ISSN 1409-2441

Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica

ENERO/DICIEMBRE 2000 - VOLUMEN 10 - Nº 1 y 2

Ingeniería 10(1,2): 93-105, 2000 San José, Costa Rica

COMPARACIÓN DE LAS CURVAS DE AJUSTE DE LOS TERMÓMETROS BECKMANN APLICANDO TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE VARIANZA A LA REGRESIÓN LINEAL POR POLINOMIOS ORTOGONALES

Alberto J. Díaz Tey [1]
Víctor Garbizo Cordero [2]

Resumen

En el presente artículo se exponen las técnicas de ajuste mediante polinomios ortogonales y su correspondiente análisis de varianza a las curvas que relacionan el factor de corrección Sta y la temperatura de ajuste ta de los termómetros diferenciales Beckmann, reportándose los resultados de su aplicación a los principales productores mundiales. Se demuestra la no homogeneidad estadística de estas curvas con un nivel de confianza estadística del 95 %, proponiéndose un método para su reporte en los casos en que los termómetros no estén perfectamente identificados con sus fabricantes.

Summary

Presently work is exposed the techniques fit by use ortogonal polynomials and its Analisys of Variance to curves that shows the relationship between the corrected factor well-known like Value of the Grade and the adjust temperature of the Beckmann thermometers, reporting its performance for the main worldwide makers. It was determined the no statistical homogenety of this curves for a confidence level of 95 %, and it propose a method to report the adjust curve when the thermometers era not identifies which its makers.

1. INTRODUCCIÓN

La posibilidad que tienen los termómetros *Beckmann* de medir diferencias de temperatura en un amplio rango, mediante la regulación del mercurio, en un sistema de medición, implica el uso de un factor de corrección conocido como Valor del Grado (Sta). Sin embargo, su determinación experimental en el rango continuo de la variable temperatura de ajuste (ta) es imposible, por lo que internacionalmente se comparan los valores experimentales en el intervalo básico ($ta = 20\,°C$) [1] determinados en los laboratorios de calibración con los reportados por los fabricantes según [2, 3, 4].

El problema se presenta cuando los termómetros no están claramente identificados con sus fabricantes, algo muy común en las condiciones de un país netamente importador (en el caso cubano, aproximadamente el 57 % de los termómetros que se enviaron al Laboratorio de Temperatura del Instituto Nacional de Investigaciones en Metrología (INIMET) en el período comprendido entre 1991 y 1995 no estaban unívocamente identificados con sus productores [1]) porque en este caso no puede predecirse, dada la incertidumbre estable-

[1]M. Sc. Investigador Agregado del Laboratorio de Temperatura, INIMET, Cuba.
[2]Lic. Metrólogo del Laboratorio de Temperatura, INIMET, Cuba.

cida, el comportamiento de *Sta* para otra temperatura de ajuste, lo que no válida la principal ventaja de este tipo de termómetro: el ajuste voluntario del rango de medición. Para resolver esta situación, fue necesario lo siguiente:

1. Demostrar que la relación funcional *Sta vs ta* propuesta por los principales fabricantes, estadísticamente es homogénea, para un nivel de confianza del 95 %, mediante un Análisis de Varianza (ANOVA) aplicado al ajuste mínimo (cuadrático de la curva mancomunada de los principales fabricantes de termómetros *Beckmann*: U.S.A, Alemania y Rusia. Si los resultados fuesen satisfactorios se utilizaría una única curva: la de los valores medios mancomunados), ya que no tendría importancia la procedencia del termómetro para reportar la relación *Sta vs ta*.

2. En caso contrario, proponer la metodología que permita relacionar al termómetro con alguna de las curvas de ajuste de los principales productores.

2. LA APLICACIÓN DEL MÉTODO MÍNIMO - CUADRÁTICO A LOS REPORTES STA VS TA

a. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Cada fabricante reporta un conjunto de valores *Sta vs ta* en el rango de trabajo del termómetro; en este caso se consideró, por ser el más común, el rango de medición de temperatura desde 0 hasta 100 °C para vidrio termométrico 16 III . En términos matriciales se representa de la siguiente manera:

$$Sta = ta \cdot \beta + e \qquad (1)$$

donde:

Sta: vector columna de los valores del factor de corrección reportados por el fabricante, °C/gc .

ta: matriz correspondiente a la variable independiente temperatura de ajuste ,°C .

