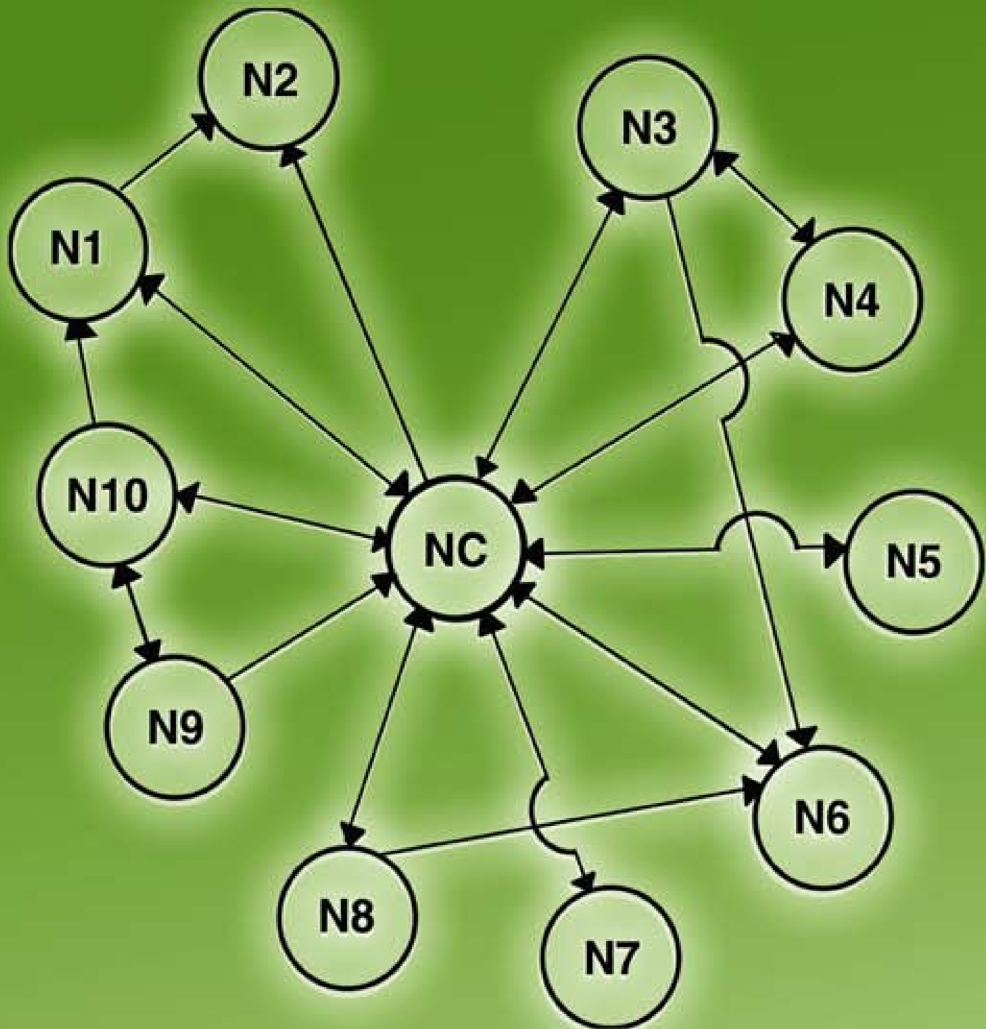
ISSN 1409-2441

Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
ENERO/DICIEMBRE 2003 - VOLUMEN 13 - N°1 y 2



REVISTA INGENIERÍA Volumen 13 Enero / Diciembre 2003 Números 1 y 2

Ingeniería 13 (1,2): 77-83, 2003 San José, Costa Rica

LAS LEYES DE KIRCHHOFF Y LAS REDES ELÉCTRICAS DE CORRIENTE CONTINUA

Rodolfo Herrera Jiménez.

Resumen

En *redes eléctricas de corriente continua* las *leyes de Kirchhoff* son utilizadas para resolver el problema de la *distribución* real de la corriente y por tanto el estado de la red. En este artículo se demuestra rigurosamente, que conociendo las resistencias y las fuerzas electromotrices en la red, esas leyes son suficientes para determinar la distribución buscada de las corrientes. La prueba matemática desarrollada puede ser útil para fines de enseñanza.

Palabras clave: Redes eléctricas, leyes Kirchhoff, prueba matemática.

