

<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/ingenieria/index>  
www.ucr.ac.cr / ISSN: 2215-2652

# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
JULIO/DICIEMBRE 2022 - VOLUMEN 32 (2)

The logo for Editorial UCR, featuring three horizontal white bars above the text "EDITORIAL UCR" in a white, sans-serif font.

EDITORIAL  
UCR

# Procesamiento GNSS en el marco geodésico CR-SIRGAS: Influencia de las épocas de observación y referencia

## GNSS processing in the CR-SIRGAS geodetic frame: influence of the observation and reference epochs

Jorge Moya Zamora

Académico. Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica

[jorge.moya.zamora@una.cr](mailto:jorge.moya.zamora@una.cr)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6953-4885>

*Recibido: 21 de Febrero de 2022*

*Aceptado: 30 de Mayo de 2022*

### Resumen

Las observaciones satelitales derivadas de las constelaciones GNSS están totalmente correlacionadas con el instante en la que se realizan las mediciones, sin embargo, los usuarios pueden trasladarlas a diferentes épocas siempre y cuando se cuente con los parámetros necesarios. La calidad de las mediciones GNSS, en principio, se verá afectada al llevarlas a una época diferente de la original. En el caso del marco geodésico nacional de Costa Rica CR-SIRGAS, su época de referencia actual es  $t_0 = 2019,24$  [1] pero la georreferenciación de la información espacial para efectos catastrales debe estar en la época de referencia  $t_k = 2014,59$  [2]. Se realizó un proceso de ajuste amarrado en la época  $t_i = 2021,53$  usando como observaciones las líneas base de cada punto nuevo a un máximo de cuatro estaciones CR-SIRGAS con sus respectivas coordenadas semanales finales. Después, se repitió este ajuste usando los mismos, pero como coordenadas de vínculo las oficiales de la época de referencia  $t_0$  implicando una marcada disminución en el peso original de las observaciones en un factor de 1,5 a 9,5. Además, se logró cuantificar las discrepancias en las coordenadas, exactitudes y observaciones ajustadas directamente en esta época  $t_0$ . Finalmente, se aplicaron los parámetros de transformación oficiales dados por [1] para llevar el conjunto de coordenadas de la época  $t_0$  a la época  $t_k$ .

### Palabras clave:

CR-SIRGAS, época de observación, época de referencia, factor de reducción, modelos matemáticos.

### Abstract

The satellite observations derived from the GNSS constellations are fully correlated with the moment in which the measurements are made, however, users can transfer them to different epochs as long as the necessary parameters are available. The quality of the GNSS measurements will, in principle, be affected by taking them to a different epoch than the original. In the case of the national geodetic frame of Costa Rica CR-SIRGAS, its current reference epoch is  $t_0 = 2019,24$  [1] but the georeferencing of spatial information for cadastral purposes must be in the reference time  $t_k = 2014,59$  [2]. A fixed adjustment process was carried out at the epoch  $t_i = 2021.53$  using as observations the baselines of each new point to a maximum of four CR-SIRGAS stations with their respective final weekly coordinates. This adjustment was then repeated



using the same, but as reference coordinates the official reference epoch  $t_0$ , implying a marked decrease in the original weight of the observations by a factor of 1,5 to 9,5. In addition, it was possible to quantify the discrepancies in the coordinates, accuracies and observations adjusted directly at this time  $t_0$ . Finally, the official transformation parameters given by [1] were applied to take the set of coordinates from epoch  $t_0$  to epoch  $t_k$ .

*Keywords:*

CR-SIRGAS, observation epoch, reference epoch, reduction factor, mathematical models.

## 1. INTRODUCCIÓN

La referencia geodésica oficial de Costa Rica, denominada como CR-SIRGAS, corresponde con un marco geodésico moderno el cual contempla observaciones diarias GNSS tomadas en las estaciones que lo conforman, el procesamiento semanal de estos datos como parte del mantenimiento de la red SIRGAS-CON y, por supuesto, las soluciones semanales finales de coordenadas geocéntricas, las cuales responden a las variaciones físicas que se producen en la superficie terrestre. La época de referencia, el cambio en las coordenadas geocéntricas semanales del marco y su influencia en los procesamientos de datos GNSS fueron aspectos que se tomaron en consideración en este artículo. La primera determinación del marco geodésico nacional CR-SIRGAS se redujo a la época 2014,59 y consideró como referencia internacional el IGB2008 [3], mientras que su más reciente actualización está referida a la época 2019,24 vinculado al marco internacional IGS2014 [1]. Ambas versiones de CR-SIRGAS están sustentadas sobre ocho estaciones GNSS de operación continua, las cuales son administradas por el Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGNCR), representando actualmente la mejor base geodésica que ha tenido el país. A pesar de ellos, existe una serie de consultas por parte de los profesionales sobre el traslado a las diferentes épocas de referencia a partir de la época de observación y potenciales metodologías relacionadas con el proceso de georreferenciación dentro de CR-SIRGAS. Aunque se pueden aplicar distintos métodos matemáticos para efectuar dicho proceso, como el de transformación de similaridad o bien una migración generalmente lineal por medio de parámetros de velocidad, siempre se dependerá de la información que se tenga inicialmente y sobre todo hacia dónde se quiere hacer el traslado [4]. Adicionalmente, no se debe olvidar la influencia que tienen las coordenadas de las estaciones que se usarán como vínculo o referencia para los distintos procesos de ajustes, así como también las épocas de observación y referencia.

## 2. MARCO TEÓRICO

### A. Principio de la medición GNSS

El principio de la medición GNSS es relativamente sencillo cuando se descartan una serie de factores físicos e instrumentales. Partiendo de que se cuenta con una constelación de satélites (SV) cuyas órbitas y, por lo tanto, sus coordenadas en función del tiempo son conocidas y que están transmitiendo constantemente señales con ciertos códigos y portadoras, el trabajo del receptor en tierra consiste en identificar primeramente cuáles satélites está captando. Luego, por medio de la generación interna de una réplica del código de cada satélite, el receptor hace una comparación de estos dos códigos continuamente hasta encontrar la misma secuencia, es decir, hasta estar sincronizados [9] y [10]. Adicionalmente la diferencia de tiempo entre el momento de la emisión  $t^s$  de la señal desde el satélite y el momento  $t_r$  de su recepción, multiplicada por la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , dará como resultado la distancia  $r$  entre el satélite  $s$  y el receptor  $r$  (ver ecuación (1) [5]).

$$\rho_r^s(t) = c\tau_r^s \quad (1)$$

## B. Posicionamiento puntual por pseudodistancias

Si se asume, por un momento, que el reloj del receptor está sincronizado con el reloj de satélite, que no hay influencia de la ionósfera ni la tropósfera y que no se tiene la influencia de otras fuentes que afectan aleatoriamente la medición, la ecuación (1) tomará la forma presentada en la ecuación (2) [5].

$$\rho_r^s(t) = \|r_r(t) - r^s(t - \tau)\|$$

$$\rho_r^s(t) = \left[ (X_r(t) - X^s(t - \tau))^2 + (Y_r(t) - Y^s(t - \tau))^2 + (Z_r(t) - Z^s(t - \tau))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Donde el vector  $r_r = [X_r Y_r Z_r]^T$  representa la posición de la antena del receptor, es decir las incógnitas, mientras que el vector  $r^s = [X^s Y^s Z^s]^T$  contiene las coordenadas de los satélites que son conocidas. Generalmente, ambos vectores se expresan dentro de un marco tridimensional coordinado, el cual está centrado y fijo a la Tierra conocido generalmente como Earth-centered, Earth-fixed (ECEF) [5]. En la práctica, sin embargo, cuando un receptor GNSS cambia de un satélite a otro, su reloj interno no está sincronizado con respecto a los relojes de los satélites, por lo tanto, la medición de la distancia entre el receptor y el satélite estará afectada por esa falta de sincronización en los relojes del receptor y del satélite  $dt_r$  y  $dt_s$ , respectivamente, y de ahí su denominación como pseudodistancias. Lo anterior implica que la distancia geométrica  $p$  entre el satélite y el receptor será igual a la pseudodistancia más una distancia producto de la influencia de los relojes (ver ecuación (3)) [8], [9] y [10].

$$p_r^s = \rho_r^s + c(dt_r - dt^s) \quad (3)$$

Aunque los relojes en los satélites sean monitoreados constantemente en la relación con la escala de tiempo propia de cada sistema, y que esa información se conoce en el mensaje de navegación, se mantiene la falta de sincronización en los relojes de los receptores  $dt_r$ , implicando así que la ecuación (3) adquiera la forma que se presenta en la ecuación (49), es decir, en función de las coordenadas del satélite, las coordenadas del receptor más una distancia resultado del producto de la falta de sincronización del reloj del receptor por la velocidad de la luz en vacío.

$$p_r^s = \sqrt{(X^s - X_r)^2 + (Y^s - Y_r)^2 + (Z^s - Z_r)^2} + c dt_r \quad (4)$$

En la ecuación anterior, hay un total de cuatro incógnitas, las tres coordenadas  $(X_r, Y_r, Z_r)$  de la posición de la antena y la falta de sincronización en el reloj del receptor  $dt_r$ , conocida como estado del reloj del receptor. Su solución matemática necesita conocer al menos un total de cuatro pseudodistancias. Se tendrá, ahora, un sistema de ecuaciones de tamaño  $4 \times 4$  similar al presentado en el conjunto de ecuaciones (5) y que requiere ser linealizado [5] y [8].

$$\begin{aligned}
p_r^1 &= \sqrt{(X^1 - X_r)^2 + (Y^1 - Y_r)^2 + (Z^1 - Z_r)^2} + cdt_r \\
p_r^2 &= \sqrt{(X^1 - X_r)^2 + (Y^1 - Y_r)^2 + (Z^1 - Z_r)^2} + cdt_r \\
p_r^3 &= \sqrt{(X^1 - X_r)^2 + (Y^1 - Y_r)^2 + (Z^1 - Z_r)^2} + cdt_r \\
p_r^4 &= \sqrt{(X^1 - X_r)^2 + (Y^1 - Y_r)^2 + (Z^1 - Z_r)^2} + cdt_r
\end{aligned} \tag{5}$$

En la ecuación 6, se presentan los coeficientes diferenciales del conjunto de ecuaciones (5), agrupados en la matriz de configuración, generalmente denominada como matriz  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_r^1}{\partial X_r} & \frac{\partial p_r^1}{\partial Y_r} & \frac{\partial p_r^1}{\partial Z_r} & c \\ \frac{\partial p_r^2}{\partial X_r} & \frac{\partial p_r^2}{\partial Y_r} & \frac{\partial p_r^2}{\partial Z_r} & c \\ \frac{\partial p_r^3}{\partial X_r} & \frac{\partial p_r^3}{\partial Y_r} & \frac{\partial p_r^3}{\partial Z_r} & c \\ \frac{\partial p_r^4}{\partial X_r} & \frac{\partial p_r^4}{\partial Y_r} & \frac{\partial p_r^4}{\partial Z_r} & c \end{bmatrix} \tag{6}$$

El planteamiento de los sistemas de ecuaciones tendrá, generalmente, una mayor cantidad de datos que incógnitas por lo que, si se cuenta con una cantidad  $m$  de satélites en vista ( $m > 4$ ), la estimación de las coordenadas del receptor y del estado de reloj estará dado por la ecuación (7). Donde  $P$  es la matriz de pesos de las observaciones de tamaño  $m \times m$ , la matriz  $A$  tendrá ahora tamaño  $m \times 4$ , y la matriz  $Q_{xx}$  será la matriz de cofactores de las incógnitas de tamaño  $4 \times 4$ . El proceso de solución será iterativo, sin embargo, si la posición inicial es muy cercana a la real, probablemente no se requiera de más de una sola iteración.

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} \tag{7}$$

### C. Exactitud de la posición puntual

Los parámetros que permiten estimar la exactitud de las coordenadas del receptor se obtienen por medio de la matriz de cofactores  $Q_{xx}$  del vector solución  $x$ . Considerando, inicialmente, una matriz de pesos  $P$  identidad, la correspondiente matriz de cofactores  $Q_{xx}$  estará dada por la relación  $(A^T A)^{-1}$ . La diagonal de esta matriz tendrá las varianzas de las coordenadas del receptor y del estado

del reloj, mientras que los elementos fuera de la diagonal, las covarianzas, representan el grado de correlación entre las incógnitas como se muestra en la ecuación (8).

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & q_{xt} \\ & q_{yy} & q_{yz} & q_{yt} \\ & & q_{zz} & q_{zt} \\ & & & q_{tt} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Una serie de elementos estocásticos presentes en la medición de cada distancia, desde el satélite hasta el receptor, se agrupan en el factor denominado UERE (*User Equivalent Range Error*) que se envía en el mensaje de navegación, el cual, en combinación con el parámetro DOP (*Dilution Of Precision*), permite hacer una estimación de la exactitud en el posicionamiento de un punto. El DOP es un escalar indicador de la calidad del proceso de ajuste ligado a la geometría de los satélites que se tuvieron en vista. Un valor bajo de DOP representa una buena geometría, es decir, con satélites bien distribuidos en el horizonte, mientras que un valor alto implicará una geometría deficiente. Este factor es llamado, generalmente, pérdida de la precisión geométrica (GDOP), el cual brindará información de la posición al no considerar el término  $q_{tt}$  e informará sobre el parámetro de tiempo si solamente se considera dicho término [8] y [10]. Los diferentes parámetros DOP se calculan tal como se muestra en el conjunto de ecuaciones (9).

$$\begin{aligned} GDOP &= \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} + q_{tt}} \\ PDOP &= \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}} \\ TDOP &= \sqrt{q_{tt}} \end{aligned} \quad (9)$$

Las relaciones anteriores están ligadas a coordenadas cartesianas geocéntricas, sin embargo, si se requiere de la matriz de covarianza  $Q_{neu}$  en un sistema topocéntrico, se debe contemplar la correspondiente matriz de rotación cuyo planteamiento se puede consultar en [8]. Tanto el UERE como el DOP son indicadores que dependen de la geometría de los satélites y de los errores en las pseudodistancias y son solamente una aproximación que limita la propagación aleatoria de los errores [8].

#### D. Ampliación de la ecuación de pseudodistancias

En los apartados anteriores, se presentaron las relaciones generales con las cuales se puede obtener una posición puntual a partir de mediciones GNSS tomando en cuenta una serie de supuestos. Sin embargo, es conocido que la realidad es muy diferente y que las señales en su tiempo de viaje sufren una serie de afectaciones que, posteriormente, deben ser contempladas para obtener una posición con la suficiente exactitud como para ser empleada en proyectos geodésicos. Desde esta perspectiva, la ecuación (3) para la pseudodistancia obtenida por código deberá ampliarse, considerando una serie de factores adicionales (ver ecuación (10)) [5]. En la misma,  $T_r^s$  es el retraso provocado por la

atmósfera neutra (tropósfera),  $I_r^s$  es el retaso producto de la ionósfera y  $e_r^s$  representa una serie de errores no modelados como el multicamino, el ruido en el receptor y otros efectos menores.

$$p_r^s = \rho_r^s + c(dt_r - dt^s) + T_r^s + I_r^s + e_r^s \quad (10)$$

Considerando ahora las fases de las portadoras, la ecuación para pseudodistancia está dada en la ecuación (11) donde  $l$  es la longitud de onda de la portadora,  $M_r^s$  son las ambigüedades enteras de las portadoras en ciclos y los retrasos en las fases del receptor y los satélites, por último  $\varepsilon_r^s$  representa los errores no modelados en la fase entre los cuales están el multicamino, el ruido en el receptor y otros efectos menores [5].

$$\varphi_r^s = \rho_r^s + c(dt_r - dt^s) + T_r^s - I_r^s + \lambda M_r^s + \varepsilon_r^s \quad (11)$$

## E. Posicionamiento relativo

Dentro de las posibilidades que se ofrecen en las metodologías de levantamiento GNSS, está la denominada estática relativa por medición de fase en la cual el principio básico consiste en tener al menos dos receptores que estén observando simultáneamente a un mismo conjunto de satélites durante un determinado tiempo. La relación directa entre ambos receptores está dada, de manera geométrica, por la denominada línea base, que es un vector espacial calculado a partir del procesamiento de las mediciones GNSS en ambos puntos. Por ejemplo, si se tienen dos puntos  $A$  y  $B$ , y se asume inicialmente  $A$  como fijo, se requiere de los incrementos de coordenadas entre ambos. En la ecuación (12), se presenta el caso concreto para dos puntos  $A$  y  $B$  [8]-[10].