β: vector columna de los parámetros del polinomio de ajuste.

e: vector columna de los errores de ajuste, °C/gc.

$$Sta = \begin{bmatrix} Sta_1 \\ Sta_2 \\ \vdots \\ Sta_i \\ \vdots \\ Sta_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad ta = \begin{bmatrix} 1 & ta_1 & ta_1^2 & \cdots & ta_1^j & \cdots & ta_1^m \\ 1 & ta_2 & ta_2^2 & \cdots & ta_2^j & \cdots & ta_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & ta_i & ta_i^2 & \cdots & ta_i^j & \cdots & ta_i^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & ta_n & ta_n^2 & \cdots & ta_n^j & \cdots & ta_n^m \end{bmatrix}_{n \times (m+1)} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

donde:

n: número de variables independientes reportadas; su contador es $i = 1, 2, \cdots, n$

m : grado del polinomio de ajuste.

$p = (m + 1)$: número de parámetros de la ecuación de ajuste; su contador es $j = 0, 1, \cdots, m$

Los estimadores mínimos - cuadráticos de β son:

$$b = \left(ta^T \cdot ta\right)^{-1} \cdot ta^T \cdot Sta \qquad (2)$$

b. LA UTILIZACIÓN DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

En general, las columnas de la matriz ta no son ortogonales. Si más tarde se desea añadir otro término:

$$\beta_{(m+1)+1} \cdot ta^{(m+1)+1}$$

cambiarán todos los estimadores de los coeficientes, sin embargo, pueden construirse polinomios P_j de la forma definida en [5]:

$$P_{(j+1,i)} = (ta_i - B_j) \cdot P_{(j,i)} - C_j \cdot P_{(j-1,i)} \qquad (3)$$

donde:

$$P_{(0,i)} = 1 \quad \forall\, i \in N \qquad (4)$$

$$P_{(-1,i)} = 0 \quad \forall\, i \in N \qquad (5)$$

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} ta_i \cdot P^2_{(j,i)}}{\sum_{i=1}^{n} P^2_{(j,i)}} \qquad (6)$$

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} P^2_{(j,i)} \qquad (7)$$

$$C_j = \frac{S_j}{S_{j-1}} \qquad (8)$$

Con la propiedad que son polinomios ortogonales, es decir

$$\sum P_j \cdot P_l = 0 \qquad \forall\, j \neq l \qquad (9)$$

Entonces el modelo (1) puede rescribirse como:

$$Sta = P \cdot \alpha + e \qquad (10)$$

De manera que la matriz correspondiente a la variable independiente ta se transforma en la matriz de los polinomios ortogonales P:

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,1} & P_{1,1} & \cdots & P_{m,1} \\ P_{0,2} & P_{1,2} & \cdots & P_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{0,n} & P_{1,n} & \cdots & P_{m,n} \end{bmatrix}_{n\ x\ (m+1)}$$

y los estimadores mínimos - cuadráticos de α son:

$$\alpha = (P^T \cdot P)^{-1} \cdot P^T \cdot Sta \qquad (11)$$

c. PRECISIÓN DE LA ECUACIÓN AJUSTADA

Una vez lograda la ecuación de ajuste, es necesario realizar el análisis de su precisión utilizando las técnicas ANOVA aplicadas a la regresión lineal según [5].

Si se asume que los errores e_i son independientes y se distribuyen según la forma media

$\mu = 0$ y varianza σ^2, se pueden realizar las siguientes inferencias:

a. Dócima de la ecuación de regresión completa: su objetivo es verificar si las variables ta_i^j son capaces de explicar significativamente el comportamiento de la variable Sta_i, y consiste en plantear la siguiente hipótesis:

$$H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$$

Vs

$$H_1: \text{exista al menos un } \alpha_j \neq 0$$

Si $F_{calc} > F_{0,05}(\nu_1 = p-1 ; \nu_2 = n-p)$, se rechaza H_0 con un nivel de confianza estadística del 95 %.

b. Dócimas secuenciales F - Fisher: su propósito es determinar la importancia estadística del término α_j analizado, y consiste en establecer la siguiente hipótesis:

$$H_0: \quad \alpha_j = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \quad \alpha_j \neq 0$$
$$\forall\ j = 0, 1, \cdots, m$$

Si $F_{calc_j} > F_{0,05}(\nu_1 = p-1 ; \nu_2 = n-p)$, se rechaza H_0 con un nivel de confianza estadística del 95 %; por lo que el término analizado debe incluirse, en caso contrario, puede juzgarse innecesario y eliminarse de la ecuación de regresión.

