

# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
ENERO/DICIEMBRE 2000 - VOLUMEN 10 - Nº 1 y 2



# UNA FUNCION VENTANA PARA EL ANALISIS ESPECTRAL OBTENIDA DE LOS POLINOMIOS CONCENTRADOS DOBLEMENTE ORTOGONALES

Jorge A. Romero C.<sup>1</sup>

## Resumen

Se propone una función ventana obtenida a partir de los polinomios concentrados doblemente ortogonales. Esta función ventana se escoge de las soluciones a la ecuación matricial de autovalores que define a tales polinomios. Los filtros digitales obtenidos a partir de estas funciones ventana tienen en general una pendiente de caída que los hace adecuados para visualizar señales débiles en presencia de señales mucho más fuertes. Esta aplicación en el análisis espectral demuestra su utilidad al compararse con filtros digitales obtenidos de otras funciones ventana más comúnmente usadas.

## Summary

A new window function, obtained from the doubly orthogonal concentrated polynomials, is proposed. It is chosen among the solutions to the matrix equation from which originates those polynomials. The digital filters, obtained using the window function technique, have a better rolloff, making them appropriate to distinguish weak signals in the presence of stronger signals. This application in spectral analysis shows its usefulness when a comparison is made between digital filters obtained using other commonly used window functions, and digital filters obtained from the proposed window.

*Descriptores:* Polinomios; funciones ortogonales; optimización; tratamiento y detección de señales

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 La técnica de ventanas en el diseño de filtros digitales

Los filtros de respuesta finita al impulso (con siglas "FIR" en inglés) tienen la ventaja de ser compelidos con facilidad a poseer fase lineal para una respuesta al impulso par o impar. Como tal propiedad es de suma importancia en la práctica, las técnicas de diseño de filtros FIR son de interés considerable. Hay cuatro de ellas que a continuación se enumeran: (1) la técnica de función ventana; (2) la técnica de muestreo en frecuencia; (3) la técnica de diseños con rizado uniforme y, (4) la técnica del diseño máximamente plano [1-3].

De las técnicas mencionadas, las más populares son la primera y la tercera [4]. Aquí se tratará con la primera. Si se denota con  $H_d(\omega)$  la respuesta en frecuencia deseada para un filtro FIR, su respuesta al impulso puede denotarse por  $h_d(n)$ . Ambos conceptos están relacionados por el par de ecuaciones

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (1)$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (2)$$

<sup>1</sup>Ing., Prof. Esc. de Ing. Eléctrica, Univ. de Costa Rica. Proyecto No. 731-97-309, Vicerrectoría de Investigación, UCR.

Como  $H_d(\omega)$  es una función periódica, las dos ecuaciones anteriores definen una serie infinita de Fourier con  $h_d(n)$  como los coeficientes. Para la mayoría de los filtros prácticos, la serie es infinita pues  $H_d(\omega)$  o alguna de sus derivadas es discontinua. Sin embargo, debido a las limitaciones prácticas de cálculo computacional, la respuesta en frecuencia del filtro FIR está dada por:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M h(n) e^{-j\omega n} \quad (3)$$

La ecuación anterior es una aproximación a  $H_d(\omega)$  mediante una serie finita de Fourier. Para diseñar un filtro FIR basta truncar la respuesta ideal  $h_d(n)$  fuera del intervalo  $0 \leq n \leq M$  para producir  $h(n)$ :

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

El diseño especificado por la ecuación anterior es la aproximación de  $H_d(\omega)$  por  $H(\omega)$  basada en el mínimo error cuadrático medio; tal error se obtiene truncando la serie infinita de Fourier correspondiente a tal función. Sin embargo, el truncamiento de la serie de Fourier origina el conocido fenómeno de Gibbs en  $H(\omega)$ , especialmente si  $H_d(\omega)$  es discontinua [6]. Como los filtros son idealmente discontinuos en los bordes de sus bandas de transición, el simple truncamiento de la respuesta al impulso producirá usualmente un diseño inaceptable.

La técnica de ventanas propone utilizar una serie de funciones  $w(n)$  de extensión finita con el objeto de truncar o segmentar señales largas para usar la transformada discreta de Fourier (DFT) u otras operaciones de longitud finita o en bloque, para producir:

$$h(n) = w(n)h_d(n) \quad (4)$$

Esta técnica tiene la ventaja de ser fácil de emplear y reduce el fenómeno de Gibbs en la aproximación a la respuesta en frecuencia. Tiene la desventaja de destruir la optimalidad del error mínimo cuadrático de la aproximación original y de tener efectos implícitos sobre la respuesta en frecuencia.