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \quad (12)$$

El objetivo es determinar dichos incrementos entre los dos puntos considerados, asumiendo uno de ellos como fijo. Estas componentes pueden indistintamente expresarse también como observaciones elipsoídicas de azimut  $\alpha$ , distancia  $s$  y diferencia de altura  $\Delta h$  relativa entre los puntos. Este método de momento continúa siendo el que brinda los mejores resultados en el posicionamiento, ya que el hecho de hacer las diferencias de las ecuaciones de observación elimina una serie de errores propios del sistema y otros de origen físico.

Si bien actualmente es posible calcular dicho vector en tiempo real, el enfoque que se abordará en este documento considera el cálculo del vector producto de un post procesamiento por medio de la combinación de la medida de fase de la portadora. Los métodos de combinación son altamente conocidos, así como los procedimientos que permiten la resolución de las ambigüedades, por lo que se recomienda al lector consultar, entre otros, [5]-[10] para mayores detalles.

## F. Cálculo de líneas base o vectores

Este apartado se desarrollará partiendo de la relación final de las dobles diferencias, debido a que se cancela el parámetro del estado del reloj del satélite y receptor. De esta manera, para dos puntos  $A$  y  $B$  observando dos satélites  $j$  y  $k$  toma la forma que se presenta en el conjunto de ecuaciones de (13) [7],[8].

$$\Phi_{AB}^{jk}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t) + N_{AB}^{jk}(t)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t) \\ \rho_{AB}^{jk}(t) &= \rho_B^k(t) - \rho_B^j(t) - \rho_A^k(t) + \rho_A^j(t) \\ N_{AB}^{jk}(t) &= N_B^k(t) - N_B^j(t) - N_A^k(t) + N_A^j(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Si se multiplica la ecuación anterior por  $\lambda$ , el primer término de la derecha representa las pseudodistancias medidas desde los dos satélites a los dos puntos y cada una de estas tres ecuaciones debe ser linealizada. El resultado de este proceso se presenta en la ecuación (14), donde los subíndices cero se refieren a la aplicación de la serie de Taylor la cual requiere de valores aproximados de las incógnitas [8].

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{jk}(t) &= \rho_{B0}^k(t) - \frac{X^k(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta X_B - \frac{Y^k(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta Y_B - \frac{Z^k(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^k(t)} \Delta Z_B \\ &\quad - \rho_{B0}^j(t) - \frac{X^j(t) - X_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta X_B - \frac{Y^j(t) - Y_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta Y_B - \frac{Z^j(t) - Z_{B0}}{\rho_{B0}^j(t)} \Delta Z_B \\ &\quad - \rho_{A0}^k(t) - \frac{X^k(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta X_A - \frac{Y^k(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta Y_B - \frac{Z^k(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^k(t)} \Delta Z_A \\ &\quad + \rho_{A0}^j(t) - \frac{X^j(t) - X_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta X_A - \frac{Y^j(t) - Y_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta Y_B - \frac{Z^j(t) - Z_{A0}}{\rho_{A0}^j(t)} \Delta Z_A \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (13) se tendrá ahora la ecuación de observación linealizada. El lector deberá notar que, por simplicidad en la notación, se han sustituido los cocientes de diferencias de coordenadas en  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de los satélites  $j$  y  $k$  y las coordenadas aproximadas del receptor en los puntos  $A$  y  $B$  entre su correspondiente pseudodistancia por los términos  $a$ , tal como se muestra en la ecuación (15) [8].

$$\begin{aligned} L_{AB}^{jk}(t) &= a_{XA}^{jk}(t) \Delta X_A + a_{YA}^{jk}(t) \Delta Y_A + a_{ZA}^{jk}(t) \Delta Z_A \\ &\quad + a_{XB}^{jk}(t) \Delta X_B + a_{YB}^{jk}(t) \Delta Y_B + a_{ZB}^{jk}(t) \Delta Z_B + \lambda N_{AB}^{jk} \end{aligned} \quad (15)$$

En la ecuación anterior, el término que está a la izquierda del signo igual quedará expresado según la ecuación (16) [8].

$$L_{AB}^{jk}(t) = \lambda \Phi_{AB}^{jk}(t) - \rho_{B0}^k(t) - \rho_{B0}^j(t) - \rho_{A0}^k(t) + \rho_{A0}^j(t) \quad (16)$$

Si se considera ahora, por ejemplo, que el punto A es fijo, es decir, se conocen sus coordenadas, se reduce el número de incógnitas en tres porque  $\Delta X_A = \Delta Y_A = \Delta Z_A = 0$  implicando que la ecuación (16) tomará la forma de la ecuación (17) donde desaparece el cero en las pseudodistancias al punto A [8].

$$L_{AB}^{jk}(t) = \lambda \Phi_{AB}^{jk}(t) - \rho_{B0}^k(t) - \rho_{B0}^j(t) - \rho_A^k(t) + \rho_A^j(t) \quad (17)$$

Si se toman ahora, por ejemplo, cuatro satélites  $j, k, l, m$  en dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , se tiene en el conjunto de ecuaciones (18), la forma del vector de observaciones L, del vector de incógnitas  $x$  y de la matriz de configuración A [8].

$$L = \begin{bmatrix} L_{AB}^{jk}(t_1) \\ L_{AB}^{jk}(t_1) \\ L_{AB}^{jk}(t_1) \\ L_{AB}^{jk}(t_2) \\ L_{AB}^{jk}(t_2) \\ L_{AB}^{jk}(t_2) \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{XB}^{jk}(t_1) & a_{YB}^{jk}(t_1) & a_{ZB}^{jk}(t_1) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_1) & a_{YB}^{jl}(t_1) & a_{ZB}^{jl}(t_1) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_1) & a_{YB}^{jm}(t_1) & a_{ZB}^{jm}(t_1) & 0 & 0 & \lambda \\ a_{XB}^{jk}(t_2) & a_{YB}^{jk}(t_2) & a_{ZB}^{jk}(t_2) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_2) & a_{YB}^{jl}(t_2) & a_{ZB}^{jl}(t_2) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_2) & a_{YB}^{jm}(t_2) & a_{ZB}^{jm}(t_2) & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (18)$$

## G. Posicionamiento relativo

De acuerdo con la teoría del ajuste por mínimos cuadrados aplicada a las componentes de una línea base entre los puntos  $i$  y  $j$ , estas se pueden considerar como observaciones. La forma linealizada de esta relación se puede ver en la ecuación (19) [9], [10].

$$X_{ij} = X_j - X_i \quad (19)$$

Sin embargo, para tener consistencia con la formulación del procedimiento, se deben incluir los residuos a las observaciones, tal como se muestra explícitamente en la ecuación (20) en cada una de las componentes del vector.

$$\begin{aligned} v_{X_{ij}} &= X_j - X_i - X_{ij} \\ v_{Y_{ij}} &= Y_j - Y_i - Y_{ij} \\ v_{Z_{ij}} &= Z_j - Z_i - Z_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

El modelo funcional linealizado del ajuste  $v = Ax - l$  se presenta ahora en la ecuación (21).

$$\begin{bmatrix} v_{X_{ij}} \\ v_{Y_{ij}} \\ v_{Z_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \\ dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

La adecuación de los tamaños de las matrices y vectores se hará dependiendo de la cantidad de puntos y líneas base que se consideren entre ellos, respetando la regla de  $r - 1$ , con  $r$  igual a la cantidad de receptores midiendo de forma simultánea.

### **3. METODOLOGÍA**

#### **A. Fuentes de datos**

Para la realización de este estudio, se usó un total de tres fuentes de datos. La primera corresponde a los archivos de observación de las ocho estaciones que sustentan actualmente el marco geodésico nacional CR-SIRGAS [1], administradas por el IGNCR. Los archivos de observación de dichas estaciones se pueden descargar de manera gratuita en el enlace: <https://gnss.rnp.go.cr/SBC>. La segunda fuente la conforma un grupo de archivos de datos pertenecientes a un conjunto de estaciones GNSS de operación continua, ubicado principalmente en el sector occidental de Costa Rica y son parte de un proyecto de investigación desarrollado por UNAVCO en colaboración con el Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica (OVSICORI) [11]. Los archivos de observación de esta fuente se descargan gratuitamente en: <https://data.unavco.org/archive/gnss/rinex/>. Finalmente, la tercera fuente de datos consultada fue el conjunto de archivos de observación solicitado directamente vía correo electrónico al OVSICORI. En el CUADRO I, se presentan las coordenadas geodésicas aproximadas de las treinta y dos estaciones usadas, la fuente de datos consultada y el tipo de punto. En este estudio, las ocho estaciones de CR-SIRGAS se consideraron fijas y las veinticuatro estaciones restantes se tomaron como nuevas.

#### **B. Establecimiento de las épocas de observación y referencia**

Se definió como época de observación  $t_i$  el martes 13 de julio de 2021 correspondiente con el día del año  $DOY = 194$ , semana 2166 y día de la semana 2, época 2021,53. Sin embargo, para la estación EART, no se contó con el archivo respectivo por lo que se usó el  $DOY = 200$ , que corresponde con lunes 19 de julio de 2021, semana 2167, día de la semana 1, época 2021,55. Además, se consideraron las épocas  $t_0 = 2019,24$  y  $t_k = 2014,59$ , correspondientes a las dos versiones oficiales de CR-SIRGAS [1].

## CUADRO I

Coordenadas aproximadas y clasificación puntos de la red de estaciones GNSS de operación continua con base en la fuente de los datos y el tipo. En la columna “Fuente” la O, la U y la I se refieren a OVSICORI, a UNAVCO y a IGNCR, respectivamente; y las letras F y N de la columna “Tipo” se refieren a las categorías fijo y nuevo

Estación	Latitud Norte [°]	Longitud Oeste [°]	Altura [m]	Fuente	Tipo	Estación	Latitud Norte [°]	Longitud Oeste [°]	Altura [m]	Fuente	Tipo
BATA	10,097	83,376	33,84	O	N	LEPA	9,945	85,031	20,94	U	N
BIJA	9,749	84,576	555,62	U	N	LIBE	10,631	85,438	163,83	I	F
CABA	10,237	85,343	26,93	U	N	LIMN	9,993	83,026	25,04	I	F
CCOL	8,407	82,973	83,27	O	N	LMNL	10,267	85,053	102,93	U	N
CDME	9,553	83,763	3483,40	O	N	NEIL	8,644	82,944	66,52	I	F
CDTO	8,573	82,872	100,04	O	N	NYCO	10,144	85,455	155,56	I	F
CIQE	10,323	84,431	680,65	I	F	PNE2	10,195	85,828	19,66	U	N
CNKC	9,592	82,978	105,85	O	N	PUJE	10,113	85,272	29,16	U	N
COVE	10,719	84,401	99,02	O	N	PUMO	10,064	84,966	17,95	U	N
CTCR	8,890	82,764	1490,68	O	N	PUNT	9,980	84,832	23,66	I	F
EART	10,212	83,594	45,37	O	N	RIDC	9,920	84,049	1212,16	I	F
EPZA	10,140	85,568	668,61	U	N	RIFO	10,317	83,922	116,17	O	N
HUA2	10,017	85,351	594,24	U	N	SAGE	9,373	83,704	723,17	I	F
IND1	9,864	85,502	75,25	U	N	SAJU	10,067	85,710	73,78	U	N
IRZU	9,966	83,897	2964,91	O	N	SRBA	9,232	83,360	940,01	O	N
LAFE	9,807	84,960	65,29	U	N	VRAI	9,924	83,190	438,34	U	N

La distribución espacial de los puntos se presenta en la Fig. 1, donde las estaciones fijas CR-SIRGAS se identifican con un triángulo de color rojo, y las estaciones nuevas con círculos de color verde y amarillo, dependiendo de la fuente de datos.

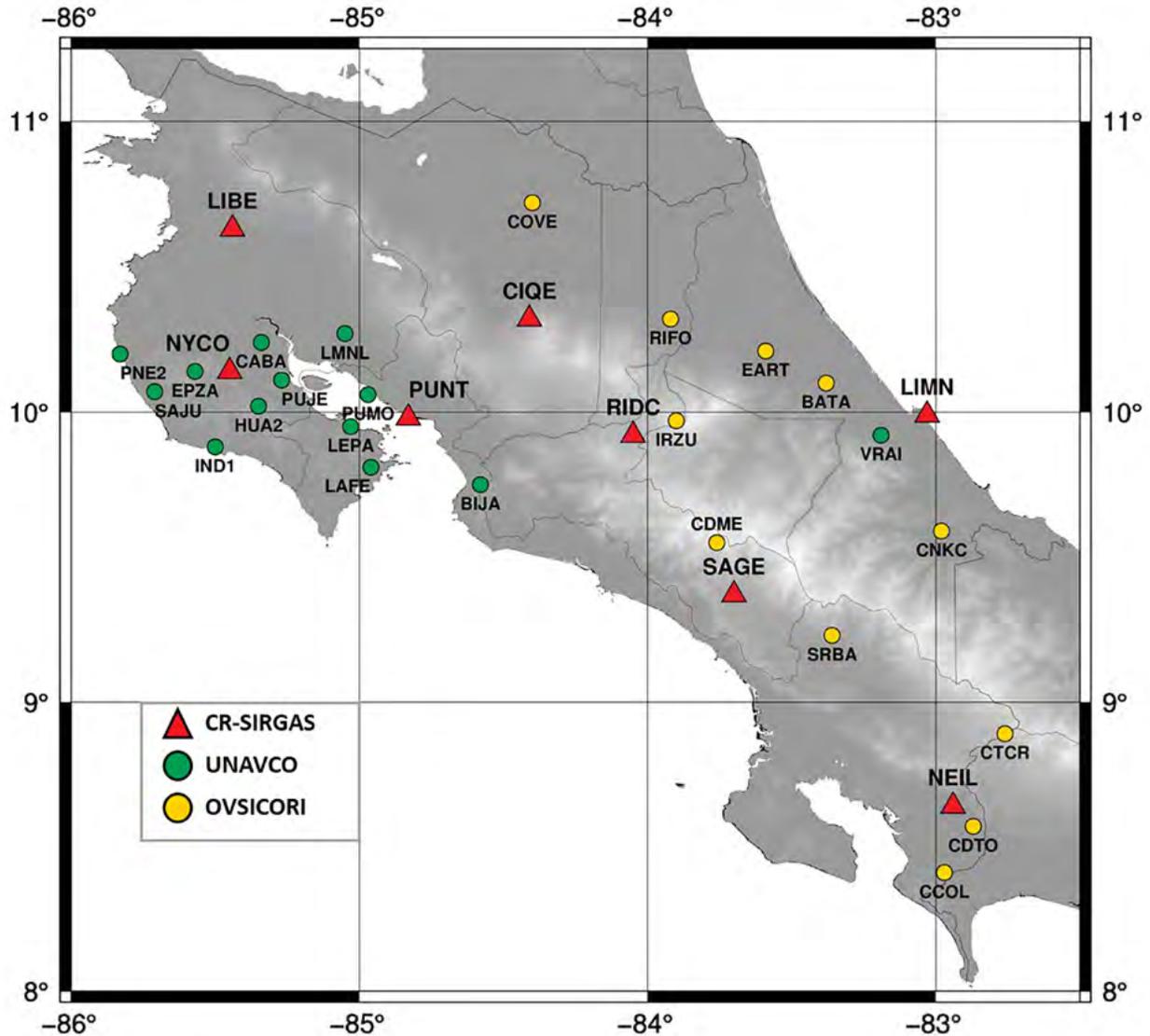


Fig. 1. Ubicación geográfica de las ocho estaciones CR-SIRGAS y de las veinticuatro estaciones nuevas. Mapa compilado con Generic Mapping Tools (GMT) versión 6.0.0 [12] y datos del modelo Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) [13].

### C. Determinación de las líneas base

La red de puntos seleccionados para este estudio está conformada por un total de veinticuatro puntos nuevos que permiten calcular un total de veintitrés líneas base o vectores independientes. Sin embargo, se implementó una metodología que tomó los archivos de cada una de las estaciones de manera independiente como si se tratara de mediciones aisladas en un día particular, asumiendo que dicha medición se realiza para el establecimiento de un punto con enlace al marco de referencia CR-SIRGAS. Al respecto, se establecieron los siguientes criterios para el cálculo de las coordenadas de los puntos nuevos:

- 1) Cada punto fue procesado de manera individual con un archivo de 24 h de observación y sin formar ninguna figura con los restantes puntos nuevos;
- 2) cada punto debería ser intersecado por un máximo de cuatro estaciones de referencia CR-SIRGAS, teniendo, para cada proceso de ajuste, un total de doce observaciones;
- 3) La elección de las estaciones de vínculo se basó en el criterio de proximidad al punto nuevo, es decir, aunque, en principio, cada punto nuevo puede formar vector con las ocho estaciones de referencia, solamente se escogieron las cuatro más cercanas.