Si se desea añadir otro término $\alpha_p \cdot P_p$ a la ecuación (10), no será necesario recalcular los coeficientes ya obtenidos debido a la ortogonalidad de los polinomios.

c. Dócima para comprobar la igualdad de los coeficientes de las curvas que se han mancomunado (vea epígrafe 4 del presente trabajo).

Para obtener los valores ajustados del factor de corrección Sta_{aj}, se utiliza el siguiente algoritmo [6]:

$$j = (m-2), \cdots, 0$$

$$Sta_{aj\,(m,i)} = a_m$$

$$Sta_{aj\,(m-1,i)} = a_{m-i} - Sta_{aj\,(m,i)} \cdot$$
$$\cdot (ta_i - B_{m-1})$$

$$Sta_{aj\,(j,i)} = a_j + Sta_{aj\,(j+1,i)} \cdot (ta_i - B_j) -$$
$$- Sta_{aj\,(j+2,i)} \cdot C_{j+1}$$

El valor de $Sta_{aj\,(0,i)}$ será el valor ajustado de la variable dependiente $Sta_{aj\ i}$, de manera que la suma de las desviaciones cuadráticas del residuo del ajuste (TR), se calcula según la siguiente ecuación:

$$TR = \sum_{i=1}^{n} \left[Sta_i - Sta_{aj\,(0,i)} \right]^2 \qquad (12)$$

El coeficiente de Determinación Múltiple R^2:

$$R^2 = \frac{a^T \cdot P^T \cdot Sta - n \cdot (\overline{Sta})^2}{Sta^T \cdot Sta - n \cdot (\overline{Sta})^2} \qquad (13)$$

y el estimador isesgado de σ^2, obtenido como el Cuadrado Medio del Residuo (CMRes), según el ANOVA aplicado, junto a las dócimas anteriores y la suma de las desviaciones cuadráticas TR, permiten determinar estadísticamente el mejor polinomio de ajuste.

Si se desea obtener el polinomio ajustado según la forma descrita por la ecuación (1), es necesario sustituir la ecuación (3) por la (10) y desarrollar.

d. LA CURVA MANCOMUNADA

Cuando están disponibles varios conjuntos de datos (en este contexto, se refiere a los reportes de los diferentes fabricantes, representados por el contador $k = 1, 2, \cdots, K$ de $Sta_{k,i}$ para ta_i), la pregunta más frecuente es: ¿puede utilizarse una curva de regresión para todos los datos?[7].

En este caso, el modelo, en términos matriciales, es el siguiente:

$$Sta_{manc} = ta_{manc} \cdot \beta_{manc} + e_{manc} \qquad (14)$$

Donde[2]:

Sta_{manc}:vector columna de todos los factores de corrección reportados por los fabricantes, °C/gc .

ta_{manc} : matriz mancomunada correspondiente a la variable independiente ta ,°C .

β_{manc} : vector columna de los parámetros del polinomio de ajuste de los valores mancomunados.

De la misma manera que se construyen los polinomios ortogonales según [5], aquí se utiliza dicho procedimiento para transformar el modelo matricial mancomunado dado por la ecuación (14), en el siguiente modelo ortogonal:

$$Sta_{manc} = P_{manc} \cdot \alpha_{manc} + e_{manc-ortog} \qquad (15)$$

[2] Sta_{manc}, ta_{manc}, β_{manc} son expresiones de las matrices que se muestran en e Anexo 1.

Donde:

α_{manc} : vector columna de los parámetros del polinomio de ajuste de los valores mancomunados ortogonalizados.

$e_{manc-ortog}$: vector columna de los errores de ajuste de los valores mancomunados ortogonalizados, °C/gc .