Las ventanas preferidas en el diseño de filtros digitales por su facilidad de cálculo son: (1) la ventana von Hann; (2) la ventana Hamming; (3) la ventana Blackman y (4) la ventana Kaiser [1,7]. Desde el punto de vista del diseño, las ventanas Hamming y Kaiser son las más empleadas, la primera por la atenuación de rizado en la banda de rechazo y su ancho de banda de transición, y la segunda, por ser casi óptima en el sentido de tener la máxima energía en el lóbulo principal para un nivel pico dado en los lóbulos secundarios y por permitir diseñar por separado el ancho de banda de transición y la atenuación en la banda de rechazo.

Otras ventanas que difieren de las anteriores en que satisfacen criterios explícitos de optimalidad en el dominio de la frecuencia son la Dolph-Chebyshev y la esferoidal prolata. La primera minimiza el nivel máximo de los lóbulos secundarios y la segunda, maximiza la razón de la energía del lóbulo principal a la energía de los lóbulos secundarios [8-12]. Si bien ambas ventanas son matemáticamente óptimas, su comportamiento es extremo para algunas aplicaciones. En vista de ello, se ha propuesto una ventana que logra el compromiso óptimo entre la energía total de los lóbulos secundarios y la amplitud pico de tales lóbulos [13].

### 1.2 La técnica de ventanas desde el punto de vista del análisis espectral

Criterios diferentes a los usados en el diseño de filtros digitales son utilizados para escoger una función ventana cuando se realiza el análisis espectral de una secuencia de datos. En este caso, los factores que privan en tal escogencia son la resolución espectral (indicada por el ancho de banda de transición)

y el ámbito dinámico (indicado por la pendiente de caída de la gráfica de magnitud en dB) que señala el poder de una función ventana para distinguir señales débiles en presencia de otras más fuertes [14].

Por las razones expuestas en el párrafo anterior, la ventana von Hann se utiliza de preferencia en el análisis espectral en lugar de la Hamming, pues la primera tiene una pendiente de caída de 18 dB por octava que supera a la de la segunda con tan sólo 6 dB por octava. Cuando se trata más bien de diseñar filtros digitales, se prefiere la Hamming a la von Hann. En este último caso, priva como criterio de convergencia la atenuación mínima alcanzada en la banda de rechazo.

El objetivo de este artículo es proponer la utilización de una función ventana obtenida de uno de los polinomios concentrados doblemente ortogonales, que es de extensión finita y con la ventaja que su respuesta al impulso presenta coeficientes fácilmente calculables a partir de una ecuación matricial de autovalores [15].

### 1.3 Polinomios concentrados doblemente ortogonales

Los polinomios concentrados doblemente ortogonales  $f^{(n)}(x)$  son polinomios de orden surgidos al maximizar la razón:

$$R(f) = \frac{\int_{I_a} |f(x)|^2 dx}{\int_{I_b} |f(x)|^2 dx} \quad (5)$$

donde  $I_a$ ,  $I_b$  son intervalos de la recta numérica. Al polinomio  $f_0^{(n)}(x)$  que maximiza tal razón se le puede ver como el polinomio con la energía más concentrada en el intervalo  $I_a$  a expensas de su energía en  $I_b$ .

El problema de maximizar  $R(f)$  es equivalente al de encontrar el autovalor más grande  $\lambda_0^{(n)}$  al que corresponde la autofunción  $f_0^{(n)}(x)$  dentro de un problema de autovalores. Las

autofunciones restantes, polinomios de orden  $n$  igualmente, integran junto con  $f_0^{(n)}(x)$ , un conjunto de funciones  $f_j^{(n)}(x)$  ( $j = 0, \dots, n$ ) ortogonales simultáneamente sobre  $I_a$  e  $I_b$  [15].

Sea  $\phi_0(x)$ ,  $\phi_1(x)$ , ...,  $\phi_n(x)$  una base para el espacio  $F_n$  de polinomios de orden  $n$ . Cada polinomio en  $F_n$  se describe como:

$$f(x) = \sum_k f_k \phi_k(x) \quad (6)$$

por lo que se le puede representar vectorialmente como  $\underline{f} = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T$ . Con esta última notación,  $R(f)$  puede escribirse como:

$$R(f) = \frac{\underline{f}^T \underline{A} \underline{f}}{\underline{f}^T \underline{B} \underline{f}} \quad (7)$$

$\underline{f}^T$  es la transpuesta de  $\underline{f}$ ,  $A$  y  $B$  son matrices  $(n+1) \times (n+1)$  con elementos descritos por:

$$\int \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

que son integrales evaluadas sobre  $I_a$  e  $I_b$ , respectivamente. Para maximizar  $R(f)$  se resuelve la ecuación matricial de autovalores

$$\underline{A} \underline{f} = \lambda \underline{B} \underline{f} \quad (8)$$

El mayor autovalor  $\lambda_0^{(n)}$  que satisface la ecuación anterior da la razón máxima para  $R(f)$ . Las coordenadas  $f_k$  del autovector correspondiente son los coeficientes del polinomio  $f_0^{(n)}(x)$  en la ecuación No. 6 que hace  $R(f) = \lambda_0^{(n)}$ .

