Ariel Jaslin Jiménez

El estatuto modal de los objetos matemáticos

Resumen: *El artículo discute diversas posturas en lo relativo a la ontología y la epistemología modal con el objetivo de sentar las bases de una reflexión de los objetos matemáticos, sobre todo fijada en la construcción de conjuntos y de estructuras matemáticas, así como poniendo una atención particular al estatuto modal del infinito matemático. Todo esto para mostrar que, en el ámbito del conocimiento matemático, también caben disquisiciones sobre la modalidad de las proposiciones, y cómo herramientas como la lógica modal puede arrojar luz a problemas de índole ontológica en la filosofía de las matemáticas.*

Palabras claves: *modalidad, infinito, estructura, construcción, conjunto.*

Abstract: *The article discusses various positions regarding modal ontology and epistemology with the aim of laying the groundwork for a reflection on mathematical objects, particularly focusing on the construction of sets and mathematical structures, while paying particular attention to the modal status of mathematical infinity. All of this is intended to demonstrate that within the realm of mathematical knowledge, there is also room for discussions on the modality of propositions, and how tools like modal logic can shed light on ontological issues in the philosophy of mathematics.*

Keywords: *modality, infinite, structure, construction, set.*

La matemática siempre ha sido meritoria de ser catalogada como una ciencia fructífera, y ello sin atender demasiado a una o varias épocas específicas, ya que, como un conocedor de la historia de las ciencias puede constatar, ella parece haberse situado, en cada momento del desarrollo científico, como la más apodíctica de todas las ciencias. Mas, atendiendo detenidamente a su desarrollo histórico, debemos señalar que, además de haberles reportado resultados y herramientas relevantes a las demás ciencias, sobre todo desde el siglo XVI hasta nuestros días, parece que sus verdades ya descubiertas (o construidas) sólo se agregan al acervo y no son remplazadas por las nuevas, ni por las que se están por descubrir[1]. A saber, el estado de permanencia de las doctrinas matemáticas nos hace sospechar que las realidades sobre las que tratan son, si no especiales, cuando menos diferentes a las que tratan las ciencias naturales o humanas. Sospecha que nos llevará a la pretensión de distinguir los objetos matemáticos de los demás objetos[2], lo cual concierne a una pesquisa de tipo ontológico sobre el estatuto de estos objetos. La pesquisa no tomará, sin embargo, un proyecto ontológico en toda su extensión, sino sólo una inspirado por la permanencia en cuanto que cualidad del objeto matemático en el conjunto del saber científico; esta cualidad será el punto de partida y su consideración, bien fundada o no, nos lleva a tomar partido por reflexiones en torno a la modalidad de los objetos matemáticos.

Ahora bien, justificar el discurso sobre lo modal con base en la aserción de que el conocimiento matemático parece alcanzar tesis permanentes, o sempiternas, *prima facie* es comprometerse con una concepción platónica. Esto no tiene por qué ser necesariamente así, y por eso decimos que lo que hay es sospecha cuando se afirma la cualidad de permanencia, i.e. una primera vista nos revela que las doctrinas matemáticas versan sobre entidades sempiternas, no cambiantes, pero esto sólo es superficial; habrá que inmiscuirse para llegar a desarrollar una postura seria. Otra razón, derivada de la primera, para abocarse por la modalidad, y no por un examen ontológico más amplio, es que esta categoría expresa muy bien ciertas propiedades que el objeto matemático aparenta poseer por antonomasia, tales como la actualidad, la necesidad, la incorruptibilidad, etc. Todas propiedades modales o que expresan la modalidad, i.e. el tipo o de proposición o ente del que se trata. Es útil la categoría de lo modal para denotar lo que puede o no hacer distinto al objeto matemático, y eso es lo que justifica su interés en cuanto que materia central de la presente pesquisa.

A continuación, se expone el orden en el que dispongo la investigación. A saber, un orden expositivo al uso nos exige explorar las diversas polémicas metafísicas en cuanto al estatuto modal de los objetos en general; polémicas en las que se sitúan, grosso modo, dos posturas importantes: actualismo y posibilismo[3]. Un recorrido a través de los debates de estas corrientes dará luz acerca de las principales cuestiones a tomar en cuenta antes de llegar a hacer un abordaje específico a los objetos matemáticos. Este enfoque se tornará hacia las matemáticas desde el actualismo y el posibilismo respectivamente, permitiendo elaborar argumentos sobre diferentes objetos según qué modalidad se trate; a saber, tópicos como las estructuras matemáticas, la formación o construcción de los *abstracta* matemáticos, el estatuto modal del infinito, la constructibilidad de los objetos, etc., serán instancias que demuestren cómo de relevantes son las consideraciones modales en el saber matemático.

La pesquisa queda, entonces, confeccionada del siguiente modo:

1. Metafísica de la modalidad.
   - 1.1 Actualismo. Un canon sobre los *realia*.
   - 1.2 Potencialismo. Formas de existencia.
2. El estatuto modal de los entes matemáticos.
   - 2.1 Formación de conjuntos.
   - 2.2 Construcción y Estructuras.
   - 2.3 Infinito ¿potencial o actual?
3. Conclusiones.

1. Metafísica de la modalidad

El proyecto de construir una ontología conlleva desarrollar una teoría general de los objetos que disponga de un acervo taxonómico de todo cuanto hay. Esto implica que la ontología está comprometida, primeramente, con la elaboración del concepto de objeto. Cualesquiera doctrinas con compromisos ontológicos contienen una concepción específica sobre el tipo de objeto del que tratan. Una manera, común a toda la tradición filosófica, de tipificar los objetos sobre los que discurre una ontología involucra reflexiones de carácter modal.

La modalidad entiéndase de dos modos: la modalidad del objeto y la modalidad de la proposición. La primera implica tomar en cuenta cuestiones como la contingencia, necesidad, actualidad, posibilidad y existencia de los objetos, sobre las cuales se construye una teoría general de los objetos, sean reales, imaginarios, no existentes, etc. La segunda engloba los modos en los que una proposición puede ser tomada atendiendo a su valor de verdad; a saber, se dice de una proposición si es necesaria o posible en virtud de la construcción semántica, según la cual podemos evaluar muchas formas que tiene una verdad de darse (o de no darse). Existen otras modalidades de las proposiciones, llamadas modalidades lógicas, aparte de la alética (la necesidad y la posibilidad), tales como la modalidad epistémica, la temporal, la deóntica, e incluso la relativa a la demostrabilidad (*provability*), etc.; sin embargo, acá nos ocupa la modalidad alética como canon de las demás, y sobre la cual hay una mayor carga ontológica. Dicho lo último, cabe sostener que toda consideración modal del primer modo conlleva una del segundo modo; asimismo, la elección de una lógica modal sobre otra implica cierto compromiso con una teoría de los objetos actuales y posibles. Tómese esto como una hipótesis de trabajo.

Así emerge el objeto central del presente capítulo: dado que una de las formas principales de desarrollar el discurso ontológico es por medio de la modalidad, y dado que el trayecto de las consideraciones de esta clase desemboca en una lógica modal, es menester definir las modalidades que determinan una ontología general; esto conlleva los cinco conceptos mencionados anteriormente: contingencia, necesidad, actualidad, posibilidad y existencia, los cuales, por economía del pensamiento, redúzcanse a posibilidad y actualidad, o mejor dicho, objetos posibles y objetos actuales. Empero, cuestiones económicas motivan esta reducción, pero tal no se limita a ellas; y es que las categorías mentadas caben perfectamente en estas dos porque aquellas son definidas en virtud de la contraposición entre estas. A saber, contingencia, existencia y necesidad pueden involucrar los *possibilia* o no.

Empero, se tratará del actualismo y del posibilismo. El primer lugar lo ostenta el actualismo, habida cuenta de su ortodoxia con respecto a teoría de la existencia, o sea, su pretensión de construir un canon que limite el dominio de los *realia*. El posibilismo viene a proporcionar una apertura a este canon, así como un suelo base desde el cual construir muchas teorías formales, y permite reflexionar, también, sobre la categoría de existencia.

La introducción de las categorías medulares de cada corriente permitirá el desarrollo de consideraciones fructíferas enfocadas hacia los objetos matemáticos en el capítulo 2, y nos brindará las tesis base para hablar de los *abstracta* y su realidad, así como la necesaria para explorar el papel de las categorías modales en el saber matemático. Pero no nos adelantemos.

1.1. Actualismo. Un canon sobre los *realia*

Como recién se señaló, al actualismo le corresponde una cierta clase de ortodoxia que se relaciona con una intuición bastante extendida en el discurso cotidiano y científico. Dicha intuición es una concepción preteórica de la categoría de existencia. A saber, pensar en términos actualistas involucra defender una construcción de esta categoría a partir de una limitación impuesta al dominio general de los entes. En este sentido, existe sólo lo que es actual, lo que *es* en todo momento al caso, conativamente y, en algunas ocasiones, también fácticamente. Tenemos, no obstante, definiciones alternativas de lo que significa la actualidad de los entes si centramos nuestra atención en la cuestión de la existencia, i.e. si lo existente es lo que se da en el mundo, o si lo existente es todo objeto del cual pueda predicarse algo, o si es sólo lo concreto, o si lo no concreto (lo abstracto) también existe, o si, en última instancia, existen los objetos posibles. Esto último es lo que quiere evitar aceptar el actualismo, habida cuenta de que rechaza una ontología donde los objetos posibles tengan lugar; objetos posibles que a partir de ahora referiré con la locución latina *possibilia*, y que tendrán su exposición en la segunda sección del presente capítulo. Empero, la actualidad de los objetos en alguna medida los sitúa en un privilegio en cuanto objetos reales, y ella constituye la propiedad más canónica de estos, toda vez que, aun aceptando *possibilia* en nuestra ontología, no hay entes más reales que aquellos que son actuales.

La estructura de la presente sección, dedicada al actualismo, estará dispuesta de tal forma que, primero, se definirán las diferentes nociones de actualismo; segundo, se presentará el reto que todas estas comparten y cómo cada una lo supera, i.e. el problema de los *possibilia*; por último, explicaremos las implicaciones que esta polisemia del actualismo tiene sobre la lógica modal.

Ahora bien, lo primero nos será más claro si presentamos cinco principales tesis que, según cómo se combinen, o bien pueden darnos diferentes nociones del actualismo, o bien pueden llevarnos al posibilismo ($=_{df}$ una postura comprometida con los *possibilia*). Estas tesis son como sigue[4]:

(1) Todo objeto es un objeto actualmente existente. *Aliter*: :$\forall x E!x$

(2) Todo objeto es un objeto actual, esto es, o bien es un objeto actual existente o bien es un objeto actual no existente. *Aliter*: $\forall x(A!x \wedge [Ex \vee \neg Ex])$

(3) Todo objeto es un objeto existente, esto es, o bien es un objeto existente actual o bien es un objeto existente no actual. *Aliter*: $\forall x(Ex \wedge [A!x \vee \neg A!x])$

(4) Todo objeto que es actual es un objeto que existe. *Aliter*: $\forall x(A!x \supset Ex)$

(5) Todo objeto que existe es un objeto actual. *Aliter*: $\forall x(Ex \supset A!x)$

Las tesis **(1)**, **(2)** y **(5)** son indispensables para todo tipo de actualismo, mientras que **(3)** y **(4)** dan cabida para el posibilismo. La **(4)** por su cuenta muestra ser la más débil en términos ontológicos; o, deberíamos decir, más flexible, toda vez que ella, junto con la **(2)**, puede dar cabida a ontologías sobre objetos ficcionales. Cabe observar que es necesario tomar en cuenta la extensión del dominio del discurso que tomemos para el verbo «existir»; a saber, si tomamos por existentes objetos pertenecientes a un dominio amplio que incluye las cosas no actuales, o si pertenecen a un dominio acotado a las cosas actuales. La extensión más grande se denominará *existencialmente flexible* y a la otra *existencialmente inflexible*. Según qué extensión tomemos haremos una interpretación de cada uno de los enunciados de arriba.