Los estimadores mínimos - cuadráticos de α_{manc} son:

$$a_{manc} = (P^T_{manc} \cdot P_{manc})^{-1} \cdot P^T_{manc} \cdot Sta_{manc} \qquad (16)$$

Para comprobar si las funciones de regresión correspondientes a los k - ésimos grupos, ya ajustadas anteriormente, son el resultado de unirlas y obtener una curva de regresión mancomunada para $\sum_{k=1}^{K} n_k$ datos, se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0: \begin{Bmatrix} \alpha_{0,1} = \alpha_{0,2} = \cdots = \alpha_{0,K} \\ \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \cdots = \alpha_{1,K} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{j,1} = \alpha_{j,2} = \cdots = \alpha_{j,K} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m,1} = \alpha_{m,2} = \cdots = \alpha_{m,K} \end{Bmatrix}$$

vs

$$H_1: \begin{Bmatrix} \alpha_{0,1} \neq \alpha_{0,2} \neq \cdots \neq \alpha_{0,K} \\ \alpha_{1,1} \neq \alpha_{1,2} \neq \cdots \neq \alpha_{1,K} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{j,1} \neq \alpha_{j,2} \neq \cdots \neq \alpha_{j,K} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m,1} \neq \alpha_{m,2} \neq \cdots \neq \alpha_{m,K} \end{Bmatrix}$$

La prueba de ANOVA para la comprobación de la igualdad de los coeficientes de la regresión puede consultarse en [8].

$$F_{calc} > F_{0,05}\left[\nu_1 = p\cdot(K-1)\,;\, \nu_2 = \left(\sum_{k=1}^{K} n_k\right) - K\cdot p \right]$$

Si se rechaza la hipótesis H_0 con un nivel de confianza del 95 %; significa que todas las estimaciones de los parámetros $\alpha_{j,k}$ son a su vez de un mismo parámetro α_j, independientemente del grupo que lo originó.

e. REGRESIÓN LINEAL AJUSTADA A LA MEDIA DEL GRUPO

Si se cumple la hipótesis del punto anterior, la siguiente pregunta será: ¿ puede utilizarse una curva de regresión para los valores medios de la variable dependiente $Sta_{i,k}$?. En este caso, el modelo matricial es:

$$Sta_{med} = ta\cdot\beta_{med} + e_{med} \qquad (17)$$

Donde:

Sta_{med}: vector columna de los valores medios del factor de corrección reportados por los fabricantes, °C/gc .

ta : matriz correspondiente a la variable independiente temperatura de ajuste ,°C .

β_{med} : vector columna de los parámetros del polinomio de ajuste.

e_{med}: vector columna de los errores de ajuste, °C/gc .

Transformando el modelo anterior a uno ortogonalizado:

$$Sta_{med} = P_{med}\cdot\alpha_{med} + e_{med} \qquad (18)$$

La prueba de ANOVA para comprobar la hipótesis: es similar a la planteada en el epígrafe 3 del presente trabajo.

$$H_0 : \alpha_{med\,0} = \alpha_{med\,1} = \cdots = \alpha_{med\,m} = 0$$

$$\text{vs}$$

$$H_1 : \alpha_{med\,j} \neq 0$$

Considerando que las pruebas anteriores fueron satisfechas, es lógico plantear la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{med\,1} = \alpha'_{manc\,1} \\ \alpha_{med\,2} = \alpha'_{manc\,2} \\ \vdots \\ \alpha_{med\,j} = \alpha'_{manc\,j} \\ \vdots \\ \alpha_{med\,p} = \alpha'_{manc\,p} \end{array} \right\} \quad vs \quad H_1 : \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{med\,1} \neq \alpha'_{manc\,1} \\ \alpha_{med\,2} \neq \alpha'_{manc\,2} \\ \vdots \\ \alpha_{med\,j} \neq \alpha'_{manc\,j} \\ \vdots \\ \alpha_{med\,p} \neq \alpha'_{manc\,p} \end{array} \right\}$$

Donde los coeficientes α_{manc} están referidos al modelo mancomunado que incluye los valores medios Sta_{med}.