Abstract

In the continuous current electrical networks the *Kirchhoff laws* are used to solve the problem of the real distribution of current intensity and then the state of the network. It is rigorously proved in this article that knowing the values of the resistances and electromotive forces, those laws are sufficient to determine the network current distribution. The mathematical proof may be useful for teaching purposes.

Keywords: Kirchhoff laws, mathematical proof, networks electrical.

1. DEFINICIONES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Definición 1. Se llama *red* a un sistema finito de *componentes orientadas* $\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2, ..., \mathsf{s}_c$, en este caso "alambres", que se conectan en ciertos puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ llamados *nudos.*

Se supone que la *red* es *conexa*, es decir, que dados dos nudos *A, B* cualesquiera, se puede pasar de uno a otro mediante una sucesión finita de alambres $AB_1, B_1B_2, ..., B_pB$. Es claro que se puede suponer aquí que todos los nudos $A, B_1, B_2, ..., B_P, B$ son distintos.

Además se usarán las siguientes notaciones. Sea $k= 1,2,...,c$ y s_k el alambre con una *resistencia* r_k y llevando una *fuerza electromotriz* e_k, donde e_k es un número positivo, negativo o nulo igual a la suma de los saltos del potencial al atravesar s_k en el sentido positivo del alambre; s_k es recorrido por la *corriente* (de intensidad) i_k, $i_k > 0$ o $i_k < 0$, según que ella fluya en el sentido positivo de s_k o en el sentido opuesto; $i_k = 0$ si no hay corriente en s_k.

Problema 1. Se trata de determinar i_k conociendo los r_k, e_k

Definición 2. Se llama *1-cadena* una expresión simbólica de la forma: $\mathsf{S}^c_{k=1} a_k \mathsf{s}_k$, donde las a_k son números reales arbitrarios.

Definición 3. Las *operaciones con 1-cadenas* se definen según las fórmulas siguientes:

(i) La *igualdad de 1-cadenas*:

$$\mathsf{S}^c_{k=1} a_k \mathsf{s}_k = \mathsf{S}^c_{k=1} a'_k \mathsf{s}_k \quad a_k = a'_k,\ k=1,...,c$$

(ii) La *adición de 1-cadenas*:

$$\mathsf{S}^c_{k=1} a_k \mathsf{s}_k + \mathsf{S}^c_{k=1} a'_k \mathsf{s}_k = \mathsf{S}^c_{k=1} (a_k + a'_k) \mathsf{s}_k$$

(i) La *multiplicación de una 1-cadena por un número real*:

$$\mu(\Sigma^c_{k=1} a_k\sigma_k)=\Sigma^c_{k=1}(\mu a_k)\sigma_k$$

Teorema 1. Las *1-cadenas* constituyen un *espacio vectorial* C^1 de dimensión c donde $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_c$ son una base para este espacio.

Teorema. Si la corriente que fluye en cada σ_k es i_k, entonces la *1-cadena*:

$$J= \Sigma^c_{k=1} i_k\sigma_k$$

suministra la distribución buscada de corrientes en la red.

Problema 2. El problema 1 consiste ahora en determinar la *1-cadena* en *J.*

Definición 4. Se llama *0-cadena* una expresión simbólica de la forma:

$$\Sigma^n_{k=1} b_kA_k$$

donde las $_1b_k$ son números reales arbitrarios.

Análogamente como en la definición 2, se describen las operaciones de igualdad y adición de dos *0-cadenas* y la multiplicación por un número real de una *0-cadena*. Por tanto:

Teorema 2. Las *0-cadenas* constituyen un *espacio vectorial* C^0 de dimensión n, donde $A_1,...,A_n$ son una base para este espacio.

1.2 Borde de una 1-cadena

Definición 5. Si $\sigma=AB$ es uno de los alambres orientados σ_k (A,B nudos), designamos por σ y llamamos *borde* de σ a la *0-cadena* siguiente:

$$\sigma =B-A$$

Si $\alpha = \Sigma^c_{k=1} a_k\ _k$ es una *1-cadena* arbitraria, el borde de α es por definición:

$$\alpha = \Sigma^c_{k=1} a_k\ _k$$

La *operación* es una aplicación lineal de C^1 en C^0

Definición 6. Se llama *ciclo* cada *1-cadena* cuyo borde es nulo.