El enunciado **(1)** interpretado bajo un dominio existencialmente flexible es insostenible, mientras que sólo bajo uno existencialmente inflexible es perfectamente aceptable. Esto es así toda vez que **(1)** reduce la teoría de los objetos a los que de facto se dan en el mundo, i.e. los actuales, los cuales encuentran en esto una condición necesaria y suficiente para la existencia; a saber, se define la existencia por medio de la actualidad, sin implicar la anterioridad de una sobre la otra. El enunciado **(2)** interpretado bajo un dominio existencialmente inflexible es completamente consistente, ya que sostiene que la actualidad es anterior ontológicamente a la existencia porque, habiendo actualidad, pueden darse objetos actuales no existentes, como los objetos ficcionales, por ejemplo. No es, sin embargo, interpretable bajo un dominio existencialmente flexible por la misma razón que **(1)**. El converso de **(2)** en cuanto a interpretabilidad es **(3)**. A saber, **(3)** es consistente con una interpretación bajo un dominio existencialmente flexible porque sostiene que existen objetos que o bien son actuales o no lo son, i.e. que, primero, no hay objetos no existentes ($\neg\exists x \neg Ex$), y, segundo, hay objetos no actuales ($\exists x \neg Ax$); expresado en los términos de arriba, la existencia es anterior a la actualidad. La inconsistencia en **(3)** de la interpretación bajo el otro dominio se infiere de lo dicho. Nótese, sin embargo, que **(4)** es compatible con **(1)** y **(3)** pero no con **(2)**; y **(5)** lo es con **(2)** pero no con **(3).** Por lo que de **(4)** no se sigue lo mismo que de **(3),** y de **(5)** no se sigue lo mismo que de **(2)**.

La conjunción de **(1)** y **(5)** lo denominamos actualismo simple. Sostener sólo **(2)** conlleva el actualismo residual, mientras que **(3)** y **(4)** son, conjuntamente y por separado, compatibles con el posibilismo. Todas estas posturas confrontan un problema que tiene que ver con nuestra aceptación natural de los *possibilia* y, por lo tanto, de **(3)** y **(4)** como verdades tan o más intuitivas que las que expresan los demás enunciados. Cómo dan cuenta las diferentes teorías actualistas de nuestra noción intuitiva de posibilidad, y del uso de demás conceptos modales como necesidad y contingencia, es el problema que nos ocupa aquí, y por medio del cual los actualismos se han desarrollado más fructíferamente, al intentar brindar correlatos a los sistemas lógicos modales, rehusando comprometerse con la ontología posibilista que a ellos subyace.

Si bien al principio se dijo que el actualismo es intuitivo a nuestro discurso (el lenguaje natural), el posibilismo lo es también; puesto que, mientras que una intuición sobre qué son los objetos existentes nos compele a considerar la categoría de la actualidad, al pensar esta categoría, es decir, al considerar los objetos de nuestra experiencia como objetos *dados*, nos aparece la incógnita sobre lo no dado, y más específicamente, lo que pudo haberse dado, pero falló en ello; esto es lo que se conoce como lo posible. Pero ahondaremos esto más adelante. Por lo pronto, lo que nos interesa es mostrar cómo esta cuestión interpela el discurso actualista, al ser el que encarna la intuición mencionada en primer lugar. A este respecto, el actualista tiene dos preguntas: ¿Podemos hablar de cosas que pudieron haber sido y pueden llegar a ser, dado que nuestro lenguaje sólo puede hablar con sentido de objetos actuales? y ¿Las cosas pudieron haber sido de otra manera? Las vías tomadas para responder a estas preguntas varían de autor en autor y de corriente en corriente, y tienen que ver con consideraciones sobre la contingencia, las esencias, la necesidad y la predicación de la existencia. Exponemos esto a continuación.

El actualismo simple será distinguido como una diatriba contra la posibilidad de, valga la redundancia, los *possibilia*. Estos son definidos como objetos no actuales pero posibles, esto es, objetos que pudieron haberse dado pero que, de facto, no se dan. Ahora bien, afirmar la existencia de estos *possibilia* no es decir simplemente que pudo haber habido alienígenas o gente que nunca existió; más bien, implica sostener que *hay*, de alguna manera, cosas que fallaron en existir pero que pudieron haberlo hecho. Comprometerse con estos objetos conlleva toda una semántica que da cuenta de las condiciones de verdad de nuestras intuiciones sobre la modalidad y es por ello que cabe ver cómo el actualismo niega las implicaciones de algunas de las afirmaciones que naturalmente serian coherentes en una ontología de los *possibilia*. El primer paso para negar estas implicaciones es examinando si puede haber una semántica de los mundos posibles y, segundo, verificar si, a partir de las condiciones de verdad de esta semántica, pueden proferirse aserciones modales. Supongamos la siguiente proposición **A** como una la tesis general del actualismo:

A. No hay nada que no sea actual.
Aliter: $\neg\exists x \neg A!x$

Ahora veamos generalmente los dos supuestos semánticos de las proposiciones modalizadas. A saber, simbolicemos «es necesario que p» como $\Box p$ y «es posible que p» como $\Diamond p$, y definamos las condiciones de verdad de cada uno:

(a) La proposición $\Box p$ es verdadera si y solo si p es el caso en todos los mundos posibles.

(b) La proposición $\Diamond p$ es verdadera si y solo si p es el caso en algún mundo posible.

A grandes rasgos, estas son las condiciones generales de verdad de toda lógica modal, y parece obligar a comprometernos con una semántica que, si bien da cuenta de nuestras expresiones modalizadas, nos lleva a aceptar los mundos posibles no actuales como existentes, lo que contradice **A**. A lo que los actualistas responden que los mundos posibles o bien pueden ser tomados como puntos de evaluación metafísicamente inocuos, esto es, que no contengan enunciados que prediquen existencia de los *possibilia*, o bien pueden tomarse como objetos actuales no concretos, i.e. abstractos, que cumplirían con su función semántica sin ningún problema.

Examinemos ahora las dificultades de aceptar enunciados modalizados por separado. Analicemos la extensión formal de un lenguaje de primer orden, transformando el enunciado «Hay alienígenas» o $\exists xAx$ a «es posible que haya alienígenas» o $\Diamond\exists xAx$. Ahora bien, el enunciado no modal, bajo una semántica tarskiana al uso, sería falso toda vez que no encontramos un x tal que Ax; mas, ¿Cómo tiene que entenderse el enunciado modal? Según las condiciones de verdad expuestas más arriba, se sigue lo siguiente:

(1) Hay un mundo posible w tal que ahí hay un x tal que es x en Ax.

Pero sabemos que los operadores se pueden conmutar, entonces nos queda:

(2) Hay un x y hay un mundo posible w tal que x es Ax en w.

Lo que formalizado se expresa:

(3) $\exists x\Diamond Ax$

Esto significa que $\Diamond\exists xAx$ implica $\exists x\Diamond Ax$. En otras palabras,

(4) Es posible que haya un x tal que x sea Ax

Implica

(5) Hay un x tal que es posible que x sea un Ax.

Esto es alarmante, porque, sosteniendo el actualismo que solo existen cosas actuales, **(5)** sostiene que hay un posible x que es alienígena; en este sentido **(5)** es incompatible con **A**. No obstante, **(4)** según cómo configuremos la semántica de los mundos posibles, puede ser válida para el actualista. Esto quiere decir que la lógica modal más simple, en la cual **(4)** implica **(5)**, sería incompatible con los supuestos modales del actualismo (para un recuento completo de la SQML, i.e. *Simplest quantified modal logic*, ver Menzel 2021).

En esta lógica existen dos fórmulas que, de primera mano, polemizan con el actualismo:

EN: $\forall x \Box \exists y(y=x)$.

FBC: $\Box \forall x \varphi \supset \forall x \Box \varphi$.

Por φ se entiende cualquier fórmula atómica de predicación n-aria. En **FBC**, intercambiando todos los «□» por «◇» tenemos la implicación de **(5)** por **(4)** que analizamos arriba. En **EN**, haciendo lo mismo, tenemos una formalización de la tesis posibilista. Existencia Necesaria (**EN**) y la Fórmula de Barcan Conversa[5] (**FBC**) son ambas problemáticas. Primero abordaremos **EN** para examinar qué problemas puede suponerle al actualismo. Introduzcamos el predicado E! para expresar la existencia actual; recordemos que el actualista simple no distingue entre existencia y actualidad, por lo que podemos formalizar **A** de la siguiente forma:

A*: $\forall x E!x$

Para el actualista, el hecho de que no hayan *possibilia* no es un accidente. No puede haber *possibilia*, habida cuenta de que, si aceptamos que pudiera haber, el hecho de que no haya débase simplemente a que fallaron en darse, y estaríamos incurriendo en tesis posibilistas. Por esto, es necesario que todo lo que existe sea actual, que no haya espacio posible para los *possibilia*. Esto se expresa como:

NA*: $\Box \forall x E!x$

Ahora bien, el problema con **EN** tiene que ver con la noción de contingencia. Los posibilistas sostienen lo siguiente:

C: $\exists x(\Box E!x \wedge \Box \neg \mathrm{E!x})$..

Esto es, que algo pudo haber existido actualmente o pudo no haber existido actualmente. El actualista simple está de acuerdo, de primera mano, con esto, y su única diatriba es que él no concibe lo que cae bajo $\Diamond \neg E!x$ como existente, mientras que el posibilista sí. Para aclarar más esto, definamos E! como sigue:

E!Def: $E! =_{df} \exists y(y=x)$

Esto nos da la equivalencia lógica de **E!Def** con el enunciado de existencia $\forall x \exists y(y=x)$, y por lo tanto, de este con **A***. También, bajo **E!Def**, **EN** (i.e. $\forall x \Box \exists y(y=x)$) es equivalente a:

EN!: $\forall x \Box E!x$

Dado esto, **EN** significa que todo existe necesariamente, y, por ello, no hay cosas que puedan fallar en existir ($\neg \exists x \Diamond \neg E!x$), de lo que se sigue que, contrario a **C**, no hay seres contingentes cuya existencia e inexistencia pueda ser igualmente posible. Esto pone al actualismo en un lugar crucial, ya que puede llevar a implicar que todo lo que existe, existe necesariamente. Esto va contra nuestras intuiciones más primitivas sobre conceptos modales, y veremos cómo los demás actualismos dan solución a esto.