La prueba de ANOVA para la comprobación de la igualdad de los coeficientes de la regresión es similar a la realizada para la curva mancomunada [8]; si el resultado es satisfactorio, entonces pueden referirse los valores del factor de corrección Sta a la curva de ajuste Sta_{med} vs ta, independientemente del fabricante del termómetro, con un nivel de confianza estadístico del 95 %.

3. RESULTADOS

En las Tablas No.1, 2 y 3 se muestran los resultados de la aplicación del ANOVA al ajuste de las curvas según [5] para los diferentes fabricantes [2, 3, 4] en el rango comprendido entre 0 y 100 °C :

En la Tabla No. 4 se muestran los resultados de la aplicación del ANOVA al ajuste, de acuerdo con [8], según los reportes mancomunados (NBS - GOST - PTB) en el rango comprendido entre 0 y 100 °C.

En la Tabla No. 5 se exponen los resultados de la prueba de ANOVA para la comprobación de la igualdad de los coeficientes de la regresión mancomunada según [8].

Tabla No. 1. ANOVA aplicado a la regresión lineal por polinomios ortogonales que corresponde a los datos reportados por los norteamericanos según el NIST, anteriormente NBS [6].

Fuente de variación	g.l	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_{calc}	$F_{teór.}$
Regresión	m + 1 = 5	21,471 99	4,294 4		
a_0 (media)	1	21,469 38	---		
a_1	1	$25{,}9 \times 10^{-4}$	$25{,}9 \times 10^{-4}$	$F_1 = 118\ 872{,}9$	6,12
a_2	1	$1{,}532\ 457 \times 10^{-5}$	$1{,}532\ 457 \times 10^{-6}$	$F_2 = 702{,}9$	6,12
a_3	1	$7{,}062\ 29 \times 10^{-8}$	$7{,}062\ 29 \times 10^{-8}$	$F_3 = 3{,}2$	6,12
a_4	1	$3{,}266\ 41 \times 10^{-7}$	$3{,}266\ 41 \times 10^{-7}$	$F_4 = 15$	6,12
$SCR(Reg/a_0)$	4	$26{,}1 \times 10^{-4}$	$6{,}5 \times 10^{-4}$		
Residuo	16	$3{,}488\ 51 \times 10^{-7}$	$2{,}180 \times 10^{-8}$		
Total	21	21,471 99	---	$F_T = 29\ 898{,}5$	3,73

Otros coeficientes de interés son: $R^2 = 0{,}999\ 87$

$TR = 3{,}00 \times 10^{-6}$

Tabla No. 2. ANOVA aplicado a la regresión lineal por polinomios ortogonales que corresponde a los datos reportados por los rusos [3].

Fuente de variación	g.l	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_{calc}	$F_{teór.}$
Regresión	m + 1 = 5	21,486 73	4,297 35		
a_0 (media)	1	21,483 93	---		
a_1	1	$28{,}0 \times 10^{-4}$	$28{,}0 \times 10^{-4}$	$F_1 \rightarrow \infty$	6,12
a_2	1	$5{,}114\,644 \times 10^{-6}$	$5{,}114\,644 \times 10^{-6}$	$F_2 \rightarrow \infty$	6,12
a_3	1	$4{,}009\,81 \times 10^{-9}$	$4{,}009\,81 \times 10^{-9}$	$F_3 \rightarrow \infty$	6,12
a_4	1	$8{,}293\,35 \times 10^{-12}$	0	$F_4 \rightarrow \infty$	6,12
SCR(Reg/a_0)	4	$28{,}1 \times 10^{-4}$	$6{,}72 \times 10^{-4}$		
Residuo	16	0	0		
Total	21	21,486 73	---	$F_T \rightarrow \infty$	3,73

Otros coeficientes de interés son: $R^2 = 1$

$$TR = 6{,}73 \; x \; 10^{-15}$$

Tabla No. 3. ANOVA aplicado a la regresión lineal por polinomios ortogonales que corresponde a los datos reportados por los alemanes [4].