En la Fig. 2, se presenta, de manera esquemática, el criterio de selección usado en la escogencia de las estaciones de vínculo para cada uno de los puntos nuevos. Los triángulos de color rojo representan estaciones GNSS de operación continua (estaciones fijas CR-SIRGAS) y los círculos representan las estaciones nuevas. La codificación de las líneas contempló vectores de tamaño “corto” en color negro, los vectores de longitud “media” en color azul y los vectores de longitud “larga” en color verde. Las comillas en los adjetivos anteriores se colocaron solamente para clasificar distancias en esas tres categorías y solo con ese efecto ya que el término corto, medio y larga puede tener diferentes connotaciones. Por ejemplo, el punto PN1 se enlazó a las estaciones conocidas EB6, EB2, EB5 y EB4 en donde se aprecian dos vectores de longitud media y dos de longitud larga. En el caso del punto PN2, se enlazó a las estaciones EB2, EB3, EB1 y EB5 que tiene tres vectores de longitud media y uno de longitud corta. Finalmente, en el caso de PN3, se vinculó a las estaciones EB7, EB3, EB2 y EB8 en las que hay dos vectores cortos y dos vectores de longitud larga.

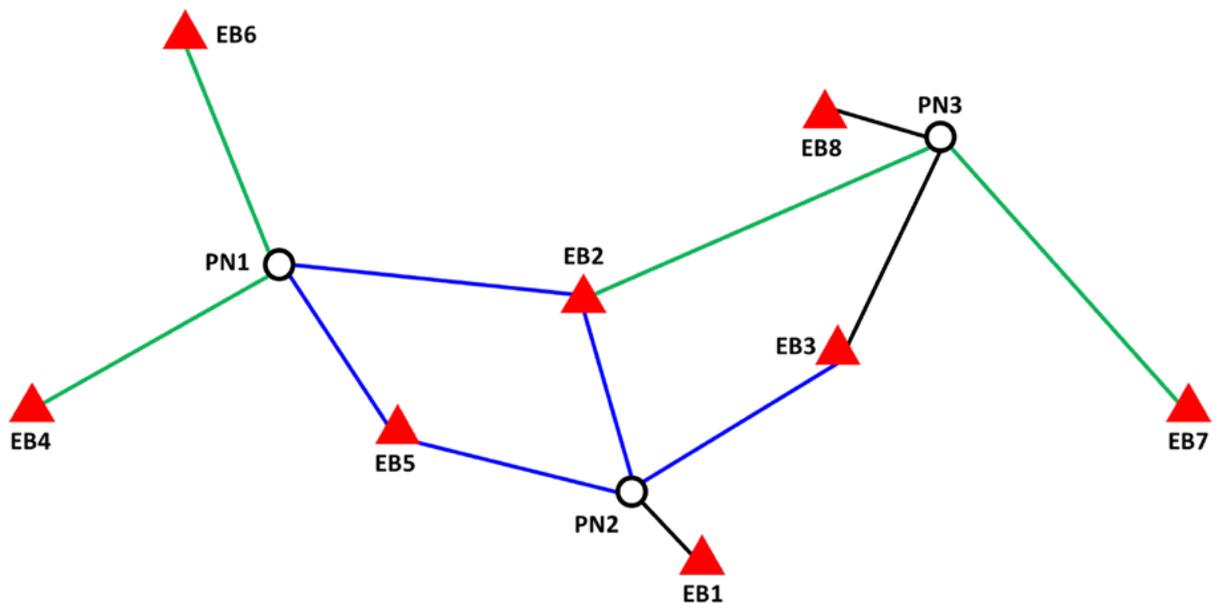


Fig. 2. Representación de la selección de estaciones fijas representadas por triángulos de acuerdo con el criterio de proximidad a la estación nueva representada un círculo. Los colores de los vectores están dispuestos de acuerdo con su longitud. Fuente: elaboración propia

El procesamiento de las líneas base se realizó con el software comercial Trimble Bussines Center (TBC) versión 5.2 con licencia de la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia (ETCG) de la Universidad Nacional (UNA). Por un lado, en la parte superior de la Fig. 3, se representa el vínculo entre la estación fija y la estación nueva con los cuadros de color azul; en la parte inferior a la izquierda se muestra el porcentaje de ocasiones en las que la estación fija fue considerada por cada punto nuevo. Por otro lado, a la derecha de la figura, se tiene el porcentaje respecto a la totalidad de las líneas base usadas. En total, se procesaron noventa y seis vectores contemplando, para las ocho estaciones CR-SIRGAS, los archivos de coordenadas semanales finales SIRGAS disponibles en: <https://www.sirgas.org/en/weekly-solutions/>, así como archivos de órbitas finales del International GNSS Service (IGS), los cuales se pueden descargar en: <https://igs.org/products-access/>.

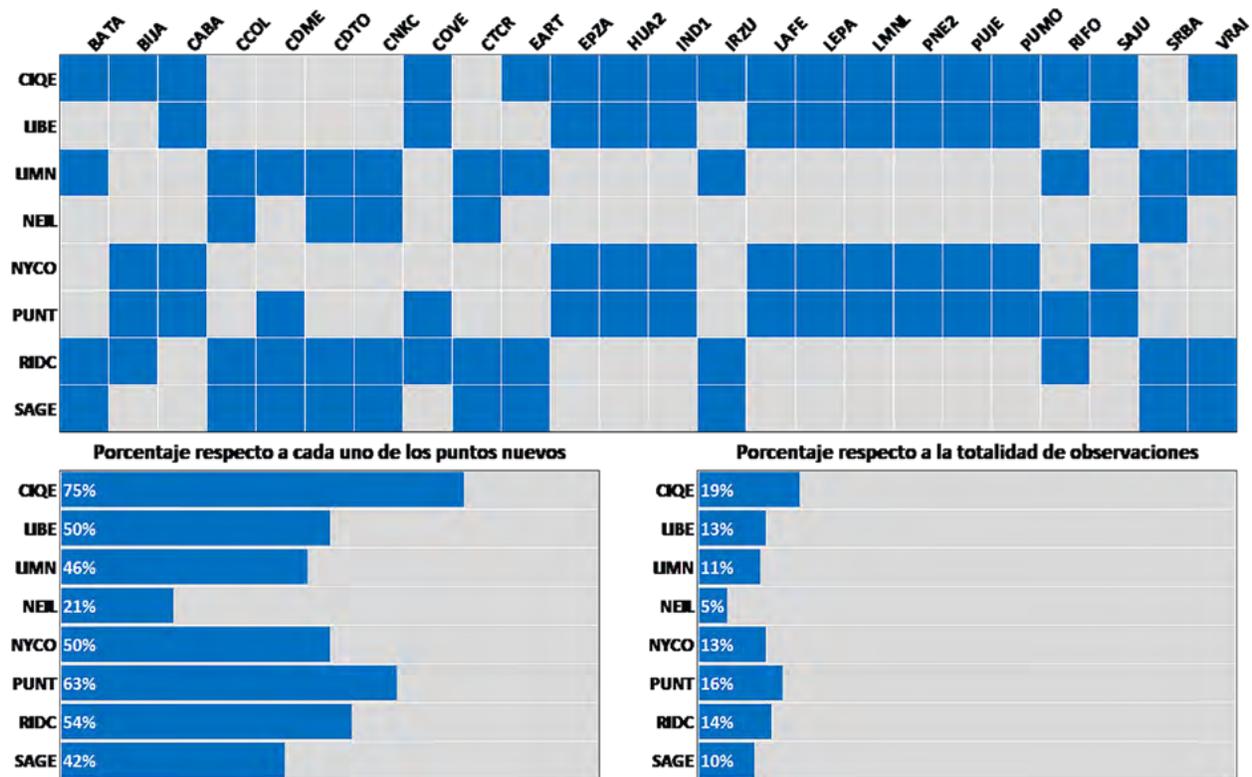


Fig. 3. En la parte superior los cuadros azules representan los puntos extremos de cada una de las líneas base y, en la parte inferior se presentan, por medio de barras horizontales el porcentaje de estaciones CR-SIRGAS usadas respecto a los puntos nuevos y a la totalidad de las observaciones. Fuente: elaboración propia

Con el fin de dar una idea del valor de la magnitud de las componentes elipsoidicas de cada uno de los vectores, en la Fig. 4, se presenta una matriz que reúne la clasificación por magnitud de cada uno de los tres tipos de componente del vector ( $\alpha$ ,  $s$  y  $\Delta h$ ). La codificación de colores se tiene en la parte de la derecha en la cual cada una de las magnitudes debe leerse considerando los intervalos en los que se encuentra la observación. En el caso de los azimuts  $\alpha$ , se establecieron cuatro rangos: valores menores o iguales a  $90^\circ$  en color rojo, valores entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  en color amarillo, valores entre  $180^\circ$  y  $270^\circ$  en color verde y valores mayores a  $270^\circ$  y menores que  $360^\circ$  en color azul. En lo que respecta a las distancias  $s$  y a las diferencias de altura  $\Delta h$ , el color azul representa magnitudes

mayores a los 125 km y 2000 m, respectivamente. En el caso de las diferencias de altura, se tomó el valor absoluto de la observación para facilitar la interpretación.

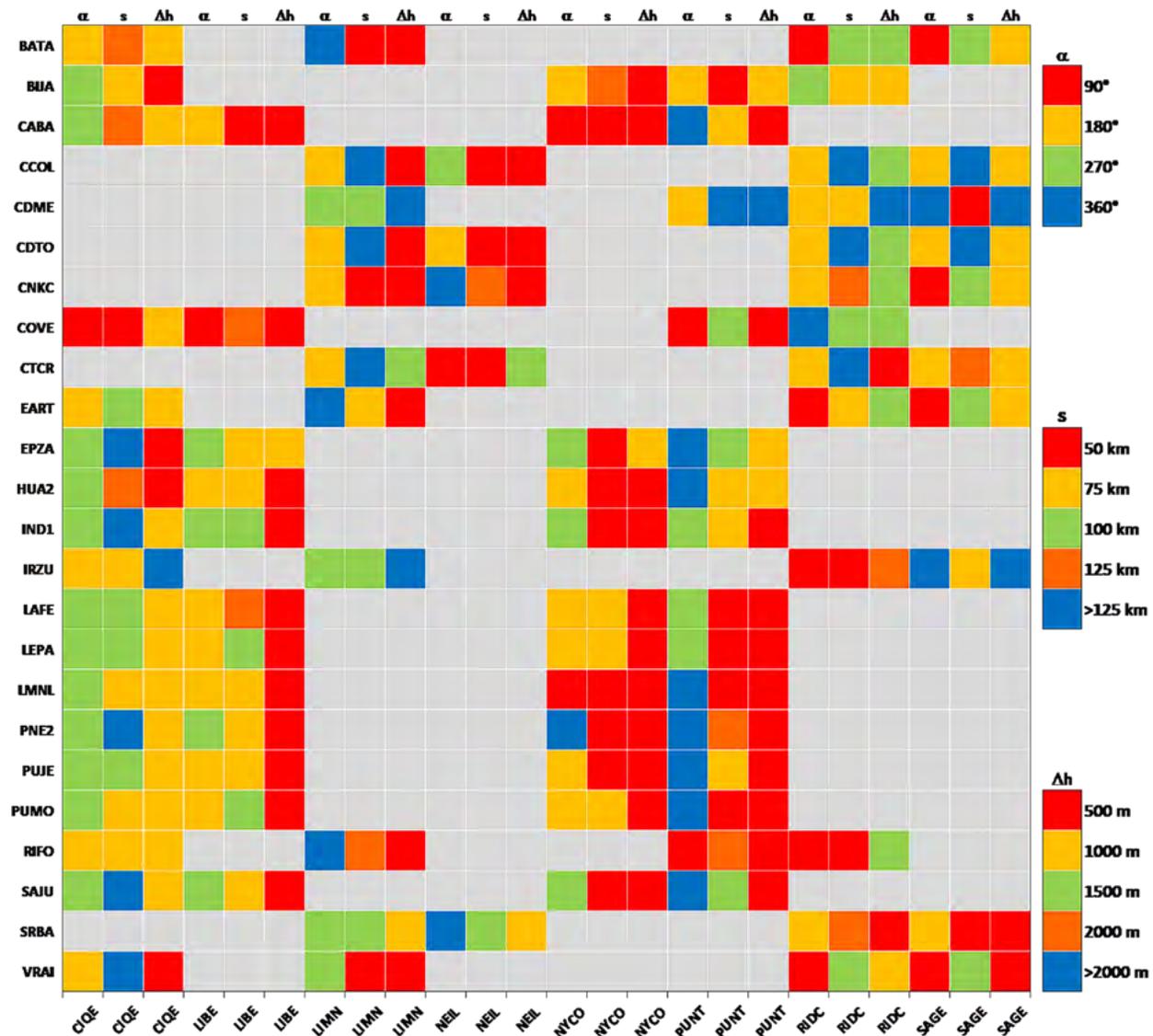


Fig. 4. Matriz de clasificación de la magnitud de cada una de las tres componentes elipsóidicas de las líneas base calculadas. El valor se ha codificado por medio de colores según la escala respectiva. Fuente: elaboración propia

#### D. Ajuste de las redes

Una vez calculados los vectores entre cada una de las estaciones de amarre y el punto nuevo se realizaron veinticuatro procesos de ajuste con un total de cuatro vectores por punto, que generaron un total de  $n = 12$  observaciones para resolver  $u = 7$  incógnitas, las tres coordenadas geocéntricas de la estación nueva, más cuatro parámetros de transformación determinados entre la red original y la solución [14]. De esta manera, cada uno de los ajustes se logró con un total de  $f = 5$  grados de libertad y pruebas estadísticas al 95 % de probabilidad [14]. Las variantes aplicadas en bloque de

ajustes contemplaron, fundamentalmente, los diferentes conjuntos de coordenadas para las estaciones de amarre, es decir, las diferentes épocas consideradas. Las variantes que se implementaron fueron las siguientes:

- 1) Ajuste en la época de observación  $t_i = 2021,53$ . Este primer bloque de ajustes para los veinticuatro puntos nuevos contempló como coordenadas de amarre los valores de las soluciones semanales finales de SIRGAS para la semana 2166. Las coordenadas ajustadas de los puntos nuevos, por lo tanto, son válidas a esta época de observación. Los resultados de las coordenadas ajustadas se presentan en el Anexo 1. En este documento, los resultados de los ajustes se denominaron 2021,53;
- 2) ajuste en la época de referencia de CR-SIRGAS  $t_0 = 2019,24$ . Los resultados de las líneas base determinadas en el paso anterior fueron usados como observaciones para determinar las coordenadas ajustadas de los puntos de la red en esta época de referencia. Se usaron como coordenadas de amarre de las estaciones CR-SIRGAS para la semana 2046. Dentro de este documento los resultados de este ajuste se denominaron 2019,24;
- 3) ajuste en la época de referencia de CR-SIRGAS  $t_0 = 2019,24$ . A diferencia del paso anterior se tomaron en estos procesos las observaciones correspondientes con esta época, específicamente el día 86 del año 2019 además de los archivos de órbitas finales del IGS y las coordenadas semanales finales para la semana 2046. Es decir, resultados en CR-SIRGAS versión 2. Las coordenadas ajustadas se presentan en el Anexo 2. En este documento los resultados de estos ajustes se denominaron CR-SIRGAS;
- 4) de conformidad con [1], se aplicaron los parámetros oficiales de transformación entre la época  $t_0 = 2019,24$  y  $t_k = 2014,59$ . Los resultados se pueden consultar en el Anexo 3. Este cálculo no responde a un proceso de ajuste. En este documento, los resultados de la transformación se denominaron 2014,59T y no requieren mayor detalle, debido a que son el resultado de aplicación de un proceso conocido.