Con **FBC** tenemos el inconveniente de la siguiente instancia:

FBCE!: $\Box \forall E!x \supset \forall x \Box E!x$

Si es tomada en términos actualistas, es decir, con **A***, y, por consiguiente, con **NA***, implica directamente **EN!**. Lo cual es polémico por las razones arriba mencionadas, además de que, como ya se mostró, la fórmula **FBC**, si hacemos la debida sustitución de operadores, es inconsistente con **A**.

La postura que resuelve esto de una forma naturalmente obvia es el actualismo «residual» (véase Menzel 2021). La elección de este adjetivo se debe a una distinción elaborada por esta postura que sostiene que, si bien los *possibilia* no son objetos propiamente dichos, dejan un rastro o un *residuo* metafísico. Aceptando **C**, i.e. que hay seres contingentes, los entes que fallan en existir se encuentran en el estado atenuado de no existencia, al cual nos podemos referir de maneras meramente indirectas, quizá alegóricas. De estos residuos podemos obtener información; por ejemplo, que no existen. Así, para todo *x* no actual en el lenguaje posibilista, existe un *x* en el lenguaje actualista que se entiende como un vestigio, y que, aun siendo actual de alguna manera, no tiene existencia propiamente dicha. En este sentido, el actualismo residual distingue actualidad y existencia, como se señaló anteriormente.

Ante la aserción «Pudo haber alienígenas», en vez de comprometerse con meros *possibilia*, este actualismo aboga por la distinción entre cosas contingentemente concretas, no concretas y cosas necesarias. Empero, hay cosas en el mundo que pudieron no haberse dado, como nosotros; por otro lado, existen cosas que no se dieron, pero que pudieron haberse dado, como los alienígenas, los cuales no son posibles, sino sólo entidades que fallaron en ser concretas. Estas son no concretas en nuestro mundo, y por ello «no son alienígenas» se puede afirmar, pero son concretas en algún otro mundo, por lo que se puede decir que son actuales, pero no concretos, en w_0 (el mundo actual), pero son concretos y actuales en algún *w*, sea w_1, o w_2, …, o w_n. Ahora bien, la forma que esta distinción tiene de resolver las implicaciones del actualismo (i.e. que todo lo que existe, existe necesariamente) consiste en decir que la razón por la que afirmamos que no puede haber cosas que pudieron haber sido alienígenas es que nos atenemos a la diferencia entre objetos concretos y no concretos; a saber, mientras que no hay ningún objeto concreto que pudo haber sido alienígena, hay algún objeto no concreto que no es un alienígena, pero pudo haberlo sido, esto es, que es concreto en algún mundo posible. Esto quiere decir que de «Pudo haber algo que haya sido un alienígena» ($\Diamond\exists xAx$) se siga que «Existe algo que pudo haber sido un alienígena» ($\exists x\Diamond Ax$) no supone para nosotros que ese algo sea concreto en este mundo, sino que se refiere a que algún *x* falló en ser concreto en este mundo, y ese *x* tiene la propiedad *Ax*. Con **EN**, y su transformación en **EN!**, sucede lo mismo. Afirmar que todo existe necesariamente implica que es necesario que para todo *x*, tal es actual en algún sentido, pero que no siempre es concreto en todos los mundos posible; por ejemplo, que Sócrates exista necesariamente sólo significa que tiene su categoría de objeto en todo mundo posible, pero no significa que sea un ser necesario, ya que un ser necesario no cambia su estado cuando hacemos el cambio entre mundos; en otras palabras, mientras que en w_0 Sócrates es concreto, en w_1 Sócrates puede no serlo; pero mientras que en w_0 el 2 no es concreto, en w_1 tampoco 2 es concreto ni puede serlo. De acuerdo con esto, Sócrates pudo haber fallado en ser concreto, por lo que modificamos la noción de contingencia, reemplazando la existencia actual (E!) por el predicado «ser concreto» (C!). Adicional a esto, introducimos la noción de ente necesario:

C*: $\exists x(\Diamond C!x \wedge \Diamond\neg C!x)$.

EntN: $\exists x(\Box C!x \vee \Box\neg C!x)$.

Aclaremos esto: **C*** significa que existe algún objeto que puede fallar en ser concreto en este mundo, pero que en algún mundo es concreto, mientras que **EntN** implica que hay algún objeto que, con independencia del mundo, es o concreto o no concreto; a saber, para todo w, sea w_1, w_2, w_3, …, w_n, x es concreto o no concreto en todos y cada uno de los *w*. Esta es la diferencia entre el alienígena y el : mientras el alienígena falla en ser concreto, el no falla en nada porque no es concreto ni puede serlo. Interpretado así, el actualismo residual rescata nuestras intuiciones modales; no obstante, se dice que este no constituye ninguna alternativa porque permite el uso indiferenciado de lógicas modales. Por lo que Menzel lo califica como sigue:

> El nuevo actualista mantiene, en efecto, un único sentido del ser; pero en lugar de la división del ser en dos modos —actualidad y no-actualidad contingente— el nuevo actualista sustituye la división de la actualidad en dos modos: concreción y no-concreción contingente. Es difícil no ver esto como una mera recalificación de la distinción posibilista. La mayoría de los

> actualistas clásicos considerarán, por tanto, que el nuevo actualismo tiene la forma del actualismo sin tener el contenido necesario para servir como una solución genuina al desafío posibilista. (Menzel 2021)

A nosotros, sin embargo, nos es útil la distinción de estos dos modos para aclarar cierta ontología que subyace a los objetos que componen a ciertas disciplinas, como la que nos ocupa en la presente pesquisa, i.e. las matemáticas. También el posibilismo nos ayudará a esto.

1.2. Posibilismo. Diversas formas de existencia

Ya presentamos diversos esbozos del posibilismo al colocarlo como el principal reto del actualismo. Dijimos que es la postura más compatible con las intuiciones que subyacen a enunciados como «Pudo haber alienígenas» o «Julio Cesar pudo no haber sido asesinado». Y es que el uso de los operadores modales «□» y «◇» encuentra su fundamento en el posibilismo en cuanto que una clase de realismo hacia los *possibilia*. Empero, ser posibilista, a grandes rasgos, es sostener que el dominio total de las cosas incluye tanto cosas posibles no actuales, como cosas actuales y cosas posibles actuales. Esto es, tomando el dominio universal de las cosas (si tal se puede tomar consistentemente), el dominio de las cosas actuales sólo constituye un subconjunto del dominio universal. A esto nos referíamos en la sección anterior con dominio existencialmente flexible, cuya presencia al interpretar ciertos enunciados modales nos lleva a las tesis posibilistas.

En general, el dominio al que pertenecen los *possibilia*, y el cual encuéntrese fuera de lo actual, suele denominarse el dominio, o conjunto, W de mundos posibles, que se compone de los mundos posibles particulares w, tales como w_1, w_2, w_3, …, w_n, sobre cuya esfera se cuantifica con las proposiciones $\Box p$ y $\Diamond p$. Las condiciones de esta cuantificación las expondremos, no sin antes explorar las diferentes tesis realistas sobre los objetos posibles. La primera de estas corresponde a David Lewis y se denomina La teoría de las contrapartes, basada en la idea de que el mundo actual, y todos los entes que son partes mereológicas suyas, tienen una contraparte en al menos algún o todos los mundos posibles. La segunda de estas tesis es el dimensionalismo modal, que sostiene que, más que ser dominios separados, los mundos posibles son dimensiones del universo, puntos, de la misma manera en que existen puntos en la totalidad espacio-temporal; esta tesis polemiza con la lewisiana. La tercera corresponde con las posturas meinongianas, las que, incluyendo a la de Alexius Meinong, consideran a los objetos posibles sin referencia a ningún marco sobre mundos posibles.

Lewis relativiza la categoría de actualidad. Define la actualidad como el dominio que nos incluye a nosotros; a saber, la totalidad circundante a un ente será el mundo actual para ese ente, y ella constituye todos los dominios materiales y temporales a los cuales el ente pertenece o puede llegar a pertenecer, tales como un cuarto, una casa, un vecindario, una provincia, un país, un continente, etc., una hora, un día, un mes, etc., esto es, la totalidad espacio-temporal máximamente considerada. Una cosa actual para mí lo es en virtud de nuestra copertenencia a la misma totalidad, mientras que una cosa posible pertenecería a una totalidad espacio-temporal análoga. En este sentido, la existencia es un concepto relativo, y concierne a la pertenencia mereológica a un dominio máximamente considerado. Esto quiere decir que el estatuto ontológico-modal de los mundos posibles es el mismo que el del mundo actual, y, en este sentido, todos los mundos son homólogos entre sí. Por esto, cabe señalar que los mundos posibles son *propio sensu* más concretos que abstractos, habida cuenta de que son totalidades espacio-temporales, cada una de las cuales tiene partes que están incomunicadas con cualesquiera que no coexistan actualmente con ellas. Los objetos abstractos que son necesarios en el sentido común del término, i.e. que son actualmente no concretos en todos y cada mundo posible, no son avalados por este autor. Si no hay objetos concretos no hay mundos posibles.

Con base en esto, se define a los *possibilia* como objetos que tienen cada una de sus partes en algún mundo posible; esto es lo que se denomina modalidad *de re*. Así, Lewis concibe que, así como los mundos posibles son homólogos entre sí y con el actual, y dado lo que implica la relación de pertenencia, cada objeto posible y actual tiene su homólogo, i.e. su contraparte, en cada mundo posible. Decir que yo podría haber tenido un sexto dedo en cada mano es decir que existe alguna contraparte mía en algún mundo posible que tiene polidactilia; este individuo es mi contraparte porque es parecido a mí en los suficientes respectos, o sea, que la relación que este individuo y yo sostenemos es de similitud, no de equivalencia o identidad. Esto tiene implicaciones problemáticas. A saber, o bien cada objeto actual necesariamente existe, porque tiene su contraparte en cada mundo posible, o bien algún objeto actual no es idéntico consigo mismo. Alguien puede señalar que no todos los objetos actuales necesitan tener su contraparte en algún mundo posible, a lo que se puede preguntar que, si todos los mundos, el actual y los posibles, son todos y cada uno homólogos entre sí, por qué sus partes no iban a tener todas y cada una un homólogo respectivo en todos los mundos; dicho de otro modo, ¿hasta qué punto afirmar la relaciones que sostienen totalidades entre sí no es afirmar las relaciones que sus partes constituyentes sostienen las unas con las otras? Además, se puede negar la segunda implicación, pero eso sería entrar en la polémica sobre qué propiedades hacen de una cosa susceptible de ser identificada con otra, y eso lo trataremos más adelante.