Una base conveniente que puede usarse para calcular los polinomios  $f^{(n)}(x)$  es  $\phi_i(x) = x^i$ . Si  $I_a = [a_1, a_2]$ ,  $I_b = [b_1, b_2]$ , puede demostrarse que las entradas de las matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  están dadas por:

$$a_{ij} = \frac{a_2^{i+j+1} - a_1^{i+j+1}}{i+j+1} \quad b_{ij} = \frac{b_2^{i+j+1} - b_1^{i+j+1}}{i+j+1}$$

Cualquier otra base puede utilizarse para realizar el cálculo de los polinomios que maximizan  $R(f)$ . La naturaleza de tales polinomios depende de si  $I_a$  o  $I_b$  son disjuntos o no. Si lo son, se habla de un problema exterior. Si  $I_a \subset I_b$ , se habla de un problema interior [15].

## 2. LA VENTANA PROPUESTA Y SU COMPORTAMIENTO EN EL ANÁLISIS ESPECTRAL

La Figura No. 1 muestra los primeros diez polinomios que solucionan la ecuación matricial de autovalores (8) para  $n = 50$ ,  $I_a = [-0.415, 0.415]$  e  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . Si se examina la octava solución, se reconoce un gráfico comúnmente usado en el diseño de filtros de respuesta finita al impulso (FIR) mediante la técnica de la función ventana. Se propone usar esta solución particular (y sus similares) para definir una función ventana cuya aplicación más importante será en el análisis espectral.

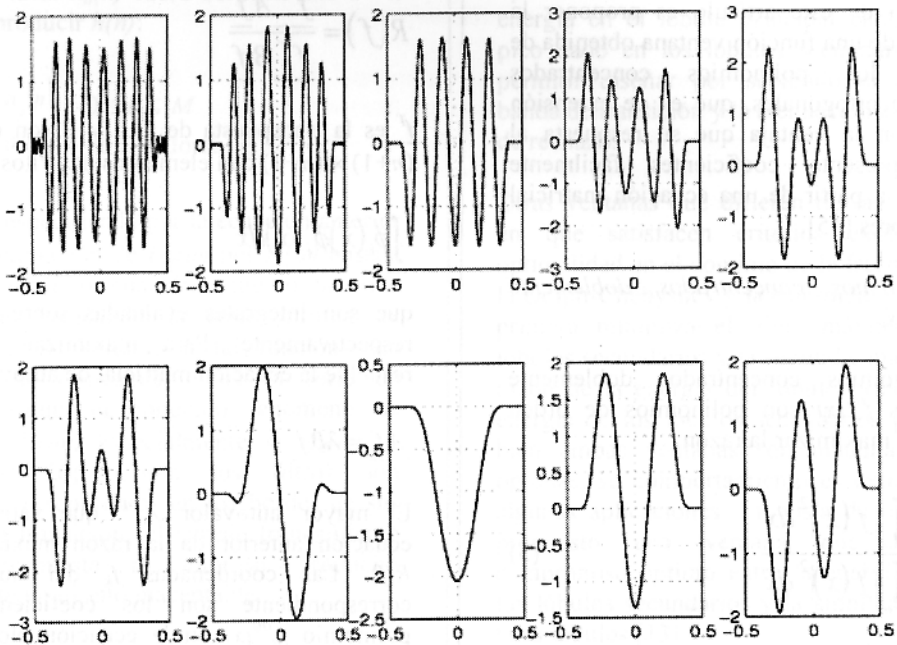


Figura No. 1 Polinomios concentrados doblemente ortogonales para un problema interior, con  $n=50$ ,  $I_a = [-0.415, 0.415]$ ,  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . Los polinomios están normalizados al valor de la integral del cuadrado del polinomio sobre  $I_b$ .

La Figura No. 2 muestra que la ventana obtenida del polinomio concentrado doblemente ortogonal definido por la octava solución tiene una mejor pendiente que las

ventanas von Hann, Hamming y Blackman. Esto es muy útil en situaciones donde se trata de visualizar una señal débil en presencia de una más fuerte.