Teorema 3. Los *ciclos* forman un subespacio Z^1 de C^1, el espacio nulo de . Los *bordes* constituyen un subespacio B^0 de C^0, el espacio imagen de .

Definición 7. Se llama *malla* una cadena de la forma $B_1B_2+B_2B_3+...+B_pB_1$ donde $B_1,B_2,...,B_p$ son nudos distintos.

Corolario 1. Una *malla* es por lo tanto un caso particular de un *ciclo* de forma: $\Sigma^c_{k=1}\varepsilon_k\ _k$, donde cada ε_k es uno de los números +1,-1,0 con k=1,2,...,c.

1.3 Leyes de Kirchhoff

(i) Sea $J=\Sigma^c_{k=1} i_k\sigma_k$ la *1-cadena* que define la distribución de las corrientes en la red. Entonces: $J= 0$, es decir, J es un ciclo, o sea que J Z^1;

(ii) Si $\gamma= \Sigma^c_{k=1}\varepsilon_k\sigma_k$ es una malla cualquiera, entonces:

$$\Sigma^c_{k=1}\varepsilon_k i_k r_k=\Sigma^c_{k=1}\varepsilon_k e_k$$

La 1ª ley expresa el hecho de que no hay acumulación de cargas en ningún punto de la red. La 2ª ley se deduce de la *ley de Ohm* por un razonamiento elemental conocido.

2. ESTUDIO DEL ESPACIO DE LOS CICLOS.

El objeto de este párrafo es demostrar que cada ciclo puede expresarse, únicamente como combinación lineal de $r=c-n+1$ mallas oportunamente escogidas o "*mallas fundamentales*" y por lo mismo reducir la búsqueda de las c corrientes i_k a la de r corrientes auxiliares o *corrientes circulantes* I_v(v=1,2,...,r).

Definición 8. Se llama *índice de Kronecker* de una *0-cadena* arbitraria $A=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k$ al número $I(A)=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k$.

Si A,B son dos *0-cadenas* arbitrarias y a,b dos números cualesquier, es claro que se verifica:

$I(aA+bB)=aI(A)+bI(B)$

Teorema 4. Una *0-cadena* es un borde si y solo si su *índice de Kronecker* es nulo.

Demostración:

(i) Para un solo alambre $\alpha=AB$, tenemos por tanto $\alpha=B-A$, por tanto $I(\sigma)=0$. Si $D=(\Sigma^{c}_{k=1} a_k \sigma_k) = \Sigma^{c}_{k=1} a_k\ {}_k$, es un borde cualquier, resulta inmediatamente: $I(D)= \Sigma^{c}_{k=1} a_k I(\sigma_k)=0$.

(ii) Recíprocamente sea $B=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k$, una *0-cadena* cuyo *índice de Kronecker* sea nulo o sea $I(B)=\Sigma^{n}_{k=1} b_k$. Sea A un nudo arbitrario escogido (uno de los A_k). Puesto que la red es conexa se puede conectar A con cada A_k mediante una *1-cadena*:

$\alpha_k=AB_1+B_1B_2+...B_pA_k$, $k=1,2,...,c$

Se deduce inmediatamente:

${}_k=A_k-A$

Obtenemos pues:

$(\Sigma^{n}_{k=1} b_k \alpha_k)=\Sigma^{n}_{k=1} b_k(A_k-A)$

$=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k-(\Sigma^{n}_{k=1} b_k)\ A=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k=B$

Por B tanto es un *borde*.

Teorema 5. El espacio de los bordes B^0 es de dimensión n-1

Demostración: Por el teorema precedente una *0-cadena*: $B=\Sigma^{n}_{k=1} b_k A_k$ es un borde si y sólo si $I(B)=\Sigma^{n}_{k=1} b_k=0$. O sea que

$B=b_2(A_2-A_1)+b_3(A_3-A_1)+...+b_n(A_n-A_1)$

y por lo tanto, $B \quad B^0$ si y sólo si B es una combinación lineal de las n-1 *0-cadenas*: $A_2-A_1,...,A_n-A_1$. Siendo estas cadenas por supuesto linealmente independientes, el teorema queda demostrado.

Teorema 6. El espacio Z' de los ciclos es de dimensión $r=c-n+1$.