Existe otra consecuencia, relativa a la relación mundo-parte. Tomemos dos mundos posibles w_1 y w_2 como existentes. Para hacer eso necesitamos introducirlos a nuestro dominio discursivo D como partes de un subdominio de D, el cual es la totalidad mínima a la que ellos pertenecen; en otras palabras, el subdominio B $\in$ D tiene como únicas partes a w_1 y w_2. A continuación, tomemos una parte p_1 de w_1 y una parte p_2 de w_2, y supongamos a Fulano como la suma de p_1 y p_2. Ahora bien, es cierto que Fulano existe, considerando que pertenece a D, en el mismo sentido que w_1 y w_2 existen. Sin embargo, según la definición de los *possibilia* que se esgrimió más arriba, Fulano no es un objeto posible, aun existiendo en el mismo sentido que w_1 y w_2, pero es un objeto; más específicamente, Fulano es un objeto imposible. Pero no hay nada imposible acerca de Fulano más que la suma de sus partes, la cual es análoga a la suma de las partes de B, a saber, w_1 y w_2. ¿Implica esto que w_1 y w_2 son imposibles? Si la respuesta es afirmativa, entonces implica que la suma de todos los mundos posibles es imposible, toda vez que B es parte de ella, y ningún objeto posible es parte de uno imposible. Esto hace que el espacio lógico de los mundos posibles sea inadmisible. Esto lleva a que Lewis tenga que cambiar su definición, y afirmar que todo objeto posible puede tener diferentes partes en diferentes mundos posibles. Esto parece una victoria pírrica contra la paradoja, ya que sería interesante el ejemplo de algún *possibile* cuya composición sea transmundana.

Por otro lado, existe el dimensionalismo modal, cimentado en el supuesto de que existen dimensiones modales en el universo, en el sentido en que cada mundo posible es un punto modal en el mismo sentido en que los puntos físicos son definidos por los ejes de una totalidad compuesta por tres dimensiones espaciales y una temporal. Esta postura niega las contrapartes; en este sentido, decir que yo pudiera haber tenido polidactilia es decir que *yo mismo* existo en algún mundo posible y tengo polidactilia. Aquí la diferencia radica en que soy el mismo en el mundo actual y en ese mundo posible; no hay contrapartes. Otra diferencia crucial es que se evita concebir al objeto posible como mereológicamente parte de un mundo posible:

> De acuerdo con el dimensionalismo modal, de la misma manera que un objeto temporal o espacialmente persistente no es (presumiblemente) parte de los puntos o regiones espaciales o temporales en las cuales existe, un objeto modalmente persistente no es parte del mundo posible en el cual existe. (Yagisawa 2021)

Esto permite hablar en términos modales de objetos no concretos, toda vez que, si para Lewis un mundo posible tenía que ser una totalidad espacio-temporal y cada objeto posible, por pertenecer a ella es, mereológicamente, espacio-temporal; negando la pertenencia, *mereológico sensu*, podemos afirmar que un objeto posible, aun siendo parte de un mundo posible, puede ser no concreto.

Una vez rechazada la teoría de las contrapartes, surge en el dimensionalismo modal la preocupación sobre cómo el objeto posible permanece a través de las dimensiones modales. Es la pregunta básica por el modo en el que se da la existencia de los *possibilia*. Yagisawa señala:

> Una idea es imitar el enfoque 'endurantista' sobre la persistencia temporal y decir que un objeto posible persiste a través de numerosos mundos posibles al tener todas sus partes existiendo en cada uno de esos mundos. Otra idea es imitar el enfoque 'perdurantista' sobre la persistencia temporal y decir que un objeto posible persiste a través de numerosos mundos posibles al tener diferentes partes (etapas-de-mundo) en diferentes mundos posibles y ser el 'gusano' modal-dimensional compuesto de esos estados de mundo. Notemos que esto no hace al objeto mereológicamente parte de un mundo posible en el cual existe, sino que hace a cada una de las etapas-de-mundo del objeto partes de él mismo. (Yagisawa 2020)

Este enfoque perdurantista se puede entender atendiendo a un ejemplo. Del mismo modo que los océanos son partes espaciales de nuestro planeta, y así como el antropoceno es una parte temporal de su historia, poder haber sido un planeta inhabitable para la vida es una parte modal suya, que, según cómo se vea, puede tener o no presencia en algún mundo posible conjuntamente con las demás partes modales y espaciales. A esta postura, como a la lewisiana, se le plantea una cuestión que encuentra su autoría en Quine, quien profiere una pregunta retórica interesante: ¿En un portal desocupado, algún hombre gordo posible parado en el portal y algún hombre calvo posible parado en el mismo portal son el mismo o diferentes hombres? (Quine 1948, 4). La pregunta se hace en tono retórico porque se asume que no hay criterio no trivial para la identidad de los objetos posibles no-actuales. Según la máxima quineana de «No entidad sin identidad», no hay, pues, *possibilia* aceptables en nuestra ontología hasta que tengamos un criterio de identidad[6]. Yagisawa se toma esto seriamente y lo plantea, tanto para el dimensionalismo modal como para el lewisianismo, como sigue.

Tomemos a Vulcano, un planeta que en el siglo XIX se creía como el cuerpo celeste que se encontraba entre el Sol y Mercurio. Este planeta era plausible en el universo newtioniano en el que creían los decimonónicos. Hoy sabemos que el universo no es newtoniano y que Vulcano no existe actualmente, ni tiene masa, forma, o composición química de algún tipo. Pero eso no le quita tener todos los papeles de un *possibile*. Por lo que, en tanto *possibile*, podría tener una masa *m*, una forma *f*, y una composición química *c*; también podría tener una masa ligeramente distinta *m*', una forma ligeramente distinta *f*', y una composición química *c*'. Tal que:

En algún *w* Vulcano tiene *m*, *f*, *c*, y

En algún otro mundo *w*' Vulcano tiene *m*', *f*', *c*'.

Dado que Vulcano es diferente en *w* y *w*', se hace la pregunta a Lewis sobre cuál mundo contiene a Vulcano, dado que dos mundos no pueden contener el mismo objeto posible. Esto es, o bien en *w* o bien en *w*' se encuentra Vulcano. En el mundo en el que no se encuentre estará la contraparte de Vulcano. Pero no parece haber una respuesta no trivial a la pregunta sobre cuál mundo contiene a Vulcano.

Al dimensionalismo modal se le dificulta menos responder esto: «El planeta en *w* y el planeta en *w*' son ambos (etapas-de-mundo de) Vulcano» (Yagisawa 2020). A esto, no obstante, se le presenta una cuestión, más fuerte si se quiere, relacionada con nociones intuitivas de los mundos posibles. A saber, Vulcano es posible, así como lo son su composición química, su masa y su forma; ahora bien, también es posible un objeto cualitativamente idéntico (i.e. con la misma composición química, masa y forma) a Vulcano, pero situado lejos de nuestro sistema solar, en algún lugar del espacio profundo. A este planeta llamémosle Onacluv. Si tomamos un mundo w_1 como el mundo que contiene a Vulcano y a su doble Onacluv, situado este último en el espacio profundo y aquel entre el Sol y Mercurio, y, si tomamos el mundo w_2 conteniendo a estos mismos planetas, pero con sus lugares intercambiados, la pregunta relevante es: ¿Cómo diferenciamos a w_1 y a w_2? Dado que ambos son duplicados cualitativamente exactos el uno del otro, toda vez que Onacluv es cualitativamente igual a Vulcano, parece no haber criterio de distinción aquí. Yagisawa dice que algunos presentan soluciones triviales como apelar a la *haeccitas*: «Vulcano y Onacluv se distinguen por el hecho de que Vulcano posee la *haeccitas* de Vulcano y Onacluv no. La *haeccitas* de un objeto es la propiedad de ser ese mismo objeto» (Yagisawa 2020); o apelar a la semántica descriptiva de los nombres propios: «… uno puede insistir que, si algo en un mundo es Vulcano, tiene que poseer en ese mundo las propiedades relevantes para la introducción del nombre «Vulcano», tal que sea el cuerpo celeste con tal o cual masa y orbita, entre otras características astrofísicas y estar entre en Sol y Mercurio en un universo newtoniano» (Yagisawa 2020). La trivialidad de la primera alternativa es que la *haeccitas* no es definida por separado, por lo que apelar a ella tiene nulidad informativa, mientras que la de la segunda débase a la tesis de Kripke de que las descripciones no son suficientes para introducir proposiciones que refieran a nombres propios. Esto excede los márgenes de la presente discusión.

Alexius Meinong, junto con Terrence Parsons y Edward Zalta, son quienes esgrimen una teoría de los *possibilia* sin recurrir a los mundos posibles. La teoría de los objetos de Meinong dice que todo sujeto gramatical en una oración verdadera refiere a un objeto, por lo que decir «el sexto dedo de mi mano derecha es un dedo» refiere a un objeto en el caso de ser verdadera. También, elabora una distinción ontológica crucial: existencia y subsistencia; a saber, subsistir es la categoría más amplia porque engloba tanto objetos concretos como abstractos, mientras que existir sólo corresponde a objetos concretos. La teoría de Meinong avala, además de objetos posibles no actuales, objetos imposibles: «el cuadrado redondo es redondo» aun expresando un objeto imposible, es una proposición verdadera. Parsons aclara esto de una manera perspicaz. Su teoría postula un dominio amplísimo de discurso donde no sólo objetos actuales, no actuales posibles y actuales posibles caben, sino también objetos imposibles y objetos inexistentes; cabe aclarar que, si bien su ontología incluye un dominio amplio, su noción de existencia equivale a la de actualidad, por lo que los *possibilia* estarían incluidos en la última categoría. Parsons fundamenta esta ampliación de su dominio discursivo con la distinción entre propiedades nucleares y extra nucleares; las primeras son del tipo «ser rojo», «ser un cuadrado», «ser una montaña», etc., mientras que las segundas refieren a propiedades ontológicas como existencia, posibilidad, ficcionalidad, etc. Parsons encapsula sus tesis en dos principios:

> **(P1)** No hay dos objetos con exactamente las mismas propiedades nucleares.
>
> **(P2)** Por cada conjunto de propiedades nucleares, existe al menos un objeto con todas las propiedades nucleares de ese conjunto y no otras.

Tomemos dos conjuntos de propiedades nucleares. Primero, *MD* compuesto de {ser una montaña, ser dorada}; segundo, *CR* compuesto de {ser cuadrado, ser redondo}. Ahora bien, por **(P2)** *MD* tiene exactamente un objeto, i.e. la montaña dorada, mientras que *CR* tiene el cuadrado redondo. Para Parsons, un objeto posible es un objeto cuyas propiedades nucleares sean compatibles para que exista, ergo, los objetos existentes también son posibles. El cuadrado redondo no es posible porque sus propiedades nucleares no son compatibles. Nótese que dentro de esos conjuntos no hay propiedades como «ser existente» o «ser posible», porque estas son propiedades extra nucleares; no hay conjuntos tales como {ser montaña, ser dorada, ser existente} porque eso implicaría que la montaña dorada existe. Adicionalmente, cabe aclarar que los objetos imposibles no son contradictorios:

> Tomemos un conjunto, {ser cuadrado, ser redondo}. Por (P2), tenemos un x que es cuadrado y no-cuadrado. Entonces, x es no-cuadrado. Si podemos inferir de esto que no es el caso que x es cuadrado, entonces deberíamos poder decir que x es cuadrado y que no es el caso de que x sea cuadrado, lo que es una contradicción. Así, no deberíamos poder inferir 'no es el caso de que x es cuadrado' de «x es no-cuadrado». (Yagisawa 2020)

Edward Zalta, por su parte, evade el problema de la contradicción al incluir dos tipos de predicación: la ejemplificación y la codificación (por su traducción literal del inglés *encoding*). El cuadrado redondo, toda vez que ejemplifica el cuadrado y el circulo conjuntamente, es contradictorio. No obstante, si lo entendemos en cuanto que codifica, o instancia, la cuadratura y la redondez, no diremos de él que es contradictorio, sino que es imposible. Zalta aclara esto con dos principios:

> **(Z1)** Objetos que podrían tener locación espacial no codifican, ni puede codificar, propiedades.
>
> **(Z2)** Para cualquier condición sobre las propiedades, existe al menos un objeto que, si no puede tener una locación espacial, codifica exactamente aquellas propiedades que satisfacen esa condición.