Fuente de variación	g.l	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_{calc}	$F_{teór.}$
Regresión	m + 1 = 5	21,469 14	4,293 83		
a_0 (media)	1	21,466 52	---		
a_1	1	$26{,}1 \times 10^{-4}$	$26{,}1 \times 10^{-4}$	$F_1 = 3\,100\,116$	6,12
a_2	1	$1{,}391\,681 \times 10^{-5}$	$1{,}391\,681 \times 10^{-5}$	$F_2 = 16\,545{,}1$	6,12
a_3	1	$2{,}375\,81 \times 10^{-9}$	$2{,}375\,81 \times 10^{-9}$	$F_3 = 2{,}8$	6,12
a_4	1	$7{,}069\,77 \times 10^{-10}$	$7{,}069\,77 \times 10^{-10}$	$F_4 = 0{,}8$	6,12
SCR(Reg/a_0)	4	$26{,}2 \times 10^{-4}$	$6{,}6 \times 10^{-4}$		
Residuo	16	$1{,}345\,83 \times 10^{-8}$	$8{,}411\,44 \times 10^{-10}$		
Total	21	21,469 14	---	$F_T = 779\,166{,}3$	3,73

Otros coeficientes de interés son: $R^2 = 0{,}999\,99$

$$TR = 1{,}92 \; x \; 10^{-8}$$

Tabla No. 4. ANOVA aplicado a la regresión lineal por polinomios ortogonales que corresponde a los datos mancomunados (norteamericanos, rusos y alemanes).

Fuente de variación	g.l	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_{calc}	$F_{teór.}$
Regresión	m + 1 = 5	64,427 79	12,879 2		
a_0 (media)	1	64,419 75	---		
a_1	1	$80{,}0 \times 10^{-4}$	$80{,}0 \times 10^{-4}$	F_1=68 076	5,28
a_2	1	$3{,}271\,346 \times 10^{-5}$	$3{,}271\,346 \times 10^{-5}$	F_2=278,4	5,28
a_3	1	$2{,}470\,73 \times 10^{-8}$	$2{,}470\,73 \times 10^{-8}$	F_3=0,2	5,28
a_4	1	$1{,}241\,01 \times 10^{-7}$	$1{,}241\,01 \times 10^{-7}$	F_4=1,1	5,28
SCR(Reg/a_0)	4	$80{,}3 \times 10^{-4}$	$20{,}1 \times 10^{-4}$		
Residuo	58	$6{,}815\,19 \times 10^{-6}$	$1{,}175\,03 \times 10^{-7}$		
Total	63	64,427 79	---	F_T=17 088,9	3,02

Otros coeficientes de interés son: $R^2 = 0{,}999\,15$

$$TR = 7{,}82 \times 10^{-6}$$

Tabla No. 5. ANOVA aplicado a la regresión lineal por polinomios ortogonales que corresponde a la comprobación de la igualdad de los coeficientes de la regresión mancomunada.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	g.l	Cuadrado Medio	F_{calc}	$F_{teór.}$
Desviación de la hipótesis H_0	SCH = $6{,}452\,881 \times 10^{-6}$	gl_3 = 10	$6{,}452\,881 \times 10^{-7}$	85,5	2,34
Regresiones separadas (residuo)	SCS = $3{,}623\,093 \times 10^{-7}$	gl_1 = 48	$7{,}548\,110 \times 10^{-9}$		
Regresión común (residuo)	SCC = $6{,}815\,19 \times 10^{-6}$	gl_2 = 58	-----		

4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Como se observa en las Tablas No. 1, 2, 3 y 4, y de los parámetros asociados a la precisión del ajuste, la calidad del ajuste individual de las curvas reportadas por los principales productores es magnífica si se utiliza la regresión lineal mediante los polinomios ortogonales.

Los valores de los estimadores mínimos cuadráticos de los parámetros β definidos en la ecuación (2) se muestran en la Tabla No. 6.

Tabla No. 6[3]. Estimadores mínimo - cuadráticos de los parámetros de los polinomios de ajuste.