#### 4. RESULTADOS

El modelo matemático del ajuste por mínimos cuadrados contempla dos partes denominadas modelo funcional y modelo estocástico. El primero establece las relaciones funcionales entre las observaciones y las incógnitas, el segundo, considera la matriz  $P$  de pesos de las observaciones que es la inversa de la matriz de factores y cofactores de las observaciones originales denominada  $Q_{LL}$  y esta depende del inverso de un factor denominado varianza de referencia teórica  $\sigma_0^2$ , el cual consiste en un valor adimensionado de referencia establecido inicialmente y que se aplica como un escalar a la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_{LL}$  [6],[8]. La situación descrita se presenta en el conjunto de ecuaciones (22).

$$P = Q_{LL}^{-1}$$

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{LL}$$
(22)

Luego, a partir de los residuos  $v_i$  de las observaciones, la cantidad de observaciones  $n$  y el número de incógnitas o parámetros  $u$ , se hace una estimación de la varianza de referencia por medio de la varianza empírica  $s_0^2$ , como se presenta en la ecuación (23).

$$v = Ax - l$$

$$s_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u}$$
(23)

Es común que el valor teórico de la varianza de referencia se asuma unitario y, por lo tanto, el valor a posteriori o empírico brindará información sobre dicha estimación inicial, permitiendo, adicionalmente, una cuantificación e interpretación rápida sobre el proceso de cálculo en general. En la Fig. 5 se presentan los resultados de las desviaciones estándar empíricas de la unidad de peso para los tres conjuntos de ajustes realizados.

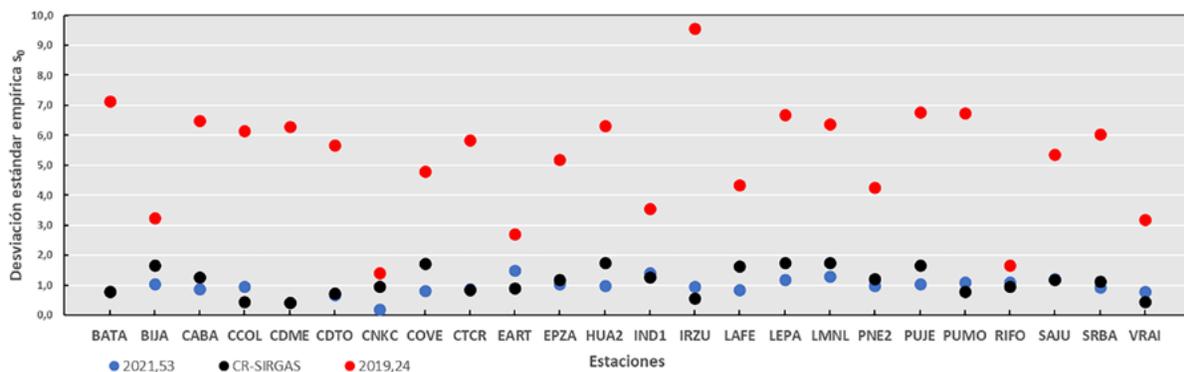


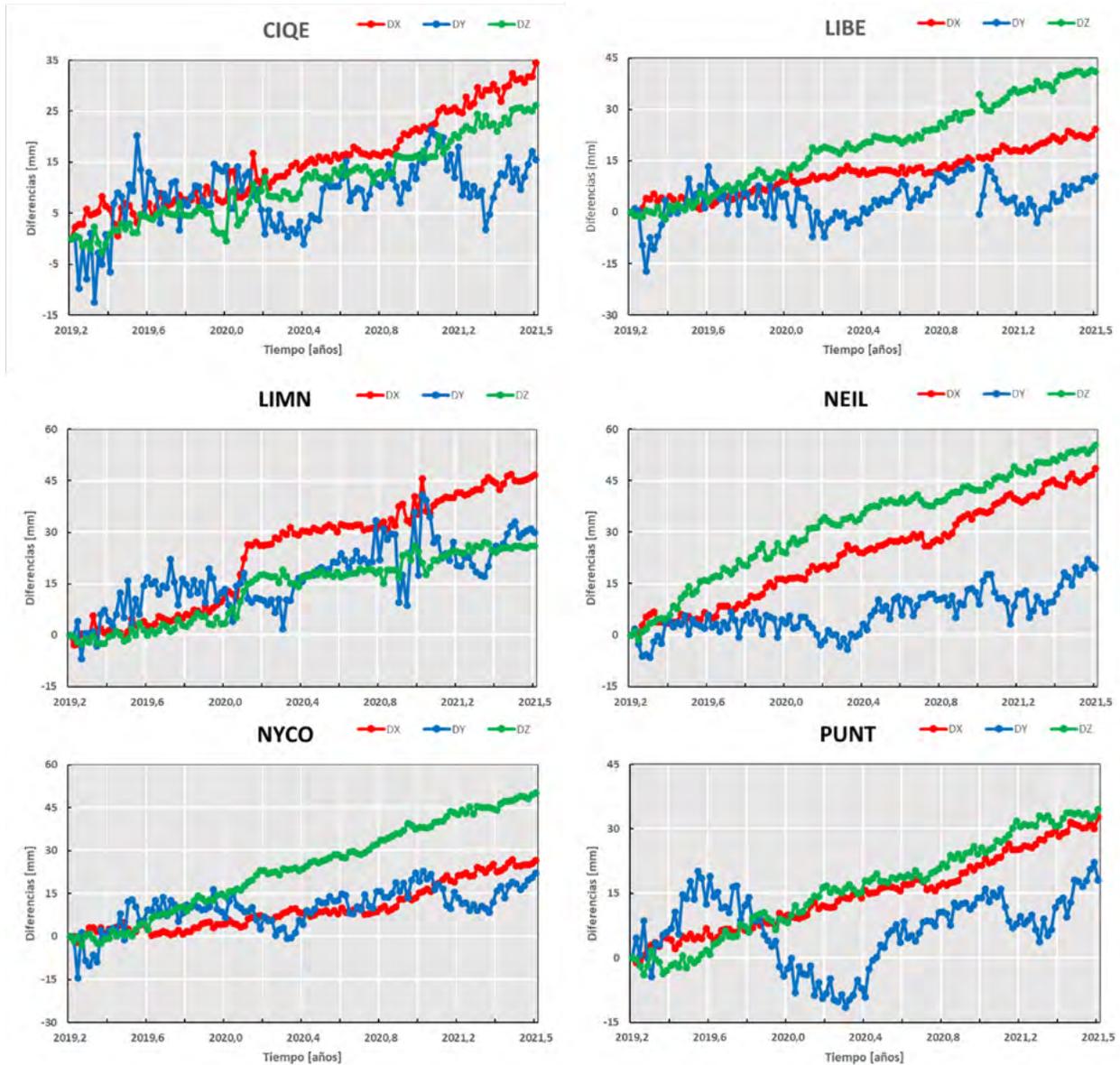
Fig. 5. Comportamiento del valor de desviación estándar empírica  $s_0$  obtenidos en los procesos de ajuste en una de las tres épocas consideradas. Fuente: elaboración propia

Se aprecia cómo los resultados de este parámetro estadístico para el caso del ajuste en la época 2019,24 con observaciones realizadas en 2021,53 (círculo de color rojo) son mayores que los logrados en los dos procesos en los que se usó correspondencia de observaciones y coordenadas. Estos valores estuvieron comprendidos en un rango entre 1,5 y 9,5 explicando que a los ajustes realizados en esta época se les aplicó un equilibrio de varianzas. Es decir, este factor aumentó la varianza de referencia inicial para lograr la aceptación del modelo matemático, lo que implicó una reducción en la calidad de los resultados, como se verá en los siguientes apartados.

## A. Cinemática de las estaciones CR-SIRGAS

CR-SIRGAS es un marco geodésico que puede ser catalogado como semicinemático y los cambios en las coordenadas de sus estaciones pueden usarse para calcular coordenadas en diferentes

instantes [15], [16]. De esta manera, las variaciones semanales en las coordenadas de vínculo como respuesta a la cinemática del país, es un aspecto que indudablemente influirá en los resultados de observaciones tomadas en diferentes épocas de observación  $t_i$  [4]. Las variaciones en las coordenadas de las estaciones del marco nacional CR-SIRGAS se obtienen a partir de los archivos de coordenadas semanales finales de SIRGAS. A partir de estas, se presentan, en la Fig. 6, sus series temporales entre la época 2019,25 y la 2021,53. Concomitantemente, el CUADRO II muestra el rango de variación por coordenadas para cada una de esas estaciones en el intervalo de tiempo considerado.



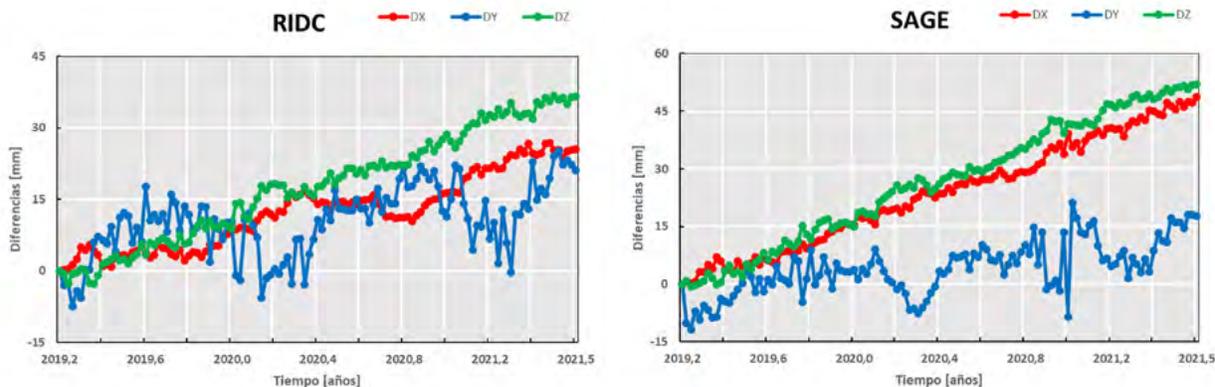


Fig. 6. Series temporales en coordenadas cartesianas geocéntricas para las ocho estaciones CR-SIRGAS desde la época 2019,24 hasta la época 2021,53. Fuente: elaboración propia a partir de las soluciones semanales SIRGAS

CUADRO II

Cuantificación del rango de variación en coordenadas geocéntricas cartesianas para cada una de las ocho estaciones CR-SIRGAS para el intervalo de estudio

Rango	CIQE	LIBE	LIMN	NEIL	NYCO	PUNT	RIDC	SAGE
X [mm]	34,5	25,2	49,7	48,6	28,8	33,8	26,9	48,7
Y [mm]	33,8	31,3	47,8	28,7	37,3	33,7	32,5	33,0
Z [mm]	28,9	43,6	29,6	56,7	53,1	38,4	39,6	52,8

Los resultados anteriores confirman y cuantifican los cambios en las coordenadas de las ocho estaciones CR-SIRGAS, lo cual repercute directamente en la época de observación. Por ejemplo, viendo la Fig. 6, si se realizaran mediciones en una época  $t_m = 2020,30$  y se tomara como referencia la estación SAGE, pero considerando sus coordenadas en la época de referencia  $t_0 = 2019,24$ , habría discrepancias entre los +15 mm y +30 mm en las coordenadas X y Z, mientras que, en la coordenada Y, se tendría una variación aproximada de -10 mm solo por el dinamismo del propio marco. Estos cambios producirían efectos en los resultados de los ajustes en la época de observación.

**B. Coordenadas ajustadas de los puntos nuevos**

La salida del programa de procesamiento brinda tres tipos de coordenadas ajustadas para los puntos nuevos: coordenadas cartesianas geocéntricas ( $X, Y, Z$ ), coordenadas geodésicas elipsoídicas ( $\varphi, \lambda, h$ ) y coordenadas cartográficas planas ( $N, E$ ), en este caso, en la proyección nacional Costa Rica Transversa Mercator (CRTM05), acompañada de una estimación de la altura nivelada ( $H$ ) del punto obtenida por medio de la diferencia entre la altura geodésica  $h$  y el valor de la ondulación del geoide  $N$  para el punto según el modelo EGM2008 [17]. En el CUADRO III, se presentan los resultados de las diferencias en coordenadas cartesianas geocéntricas entre las tres épocas

consideradas. Se nota, en la comparación CR-SIRGAS y 2019,24, que los valores de las diferencias son menores respecto a las otras dos comparaciones. Esto se debe a que se usó la misma época y a que las coordenadas obtenidas en 2019,24 están ajustadas, es decir, el algoritmo de ajuste por mínimos cuadrados genera una solución de coordenadas sacrificando, en este caso particular, la geometría de la red y la exactitud de las coordenadas. Esta situación debe complementarse con el análisis de los residuos y las exactitudes de las observaciones ajustadas.

### CUADRO III

Cuantificación de las diferencias en coordenadas cartesianas geocéntricas obtenidas para cada una de las épocas consideradas y sus los valores mínimo, máximo y rango

Estación	(2021,53 – CR-SIRGAS)			(2021,53 – 2019,24)			(CR-SIRGAS – 2019,24)		
	X [cm]	Y [cm]	Z [cm]	X [cm]	Y [cm]	Z [cm]	X [cm]	Y [cm]	Z [cm]
BATA	3,2	1,7	2,0	3,8	2,5	3,4	0,6	0,8	1,4
BIJA	3,7	-0,1	1,7	2,8	2,1	3,7	-1,0	2,2	2,1
CABA	3,1	1,4	5,3	2,6	1,9	4,1	-0,5	0,5	-1,3
CCOL	6,3	2,5	5,6	5,6	1,6	5,7	-0,7	-1,0	0,1
CDME	4,0	2,6	4,7	4,0	2,0	3,7	0,0	-0,6	-1,0
CDTO	4,5	3,1	4,6	5,1	1,9	5,7	0,6	-1,2	1,2
CNKC	2,4	4,4	1,9	4,1	2,1	4,4	1,7	-2,3	2,5
COVE	3,7	0,9	2,2	3,4	0,1	3,6	-0,2	-0,8	1,5
CTCR	5,0	0,4	3,7	4,6	1,3	5,4	-0,4	0,9	1,7
EART	3,7	5,0	2,0	3,5	2,1	3,6	-0,2	-3,0	1,6
EPZA	2,5	4,2	3,9	2,4	2,5	4,7	0,0	-1,8	0,8
HUA2	3,0	4,9	4,5	2,2	2,5	4,0	-0,8	-2,3	-0,5
IND1	4,7	4,1	6,1	1,5	2,8	4,5	-3,2	-1,3	-1,6
IRZU	3,9	3,6	3,0	3,7	2,1	3,2	-0,2	-1,5	0,2
LAFE	3,3	2,4	3,9	2,7	2,4	3,6	-0,6	0,0	-0,3
LEPA	3,8	1,2	4,5	2,5	2,4	3,2	-1,2	1,2	-1,2
LMNL	3,3	0,3	4,4	2,8	1,5	3,7	-0,5	1,2	-0,7
PNE2	1,8	2,5	4,7	2,3	3,0	4,9	0,5	0,5	0,3
PUJE	3,6	0,7	3,7	2,3	2,1	3,9	-1,3	1,5	0,2
PUMO	3,3	0,3	4,6	2,7	2,1	3,4	-0,6	1,8	-1,3
RIFO	3,6	-0,9	2,5	3,3	1,8	3,3	0,4	0,4	0,5
SAJU	3,2	1,7	4,5	2,0	2,8	4,6	-1,3	1,1	0,2
SRBA	4,8	2,2	5,6	4,5	2,6	4,8	-0,2	0,4	-0,8
VRAI	3,6	2,2	2,9	4,0	2,5	3,3	0,4	0,4	0,5
Mínimo	1,8	-0,9	1,7	1,5	0,1	3,2	-3,2	-3,0	-1,6
Máximo	6,3	5,0	6,1	5,6	3,0	5,7	1,7	2,2	2,5
Rango	4,5	5,9	4,5	4,1	2,9	2,5	4,9	5,2	4,1

Fuente: elaboración propia

Con el objetivo de visualizar principalmente la magnitud y la dirección, debido a la diferencia de coordenadas entre CR-SIRGAS y 2021,53, en la Fig. 7, se presenta los vectores desplazamientos calculados con base en coordenadas cartográficas.