Hay un sentido, la ejemplificación, en el que el cuadrado redondo y la montaña dorada podrían tener locación espacial, pero es en ese sentido que el cuadrado redondo es contradictorio y la montaña es posible. El otro sentido, sin embargo, no incluye a la montaña dorada, por **(Z1)**, pero sí incluye el cuadrado redondo, porque codifica la redondez y la cuadratura. En este sentido, se definen los *possibilia* como objetos no actuales que podría tener locación espacial pero no la tienen, los objetos abstractos como objetos que no pueden tener locación espacial, y los objetos existentes como objetos actualmente espaciales.

2. El estatuto modal de los entes matemáticos

Vimos anteriormente que una manera bastante común de definir los objetos abstractos es definirlos como objetos no concretos necesariamente actuales, lo que, según el significado de necesidad, implica que el ente matemático es el caso en todos y cada uno de los mundos posibles. Si queremos tomar los mundos posibles como un eje de evaluación, significa que, sean cualesquiera formas en las que pensemos a los objetos en general, los objetos abstractos serán una constante. Esto evidencia que *prima facie*, en el discurso modal, una cierta forma de platonismo está presente. Lo que nos hereda, en el discurso matemático, la caracterización de los entes matemáticos que hacía Platón. A grandes rasgos, los objetos matemáticos son incorruptibles y eternos, i.e. no se puede hacer ninguna modificación en su dominio y su existencia no cesa; dicho en términos modales, los objetos matemáticos, al ser no concretos, no parecen sufrir del cambio físico, y tampoco sufren alguna transformación toda vez que son necesariamente actuales, lo que parece implicar que su estado se mantiene. Si tomamos W, no como el conjunto de los mundos posibles, sino como el conjunto de los momentos atómicos del tiempo, diremos que para todo w perteneciente a W el 4 es él mismo. Si bien esta estaticidad es sostenida por la mayoría de los lenguajes matemáticos (al ser estos, en alguna medida, herederos del platonismo), cabe considerar si aun en el dominio de estos objetos únicamente es válido considerar posturas actualistas. Por ello, desarrollaremos aquí una exposición de algunas alternativas que se han propuesto al lenguaje actualista de las matemáticas con el propósito de generar perspectivas alternas sobre problemas clásicos.

La estructura del presente capítulo estará dispuesta de manera tripartita y tendrá un enfoque temático. El enfoque temático permite elucidar de manera esquemática diversas posturas sobre el mismo tópico. La división tripartita, por su parte, se debe a que la elección de temas se limita a tres: la formación de conjuntos, estructuras y construcción, y el infinito como potencialidad y como actualidad. El primer tema encuentra su relevancia en el carácter central que tiene la teoría de conjuntos como fundamento de toda teoría matemática, habida cuenta de lo cual es menester exponer cómo los conjuntos se pueden concebir de manera potencial a partir de la concepción iterativa. El tratamiento potencialista de la concepción iterativa de la formación de conjuntos se encuentra en el texto «*The potential hierachy of sets*» de Øystein Linnebo (Linnebo 2013), y de él nos serviremos para dar un panorama general sobre la posibilidad de pensar con lenguaje modal la jerarquía y formación de conjuntos. El segundo tema es relevante porque pone en tela de juicio si el dominio de los entes matemáticos es tan impenetrable como Platón lo pretendía. Es bien conocida una cita suya en la que se queja de que los matemáticos hablan de dibujar, colocar, y demás verbos que denotan un lenguaje constructivo, en un reino cuyos integrantes son eternamente estáticos. Stewart Shapiro (Shapiro 1997) le dedica a esto una sección de su libro «*Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*» intitulada «*Practice: Construction, Modality and Logic*» (181-215) en la que explora el carácter dinámico del lenguaje matemático, en el que construir implica pensar la posibilidad de objetos nuevos. Aquí nos concierne el vocabulario modal que usa Shapiro al tratar esta cuestión. El tercer tema retrotrae a una antiquísima discusión sobre la naturaleza del infinito, y supone un parteaguas entre el lenguaje posibilista y en lenguaje actualista en matemáticas. Cuantificar sobre un dominio infinito es completamente permisible en términos actualistas, toda vez que el infinito es una totalidad acabada; en términos posibilistas, no obstante, esto no es del todo sencillo, ya que el infinito siempre se está generando. Para un posibilista respecto del infinito, para cada existe un . Cabe aclarar que ser posibilista no implica necesariamente serlo con respecto al infinito. Y comúnmente, quienes adoptan la tesis del infinito potencial tienen pretensiones anti-platónicas. El texto correspondiente a esta discusión es «*Actual and Potential Infinity*», el cual está escrito por Shapiro y por Linnebo conjuntamente (2019).

Estos ejes nos darán cierto rudimento sobre las diferentes posturas acerca del carácter modal de los objetos de los que tratan las matemáticas. Es clara la centralidad que este capítulo supone para la presente pesquisa.

2.1. Formación de conjuntos

La concepción iterativa de conjuntos nos compele a considerar los conjuntos como grupos de cosas, dispuestos a través de estadios o etapas sucesivas, cada una de las cuales debe contener elementos ya presentes en las anteriores. Lo interesante de esta noción, en contraposición con la cantoriana, es que, a partir de cada etapa, puede construirse una etapa sucesiva. A saber, en la concepción cantoriana, los conjuntos se definen como agrupaciones hechas de modo consistente, i.e. agrupadas de manera que *existan juntas*. Sin embargo, en la concepción iterativa, todo conjunto tiene que tomar como elementos los dispuestos en etapas anteriores, lo que implica que hay una primera etapa, compuesta de elementos primitivos, llamados *urelemente*, que están presentes en cada posible etapa posterior. Así, desde elementos primitivos, se construye una jerarquía conforme se vayan creando conjuntos. Según Linnebo (2013), esta jerarquía es deudora de intuiciones modales toda vez que preserva la posibilidad de que, para cada etapa que pretenda ser cumbre, exista una etapa posterior. En esta línea, es extraño que, con lo que acabamos de mencionar, en la concepción iterativa más aceptada, la de Zermelo-Fraenkel, no se use lenguaje modal de ningún tipo; sino que, más bien, se cuantifique sobre todos los conjuntos, como si estos estuvieran *actualmente* disponibles para la cuantificación. En este sentido, la jerarquía de los conjuntos parecería actual.

A pesar de esto, Linnebo desarrolla brevemente una variante modalizada de la concepción iterativa de conjuntos. Por supuesto, no pretende sustituir la teoría ZF de conjuntos, y, más bien, da alternativas expresivamente más finas a la formulación de algunos axiomas que, por sí solos, tienen una fuerte modalidad anidada. Una razón que nos puede persuadir de esto es que en ZF, si bien se puede cuantificar sobre todos los conjuntos, a partir de la totalidad de estos no pueda formarse un conjunto; esto parece ser una limitación arbitraria, toda vez que, de la cuantificación sobre todos los conjuntos tendría que seguirse, naturalmente, que esa totalidad cuantificada también forme un conjunto. Esta limitación no es arbitraria en una concepción potencial-iterativa, ya que en ella la razón por la que la totalidad de todos los conjuntos no puede formar un conjunto es que esa totalidad no existe actualmente, porque en cada etapa siempre hay una etapa posterior posible. Linnebo parece atribuir esto a la totalidad de todos los conjuntos, y no a conjuntos como los números naturales y demás del tipo, al hacer uso de una distinción que hizo Cantor, en una carta que envió a Dedekind, sobre las multiplicidades: las unidas de manera consistente y las unidas de manera inconsistente. La carta dice:

> Porque una multiplicidad puede ser tal que la asunción de que todos sus elementos 'existen juntos' lleve a una contradicción, en tanto que es imposible concebir una multiplicidad como una unidad, como 'una cosa terminada'. Con tales multiplicidades identifico al infinito absoluto y a las multiplicidades inconsistentes. (…) Si, por otro lado, la totalidad de los elementos de una multiplicidad puede ser pensada, sin contradicción, como 'existiendo contiguamente', de manera que ellos pueden ser reunidos conjuntamente en 'una cosa', ello es lo que denomino multiplicidad consistente o 'conjunto'. (1996, 931-932)

Esta distinción entre multiplicidades consistentes e inconsistentes servirá enseguida para formular un axioma de formación de conjuntos a través de la jerarquía. No obstante, notemos que la concepción iterativa, potencialista o no, concibe multiplicidades, como los números naturales, válidas para formar conjuntos, pero no multiplicidades, como la suma de todos los conjuntos, válidas para lo mismo, aun cuando lo primero implica concebir una sucesión infinita como acabada. El detalle es que, si se concibe la formación de conjuntos como intrínsecamente potencial, entonces no debería avalarse ni siquiera la formación de transfinitos. Linnebo puede responder a esto diciendo:

> En su concepción, la jerarquía es potencial en sí misma y por ello intrínsecamente diferente a los conjuntos, cada uno de los cuales está completo y, en consecuencia, es actual en vez de potencial. Esta diferencia intrínseca otorga a los potencialistas—no como a sus rivales— una razón para rechazar la polémica formación de conjuntos. (2013, 206).

Para desarrollar una concepción potencial de la jerarquía, el autor necesita tomar partida en un modelo de lógica modal que le dé la suficiente facilidad expresiva. A continuación, veremos qué lógica modal elige el autor para dar cuenta de la modalización de la concepción iterativa de conjuntos, y qué condiciones cumple esta lógica para esta tarea. Para esto, agreguemos D al modelo (W, R, v), donde D es la función que asigna a cada mundo posible un dominio, tal que (W, R, v, D) será el modelo del que nos serviremos. Para los propósitos presentes, hay que asignarle a este modelo una condición sobre su semántica. Si tomamos cada w como estadios de la formación de conjuntos, no podemos tomar W más que como una totalidad inacaba de estadios. Esta totalidad inacaba requiere la condición de que, en cada estadio que no sea el primero, no todos sus elementos estén en los estadios anteriores. Lo que implica que el dominio se amplía. A saber, cada estadio w' tiene que suponer una ampliación de . Esto lo expresa en la siguiente fórmula:

$$wRw' \supset D(w) \subseteq D(w')$$

Aclaremos esto. Que un estadio v (i.e. un w') sea accesible desde w implica que v amplia el dominio de w. Esto impone unas condiciones sobre el modelo de la lógica modal a elegir; a saber, la relación de accesibilidad tiene que ser reflexiva, anti-simétrica y transitiva. Definamos cada una de estas condiciones. La primera es la reflexividad, que implica la posibilidad o la necesidad al interior de un mundo dado:

(Refl) wRw

La segunda tiene que ver con la anti-simetría, que niega que para todo mundo v, si v es accesible desde w, entonces w es accesible desde v. Esto es:

(Anti-Sim) $\neg(wRv \supset vRw)$

Esta condición es análoga a la de la lógica temporal. Del mismo modo que en la lógica temporal cada momento del tiempo w tiene un momento sucesivo *v*, y *v* no puede regresar a *w*, en la jerarquía de la concepción iterativa cada etapa sucede a la anterior, y los elementos de una etapa posterior no se encuentran todos en una temprana. La diferencia aquí es que la lógica temporal permite tomar W como el conjunto acabado de todos los momentos del tiempo, mientras que la concepción potencial-iterativa no permite hablar de W como un conjunto acabado de todas las etapas.