País productor	Parámetros de los polinomios de ajuste para los diferentes productores				
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
U.S.A	0,991 146 7	0,043 736 9	0,010 650 3	(- 0,039 623 3)	0,021 473 6
Rusia	0,991 325 2	0,045 309 2	- 0,009009 3	0,001 126 6	- 4,974 x 10^{-13}
Alemania	0,991 018 4	0,047 0414 2	- 0,010 294 5	(- 0,001 587 1)	(0,000 928 4)

Sin embargo, del análisis de la Tabla No. 5 se obtiene la siguiente conclusión: no existe homogeneidad estadística de los parámetros $\alpha_{j,k}$, para un nivel de confianza del 95 %, a pesar de que la curva mancomunada, de manera individual, posee un ajuste estadístico significativo (ver Tabla No. 4).

Además, un análisis posterior no tiene sentido porque se sustenta en el estricto cumplimiento de las hipótesis anteriores, tal como se plantea en el epígrafe 5 del presente trabajo.

Para encontrar otras alternativas, se realizaron idénticos análisis:

a. Se desglosa el intervalo de temperatura, por ejemplo, de 0 a 50 °C y de 50 hasta 100 °C.

b. Se incrementa sucesivamente el límite superior del primer intervalo definido, por ejemplo, hasta 60 °C y valores sucesivos.

c. Se asocia el intervalo de temperaturas de ajuste analizado por los productores, por ejemplo, alemanes con norteamericanos. Los resultados fueron igualmente insatisfactorios desde el punto de vista estadístico.

5. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Si se desea reportar la relación *Sta vs ta* en el rango de trabajo de un termómetro que específicamente no puede asociarse a un productor, y ante la imposibilidad de utilizar una curva de valores medios mancomunados en el rango de temperaturas de 0 a 100 °C, o en cualquier subrango escogido, se recomienda lo siguiente:

1. Calcular el valor de *Sta* no sólo en el intervalo básico, donde $ta = 20$ °C, sino también en otros, denominados asociados, cuyas temperaturas de ajuste corresponden con los valores próximos a los límites superior e inferior del rango solicitado.

[3] La inclusión de los valores de los parámetros entre paréntesis son opcionales en la ecuación de ajuste de acuerdo con los resultados de las dócimas secuenciales F-Fischer.

2. Hallar la diferencia entre los valores experimentales (Sta) [1] y nominales (Sta_{nom}) [2, 3, 4] del Valor del Grado para los intervalos básico y asociados:

$$\Delta Sta = Sta_c - Sta_{nom} \quad (19)$$

Si

$$|\Delta Sta| \leq U_T \quad (20)$$

donde:

$$U_T = \pm k \cdot \left[u_c^2 (Sta) + u^2 (Sta_{ajuste}) \right]^{0,5} \quad (21)$$

U_T : Incertidumbre Expandida de Sta para la temperatura de ajuste ta , con k = 2 (p ≈ 95 %).

$u_c(Sta)$: incertidumbre estándar combinada de Sta , °C/gc . Si el proceso de calibración se mantiene bajo control metrológico, se utilizan los valores reportados en [1].

$u(Sta_{ajuste})$: incertidumbre estándar asociada a la calidad del ajuste de la curva Sta vs ta , °C/gc; su valor coincide con la raíz cuadrada positiva del Cuadrado Medio del Residuo (CMRes) (vea el epígrafe 3).

Por tanto, se pueden notificar en el Reporte de Calibración los valores de Sta_{rep} , según la siguiente expresión:

$$Sta_{rep} = Sta_{nom} + \Delta Sta_{nom} \quad (22)$$

Aunque no habría nada que objetar, desde el punto de vista estadístico, si se reportaran los mismos valores nominales del fabricante para las restantes temperaturas de ajuste ta .

Si se incumple la desigualdad (20), entonces es necesario determinar experimentalmente el factor de corrección para el intervalo de trabajo deseado.

6. CONCLUSIONES

La relación funcional Sta *vs* ta SI depende del productor, coincidiendo con el resultado experimental reportado en [1] , donde se demostró que a pesar de que el modelo matemático que describe la determinación de Sta no depende del fabricante, su modelo estadístico SI depende en el intervalo básico de calibración.

Esta adversa conclusión impide la utilización de una curva de valores medios mancomunados de Sta en el rango de temperaturas de 0 a 100 °C. Sin embargo, cuando el termómetro no está debidamente identificado con su productor, y se desea reportar la relación funcional Sta *vs* ta , se recomienda utilizar el procedimiento referido en la propuesta de solución del presente artículo, y asociar el termómetro a la curva que mejor satisfaga la condición (20).