Demostración. $r=dim\ Z'$ es la nulidad de , por otra parte (teorema 5): $(n-1)=$ *dimension* $B^0=$ *rango de* . Por consiguiente (como es sabido del álgebra lineal) $c=$ *rango* + *nulidad*$=n-1+r$, sea $r=c-n+1$. Ahora nos falta mostrar que se puede siempre tomar por base en Z', a un conjunto de mallas. Se necesitan primero dos resultados sobre ciclos:

Definición 9. Una *1-cadena* $\Sigma^{c}_{k=1} a_k \sigma_k$ se llama *conexa* si los alambres σ_k que figuran en ella, *efectivamente* (es decir, con coeficientes no nulos) forman una red conexa.

Lema 1. Cada ciclo es una suma de ciclos conexos.

Demostración. Sea $r=\Sigma^{c}_{k=1} a_k \sigma_k$ un ciclo. Los alambres que figuran en él, efectivamente se distribuyen en unas cuantas subredes separadas (es decir, un punto de una no se puede conectar con un punto de otra, como en la página primera de este artículo), cada una de ellas es conexa, o sea: $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+...\gamma_p$ donde $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_p$ son *1-cadenas* conexas mutuamente separadas. Basta mostrar que estas cadenas son ciclos. Como es un ciclo, resulta:

$0= \ \gamma= \ \gamma_1+ \ \gamma_2+... \ \gamma_p$

Si en γ_1 figura *efectivamente* un cierto nudo, él no podría ya figurar así en ninguno de los $\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_p$, puesto que las cadenas $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_p$ son separadas y por lo tanto disyuntas. Resultaría pues $\gamma \quad 0$ contrariamente a la hipótesis. Hay que concluir que $\gamma=0$ y así mismo $\gamma_2=...= \ \gamma_p=0$

Definición 10. Sea una *1-cadena* conexa $\gamma=\Sigma^{c}_{k=1} a_k \sigma_k$, se dice que uno de los alambres, sea σ_q, *desconecta* γ si $\gamma- a_q \sigma_q$ ya no es una cadena conexa.

Lema 2. Ningún alambre desconecta un ciclo conexo.

Demostración. Sea $\gamma=\Sigma^{c}_{k=1}\, a_k\sigma_k$ y se supone que un alambre σ_q desconecta γ. Se va a mostrar que entonces $a_q=0$, de lo que resultaría $\gamma- a_q\sigma_q=\gamma=$ ciclo conexo, es decir, contradicción.

De hecho puesto que σ_q *desconecta* γ, se tiene $\gamma- a_q\sigma_q=\alpha_1+\alpha_2$, donde α_1,α_2 son dos cadenas separadas. Al tomar los bordes siendo $\dot{\gamma}=0$ se obtiene: $a_q\dot{\sigma}_q= \dot{\alpha}_1+ \dot{\alpha}_2$ (i). Sea $\sigma_k=AB$ (A,B nudos). Entonces uno de los extremos de σ_k por ej. A, pertenece a la subred definida por α_2. La relación (i) se escribe entonces:

$a_kA-\ \dot{\alpha}_1=a_kB+\ \dot{\alpha}_2$,

siendo separadas las dos subredes de que se trata, cada miembro de la última relación es nulo o sea:

$a_kA=\ \dot{\alpha}_1$.

Pero se sabe que el *índice de Kronecker* de un borde es nulo. Por tanto:

$a_k=I(a_kA)=I(\ \dot{\alpha}_1)=0$

Teorema 7. Existe una base del espacio $Z^{'}$ de ciclos constituida por $r=c-n+1$ mallas $\Gamma_v(v=1,2,...,r)$.

Demostración. Puesto que la dimensión de $Z^{'}$ es r, basta mostrar que las mallas engendran este espacio, lo que quiere decir que cada ciclo es una combinación lineal de mallas. En virtud del lema 1, es suficiente mostrarlo para un ciclo conexo. Sea pues $\gamma=\Sigma^{c}_{k=1}\, a_k\sigma_k$ un ciclo conexo. Si por ejemplo a_1 0, el alambre σ_1 (sea $\sigma_1=AB$), no desconecta γ (lema 2). Por lo tanto existen nudos distintos $B_1,B_2,...,B_p$, todos diferentes a A y B, tales que los alambres figuran *efectivamente* en γ.