La última condición permite que exista una etapa intermedia entre una etapa y otra. Así mismo, sirve de fundamento para la direccionalidad que Linnebo le atribuye a la jerarquía. Esta condición se define como transitividad:

(Transi) $(wRv \wedge vRu) \supset wRu$

Así, el autor prefiere definir como ≤, dada la condición **(Anti-Sim)**. Un sistema que cumple todas estas condiciones dícese ser parcialmente ordenado. También, se dice de este sistema que está bien fundado y que cumple lo que Linnebo denomina direccionalidad. La direccionalidad es permitida por **(Transi)** e implica que, no importa si se trata de cualquiera de los estadios w_2 o w_3 sucesivos a w_1, w_3 es accesible tanto desde w_1 como w_2. Dicho de otra forma:

$$\forall w_{\_1}\forall w_{\_2}\exists w_{\_3}\ ((w_{\_1} \leq w_{\_3})\wedge(w_{\_2} \leq w_{\_3}))$$

Dados estos principios, se concluye que la lógica modal S4 es la correcta para construir su concepción potencial de la jerarquía de conjuntos, específicamente, la lógica modal S4.2.

En un sistema formal al que se le agregue esta lógica modal se pueden probar tanto la versión estable del $x = y$ como la Formula de Barcan Conversa (**FBC**). La versión estable de $x = y$ simplemente avala su presencia en todos los estadios de la formación de conjuntos. A saber, una versión estable de un axioma implica agregarle el operador modal □, tal que

$$x=y \supset \Box(x=y)$$

Tal sistema formal requiere que se desarrolle la traducibilidad del lenguaje formal no modal a un lenguaje formal modal. Esto es, requiere mostrar que, cualesquiera sean las condiciones de validez sobre las pruebas de un lenguaje formal no modalizado, debe haber condiciones homólogas sobre las pruebas de un lenguaje formal completamente modalizado. La lógica que posee suficiente riqueza expresiva para cuantificar sobre la formación de conjuntos, y, por lo tanto, para modalizarla, es la lógica plural. Una lógica plural es una lógica de primer orden cuyas variables contienen una multiplicidad, i.e. mientras que en la lógica de primer orden las variables *x* y *y* son los objetos sobre los que se cuantifica, en una lógica plural de primer orden las variables son *xx* y *yy* . En este sentido, «∀» y «∃» cuantifican sobre múltiples *x*´s y *y*´s. Un uso de esta lógica requiere el uso del símbolo «≺» que se define:

$$u \prec xx =_{df} u \text{ es alguno de } xx.$$

Ahora bien, existe una versión plural del axioma de comprensión de la teoría de conjuntos. Para entender este axioma, tomemos la condición $\varphi(u)$ como aquello que tiene que cumplir cualquier para pertenecer a un conjunto cualquiera. Entonces, tenemos el axioma de comprensión:

(Comp) $\exists x\forall u(u \in x \equiv \varphi(u))$

Cuya versión plural es:

(P-Comp) $\exists xx\forall u(u \prec xx \equiv \varphi(u))$

En este punto, la pregunta es cómo justificamos una modalización de este lenguaje plural. Linnebo señala:

> Nuestra siguiente pregunta es cómo la lógica plural interactúa con los operadores modales. Mi idea guía acá será que la pluralidad comprenderá exactamente los mismos objetos en cada mundo en el que la pluralidad exista. O, en términos más semánticos, a una variable plural le serán asignados exactamente los mismos objetos con sus valores en cada mundo en el que la variable tenga algún valor. Sostengo que esta idea es compatible con el uso de locuciones plurales en el lenguaje natural. Por ejemplo, Harry es necesariamente uno de los chicos llamados Tom, Dick, y Harry; y si John no es uno de ellos, entonces necesariamente no lo es. (2013, 211).

Tal aplicación de los operadores modales se traduce en esquemas de estabilidad. Un esquema de estabilidad para un enunciado φ transforma todo φ en $\Box\varphi$. A saber, tenemos que:

(Est) $\prec)u\prec xx\supset\Box(u\prec xx)$

(Est) $\neg\prec)$ $\neg(u \prec xx) \supset \Box\neg(u \prec xx)$

Lo que necesariamente estabiliza la condición $\varphi(u)$, habida cuenta del bicondicional en **(P-Comp)**:

(Est *φ*) $\varphi(u) \supset \Box\varphi(u)$

(Est ¬*φ*) $\neg\varphi(u) \supset \Box\neg\varphi(u)$

Cabe aclarar que las pluralidades presentes en la formación de conjuntos a través de las etapas w son inextensibles, i.e. para cada pluralidad xx en un mundo $w' \geq w$, la pluralidad encontrada en w' será la misma, o mayor, que la encontrada en w. Esto preserva la presencia de elementos. La inextensibilidad se establece como una condición θ para las pluralidades, tal que:

(INEXT-≺) $\forall u(u \prec xx \supset \Box\theta) \supset \Box\forall u(u \prec xx\supset\theta))$

Esto implica que $\varphi(u)$ tiene definitoriedad extensional, o sea, que para todo $w'\geq w$, la condición $\varphi(u)$ que aplica únicamente a cada $u\prec xx$, se extiende sobre los mismos elementos que sobre los que se extendía en w. Esto puede expresarse como sigue:

(DE- *φ*) $\exists xx\Box\forall u(u \prec xx \equiv \varphi(u))$

A partir de estas condiciones, se pueden empezar a formar conjuntos. Debe desarrollarse la idea de que los elementos son anteriores siempre a la formación de conjuntos, así como la idea de que siempre es posible, a partir de los elementos dados, formar un conjunto nuevo. Para esto necesitaremos el siguiente principio:

(Exist) $x\in y \supset \Diamond(Ex \wedge \neg Ey)$

Que se sirve del predicado E que expresa la existencia. Su traducción al lenguaje plural es:

(C) $\Box\forall xx\Diamond\exists y\Box\forall u(u\in y\equiv u\prec xx)$

Esto es, **(C)** implica que en la pluralidad xx ya hay un posible de ser formado en algún $w'\geq w$ tomando algún elemento u que sea alguno de xx. Por su parte, **(Exist)** de una manera más sencilla nos dice que algún estadio $w''\geq w$ no existe un y pero existe un x, a partir del cual se puede formar otro conjunto y'. Este proceso de formación de conjuntos lo podemos extender indefinidamente con la versión modal del axioma de Infinitud ($=_{df}$ $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall u(u \in x\supset\{u\} \in x))$ de ZF:

(∞-◇) $\Diamond\exists x[\emptyset \in x \wedge \Box\forall u(u \in x \supset \{u\} \in x)]$

Siendo (u) el posible que puede formarse de la pluralidad en el axioma **(C)**, y que, en cada etapa formación sucesiva a , funge de elemento más para la formación del conjunto en cuestión. De este modo, tenemos un primer esbozo de la concepción potencial del infinito.

Para ver un desarrollo exhaustivo de esto, se recomienda revisar Linnebo (2013).

2.2. Construcción y Estructuras

Muchas de las discusiones centrales en matemáticas tienen como eje central determinar las limitaciones que puede haber en la construcción de objetos matemáticos. Cuando Euclides nos invita a trazar una línea entre dos puntos, está usando un vocabulario constructivista. Se puede objetar, con razón, que sólo es una forma de hablar y que lo que Euclides quiere decirnos es que *hay* una línea recta siempre que encontramos dos puntos, y no únicamente que es *posible* dibujar una. No obstante, este lenguaje es común en la práctica de las matemáticas hoy y es una jerga que nos llega desde la época clásica. Es interesante ver cómo Platón se queja de esto en la República (527a-527b):

> En esto hay algo que no nos discutirán cuantos sean siquiera un poco expertos en geometría, a saber, que esta ciencia es todo lo contrario de lo que dicen en sus palabras los que tratan con ella…Hablan de un modo ridículo, aunque forzoso., como si estuvieran obrando o como si todos sus discursos apuntaran a la acción: hablan de 'cuadrar', 'aplicar', 'añadir' y demás palabras de esa índole, cuando en realidad todo este estudio es cultivado apuntando al conocimiento… se la cultiva apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece.

El matemático, en este caso el geómetra, actúa, según el eginense, sobre un dominio al cual no se le permite acceso más que a través de sus facultades intelectivas, habida cuenta de lo cual se dice, siguiendo a este clásico, que cuando llegamos a demostrar un teorema estamos descubriendo un dominio imperecedero, y no creando nuevos objetos. En este sentido, las construcciones, si se preservan, deben idealizarse. Específicamente, las construcciones que involucran hablar de estructuras matemáticas en términos dinamistas. Idealizarlas significa que, si bien uno puede usar lenguaje dinámico para demostrar el argumento de diagonalización de Cantor, el teorema de Pitágoras o la identidad de Euler, hay que estar consciente de que no hay en ningún momento agencia ni influjo sobre el dominio matemático. Las construcciones idealizadas tienen que reducirse a enunciados de existencia; en vez de decir «dados dos puntos, trácese una línea recta entre ellos», hay que decir que entre dos puntos *existe* una recta.