La aplicación de la metodología descrita no coincide exactamente con la propuesta por los rusos [3], pues si bien ellos también determinan experimentalmente Sta en un intervalo asociado, la temperatura de ajuste correspondiente $ta = 30\ °C$ se considera demasiado próxima a 20 °C.

7. AGRADECIMIENTOS

Agradezco nuevamente al Instituto de Investigaciones en Ingeniería (INII) de la Universidad de Costa Rica, y especialmente a la Ing. Flor de María Muñoz, su Directora, la posibilidad de publicar este trabajo, que es la continuación del artículo "Comparación del Valor del Grado de los termómetros diferenciales tipo Beckmann".

8. BIBLIOGRAFÍA

[1]. Díaz Tey, Alberto J.; Garbizo Cordero, Víctor. *Comparación del Valor del Grado de los termómetros diferenciales tipo Beckmann.*

[2]. Wise, Jacqueline A.; *A liquid-in-glass thermometry.* N.B.S. Monograph 150. U.S Department of Commerce. January 1976.

[3]. GOST 8.279-78. *Termómetros de trabajo de mercurio en vidrio. Métodos y medios de verificación.*

[4]. Ralfs, P.; Blanke, W. Reglamento de Prueba del PTB. Termómetro de vidrio en líquido. Alemania. 1983.

[5]. Draper, N. R.; Smith, H. Applied Regresion Analisys. Editorial John Wiley & Sons. U.S.A. 1981.

[6]. Cheney, E. W. Introduction to approximation theory. McGraw-Hill Book Company. New York. 1966.

[7]. Ostle, Bernard. Estadística Aplicada. Editorial Científica-técnica. La Habana. 1980.

[8]. Radhakrishna Rao, C. Linear Statistical Inference and its applications. Second Edition. Edición Revolucionaria. 1973.

ANEXO No. 1

Expresiones matriciales correspondientes a los términos definidos para el modelo mancomunado por la ecuación (15)

$$
Sta_{manc} = \begin{bmatrix} Sta_{1,1} \\ Sta_{1,2} \\ \vdots \\ Sta_{1,K} \\ ---- \\ Sta_{2,1} \\ Sta_{2,2} \\ \vdots \\ Sta_{2,K} \\ ---- \\ \vdots \\ Sta_{i,k} \\ \vdots \\ ---- \\ Sta_{n,1} \\ Sta_{n,2} \\ \vdots \\ Sta_{n,K} \end{bmatrix}_{(n \ x \ K) \ x \ 1}
\qquad
ta_{manc} = \begin{bmatrix}
1 & ta_{1,1} & ta_{1,1}^{2} \cdots & ta_{1,1}^{j} \cdots & ta_{1,1}^{m} \\
1 & ta_{1,2} & ta_{1,2}^{2} \cdots & ta_{1,2}^{j} \cdots & ta_{1,2}^{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & ta_{1,K} & ta_{1,K}^{2} \cdots & ta_{1,K}^{j} \cdots & ta_{1,K}^{m} \\
\hline
1 & ta_{2,1} & ta_{2,1}^{2} \cdots & ta_{2,1}^{j} \cdots & ta_{2,1}^{m} \\
1 & ta_{2,2} & ta_{2,2}^{2} \cdots & ta_{2,2}^{j} \cdots & ta_{2,2}^{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & ta_{2,K} & ta_{2,K}^{2} \cdots & ta_{2,K}^{j} \cdots & ta_{2,K}^{m} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & ta_{i,k} & ta_{i,k}^{2} \cdots & ta_{i,k}^{j} \cdots & ta_{i,k}^{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
1 & ta_{n,1} & ta_{n,1}^{2} \cdots & ta_{n,1}^{j} \cdots & ta_{n,1}^{m} \\
1 & ta_{n,2} & ta_{n,2}^{2} \cdots & ta_{n,2}^{j} \cdots & ta_{n,2}^{m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & ta_{n,K} & ta_{n,K}^{2} \cdots & ta_{n,K}^{j} \cdots & ta_{n,K}^{m}
\end{bmatrix}_{(n \ x \ K) \ x \ (m+1)}
$$