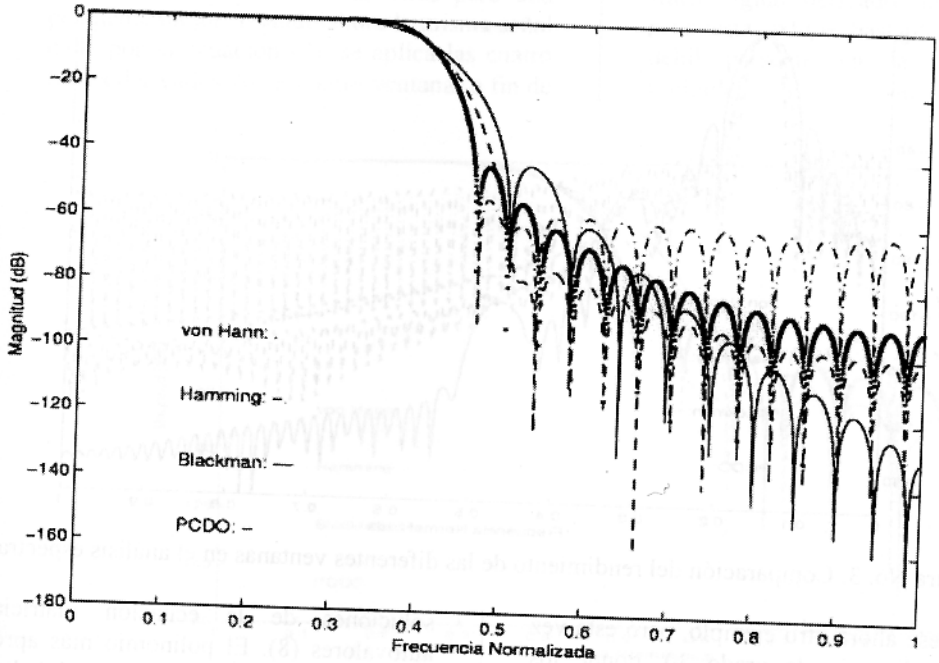


Figura No. 2. Comparación entre diferentes ventanas. Las siglas PCDO significan “polinomio concentrado doblemente ortogonal”. Se propone como nueva función ventana la octava solución, que es un polinomio de grado 50. se compara su rendimiento contra funciones ventana von Hann, Hamming y Blackman de la misma

La Figura No. 3 muestra el comportamiento de los filtros obtenidos de las diferentes ventanas en el reconocimiento de una señal débil en presencia de señales más fuertes. La ventana PCDO (“polinomio concentrado doblemente

ortogonal”) puede resaltar una señal que está cien decibelios por debajo del pico principal. La señal usada para este ejemplo fue una señal de múltiples senoides:

$$x(n) = \text{sen}\left(10\left(2\pi\frac{n}{N+1}\right)\right) + 0.001\left\{\cos\left(15\left(2\pi\frac{n}{N+1}\right)\right) + \text{sen}\left(20\left(2\pi\frac{n}{N+1}\right)\right)\right\} + 0.00001\cos\left(30\left(2\pi\frac{n}{N+1}\right)\right) \tag{9}$$

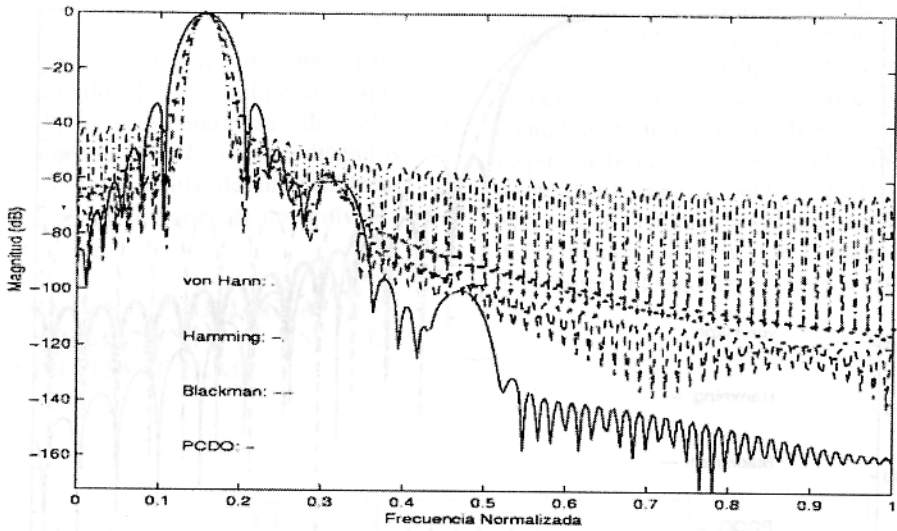


Figura No. 3. Comparación del rendimiento de las diferentes ventanas en el análisis espectral

Considérese ahora otro ejemplo, pero esta vez con un polinomio de grado 30, donde los intervalos  $I_a = [-0.425, 0.425]$  e  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . La Figura No. 4 presenta las primeras diez

soluciones de la ecuación matricial de autovalores (8). El polinomio más apropiado para la aplicación discutida sería el dado por la sexta solución.