Sea μ la malla $\mu=AB+BB_1+...+B_pA$. Entonces $\gamma_1=\gamma-a_1\mu$ es un ciclo, ya que no contiene efectivamente a σ_1 y además que no contiene ningún alambre que ya no figurara así en γ.

Es decir, $\gamma_1=\gamma-a_1\mu$ contiene *efectivamente* menos alambres que γ. Si γ_1 no es nulo, se repite la operación sobre cada parte conexa de γ. Así tras un número finito de s operaciones (substracciones de múltiplos de mallas oportunas) reduce γ a 0, o sea:

$\gamma-b_1\mu_1- b_2\mu_2- ...- b_A\mu_A=0$, $\mu_1, \mu_2,...,\mu_A$ malla 1;

$\mu_1=\mu$, $b_1=a_1$.

Por tanto, $\gamma=b_1\mu_1+b_2\mu_2+...+b_A\mu_A$ viene así expresado como combinación lineal de mallas.

3. MALLAS FUNDAMENTALES Y CORRIENTES CONTINUAS.

Sea $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_r$ ($r=c-n+1$) un sistema de mallas linealmente independientes, que constituyen una base de $Z^{'}$. Se supone escogido este sistema una vez para siempre, estas se llaman ***mallas fundamentales.*** Sea

$\Gamma_v=\Sigma^{c}_{k=1}\, \varepsilon_k\sigma_k$, con $\varepsilon_{kv}=1,-1,0$, $r=c-n+1$ (*)

En virtud de la *1ª ley de Kirchhoff*, siendo la cadena $I=\Sigma^{c}_{k=1}\, i_k\sigma_k$ un ciclo, existen r números I_v, $v=1,2,...,r$ únicos tales que:

$I=\Sigma^{c}_{k=1}\, i_k\sigma_k = \Sigma^{r}_{v=1}\, I_v\Gamma_v$ (**)

Los r números I_v se llaman ***corrientes circulantes***. Interpretando físicamente la fórmula (**) se puede decir que la distribución de corrientes en la red se obtiene "superponiendo" las corrientes circulantes I_v que fluyen en las mallas fundamentales Γ_v. Más precisamente al sustituir (*) en (**) e igualar los coeficientes se obtiene:

$i_k= \Sigma^{r}_{v=1}\, \varepsilon_{kv}I_v$, $k=1,2,...,c$ (***)

La fórmula anterior (***) suministra las *corrientes reales* i_k como combinaciones lineales de *corrientes circulantes* I_v.

4. UTILIZACIÓN DE LA 2ª LEY DE KIRCHHOFF : SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

Una distribución ficticia de corrientes en una red $I=\Sigma^{c}_{k=1} i_k\sigma_k$ se llama admisible si ella satisface a la *1ª ley de Kirchhoff* o sea si *I* es un ciclo. Para definir una distribución admisible cualquiera se dan arbitrariamente las corrientes circulantes I_v, $v=1,2,...,r$ y calcular las i_k por la fórmula (***). Si $I=\Sigma^{c}_{k=1} i_k\sigma_k$ es una distribución admisible y si cada i_k sufre un incremento Δi_k, se llama tal variación admisible si la distribución $\Sigma^{r}_{k=1}(i_k+\Delta i_k)\sigma_k$ es también admisible. Para cada distribución admisible se define:

$\Phi=\Sigma^{c}_{k=1} r_k i^{1}_{k}$ = *Potencia calorífica*

$\Psi=\Sigma^{c}_{k=1} e_k i_k$ = *Potencia química*

Teorema 8. Una distribución admisible de corrientes satisface a la *2ª ley de Kirchhoff* si y sólo si para ella, la función es mínima $\Phi-2\Psi$ (es decir, que para cada otra distribución admisible, esta función no es menor).