Ante este enfoque de corte platónico encontramos el constructivismo; el intuicionismo especialmente. El antirealismo del intuicionista lo lleva a rechazar la eternidad y trascendencia del reino eidético de los objetos matemáticos, por lo que no dice que accedemos a una instancia eterna cuando hacemos matemáticas, sino que construimos objetos eidéticos. Asimismo, al ser el concepto de verdad cambiado por el concepto de prueba, sólo el lenguaje dinámico de la deducción fundamenta los enunciados de existencia. Hay que señalar que esto no des-idealiza el lenguaje constructivo matemático, pero sí lo debilita considerablemente. A saber, mientras que en el lenguaje clásico decimos que toda vez que lleguemos a demostrar, por ejemplo, que no todos los números naturales carecen de cierta propiedad ($\neg\forall x\neg\varphi$), podemos demostrar que existe al menos uno que la tiene ($\exists x\varphi$), aunque no sepamos específicamente cuál es, en el lenguaje intuicionista el enunciado existencial tiene que ser probado por su cuenta; el lenguaje clásico toma un dominio que concibe como actualmente disponible, algo que el lenguaje constructivo no puede permitirse. Esto es acuciante sobremanera porque involucra la cuestión del infinito. Para el constructor ideal del intuicionista, no puede haber un recorrido del infinito porque el infinito no existe sino sólo en potencia, por lo que no se puede cuantificar sobre un dominio total con la fórmula si ese dominio no está acabado, i.e. si no es actual. Shapiro comenta:

> En un sentido, la secuencia misma es el número. Generalmente, los intuicionistas aceptan el infinito potencial, en la forma de procesos que continúan indefinidamente, pero ellos no aceptan el infinito actual, el cual para ellos sería la culminación de un proceso infinito. Estas diferencias ontológicas proveen un reto al presente intento de traer matemáticas intuicionistas al estructuralismo. (1997, 189-190)

Sobre una construcción hecha sobre un dominio infinito recordemos la sección pasada. Si atendemos al axioma de elección, que dice que, dado un conjunto no vacío de elementos, tómese elementos cualesquiera para formar un conjunto nuevo; y si este conjunto es infinito, el axioma da pie a que el constructor ideal pueda elegir una cantidad infinita de elementos. Notamos que esta actualidad del infinito no necesariamente hace actual la jerarquía, lo que implica que al interior de los conjuntos hacer como si se pudiera actuar sobre una totalidad infinita es válido, pero al exterior, i.e. en la formación sucesiva de conjuntos a partir de etapas anteriores, debemos tomar en serio el carácter meramente constructivo que le da potencialidad a la jerarquía.

Shapiro polemiza con esta división. Parece no estar de acuerdo con la distinción taxativa entre un sistema dinámico y sistema estático; el primero representado por la lógica intuicionista y el segundo por la lógica clásica. Su reclamo se funda sobre la base de que un sistema dinámico y sistema estático pueden convivir el uno con el otro si y solo si son isomorfos o estructuralmente equivalentes. El isomorfismo se da en dos sistemas S_1 y S_2 si hay una función biunívoca f entre los objetos y relaciones de S_1 sobre los objetos y relaciones de S_2 tal que f preserve las relaciones en los dos sistemas. La equivalencia estructural, por su parte, es cuando un subsistema completo T de S, i.e. un subsistema cuyos objetos y relaciones son los mismos que los de S, al ser isomorfo con un sistema H y un sistema J, hace que H y J sean estructuralmente equivalentes. Ahora bien, un sistema dinámico es un sistema que incluye objetos *posibles* de ser construidos. Al confeccionar el dominio de lo matemático, la construcción no puede eliminar objetos, solamente crear nuevos objetos posibles a partir de objetos actuales y posibles:

> Estas suposiciones de estabilidad proveen un marco sencillo para expandir el estructuralismo hacia las matemáticas dinámicas. A grandes rasgos, se puede definir un sistema dinámico como una colección de objetos potenciales, o posibles, juntos con ciertas relaciones, funciones, y operaciones en ellos. Las funciones y operaciones transforman secuencias apropiadas de objetos actuales y posibles en otros objetos posibles. Dadas las suposiciones de estabilidad, podemos hablar de una 'colección' de objetos asociados con un sistema dinámico. Esta colección consiste en los resultados de cada operación que el constructor ideal pueda hacer. Ello funge como el 'dominio' del sistema dinámico. (1997, 195)

Esto es, al preservar los objetos y las operaciones, el sistema dinámico preserva la principal razón para abogar por estaticidad, a saber, la estabilidad (cfr. sección pasada). A medida que se van construyendo nuevos objetos de acuerdo con pruebas, una vez probados, esos objetos posibles pasan a ser actuales en el sistema. Gracias a la estabilidad podemos decir que un sistema dinámico así entendido es isomorfo, o, por lo menos, equivalente con el sistema estático toda vez que podemos mapar uno a uno todas las operaciones y objetos de un subsistema completo de un sistema dinámico a un sistema estático. En este sentido, el reclamo que profiere Platón en la República no es del todo correcto. Señala, sin embargo, una ligereza general en la práctica matemática al hablar en lenguaje operativo, ya que no se aclara muchas veces si lo que se está usando de fondo es lenguaje de corte dinámico o estático.

2.3. Infinito ¿potencial o actual?

Nuestros recuentos sobre la formación potencial de conjuntos y el contraste entre lenguajes dinámicos y lenguajes estáticos encuentran un cauce común en el tema que aquí nos ocupa: el infinito. Concierne a toda exégesis sobre el estatuto ontológico de los objetos matemáticos aclarar la naturaleza del infinito. Tal ejercicio exegético evidencia cómo ciertas intuiciones modales se encuentran anidadas en nuestro concepto del infinito. La principal cuestión es determinar si el infinito es actual o es potencial, y qué implicaciones conlleva arribar a una conclusión en este respecto. A saber, la elección de los recursos usados para la construcción de teorías matemáticas supone considerar el estatuto modal del infinito. También, si estamos dados a considerar la decidibilidad en las matemáticas, debemos suponer qué de estos recursos nos queda para cuantificar sobre infinitudes. Linnebo y Shapiro (2019) publicaron conjuntamente un texto que aborda estos temas alrededor de la distinción entre infinito actual e infinito potencial. Es importante notar cómo tesis expuestas en secciones anteriores servirán de base para lo que se desarrolla aquí. No es de extrañar, ya que son tesis que se encuentran en cada autor por separado y convinieron todas a este respecto.

Un breve recorrido histórico nos revela que, desde Aristóteles, no hubo una aceptación hacia el infinito actual sino hasta que llegó Cantor. El Estagirita, por ejemplo, sostiene que no puede concebirse al infinito como una totalidad acabada, sino como una finitud extendida indefinidamente. Por ejemplo, en una línea siempre se puede tomar infinitas partes y dividir cada una de ellas en infinitas partes, i.e. para cada parte que resulte de la división de la línea, siempre podemos dividirla y encontrarle sub-partes para dividir de manera indefinida. Esto lo hereda de una de las paradojas de Zenón, y es el argumento principal que existe en el aristotelismo clásico contra el atomismo. Aristóteles evidencia una cierta inclinación a usar lenguaje dinámico, esto es, a usar un lenguaje constructivo como el de Euclides y demás matemáticos contemporáneos y posteriores a él, lo cual constituye una instancia más que separa al Estagirita de su maestro.

Matemáticos de la clase de Gauss o Leibniz rechazaban la concepción actualista del infinito. Tal tendencia acabó con la aparición de Georg Cantor y su teoría de conjuntos, la cual pretendía dar herramientas que nos permitieran cuantificar sobre infinitos en cuanto que totalidades acabadas. A pesar de ser abandonada, la teoría de conjuntos cantoriana le hereda a la concepción iterativa ZF la noción de los infinitos actuales. También, una herramienta inextricable a cualquier teoría matemática que sostenga la existencia del infinito actual es la lógica clásica de primer orden. Esto es porque la cuantificación sobre conjuntos infinitos se sirve de reglas como el tercero excluso. La negación del infinito actual se concibe muchas veces acompañada de la elección de una lógica intuicionista. Elegir tal lógica, no obstante, no tiene por qué ser el camino obvio para cualquier teórico que opere con la concepción potencialista del infinito. Basta con mirar a la tradición para notar esto. El desiderátum de qué lógica elegir nos coloca tres opciones que determinan nuestro poder para cuantificar sobre el infinito: si el infinito es actual, (1) la lógica correcta es la clásica de primer orden, toda vez que podemos cuantificar sin problema sobre un dominio que, al estar acabado, ya nos es dado; si hay infinitos potenciales, o bien (2) podemos seguir usando la lógica clásica, pero sin concebir todos los infinitos como actuales, por ejemplo, la infinita jerarquía de los conjuntos en la concepción iterativa puede considerarse como potencialmente infinita; o bien (3) la única lógica genuinamente posibilista es la lógica intuicionista, que no permite considerar ninguna actualidad infinita. A (1) llamémosle actualismo, a (2) llamémosle posibilismo ligero y a (3) llamémosle posibilismo estricto.

El actualismo de Cantor propone la tesis de que la actualidad se encuentra anidada en toda noción del infinito, toda vez que la única forma consistente de concebir una totalidad es existiendo junta. Aplicado esto a los conjuntos, tenemos que existen infinitos que se pueden concebir como actuales sin ningún problema; es más, sólo cabe concebirlos como actuales: «… todo infinito potencial, si es aplicable de una forma matemática rigurosa, presupone un infinito actual» (Cantor 1897). Está concepción de Cantor parece no ser tan estable cuando se trata de las totalidades inconsistentes como el infinito absoluto. De todas maneras, este actualismo fue heredado a la concepción iterativa, no sólo al concebir conjuntos particulares como totalidades acabadas, infinitas o no, sino también al concebir la jerarquía de los conjuntos como actualmente dada. El uso de cuantificadores y de fórmulas de primer y segundo orden en ZF supone que el dominio sobre el cual se está cuantificando está, efectivamente, disponible para la cuantificación. Tal visión actualista sobre el infinito supone un actualismo sobre las matemáticas en su totalidad, ya que hablar de objetos matemáticos supone hablar de objetos necesariamente actuales, o actuales *simpliciter*. Es interesante que la alternativa a este ingenuo realismo ontológico sea modalizar, en cierta medida, el lenguaje matemático, sobre todo para dar cuenta del infinito. Esto no significa, por supuesto, que siempre que alguien defienda que el lenguaje matemático puede ser modalizado sea un antirrealista.

Sería interesante esgrimir aquí la traducción completa del lenguaje actualista de primer orden al lenguaje modalizado, pero para eso ver Linnebo (2013) y Linnebo & Shapiro (2019). Debemos puntualizar, no obstante, que las condiciones semánticas de este lenguaje modal son las mismas desarrolladas en la sección 2.1 de la presente pesquisa, y que Linnebo presenta para su concepción posibilista de la jerarquía de conjuntos; a saber, el sistema modal que se usa para hablar del infinito actual es **S4.2**, y las condiciones impuestas sobre el modelo de esta lógica modal implican que es un sistema parcialmente ordenado, o sea, que cumple **(Refl)**, **(Anti-Sim)** y **(Transi)**. Adicionalmente, cumple la siguiente condición:

(Converg) $wRvwRx \supset \exists u(vRuxRu)$

Tal condición permite que en cada estado sucesivo siempre se puedan generar objetos sin atender las opciones. Por ejemplo, da igual que parte de la línea dividir, lo que importa es que siempre se pueda dividir la línea. Encontramos en la sección 2.1 un correlato de esto en la cualidad de direccionalidad.

En este lenguaje modal cada mundo w perteneciente a W representa un estado en la formación *ad infinitum* de objetos. Por supuesto, esta formación se irá dando en cada w a partir de las condiciones establecidas. En la concepción posibilista o potencialista del infinito existe una diferencia crucial: los que sostienen una versión ligera del posibilismo pueden concebir el conjunto de cosas existente en cada *w* como una pequeña infinitud acabada, pero no extienden esta infinitud al conjunto *W*, toda vez que *W* no puede estar acabado porque para todo *w* existe un *w*' tal que *wRw*'; para los potencialistas estrictos, por otra parte, en los estadios sucesivos no puede bajo ningún sentido concebirse algún conjunto infinito. Esto es una diferencia que permite desarrollar un teorema que avale la relación especular que mantiene el lenguaje no modal de primer orden con el lenguaje modal de primer orden si y sólo si se sostiene un potencialismo ligero. Este teorema, llamado teorema espejo, permite transformar todos los cuantificadores y fórmulas en sus versiones modalizadas. Decimos que una fórmula φ se transforma en $\varphi^\Diamond$ si todos sus cuantificadores están modalizados, tal que a «$\forall$» y «$\exists$» se les agrega «$\Box$» y «$\Diamond$».

