales van de un nodo a otro. Los diferentes estados de verdad para el topos formado por los grafos y aplicaciones de grafos, se obtienen al considerar las diferentes situaciones que puede tener una flecha con respecto a un grafo dado.

Sea A un grafo y B un subgrafo cualquiera de él. Para una flecha de A tratemos de responder a la pregunta ¿pertenece la flecha al subgrafo B? A diferencia de la categoría de los conjuntos, acá estamos en una situación donde aparecen diferentes estados entre lo que se puede considerar como verdadero y como falso. De hecho, las diferentes situaciones son: (1) la flecha no pertenece completamente al subgrado (falso), (2) solo su punto de partida pertenece al subgrafo, (3) solo su punto de llegado pertenece al subgrafo, (4) su punto de partida y llegada pertenecen al subgrafo, pero no su flecha, y (5) toda la flecha pertenece al subgrado (verdad). En la figura 9 se hace una representación de los cinco estados de una flecha con respecto a un subgrafo.

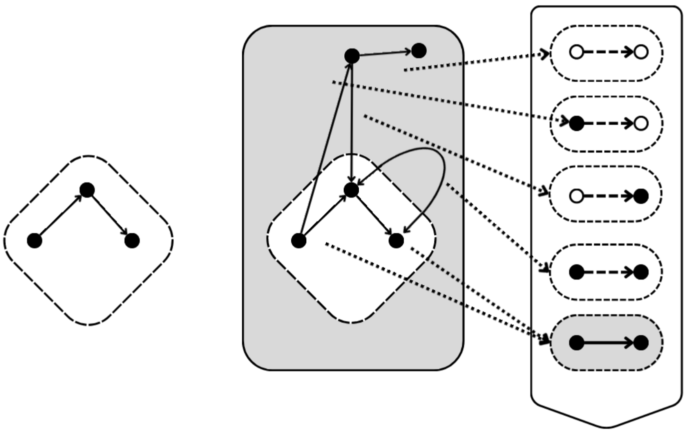

Figura 9. En la caja de en medio se representa un grafo con cinco nodos y seis flechas. En él se distingue un subgrafo de tres nodos y dos flechas, representado en la primera caja. A la derecha se ubica el conjunto de estados de verdad, donde cada uno de sus elementos representa el estado de cada flecha del grafo con respecto al subgrado. Las flechas punteadas representan la función que asigna a cada flecha del grafo su estado en el conjunto de estados de verdad.

De esta forma, con el topos de grafos obtendremos una lógica donde se tendrían cinco estados de verdad, de los cuales tres son intermedios entre el falso y verdadero. En la teoría de topos, se pueden construir topos con cantidades arbitrarias de estados de verdad entre falso y verdadero.

Prouté (2010) da una clara analogía para comprender el desarrollo de la lógica interna en un topos elemental. Las flechas que describen predicados y conectores lógicos pueden ser pensados como el lenguaje de máquina de una computadora. Para poder manipular todas estas flechas se necesita un lenguaje de orden superior, el cual es el lenguaje de Benabou-Mitchell o lenguaje interno (este incluye cuantificadores existenciales y universales). Este proceso permite describir objetos en un topos como lo hacemos en el universo de los conjuntos, lo cual se puede entender como el aspecto sintáctico de la teoría. Con respecto al aspecto semántico, se recurre a la semántica de Kripke-Joyal. Esta es la manera en la cual la verdad de los predicados en la lógica interna de un topos es interpretada como propiedades de sus flechas, permitiendo crear modelos con diferentes tipos de topos elementales de lógicas no-clásicas, aunque la metalógica empleada al manipularlos sí es clásica.

En una exploración más profunda de las propiedades de los topos elementales se podría plantear la pregunta sobre el ¿cuál es el grado de similitud entre la lógica matemática ordinaria y la lógica en un topos?, por ejemplo, uno se podría preguntar hasta qué punto el principio del tercero excluido se satisface en un topos, o también podríamos preguntarnos lo mismo con el axioma de elección (Prouté 2010). En el análisis lógico de un topos, cada una de estas cuestiones es abordada desde dos tipos diferentes de enfoques, una con respecto a un lenguaje interno y otra con respecto a un lenguaje externo de un topos, lo cual se puede ver como un preámbulo a la complejidad y vastedad de este reciente campo de las matemáticas. La persona interesada en continuar su lectura sobre este apasionante tema puede ver en (Landry 2017) un detallado catálogo de aplicaciones de la teoría de categorías.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad de Costa Rica a través de la Vicerrectoría de Investigación. Específicamente, el primer autor es financiado por la Escuela de Matemática, y el segundo autor es financiado por la Escuela de Matemática a través del CIMPA, mediante el proyecto 821-C1-010.

Los autores además, agradecen a la Escuela de Filosofía, por la invitación a participar en el I Coloquio de Lógica, Epistemología y Metodología, evento en el que se gesta este trabajo. Especial agradecimiento al Dr. Lorenzo Boccafogli.

Referencias

Bénabou, Jean. [Ideas in Sciences]. 2014. «La place de la théorie des catégories en mathématiques». Video de YouTube. https://youtu.be/oHdBbFNSmWk.

Eilenberg, Samuel & MacLane, Saunders. 1945. «General Theory of Natural Equivalences». *Transactions of the American Mathematical Society* 58, no. 2: 231–294. https://doi.org/10.2307/1990284

Grothendieck, Alexander & Verdier, Jean-Louis. 2006. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de géométrie algébrique du bois-marie 1963-1964 (SG 4): Tome 1. Lecture Notes in Mathematics*. Heidelberg: Springer Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0081551

James, I. M. 1999. *History of topology.* Amsterdam: North Holland. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-82375-5.X5000-7

Johnstone, Peter. T. 2002. *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*: Volume 1. Oxford: Clarendon Press. ISBN:9780198534259.

Landry, Elaine. 2017. *Categories for the Working Philosopher*. Oxford: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780198748991.001.0001.

MacLane, Saunders. 1998. *Categories for the working mathematician*, 2 ed. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9839-7

Marquis, Jean- Pierre. & Reyes, Gonzalo. 2012. «History of Categorical Logic: 1963-1977». En *Handbook of the History of Logic*. Amsterdam: North Holland. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-51621-3.50010-4.

Prouté, Alain. 2010. *Introduction à la logique catégorique*. París: IMJ-Université Paris 7. http://163.172.10.123:8080/cours_2010.pdf

Jesús E. Sánchez-Guevara (jesus.sanchez_g@ucr.ac.cr) Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. https://orcid.org/0000-0001-8993-1538

Ronald A. Zúñiga-Rojas (ronald.zunigarojas@ucr.ac.cr) Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. https://orcid.org/0000-0003-3402-2526

Recibido: 29 de setiembre, 2023.
Aprobado: 6 de octubre, 2023.