Demostración. (i) se supone que la distribución admisible $I=\Sigma^{c}_{k=1} i_k\sigma_k$ proporciona el mínimo a $\Phi-2\Psi$. Sea $\gamma=\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k\sigma_k$ una malla arbitraria, $\varepsilon_k=+1,-1,2$. Sea *h* un número arbitrario. A cada corriente i_k se asigna un incremento $\varepsilon_k h$. Así el ciclo *I* aumenta de $\Delta I=h\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k\sigma_k=h\gamma$. Siendo este incremento un ciclo, la variación considerada es admisible. Los incrementos correspondientes de Φ y Ψ son:

$$\Delta\Phi=\Sigma^{c}_{h=1} r_k(i_k+\varepsilon_k h)^2-\Sigma^{c}_{k=1} r_k i^{2}_{k}=2h(\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k r_k i_k)+$$

$$+h^2(\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon^{2}_{k} r_k)$$

$$\Delta\Psi=\Sigma^{c}_{h=1} e_k(i_k+\varepsilon_k h)-\Sigma^{c}_{k=1} e_k i_k=h\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k e_k$$

El incremento de $\Phi-2\Psi$ es:

$$\Delta\Phi-2\Delta\Psi=2h(\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k r_k i_k-\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k e_k)+h^2\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon^{2}_{k} r_k$$

Por hipótesis este incremento es no negativo, sea lo que sea el número *h*. Esto implica que el coeficiente de *h* en la última expresión es nulo, o sea:

$$\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k r_k i_k=\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_k e_k$$

Esto es exactamente la expresión de la *2ª ley de Kirchhoff* para la malla arbitraria γ.

(ii) Se puede mostrar recíprocamente que si la *2ª ley de Kirchhoff* viene satisfecha para una distribución admisible $I=\Sigma^{c}_{k=1} i_k\sigma_k$ en todas las mallas γ entonces *I* proporciona el mínimo a $\Phi-2\Psi$. Se va a mostrar más, a saber, que si la *2ª ley de Kirchhoff* viene satisfecha por tan solo en las mallas fundamentales Γ_v, $v=1,2,...,r$ entonces $\Phi-2\Psi$ ya es mínima.

Una variación admisible arbitraria de corrientes puede obtenerse impartiendo incrementos arbitrarios a h_v, $v=1,2,...,r$ a las corrientes circulantes I_v, $v=1,2,...,r$. La variación correspondiente de las i_k se calcula por la fórmula (***) o sea:

$$\Delta i_k=\Sigma^{r}_{v=1}\varepsilon_{kv} h_k$$

El incremento es:

$$\Delta\Phi-2\Delta\Psi=\Sigma^{c}_{k=1} r_k(i_k+\Sigma^{r}_{v=1}\varepsilon_{kv}h_v)^2-\Sigma^{c}_{k=1} r_k i^{2}_{k}-$$

$$-2\Sigma^{c}_{k=1} e_k(i_k+\Sigma^{r}_{v=1}\varepsilon_{kv}h_v)^2+2\Sigma^{c}_{k=1} e_k i_k=$$

$$\Delta\Phi-2\Delta\Psi=2[\Sigma^{c,r}_{k,v}\varepsilon_{kv}h_v r_k i_k+\tfrac{1}{2}\Sigma^{c,r}_{k,v} r_k(\varepsilon_{kv}h_v)^2-$$

$$\Sigma^{c,r}_{v,k}\varepsilon_{kv}h_v e_k]$$

El coeficiente de h_v, $v=1,2,...,r$ es:

$$2[\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_{kv} r_k i_k-\Sigma^{c}_{k=1}\varepsilon_{kv} e_k]=0$$

puesto que por hipótesis la *2ª ley de Kirchhoff* viene satisfecha para cada *malla fundamental* Γ_v. Finalmente:

$$\Delta(\Phi-2\Psi)=\Sigma^{c,r}_{k,v} r_k(\varepsilon_{kv}h_v)^2\geq 0$$

es decir, la distribución *I* proporciona el mínimo a $\Phi-2\Psi$.

5. CONSECUENCIAS. SISTEMA LINEAL RESOLVENTE.

Resulta de la última demostración que si una distribución admisible I satisface a la *2ª ley de Kirchhoff* tan solo en las r mallas fundamentales G_v, ella satisface a la *2ª ley de Kirchhoff* en todas las mallas.