Tomemos el lenguaje *L* y la relación clásica de deducibilidad $\vdash$ y a su versión $\vdash^\Diamond$ aplicable en el lenguaje modal $L^\Diamond$. Dejemos que este lenguaje modal sea **S4.2** agregando el axioma de estabilidad **(Est)**$=_{df}\ \varphi \supset \Box\varphi$, con **(Refl)**, **(Transi)**, **(Anti-Sim)** y **(Converg)** como condiciones semánticas. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema espejo: Para todas las fórmulas φ_1, …, φ_n, y ψ del lenguaje *L* tenemos que:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \text{ si y solo si } \varphi_1^\Diamond, \ldots, \varphi_n^\Diamond \vdash^\Diamond \psi^\Diamond$$

Lo que permite transformar el axioma de sucesión de Peano, que contiene lógica clásica de primer orden de:

$$\forall m \exists n Succ(m,n)$$

a

$$\Box\forall m \Diamond\exists n Succ(m,n)$$

Esto es, mientras que en el axioma clásico tenemos que la totalidad completa de los números naturales impone que para todo número natural *m* exista, actualmente, un numero *n* que le suceda, en el axioma modal de la sucesión de los números naturales tenemos que para todo *m* en cada estadio *w*, existe un *n* en algún *w*', tal que *m* y *n* existen en *w*' siendo *n* sucesor de *m*. En cada etapa sucesiva lo generado se mantiene necesariamente, esto permite que los objetos se vayan, por así decirlo, acumulando conforme avanzamos a través de los mundos posibles.

Sabemos que el uso de los cuantificadores en la lógica intuicionista conlleva problemas cuando se trata de conjuntos que son infinitos. Los conjuntos encuentran su potencialidad estricta en el argumento intuicionista que dice que los valores de verdad de una proposición dependen de que esa proposición se pruebe, esto es, que podamos construir una caracterización de un objeto matemático. A saber, para poder construir una fórmula φ necesitamos $\vdash\varphi$, y toda $\vdash\varphi$ puede hacerse en un número finito de pasos, por lo que la prueba que abarque todo un dominio infinito requiere que hagamos una construcción finita del objeto a probar; en este sentido, parece haber una distancia gigante entre la construcción finita y el infinito, y por ello, si hay un infinito, tiene que ser una finitud extendida a medida que se construyen objetos. Por ejemplo, si queremos decir que existe un número natural con una propiedad *P*, debemos construir una instancia de *Px*; también, si queremos negar que existan números con *P*, $\neg Px$ debe ser probada. No obstante, existe una forma que nos permita cuantificar con un poder expresivo homologable al clásico. Esto tiene que ver con la propuesta de Weyl, en la que basta tomar a los elementos del dominio sobre el cual queremos cuantificar a partir de una cualidad esencial que ellos tengan:

> La propuesta de Weyl, como la entendemos, es que no toda generalización es 'hecha verdadera' por la totalidad de sus instancias. Consideremos las verdades siguientes: todo objeto rojo tiene color y todo átomo de oro consiste de 79 protones. Estas verdades no parecen concernir a los objetos rojos individuales o a cada átomo de oro. Parece que se 'hacen verdaderas' no por sus instancias sino por lo que es ser rojo o con color o con 79 protones. De la misma forma, proponemos, hay limitaciones basadas en la esencia sobre toda futura generación de objetos estudiados por las matemáticas. (Linnebo y Shapiro 2019, 30)

Esto implica que lo que hace verdad al enunciado $\forall xPx$, donde *x* es cualquier número natural, no es que la totalidad de los objetos se tenga a disposición para cuantificar, sino que $\forall xPx$ tiene que ser tomado en cuanto que cumpla la naturaleza de los números naturales. Tal tesis tiene una formalización en la interpretación de la realizabilidad de Stephen Kleene (1945), cuyo desarrollo en Linnebo y Shapiro es:

> Tomemos $\{e\}(n)$ como el resultado de aplicar una máquina de Turing con índice para una entrada . Ahora, definimos que para que un número natural e sea un realizador para el enunciado φ, e debe satisfacer φ, escrito $e \vDash \varphi$. La idea es que e codifique información que establezca la verdad de φ… (2019, 30).

La cláusula más importante es la del cuantificador universal, en la que se define:

$$e \vDash \forall n\varphi(n) \text{ si y sólo si } \forall n\{e\}(n) \vDash \varphi(n)$$

Podemos interpretar que realiza la cuantificación $\forall n\varphi(n)$ toda vez que la máquina de Turing $\{e\}$ compute $\varphi(n)$ a partir de la instrucción de entrada ñ. Esto requiere, por supuesto, que la máquina de Turing $\{e\}\{n\}$ tenga una extensión potencialmente infinita de la cinta. Así, tenemos que una fórmula cuantificada se hace verdad, no por medio muchos pasos finitos, sino por la satisfacibilidad del enunciado φ.

Permitido el uso del cuantificador, podemos reproducir el teorema espejo en su variable intuicionista, dado que podemos cuantificar sobre un dominio potencialmente infinito. Tenemos un lenguaje L^{int} con la relación de deducibilidad $\vdash^{int}$, en el que para toda formula φ^{int}, ($\varphi^{int} \vdash^{int} \psi^{int}$) o ($\varphi^{int} \nvdash^{int} \psi^{int}$) y φ^{int} puede tener cuantificadores. Ahora bien, si tenemos la versión modal L^{int}-$\Diamond$ de L^{int} con la relación de deducibilidad $\vdash^{int}$-$\Diamond$, y tenemos que para toda formula φ^{int}-$\Diamond$, (φ^{int}-$\Diamond$ $\vdash^{int}$-$\Diamond$ ψ^{int}-$\Diamond$) o (φ^{int}-$\Diamond$ $\nvdash^{int}$-$\Diamond$ ψ^{int}-$\Diamond$), podemos afirmar que:

$$\varphi_1{}^{int}, \ldots, \varphi_n{}^{int} \vdash^{int} \psi^{int} \text{ si y solo si } \varphi_1{}^{int}\text{-}\Diamond, \ldots, \varphi_n{}^{int}\text{-}\Diamond \vdash^{int}\text{-}\Diamond\ \psi^{int}\text{-}\Diamond$$

El teorema llega a reconciliar el potencialismo estricto con la infinitud, que en la concepción iterativa al principio se negaba de los conjuntos. Así puede Linnebo dar cabida a las limitaciones intuicionistas cuando explica la jerarquía potencial de los conjuntos. De todos modos, nos queda debiendo una construcción de tal jerarquía a partir de este teorema del potencialismo estricto.

Conclusiones

A lo largo de la presente pesquisa, se han ido presentando diferentes tesis concernientes a la epistemología y ontología de la modalidad. Como dijimos en la introducción, gran parte del proyecto de una ontología general tiene que ver con determinar el carácter modal de los objetos. Por ello es menester poner en el tintero qué consideraciones generales pueden hacerse sobre el estatuto modal de los entes. Entre estos se encuentran incluidos los entes abstractos, de entre los cuales inclúyanse los objetos matemáticos. Se dice que una ocasión importante para la ontología general es dar cuenta del estatuto de estos objetos. Por lo que, si atendemos a lo que sostenemos sobre la centralidad de lo modal, hay que considerar el estatuto modal de los objetos matemáticos antes de considerar su estatuto ontológico general de forma acabada.

El panorama nos muestra la gran importancia que tiene el lenguaje modal en cuanto herramienta para el tratamiento de problemáticas metafísicas concernientes a la matemática misma, y cómo este constituye una extensión proficua de un lenguaje que, con ella, se vuelve mucho más rico.

Notas

1. Es una creencia común que los teoremas matemáticos son irrevocables, lo cual recibe el nombre técnico de monotonicidad, propia de las relaciones deductivas de consecuencia.
2. Un tránsito de la modalidad de las proposiciones a la modalidad de los objetos es un problema que requiere la toma de partido por el tipo de conexión entre las dos, algo que abordamos un poco más adelante.
3. Estas van acompañadas de la distinción entre contingentismo y necesitismo, como podrá verse más adelante.
4. Véase Yagisawa (2022).
5. La fórmula de Barcan y conversa admite ser expresadas también $\exists x\Diamond\varphi \supset \Diamond\exists x\varphi$ y $\Diamond\exists x\varphi \supset \exists x\Diamond\varphi$, respectivamente.
6. Un criterio de identidad, por el que entiendo un principio que de forma sistemática e informativa relaciona la identidad o lo distintivo de una

determinada clase de objetos con otros hechos determinados. Por ejemplo, dos conjuntos son idénticos sólo en el caso de que tengan los mismos elementos. A menudo se considera que esto proporciona información metafísica sobre en qué «consiste» la identidad o lo distintivo de los objetos en cuestión. (Linnebo 2018, 22)

Referencias

Cantor, Georg. 1887. «Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitten 1, II». *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 91 (1887): 81-125, 252-270; 92: 250-265; reimpreso en [8]: 378-439.

Ewald, William, ed. 1996. *From Kant to Hilbert: A Sourcebook in the Foundations of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Garson, James. «Modal Logic». In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, edited by Edward N. Zalta. Summer 2021 edition. URL: https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/logic-modal/.

Kleene, Stephen. 1946. «On the Interpretation of Intuitionistic Number Theory». *Journal of Symbolic Logic* 10: 109-124.

Linnebo, Øystein. 2013. «The Potential Hierarchy of Sets». *The Review of Symbolic Logic* 6, no. 2 (2013): 205-228. doi:10.1017/S1755020313000014.

Linnebo, Øystein. 2018. *Thin Objects: An Abstractionist Account*. Oxford: Oxford University Press.

Linnebo, Øystein, y Stewart Shapiro. 2019. «Actual and Potential Infinity». *Noûs* 53, no. 1 (2019): 160-191.

Menzel, Christopher. «Actualism». In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, edited by Edward N. Zalta. Fall 2021 edition. URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/actualism/.

Platón. 1982. Diálogos IV, *República*. Madrid: Gredos.

Quine, Willard Van Orman. 1948. «On What There Is». *Review of Metaphysics*.

Shapiro, Stewart. 1997. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Yagisawa, Takashi. «Possible Objects». In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, edited by Edward N. Zalta. Summer 2020 edition. URL: https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/possible-objects/.

Ariel Jaslin Jiménez (gorricsfalterman@gmail.com) Escuela de Filosofía de la Universidad de Costa Rica. Actualmente es estudiante del Bachillerato en Filosofía.

Recibido: 29 de septiembre, 2023.
Aprobado: 6 de octubre, 2023.