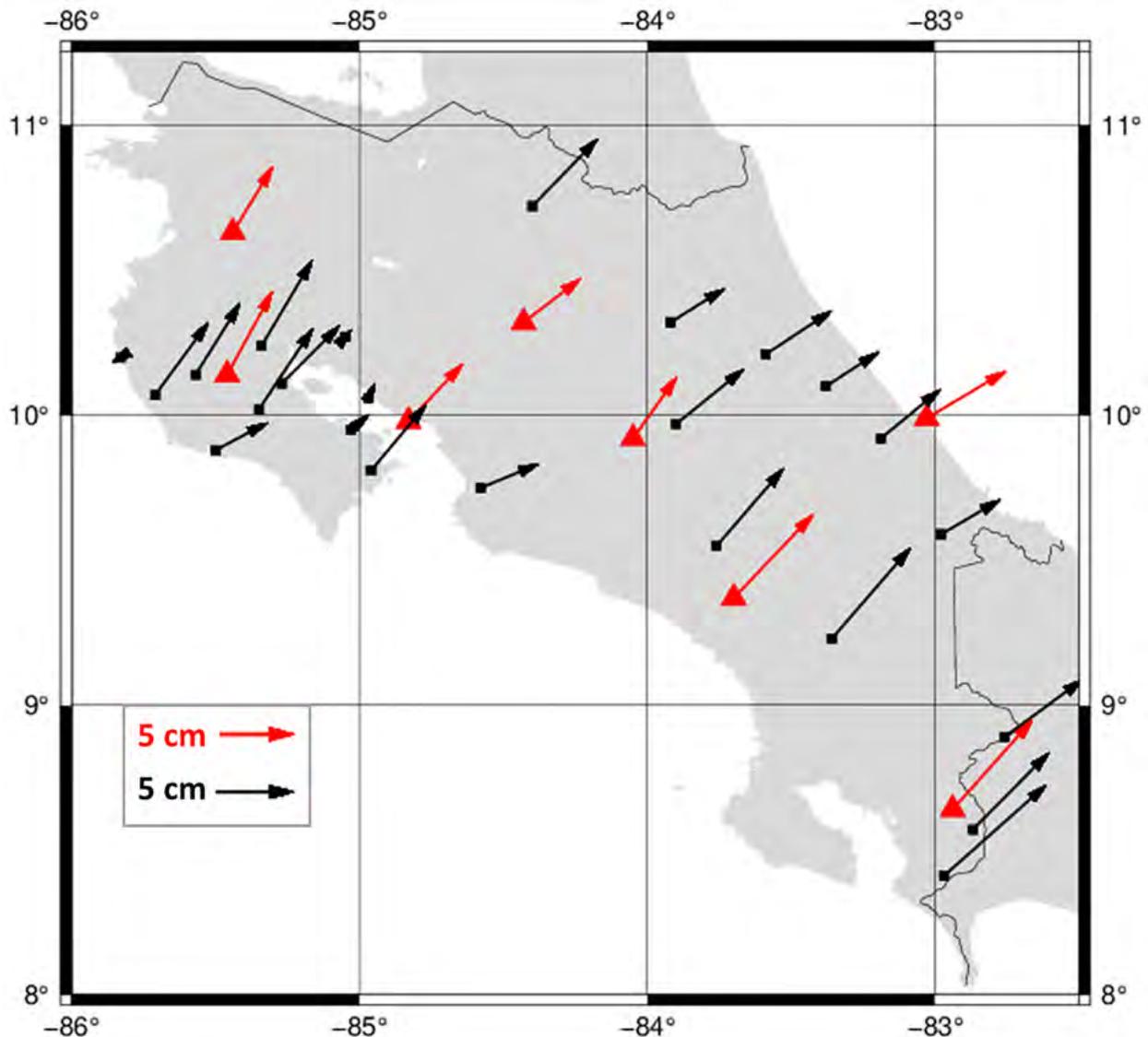


Fig. 7. Vectores de desplazamiento determinados con base en coordenadas cartográficas entre la época 2021,53 y 2019,24. Mapa compilado con Generic Mapping Tools (GMT) versión 6.0.0 [12]. Fuente: elaboración propia

Se nota cómo la dirección y magnitud de los vectores responde efectivamente con el movimiento esperado que sigue el país al estar ubicado sobre la Placa Caribe e influenciado por la Placa Cocos [18]. En este proyecto particular, se tuvo un desplazamiento promedio 4,82 cm que representan unos 2,1 cm por año en un azimut promedio de 55° para los puntos nuevos, mientras que las estaciones CR-SIRGAS tuvieron una magnitud de 5,75 cm es decir unos 2,5 cm por año en un azimut promedio de 42° [4] y [18].

### C. Exactitud en las coordenadas ajustadas

Uno de los parámetros más importantes, y que generalmente la mayoría de los usuarios revisa inmediatamente luego del proceso de ajuste, es la exactitud de las coordenadas ajustadas de los puntos nuevos. Estos resultados se obtuvieron configurando las pruebas estadísticas del programa de procesamiento para trabajar con un 95 % de probabilidad. Los resultados mínimo, máximo y promedio de las exactitudes para cada una de las tres variantes de ajuste se presentan en el CUADRO IV.

CUADRO IV

Valores mínimo, máximo y promedio de las exactitudes obtenidas en cada una de las tres épocas consideradas

Época	2021,53			CR-SIRGAS			2019,24		
	SX [mm]	SY [mm]	SZ [mm]	SX [mm]	SY [mm]	SZ [mm]	SX [mm]	SY [mm]	SZ [mm]
Mínimo	1,3	6,1	1,6	2,1	9,7	2,2	8,3	40,9	10,7
Máximo	9,2	49,8	11,2	10,9	84,3	18,1	23,3	135,7	29,4
Promedio	3,0	16,7	3,8	5,8	31,1	6,8	14,5	81,0	18,9

Fuente: elaboración propia

En el conjunto de gráficos de la Fig. 8, se presentan por medio barras verticales, la exactitud en las coordenadas geocéntricas para cada uno de los veinticuatro puntos nuevos. Se aprecia que en el caso de las coordenadas X y Z, para los resultados de 2021,53, los valores son menores a  $\pm 5$  mm. En el caso de la coordenada Y, como es de esperar, se tienen valores menores a los  $\pm 25$  mm, excepto en los puntos EART, IND1 y RIFO. En los resultados del ajuste CR-SIRGAS, el comportamiento general de la exactitud en las coordenadas X y Z se mantiene en  $\pm 10$  mm, exceptuando el punto COVE, mientras que en la coordenada Y los valores están por debajo de los  $\pm 50$  mm, con excepción en los puntos COVE e IND1. En el caso de los resultados en 2019,24, las barras de color rojo presentan valores elevados (ver CUADRO IV) respecto a los casos 2021,53 y CR-SIRGAS, llegando a  $\pm 25$  mm para CCOL en X, más de  $\pm 125$  mm en IND1 para la coordenada Y, y casi  $\pm 30$  mm en Z para la misma estación IND1.

El efecto de las discrepancias entre las exactitudes de las coordenadas ajustadas obtenidas de los resultados de los procesamientos de CR-SIRGAS y 2019,24 respecto a 2021,53, se cuantificó utilizando un factor de reducción  $f_r$ , el cual tendrá valores menores, iguales o mayores que la unidad representando incremento, igual o pérdida de exactitud respectivamente. Estos valores se presentan en la Fig. 9 donde se hizo una codificación de colores para facilitar la identificación del  $f_r$  y en la cual, adicionalmente, se calculó el promedio de este factor. Se nota en el bloque de la izquierda que

el promedio del  $f_i$  se encuentra entre 0,6 y 4,2, mientras que en el bloque de la derecha el promedio aumenta a un rango entre 1,8 y 15,3. En esta figura, se evidencia también un elemento sistemático en cada una de las comparaciones por cada una de las coordenadas. el cual puede ser atribuido precisamente a que el marco CR-SIRGAS es cinemático y, por lo tanto, las coordenadas de sus estaciones presentaron variaciones constantes de este estudio.

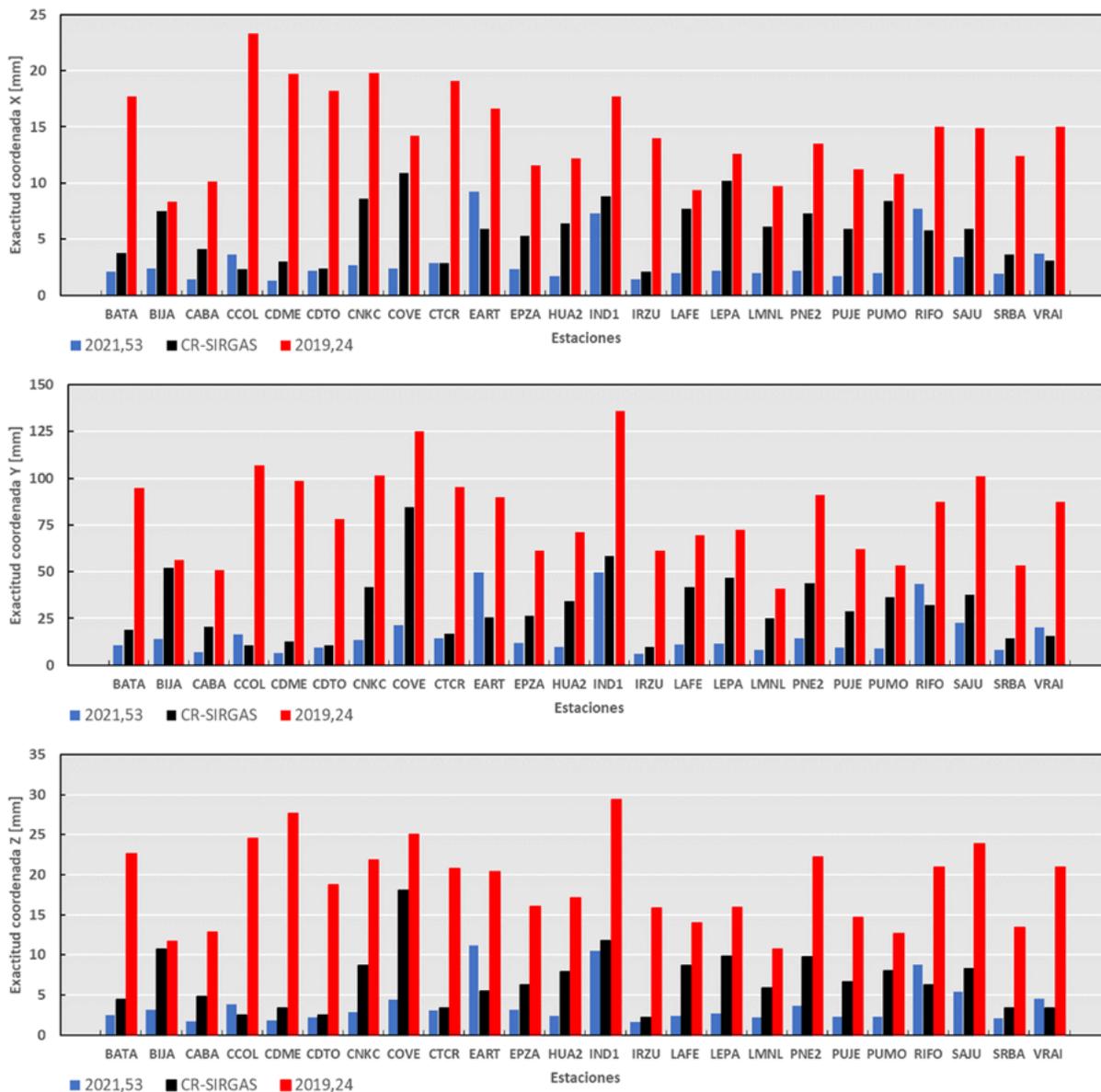


Fig. 8. Comparación de la exactitud en cada una de las tres coordenadas cartesianas geocéntricas para todos los puntos nuevos. Fuente: elaboración propia

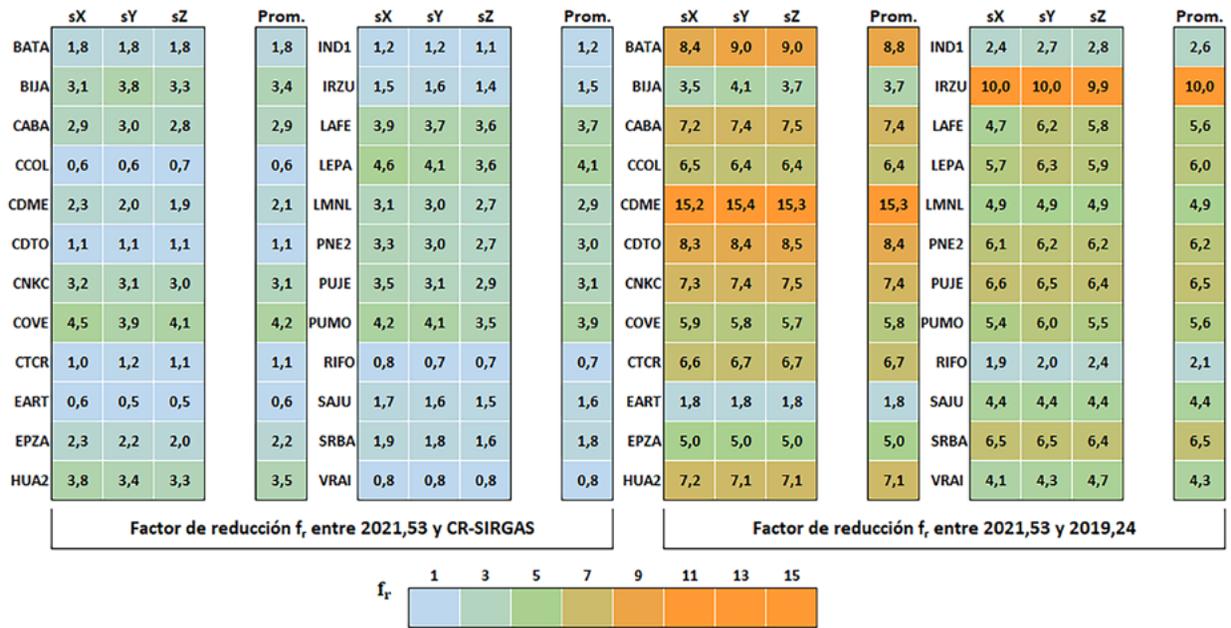


Fig. 9. Valores del factor de reducción determinado con base en los resultados de la exactitud en las coordenadas cartesianas geocéntricas. Fuente: elaboración propia

#### D. Elipses absolutas de confianza

El programa de cálculo TBC también ofrece, dentro de sus salidas, los tres parámetros de las elipses absolutas de confianza: semieje mayor  $a$ , semieje menor  $b$  y azimut  $\theta$  del semieje mayor. Estas regiones de confianza, al depender de los coeficientes de la matriz de factores y cofactores de las incógnitas y de la cantidad de grados de libertad del ajuste, estarán relacionadas precisamente con los resultados de la exactitud y, considerando la configuración geométrica, brindan información sobre la calidad de los puntos.

En los apartados anteriores, se ha expuesto que la exactitud de las coordenadas ajustadas de los puntos nuevos en el ajuste 2019,24 baja considerablemente respecto a dos resultados. En las tres determinaciones, la excentricidad promedio de las elipses fue 0,588, sin embargo, el aumento en los ejes para las elipses en el ajuste 2019,24 estuvo entre 1,5 y 15. La representación de estas regiones de confianza se presenta en la Fig. 10, donde a la derecha se presentan en conjunto las elipses obtenidas de los ajustes 2021,53 y CR-SIRGAS dibujadas aumentadas en un factor 250, y, a la derecha, se agregan, en color rojo, las elipses del ajuste 2019,24 y se mantuvo la escala para destacar las diferencias. El azimut del semieje mayor prácticamente se mantuvo invariable en los tres casos.