Escribiendo la expresión de esta ley para cada una de las r mallas fundamentales se obtiene $r=n-c+1$ ecuaciones lineales respecto a las desconocidas i_k. Sustituyendo i_k por (***) se consigue un sistema de ecuaciones lineales con r desconocidas $I_1,I_2,...,I_r$. Se llama a este sistema *sistema resolvente.*

Si se puede resolver se determinan inmediatamente las i_k mediante (***) y el problema de hallar la distribución real de i_k queda resuelto. Para mostrar que el sistema resolvente tiene una solución única, se escribe explícitamente un sistema equivalente, utilizando las expresiones F y Y mediante las I_v. Así se tiene:

(i) $\mathrm{F}= \mathrm{S}^c_{k=1} r_k i^2_k= \mathrm{S}^c_{k=1} r_k(\mathrm{S}^r_{v=1}\mathrm{e}_{kv}I_v)^2$

esto es una forma cuadrática:

$\mathrm{F}= \mathrm{S}^c_{\mathrm{m}v=1} c_{\mathrm{m}v} I_{\mathrm{m}} I_v$, $\mathrm{c}_{\mathrm{m}v}=\mathrm{c}_{\mathrm{m}v}$

Esta forma cuadrática es positiva definida. De hecho es claro que j ≥0, además j =0 implica $i_k=0$, $k=1, 2, ..., c$, es decir:

$I=\mathrm{S}^c_{k=1} i_k \mathrm{s}_k=0$

Finalmente por (**) $I_v=0$, $v=1,2,...,r$, puesto que la expresión (**) es única.

(ii) $\mathrm{Y}=\mathrm{S}^{c,r}_{k,v}\, e_k(\mathrm{e}_{kv}I_v)=\mathrm{S}^r_{v=1}E_vI_v$

donde

$E_v=\mathrm{S}^c_{k=1}\, \mathrm{e}_{kv}e_k$

es la *fuerza electromotriz* total entre las mallas I_v.

Ahora un sistema equivalente al sistema resolvente, se establece escribiendo que $\mathrm{F}-2\mathrm{Y}$ es el mínimo para los valores buscados de los I_v.

Si a los I_v se les asignan incrementos arbitrarios h_v, $v=1,2,...,r$, el incremento correspondiente de $\mathrm{F}-2\mathrm{Y}$ es:

$\Delta(\mathrm{F}-2\mathrm{Y})=\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}v}\, c_{\mathrm{m}v}(I_{\mathrm{m}}+h_{\mathrm{m}})(I_{\mathrm{m}}+h_{\mathrm{m}})-\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}v}\, c_{\mathrm{m}v} I\mathrm{m}I_v$ -

$-2\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}v}\, E_v(I_{\mathrm{m}}+I_v)+2\mathrm{S}^r_v\, E_vI_v=$

$=[\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}v}\, c_{cv}I_{\mathrm{m}}h_v-\mathrm{S}^r_v\, I_vh_v]+\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}v}\, c_vh_{\mathrm{m}}h_v$

Esto debe ser mayor o igual a cero para cada elección de los h_v, lo que equivale al hecho de que los coeficientes de todos los h_v en la última expresión, deben ser nulos. Esto da el sistema siguiente:

$\mathrm{S}^r_{\mathrm{m}=1}\, c_{\mathrm{m}v}\, I_{\mathrm{m}}=E_v$, $v=1,2,...,r$ o sea

$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{I}_v}=E_v$, $v=1,2,...,r$

que es el sistema buscado equivalente al sistema resolvente.

Teorema 9. El sistema (****) tiene una solución única.

Demostración. Hay que mostrar que $Det(c_{ij})\neq 0$ Para esto basta asegurarse que si $E_V=0$, $v=1,2,...,r$, la única solución de (****) es $I_v=0$, $v=1,2,...,r$.

Pero el problema se reduce entonces a determinar el mínimo de F. Siendo F una forma positiva definida, su mínimo igual a cero se realiza únicamente tomando $I_v=0$, $v=1,2,...,r$ (generalmente se demuestra en álgebra lineal, que el determinante de una forma cuadrática positiva definida es siempre positivo). Con lo que queda demostrado el teorema.

El problema está ahora resuelto. La discusión hecha (en particular el último teorema) demuestra que las dos *leyes de Kirchhoff*, son suficientes para determinar la distribución real de las corrientes en la red, conociendo las resistencias r_k y las fuerzas electromotrices e_k.

SOBRE EL AUTOR

Rodolfo Herrera Jiménez.
Dr. Ing. prof. *Emérito* en ciencias cognoscitivas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Costa Rica.
Teléfono: 253-4549
Correo electrónico: rodolfoh@racsa.co.cr

El tema de este artículo fue desarrollado en el curso sobre campo electromagnético que dictó el autor, para ingenieros electricistas y físicos en el año 1965, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Costa Rica. Para los amigos del rigor matemático en este campo puede serles útil.