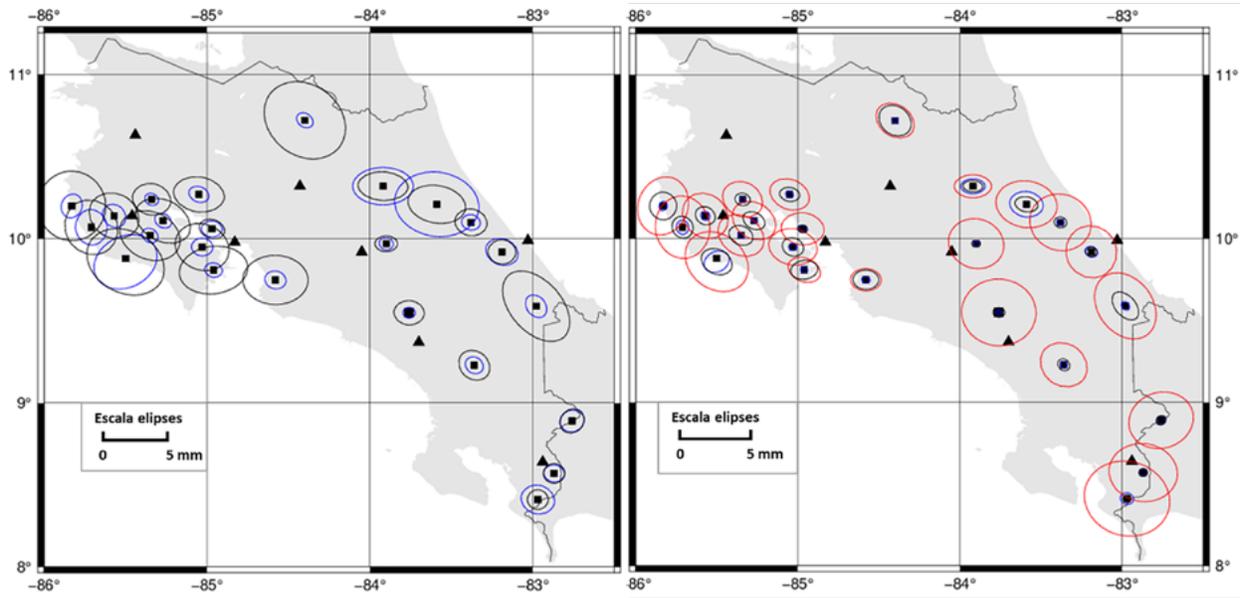


Fig. 10. A la derecha comparación de las elipses absolutas de confianza, épocas 2021,53 y CR-SIRGAS (color negro y azul respectivamente), a la derecha se agregan las correspondientes elipses de la época 2019,24 (color rojo). Mapa compilado con Generic Mapping Tools (GMT) versión 6.0.0 [12]. Fuente: elaboración propia

## E. Observaciones ajustadas

Las observaciones ajustadas son el resultado de la suma de las observaciones originales y los respectivos residuales siguiendo el principio de mínimos cuadrados. El programa de procesamiento brinda, como parte de las salidas, las componentes elipsoídicas de cada uno de los vectores calculados, así como su residual y error. Una primera forma para analizar el comportamiento de las observaciones ajustadas y sus exactitudes se presenta en esta Fig. 11, donde se muestra la matriz de correlación respectiva determinada para cada una de las tres épocas de referencia.

En la misma Fig. 11, se puede observar, por un lado, que las componentes ajustadas de cada uno de los vectores en las tres épocas son prácticamente independientes con un coeficiente de correlación promedio de  $-0,02$ , sin embargo, las componentes de distancia y diferencia de altura entre las distintas épocas están totalmente correlacionadas, así como la componente de azimut solamente entre las épocas 2021,53 y 2019,24. Por otro lado, se observa que las exactitudes en las componentes de distancia y diferencia de altura están altamente correlacionadas en las tres épocas, llegando a un valor promedio de  $+0,82$ . Se ve, además, que las exactitudes en la componente angular están medianamente relacionadas con las respectivas exactitudes en distancia y diferencia de altura solamente en la época 2021,53. Este comportamiento no se repite para CR-SIRGAS ni 2019,24. Luego, las correlaciones entre los grupos de datos tienen diferentes valores, destacándose la relación inversa entre las distancias y la exactitud azimutal con un promedio de correlación de  $-0,65$  en todas las épocas.

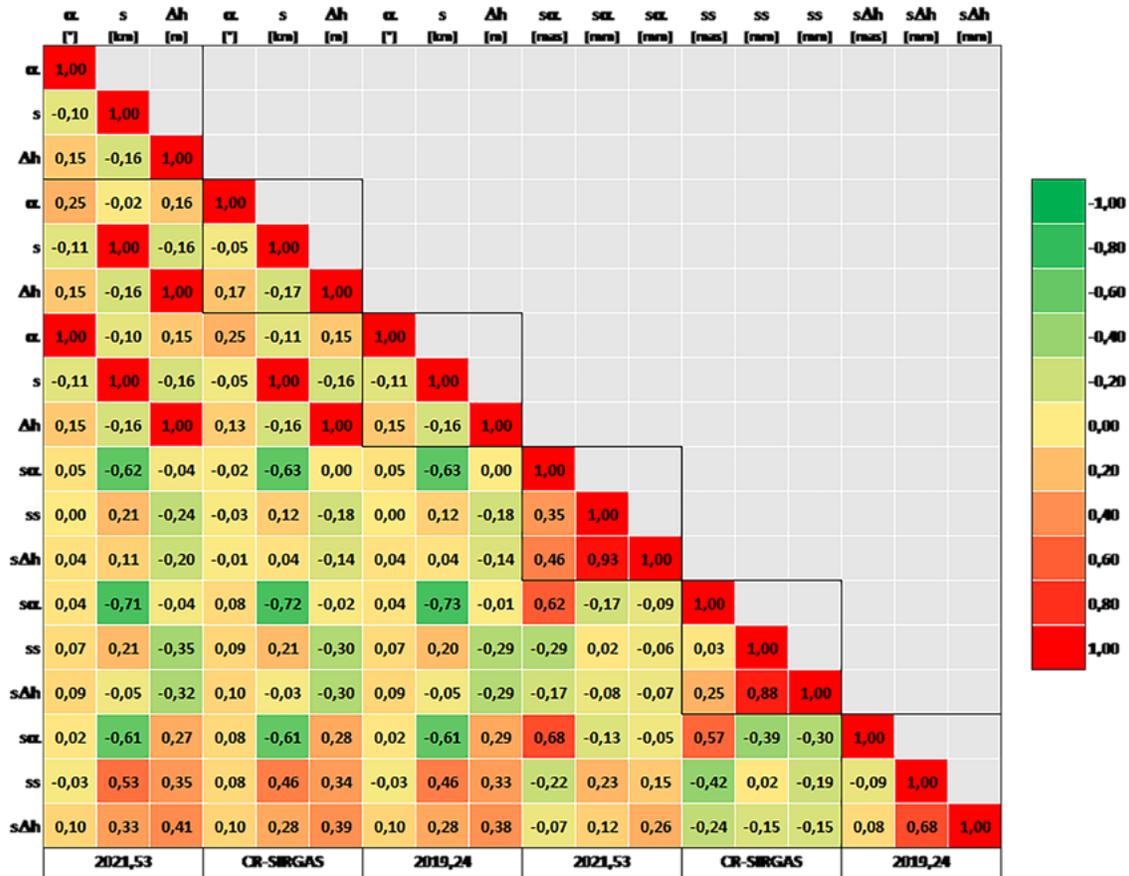


Fig. 11. Matriz de correlación para los conjuntos de observaciones ajustadas obtenidas en cada una de las tres épocas consideradas. Fuente: elaboración propia

Los residuales son las correcciones que proporciona el algoritmo de ajuste a las observaciones originales. En el conjunto de gráficos de la Fig. 12, se presenta su distribución por época de ajuste y su tipo de magnitud. Superpuesta, se grafica la curva de la función de densidad en color negro. En las filas de arriba hacia abajo, se muestran los resultados generados por los ajustes relativos a 2021,53, CR-SIRGAS y 2019,24 y, en las columnas de izquierda a derecha, se presentan las componentes elipsoídicas de azimuth, distancia y diferencia de altura, respectivamente. En los gráficos de la figura, se observa, evidentemente, que los residuos son aleatorios y que se distribuyen de una manera prácticamente normal. Además, se nota que, en el caso del ajuste CR-SIRGAS, las tres componentes tienen una dispersión menor, aproximadamente la mitad al compararla con el ajuste 2021,53. Sin embargo la dispersión de los residuales en el ajuste 2019,24 es mucho mayor en todas las componentes, lo cual implica que se tuvieron valores individuales que se alejan del valor central. Debe también indicarse que, en todos los setenta y dos procesos de ajuste realizados, no hubo evidencia estadística de observaciones groseras.

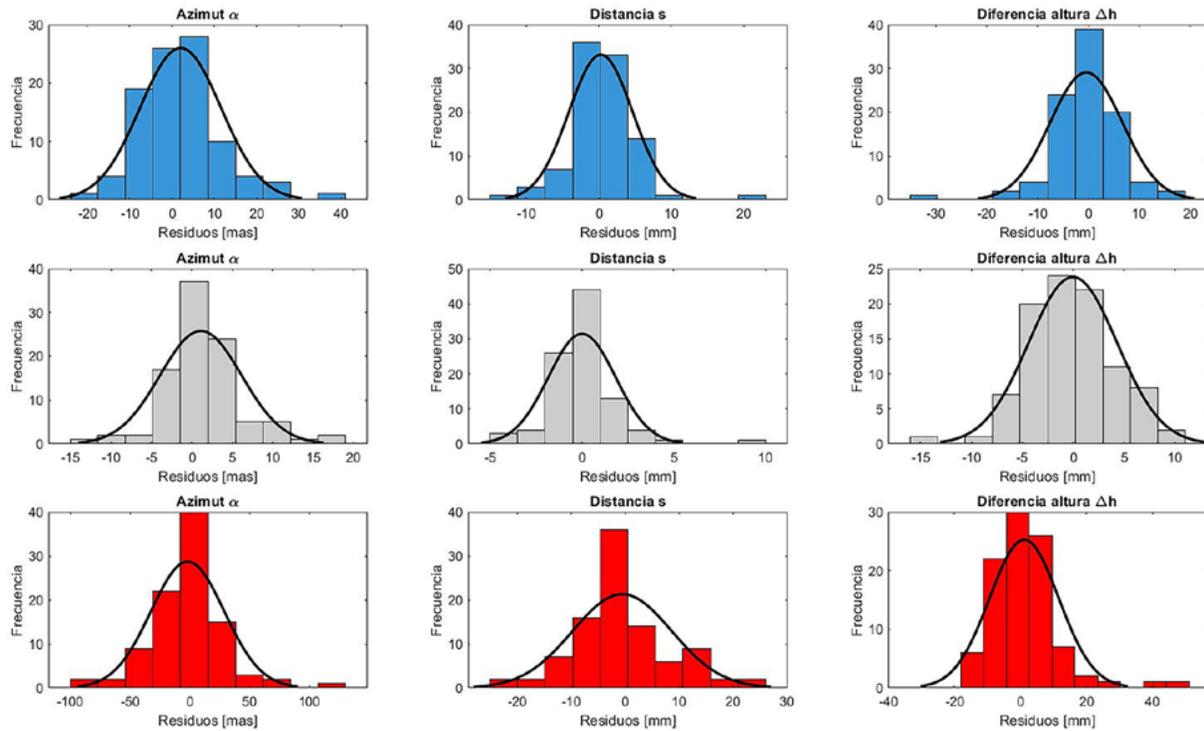
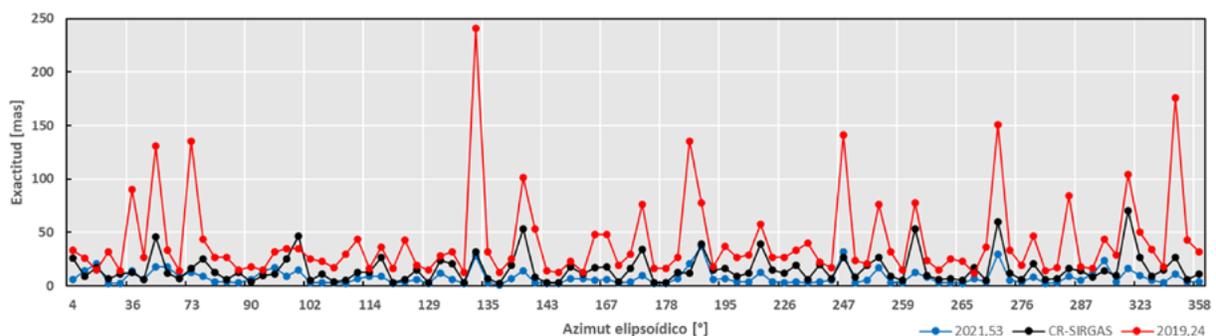


Fig. 12. Distribución de los residuos para cada una de las componentes geodésicas de las líneas base ajustadas. Fuente: elaboración propia

La exactitud de las observaciones ajustadas no siempre es considerada importante por los usuarios, sin embargo, ofrece valiosa información cuando se analizan los resultados de un proceso de ajuste. En observaciones GNSS, una primera evaluación se da, por ejemplo, al usar la exactitud nominal de los receptores en las componentes horizontal y vertical y en los respectivos modos estático y cinemático. Ahora bien, probablemente esta estimación inicial teórica de los errores sea aplicada solamente para contar con información general que permita a los usuarios conocer la incertidumbre en la longitud de las potenciales líneas base a medir y en muy pocos casos se le prestará atención a la componente vertical y la estimación en la parte angular será prácticamente nula.

En el conjunto de gráficos de la Fig. 13 se presentan las exactitudes obtenidas de los procesos de ajuste respecto a las tres épocas analizadas. En el eje vertical, se tiene la magnitud de la exactitud y, en el eje horizontal, los valores de cada una de las líneas base ordenadas de manera ascendente. El objetivo es mostrar el comportamiento de la exactitud en función de su componente respectiva.



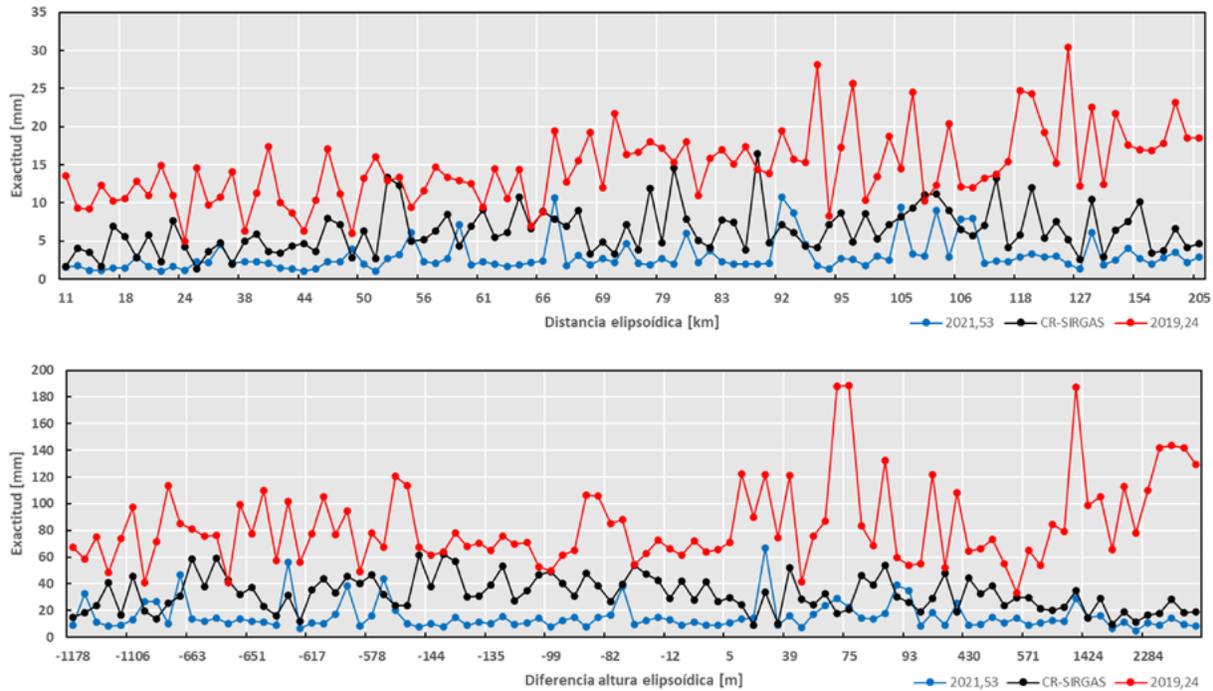


Fig. 13. Comparación de las exactitudes en observaciones ajustadas ordenadas ascendentemente de acuerdo con las magnitudes geodésicas de las líneas base ajustadas. Fuente: elaboración propia

De forma complementaria a la información presentada anteriormente, en el conjunto de gráficos de la Fig. 14 se presenta, en el eje vertical, la exactitud de las observaciones ajustadas separadas en sus componentes de azimut, distancia y diferencia de altura y en el eje horizontal, la cantidad de observaciones de cada componente separadas en rangos de veinte observaciones. Los puntos en cada uno de los segmentos representan los valores de exactitud ordenados ascendentemente e identificados por colores azul, naranja, gris y amarillo, de acuerdo con el rango de la observación para la época 2021,53. Adicionalmente, el conjunto de puntos de color rojo representa la exactitud de las observaciones ajustadas en la época 2019,24.

La idea general de la Fig. 14 es mostrar el comportamiento de la exactitud en cada componente independientemente del valor de la observación. Se nota que la exactitud en el ajuste 2019,24 es visiblemente más baja con respecto a los valores logrados en 2015,53 y en CR-SIRGAS. Particularmente la componente azimutal en esta época presentó valores que superaron los  $\pm 100$  mas (10-3 segundos) de exactitud. Fue, por esta razón, que se decidió eliminar esas observaciones del gráfico con lo cual se logró que en la escala vertical se aprecien los valores del resto de observaciones. Se recalca el hecho de que, aunque la exactitud en algunos azimuts fue superior a los  $\pm 100$  mas, estadísticamente no se catalogaron como observaciones groseras. Aun así, se notan observaciones en el bloque de las veinte a las ochenta observaciones cuya exactitud decrece a más de  $\pm 60$  mas. Se aprecia, además, cómo las exactitudes obtenidas en 2021,53 y CR-SIRGAS prácticamente coinciden en el bloque de las cuarenta a las noventa y seis observaciones, mientras que en los dos primeros bloques se tiene un comportamiento aleatorio para CR-SIRGAS y 2019,24 respecto a 2021,53. En el caso de las distancias elipsóidicas, los resultados de la exactitud tienen un comportamiento

que se catalogó como similar en los primeros cuatro bloques y, en el quinto bloque, 2021,53 y CR-SIRGAS prácticamente coinciden y quedando por debajo de los  $\pm 10$  mm. En todos los bloques de observaciones, se evidencia la disminución de la exactitud en 2019,24 con valores que alcanzan los  $\pm 30$  mm. Las observaciones de diferencias de altura elipsoídicas se graficaron calculando el valor absoluto de la observación para facilitar la interpretación del gráfico. Se evidencia que estas observaciones en 2021,53 se mantienen por debajo de los  $\pm 20$  mm con una alta coincidencia en el último bloque de observaciones. Con respecto a CR-SIRGAS, la exactitud estuvo en los  $\pm 20$  mm y los  $\pm 60$  mm. Sin embargo, la exactitud vertical de 2019,24 alcanza un rango entre los  $\pm 60$  mm y los  $\pm 140$  mm con tres observaciones que superan los  $\pm 180$  mm.

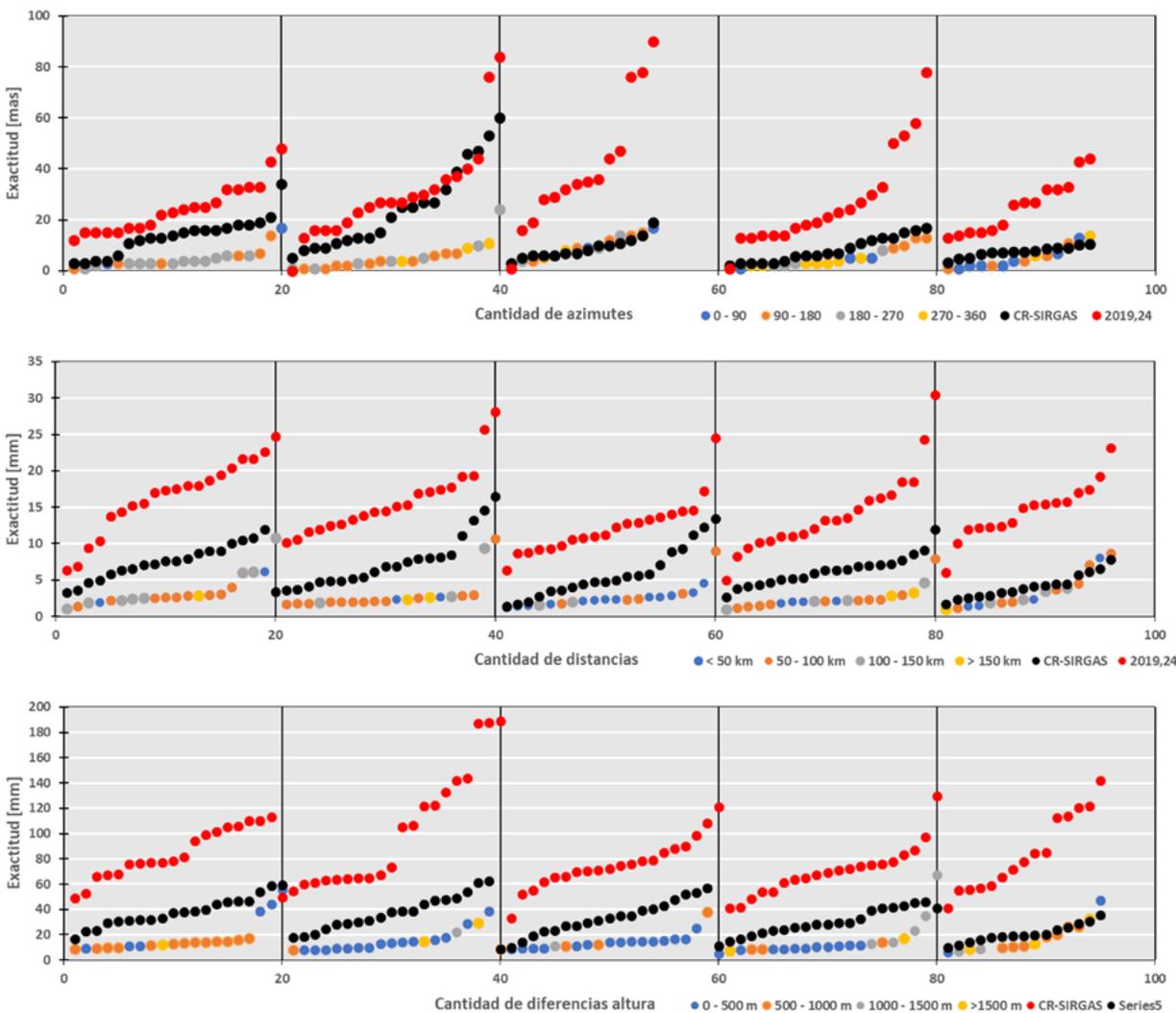


Fig. 14. Comportamiento de la exactitud para cada una de las tres componentes geodésicas de las líneas base independientemente del valor de su magnitud ajustada. Fuente: elaboración propia

#### 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

- El post-procesamiento correcto de observaciones GNSS requiere contemplar, indiscutiblemente, archivos de coordenadas finales de las estaciones que se tomarán como vínculo y de los archivos de órbitas finales, cuando se ocupe garantizar un nivel de exactitud subcentimétrico necesario para diferentes aplicaciones como la georreferenciación de información espacial. Los resultados presentados en este artículo se refirieron principalmente a cuantificar la disminución de la calidad en los resultados de ajustes GNSS por influencia de la época de observación y referencia.
- El actual marco geodésico de referencia nacional, CR-SIRGAS, brinda la información necesaria que cuantifica, de manera general, los cambios físicos del país. Estos cambios repercuten en la cinemática propia de ese marco dando como resultado, dentro del período de este estudio (2,3 años), que los cambios en las coordenadas cartesianas geocéntricas estuvieran entre los 25 mm y los 57 mm (ver Figura 6). En otras palabras, las coordenadas de referencia de las estaciones CR-SIRGAS válidas en la época  $t_0 = 2014,59$  variaron significativamente con el tiempo en concordancia con el movimiento general del país.
- Se realizó un análisis de todos los parámetros que se ofrecen en las salidas del programa de procesamiento TBC. En primer lugar, la varianza de referencia inicial se vio aumentada, lo que implicó una disminución en la calidad de los restantes parámetros estadísticos (ver Fig. 5). La clara disminución en el peso inicial de las observaciones es un aspecto que no se había cuantificado y que evidentemente influye de forma negativa en los resultados. La cuantificación del equilibrio de la varianza inicial estuvo entre 1,5 y 9,5. En el caso concreto de este estudio, se evidenció que mediciones de 24 h, tomadas en la época de observación  $t_i = 2021,53$ , brindaron resultados con una alta exactitud cuando fueron debidamente procesados, es decir, contemplando coordenadas de amarre y órbitas finales en la respectiva época de observación (ver CUADRO IV). Sin embargo, este mismo conjunto de mediciones, al ser procesado en la época de referencia  $t_0 = 2019,24$ , presentó una disminución en la calidad de los resultados de coordenadas y observaciones ajustadas (ver CUADRO IV y Fig. 10, 13 y 14).
- Se determinó la matriz de correlación de las observaciones ajustadas obtenidas para cada una de las épocas consideradas. Esta matriz muestra que, dependiendo del tipo de magnitud y de la época respectiva, el coeficiente de correlación puede ser significativo; además, como parte del análisis global, se mostró el comportamiento de los residuales, su función de distribución (ver Fig. 12) y el comportamiento de las componentes geodésicas de las líneas base ajustadas (ver Fig. 13 y 14).
- Se lograron también cuantificar las diferencias en las coordenadas ajustadas obtenidas con observaciones registradas en la épocas 2019,24 y 2021,53 y llevadas estas últimas a la época 2019,24. Los resultados demostraron que la diferencia en las coordenadas cartesianas geocéntricas ajustadas en 2019,24 está entre los 4,1 mm y 5,2 mm (CUADRO III); aunque

la diferencia es pequeña, la misma debe ser analizada en concordancia con la exactitud en las coordenadas ajustadas, la cual disminuye presentando valores entre  $\pm 8$  mm y  $\pm 136$  mm (CUADRO IV y Fig. 8) y con la respectiva disminución de la exactitud de las observaciones ajustadas (ver Fig. 13 y 14).

- Se cuantificó la afectación en la exactitud de las coordenadas cartesianas geodésicas ajustadas (Fig. 9) por medio del denominado factor de reducción  $f_r$ , que tomó valores extremos entre 2 y 15, afectando fuertemente a las estaciones CDME e IRZU y, en menor grado, a las estaciones EART y RIFO.
- Se presentó el comportamiento de las elipses absolutas de confianza al 95 % de probabilidad (Fig. 10), en las que se evidenció un aumento de los semiejes en los resultados 2019,24 y, sin embargo, se mantiene una orientación azimutal prácticamente invariable en las tres épocas. Esto es producto de la misma configuración en las redes, pero con repercusión de la época de observación. Es decir, el aumento en el tamaño de las regiones de confianza no se debe a la configuración de las redes, sino producto de la referencia temporal.
- El usuario deberá tener claro que el ajuste de un conjunto de observaciones GNSS estará ligado a su época de referencia, por lo que, necesariamente, tendrá que considerar órbitas finales y coordenadas de vínculo a la misma época. Además, se debe señalar que cuando el traslado a una época diferente a la de observación sea posible, los resultados perderán calidad en cuanto a su exactitud, tal como se expuso en este documento.
- Cabe, entonces, la pregunta de si una transformación de coordenadas podría generar mejores resultados. No necesariamente. Este proceso depende de la calidad de los puntos y de los propios valores de los parámetros: si estos fueron locales o contemplan todo el país y, además, de toda una serie de posibilidades. No obstante, la transformación de coordenadas es un procedimiento tan válido como el traslado entre épocas. Queda a criterio del usuario una u otra aplicación. Consecuentemente, es necesario advertir, además, que este estudio trabajó con observaciones de 24 h por lo que la emulación de la metodología presentada, considerando mediciones con tiempos menores y diferente cantidad de estaciones de vínculo, probablemente brinden resultados de una calidad menor a la presentada en este artículo.
- Se recomienda a los profesionales, cuyos proyectos tengan finalidades catastrales, ser consistentes con la época de observación y los datos relativos a ella, sin dejar de lado las tolerancias oficiales para los procesos de georreferenciación. Se sabe que la actualización de los diferentes insumos catastrales usados por las autoridades no puede darse con la misma periodicidad con la que se obtienen las coordenadas del marco y de ahí que lo ideal sería brindarle a la administración los mejores resultados posibles vistos como una contribución particular al desarrollo nacional.
- Este trabajo brinda tres anexos con los resultados de las coordenadas para las épocas 2021,53, CR-SIRGAS y 2014,59, que se pueden usar como referencia para diferentes aplicaciones

topográficas, catastrales y cartográficas. Obviamente, estos resultados de las coordenadas se deben trabajar considerando adicionalmente los objetivos y finalidades específicas de cada proyecto. Se aclara que, aunque los resultados de coordenadas ajustadas fueron obtenidos con la mejor exactitud posible que ofrece el programa de procesamiento, estos valores, de momento, no son oficiales, ya que no cuentan el aval por parte del Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica.

## REFERENCIAS

- [1] Actualización del Sistema Geodésico de Referencia Horizontal Oficial para Costa Rica, Decreto Ejecutivo N° 40962-MJP, La Gaceta N° 66, 17 de abril de 2018.
- [2] Sobre el formato y enlace al Marco Geodésico para la Georreferenciación de levantamientos con fines catastrales, Directriz DRI-003-2021, La Gaceta N° 132, 02 de julio de 2021.
- [3] Parámetros de transformación para pasar de las épocas 2014,59 a la 2019,24 en el ITRF14 correspondiente con CR-SIRGAS, Directriz N° DIG-001-2020, La Gaceta N° 223, 04 de setiembre de 2020.
- [4] J. Moya Zamora, S. Bastos Gutiérrez, y A. Álvarez Calderón, “Parámetros de transformación entre los marcos geodésicos CR05 y CR-SIRGAS contemplando diferentes soluciones ITRF”, *Revista de Ingeniería*, vol. 31, no. 1, pp. 21-50, Ene. 2021, doi: 10.15517/ri.v31i1.43854.
- [5] R. Langley, P. J. Teunissen y O. Montenbruck, “Introduction to GNSS”, en *Springer Handbook of Global Navigation Satellite System*, P. J. G. y Montenbruck, O. (eds). New York, NY, USA: Springer International Publishing, 2017, pp. 3-24. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1>.
- [6] A. Leick, *GPS Satellite Surveying*, 4 ed. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc, 2015.
- [7] G. Xu y J. Xu, *GPS Theory, Algorithms and Applications*, 3 ed. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-50367-6>.
- [8] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger y J. Collins, *GPS Theory and Practice*, 5 ed. New York: Springer Wien, 2012.
- [9] X. Luo, *GPS Stochastic Modelling. Berlin*. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] A. El-Rabbany, *Introduction to GPS The Global Positioning System*. Artech House, 2002.
- [11] UNAVCO. “Geodetic Infrastructure in the Northern Costa Rica Subduction Zone” UNAVCO.org. <https://www.unavco.org/highlights/2020/costarica2019.html> (Accesado en Feb. 14, 2022)
- [12] P. Wessel, J. F. Luis, L. Uieda, R. Scharroo, F. Wobbe, W. H. F. Smith y D. Tian, “The Generic Mapping Tools Version 6”, *Geochestmtry, Geophysics and Geosystems*, vol. 20, no. 11, pp 5556-5564, 2019, <https://doi.org/10.1029/2019GC008515>.
- [13] T. G Farr *et al.*, “The Shuttle Radar Topography Mission”, *Reviews Geophysics.*, vol. 45, no. 2, 2004, doi:10.1029/2005RG000183.
- [14] Department of Transportation and Main Roads. *Trimble Business Center v5.40 – Processing and Adjusting GNSS Survey Control Networks*. (2021) <https://www.tmr.qld.gov.au> (Accesado en Feb. 14, 2022)
- [15] M. Azhari *et al.*, “Semi-kinematic geodetic reference frame base on the ITRF2014 for Malaysia”. *Journal of Geodetic Science*, vol. 10, no. 1, pp. 90-190, 2020, doi:10.1515/jogs-2020-0108.
- [16] H. Ronen y G. Even-Tzur “Kinematic Datum Based on the ITRF as a Precise, Accurate, and lasting

- TRF for Israel”, *Journal of Surveying Engineering*. vol. 143, no. 4, 2017, doi: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000228 .
- [17] N. K. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon, y J. K. Factor, “The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 117, no. B4, Abr. 2012, doi: 10.1029/2011JB008916.
- [18] L. Sánchez y H. Drewes, *Geodetic Monitoring of the Variable Surface Deformation in Latin America*. Springer, 2020, doi: 10.1007/1345\_2020\_91.

## ANEXOS

### ANEXO I

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
	724416,660	0,002	10°05'51,8792079”	0,004	1116619,756	0,001
BATA	-6238098,094	0,011	83°22'33,7315979”	0,003	568384,850	0,002
	1110899,927	0,003	33,830 m	0,010	22,472	0,011
	594201,356	0,002	9°44'59,9108062”	0,005	1078146,495	0,002
BIJA	-6259021,099	0,014	84°34'36,7235795”	0,004	436710,161	0,002
	1073097,909	0,003	555,625 m	0,013	544,572	0,014
	509597,053	0,001	10°14'16,3432488”	0,003	1132359,194	0,001
CABA	-6256557,678	0,007	85°20'36,7218211”	0,002	352806,197	0,001
	1126154,858	0,002	26,925 m	0,006	16,723	0,007
	771916,576	0,004	8°24'26,8706730”	0,006	929771,096	0,003
CCOL	-6262734,775	0,017	82°58'24,3077459”	0,006	613052,991	0,003
	926395,102	0,004	83,265 m	0,015	70,101	0,017
	683681,068	0,001	9°33'13,4273495”	0,003	1056397,767	0,001
CDME	-6256445,627	0,006	83°45'49,2314903”	0,002	525942,525	0,001
	1052183,402	0,002	3483,384 m	0,006	3466,331	0,007
	782594,193	0,002	8°34'23,6619404”	0,004	948137,682	0,002
CDTO	-6258698,109	0,009	82°52'21,6039520”	0,003	624096,319	0,002
	944531,405	0,002	100,040 m	0,009	86,513	0,010
	768892,611	0,003	9°35'31,6117517”	0,005	1060800,658	0,002
COVE	-6242478,549	0,014	82°58'41,4694390”	0,004	612162,371	0,002
	1055809,275	0,003	105,714 m	0,013	93,534	0,014
	611411,894	0,002	10°43'10,0004609”	0,008	1185342,876	0,001
CNKC	-6237766,914	0,022	84°24'06,7633388”	0,004	456042,706	0,002
	1178547,093	0,004	99,015 m	0,020	89,440	0,022
	793962,135	0,003	8°53'26,1577494”	0,005	983278,764	0,002
CTCR	-6253279,718	0,014	82°45'50,4934309”	0,005	635942,296	0,002
	979439,973	0,003	1490,690 m	0,013	1474,483	0,015

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
EART	700397,892	0,009	10°12'45,5155880"	0,020	1129289,937	0,006
	-6238597,040	0,050	83°35'39,5237975"	0,015	544446,038	0,008
	1123411,770	0,011	45,327 m	0,046	33,942	0,051
EPZA	485270,402	0,002	10°08'27,3783941"	0,005	1121745,762	0,002
	-6261027,439	0,012	85°34'05,0317085"	0,003	328149,947	0,002
	1115715,040	0,003	668,576 m	0,011	657,814	0,012
HUA2	509098,281	0,002	10°01'03,8322012"	0,004	1108009,369	0,001
	-6261454,648	0,010	85°21'06,0970291"	0,003	351811,030	0,002
	1102283,268	0,002	594,197 m	0,009	582,992	0,010
IND1	492838,328	0,007	9°51'52,6479972"	0,019	1091142,331	0,005
	-6265175,438	0,050	85°30'07,907500"	0,011	335231,001	0,006
	1085512,332	0,011	75,227 m	0,047	64,978	0,051
IRZU	668182,988	0,001	9°58'00,7018734"	0,003	1102080,995	0,001
	-6249811,342	0,006	83°53'51,1625344"	0,002	511233,103	0,001
	1097151,850	0,002	2964,889 m	0,006	2949,676	0,006
LAFE	552167,259	0,002	9°48'25,4239174"	0,004	1084556,457	0,001
	-6261307,575	0,011	84°57'37,0172188"	0,003	394659,574	0,002
	1079237,378	0,002	65,280 m	0,011	54,678	0,012
LEPA	544186,534	0,002	9°56'43,3477167"	0,005	1099878,593	0,002
	-6259328,526	0,012	85°01'52,2989120"	0,003	386927,227	0,002
	1094301,448	0,003	20,942 m	0,011	10,180	0,012
LMNL	541235,841	0,002	10°16'03,0299329"	0,004	1135519,092	0,001
	-6253389,591	0,008	85°03'11,995365"	0,003	384614,464	0,002
	1129394,013	0,002	102,941 m	0,008	92,885	0,009
PNE2	456659,989	0,002	10°11'42,5928235"	0,006	1127895,124	0,002
	-6261477,048	0,015	85°49'43,3498642"	0,003	299610,312	0,002
	1121504,503	0,004	19,650 m	0,014	10,760	0,015
PUJE	517555,409	0,002	10°06'50,3191127"	0,004	1118621,817	0,001
	-6258335,956	0,010	85°16'20,9239237"	0,002	360538,235	0,002
	1112666,800	0,002	29,162 m	0,009	18,525	0,010
PUMO	551029,341	0,002	10°03'52,1952677"	0,004	1113033,833	0,001
	-6256428,904	0,009	84°58'00,1685685"	0,003	394036,961	0,002
	1107276,673	0,002	17,954 m	0,008	7,434	0,009
RIFO	664425,588	0,008	10°19'02,2290029"	0,016	1140836,377	0,003
	-6240526,514	0,043	83°55'21,5153892"	0,012	508472,152	0,006
	1134813,755	0,009	116,192 m	0,041	104,858	0,045
SAJU	469761,338	0,003	10°04'01,6396603"	0,009	1113657,143	0,003
	-6263059,443	0,023	85°42'38,0039751"	0,005	312486,692	0,003
	1107572,140	0,005	73,775 m	0,022	63,896	0,023

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
SRBA	728119,419	0,002	9°13'55,7079424"	0,003	1020886,494	0,002
	-6254749,771	0,008	83°21'36,1716732"	0,003	570316,786	0,002
	1016664,055	0,002	939,998 m	0,008	925,258	0,008
VRAI	745039,514	0,004	9°55'29,4551432"	0,008	1097540,823	0,002
	-6239418,063	0,020	83°11'26,2990286"	0,006	588752,100	0,003
	1092137,131	0,005	438,329 m	0,019	426,337	0,021

- Las coordenadas cartesianas [X Y Z] ajustadas en el marco geodésico nacional CR-SIRGAS.
- Época de observación  $t_i = 2021,53$ , semana 2167.
- Las coordenadas geodésicas [ $\varphi \lambda h$ ] se calcularon sobre el elipsoide WGS84.
- Las coordenadas cartográficas [N E] están en la proyección oficial CRTM05.
- La altura nivelada [H] se estimó con base en la ondulación del geoide según el modelo EGM2008.

## ANEXO II

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
BATA	724416,629	0,004	10°05'51,8784973"	0,008	1116619,734	0,003
	-6238098,111	0,019	83°22'33,7326933"	0,006	568384,816	0,003
	1110899,907	0,004	33,840 m	0,018	22,482	0,020
BIJA	594201,319	0,008	9°44'59,9103023"	0,019	1078146,479	0,004
	-6259021,098	0,052	84°34'36,7247950"	0,012	436710,123	0,006
	1073097,892	0,011	555,618 m	0,049	544,564	0,053
CABA	509597,022	0,004	10°14'16,3414714"	0,008	1132359,140	0,003
	-6256557,692	0,021	85°20'36,7228663"	0,006	352806,165	0,004
	1126154,805	0,005	26,927 m	0,019	16,724	0,021
CCOL	771916,513	0,002	8°24'26,8687831"	0,004	929771,038	0,002
	-6262734,800	0,011	82°58'24,3098760"	0,004	613052,926	0,002
	926395,046	0,003	83,275 m	0,010	70,110	0,011
CDME	683681,028	0,003	9°33'13,4257382"	0,005	1056397,718	0,002
	-6256445,653	0,013	83°45'49,2328842"	0,004	525942,483	0,003
	1052183,356	0,003	3483,397 m	0,012	3466,345	0,013
CDTO	782594,148	0,002	8°34'23,6603460"	0,004	948137,633	0,002
	-6258698,140	0,011	82°52'21,6055367"	0,004	624096,270	0,002
	944531,359	0,003	100,05821 m	0,010	86,531	0,011
COVE	768892,587	0,009	9°35'31,6103565"	0,015	1060800,615	0,006
	-6242478,593	0,042	82°58'41,4708037"	0,014	612162,329	0,006
	1055809,256	0,009	105,748 m	0,039	93,574	0,043
CNKC	611411,857	0,011	10°43'09,9997373"	0,033	1185342,854	0,007
	-6237766,923	0,084	84°24'06,7645701"	0,019	456042,669	0,007
	1178547,071	0,018	99,016 m	0,079	89,441	0,086

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
	793962,085	0,003	8°53'26,1565572"	0,006	983278,728	0,002
CTCR	-6253279,722	0,017	82°45'50,4950610"	0,005	635942,247	0,002
	979439,936	0,003	1490,682 m	0,016	1474,475	0,017
	700397,855	0,006	10°12'45,5146835"	0,010	1129289,909	0,004
EART	-6238597,091	0,026	83°35'39,5251782"	0,009	544445,996	0,005
	1123411,750	0,006	45,368 m	0,024	33,983	0,026
	485270,378	0,005	10°08'27,3769135"	0,011	1121745,717	0,004
EPZA	-6261027,481	0,027	85°34'05,0326272"	0,007	328149,919	0,005
	1115715,001	0,006	668,609 m	0,025	657,847	0,027
	509098,251	0,006	10°01'03,8305123"	0,014	1108009,318	0,005
HUA2	-6261454,697	0,034	85°21'06,0981457"	0,009	351810,996	0,005
	1102283,224	0,008	594,235 m	0,032	583,030	0,035
	492838,281	0,009	9°51'52,6458220"	0,021	1091142,264	0,006
IND1	-6265175,480	0,058	85°30'07,9091385"	0,013	335230,951	0,007
	1085512,271	0,012	75,254 m	0,055	65,004	0,059
	668182,949	0,002	9°58'00,7007314"	0,004	1102080,960	0,001
IRZU	-6249811,377	0,010	83°53'51,1639426"	0,003	511233,060	0,002
	1097151,820	0,002	2964,915 m	0,009	2949,702	0,010
	552167,226	0,008	9°48'25,4225519"	0,016	1084556,415	0,004
LAFE	-6261307,599	0,042	84°57'37,0183569"	0,011	394659,539	0,006
	1079237,339	0,009	65,294 m	0,040	54,692	0,043
	544186,496	0,010	9°56'43,3462350"	0,018	1099878,547	0,006
LEPA	-6259328,539	0,047	85°01'52,3001811"	0,014	386927,188	0,009
	1094301,403	0,010	20,943 m	0,044	10,181	0,048
	541235,808	0,006	10°16'03,0285288"	0,010	1135519,049	0,004
LMNL	-6253389,595	0,025	85°03'11,9964481"	0,008	384614,431	0,005
	1129393,969	0,006	102,934 m	0,024	92,878	0,026
	456659,971	0,007	10°11'42,5911906"	0,017	1127895,074	0,006
PNE2	-6261477,073	0,044	85°49'43,3505081"	0,010	299610,292	0,006
	1121504,456	0,010	19,664 m	0,042	10,775	0,045
	517555,373	0,006	10°06'50,3179034"	0,012	1118621,780	0,004
PUJE	-6258335,962	0,029	85°16'20,9251267"	0,008	360538,198	0,005
	1112666,763	0,007	29,159 m	0,027	18,522	0,030
	551029,308	0,008	10°03'52,1937873"	0,014	1113033,788	0,005
PUMO	-6256428,907	0,036	84°58'00,1696625"	0,012	394036,927	0,007
	1107276,627	0,008	17,946 m	0,034	7,426	0,037
	664425,553	0,006	10°19'02,2282940"	0,012	1140836,355	0,003
RIFO	-6240526,505	0,032	83°55'21,5165242"	0,009	508472,118	0,004
	1134813,731	0,006	116,174 m	0,030	104,841	0,033

Estación	X Y Z [m]	Error [m]	$\varphi \lambda h$	Error [m]	N E H [m]	Error [m]
SAJU	469761,306	0,006	10°04'01,6381479"	0,015	1113657,097	0,005
	-6263059,460	0,038	85°42'38,0050747"	0,009	312486,658	0,005
	1107572,095	0,008	73,782 m	0,036	63,903	0,038
SRBA	728119,371	0,004	9°13'55,7060558"	0,006	1020886,436	0,003
	-6254749,794	0,014	83°21'36,1733130"	0,005	570316,736	0,003
	1016663,999	0,003	940,005 m	0,013	925,265	0,015
VRAI	745039,479	0,003	9°55'29,4541244"	0,006	1097540,792	0,002
	-6239418,085	0,016	83°11'26,3002760"	0,005	588752,062	0,003
	1092137,102	0,003	438,341 m	0,014	426,350	0,016

- Las coordenadas cartesianas [X Y Z] ajustadas en el marco geodésico nacional CR-SIRGAS.
- Época de observación  $t_0 = 2019,24$ , semana 2046.
- Las coordenadas geodésicas [ $\varphi \lambda h$ ] se calcularon sobre el elipsoide WGS84.
- Las coordenadas cartográficas [N E] están en la proyección oficial CRTM05.
- La altura nivelada [H] se estimó con base en la ondulación del geoide según el modelo EGM2008.

## ANEXO III

Estación	X Y Z [m]	$\varphi \lambda$ [° decimales] h [m]	N E [m]	Estació	X Y Z [m]	$\varphi \lambda$ [° decimales] h [m]	N E [m]
BATA	724416,576	10,0977435	1116619,68	IND1	492838,227	9,8646231	1091142,18
	-6238098,100	83,3760373	568384,77		-6265175,463	85,5021975	335230,90
	1110899,850	33,81			1085512,180	75,22	
BIJA	594201,268	9,7499744	1078146,41	IRZU	668182,897	9,9668608	1102080,90
	-6259021,082	84,5768684	436710,07		-6249811,364	83,8975460	511233,01
	1073097,815	555,58			1097151,755	2964,88	
CABA	509596,963	10,2378719	1132359,06	LAFE	552167,174	9,8070611	1084556,34
	-6256557,678	85,3435347	352806,11		-6261307,583	84,9602833	394659,49
	1126154,718	26,89			1079237,257	65,26	
CCOL	771916,487	8,4074631	929770,99	LEPA	544186,442	9,9453732	1099878,47
	-6262734,779	82,9734196	613052,90		-6259328,523	85,0311950	386927,14
	926394,991	83,24			1094301,320	20,91	
CDME	683680,983	9,5537288	1056397,66	LMNL	541235,749	10,2675072	1135518,97
	-6256445,637	83,7636762	525942,44		-6253389,581	85,0533329	384614,37
	1052183,291	3483,37			1129393,887	102,90	
CDTO	782594,120	8,5732385	948137,58	PNE2	456659,911	10,1951634	1127894,98
	-6258698,120	82,8726684	624096,24		-6261477,058	85,8287090	299610,23
	944531,306	100,03			1121504,361	19,63	
COVE	768892,543	9,5921137	1060800,58	PUJE	517555,315	10,1139765	1118621,70
	-6242478,579	82,9781866	612162,30		-6258335,948	85,2724797	360538,14
	1055809,204	105,72			1112666,677	29,12	

Estación	X Y Z [m]	$\varphi \lambda$ [° decimales] h [m]	N E [m]	Estació	X Y Z [m]	$\varphi \lambda$ [° decimales] h [m]	N E [m]
	611411,793	10,7194438	1185342,79		551029,252	10,0644976	1113033,71
CNKC	-6237766,913	84,4018796	456042,61	PUMO	-6256428,893	84,9667143	394036,87
	1178547,000	98,99			1107276,545	17,91	
	793962,052	8,8905986	983278,68		664425,496	10,3172851	1140836,29
CTCR	-6253279,704	82,7640267	635942,22	RIFO	-6240526,494	83,9226440	508472,06
	979439,885	1490,65			1134813,666	116,15	
	700397,801	10,2126425	1129289,85		469761,248	10,0671209	1113657,01
EART	-6238597,079	83,5943130	544445,94	SAJU	-6263059,444	85,7105575	312486,60
	1123411,691	45,34			1107572,002	73,75	
	485270,319	10,1409373	1121745,63		728119,332	9,2321401	1020886,38
EPZA	-6261027,466	85,5680651	328149,86	SRBA	-6254749,777	83,3600485	570316,70
	1115714,910	668,57			1016663,940	939,97	
	509098,195	10,0177299	1108009,23		745039,429	9,9248479	1097540,74
HUA2	-6261454,682	85,3516944	351810,94	VRAI	-6239418,073	83,1906394	588752,01
	1102283,136	594,20			1092137,048	438,31	

- Las coordenadas cartesianas geocéntricas [X Y Z] se calcularon con base en los parámetros de transformación publicados en la Directriz N° DIG-001-2020 del 21 de agosto de 2020 del Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica, aplicando el paso de la época 2019,24, marco ITRF2014 a la época 2014,59, marco IGB08, semana 1803.
- Las coordenadas geodésicas [ $\varphi \lambda h$ ] se calcularon a partir de las coordenadas cartesianas geocéntricas.
- Las coordenadas cartográficas [N E] se calcularon considerando la proyección oficial de Costa Rica CRTM05.