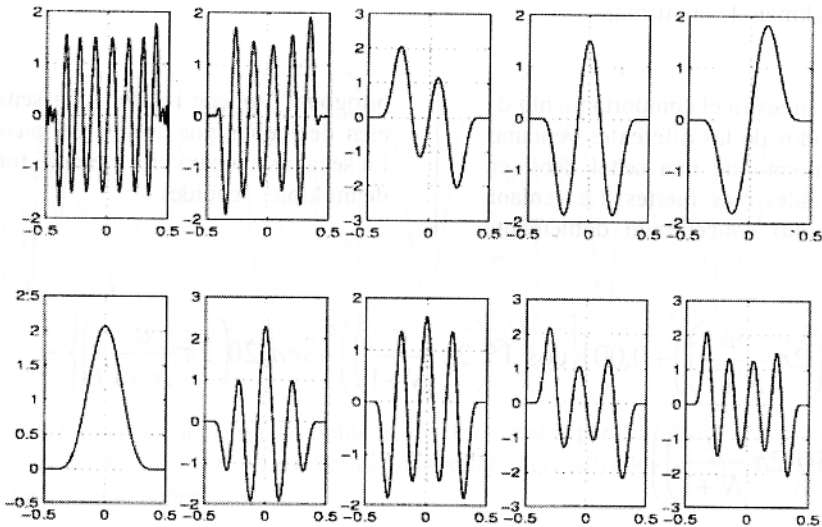


Figura No. 4. Polinomios concentrados doblemente ortogonales para un problema interior, con  $n = 30$ ,  $I_a = [-0.425, 0.425]$ ,  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . Los polinomios están normalizados al valor de la integral del cuadrado del polinomio sobre  $I_b$ .

La Figura No. 5 muestra que la nueva ventana tiene más ancho de banda más ancho, una atenuación comparable a las otras pero una pendiente mejor. Usando ahora la misma señal dada por la ecuación (9), se aplica las cuatro filtros derivados de las cuatro ventanas a fin de

visualizar los cuatro senoídes presentes en la señal original. La Figura No. 6 muestra que el filtro digital derivado de la ventana nueva propuesta exhibe bastante bien la señal más débil presente en la señal de senoídes múltiples.

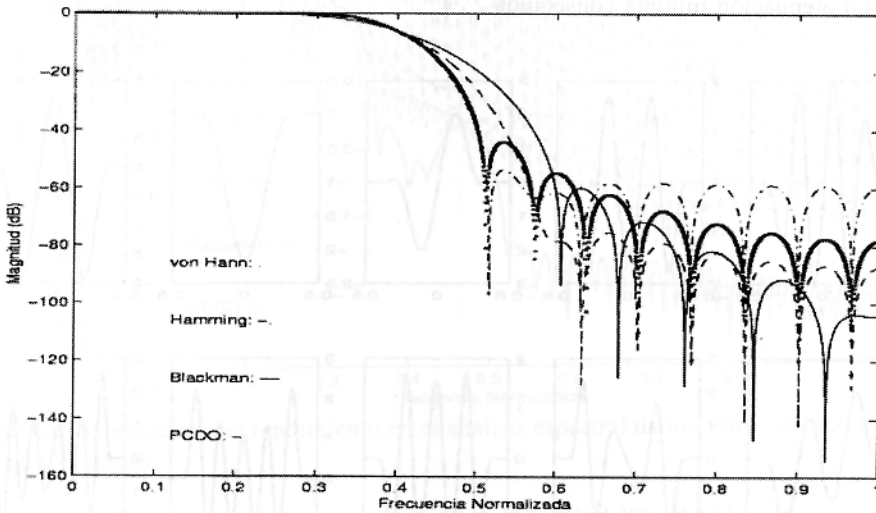


Figura No. 5. Comparación entre diferentes ventanas. Se usa como nueva función ventana la sexta solución al problema matricial de autovalores, que es un polinomio de grado 30.

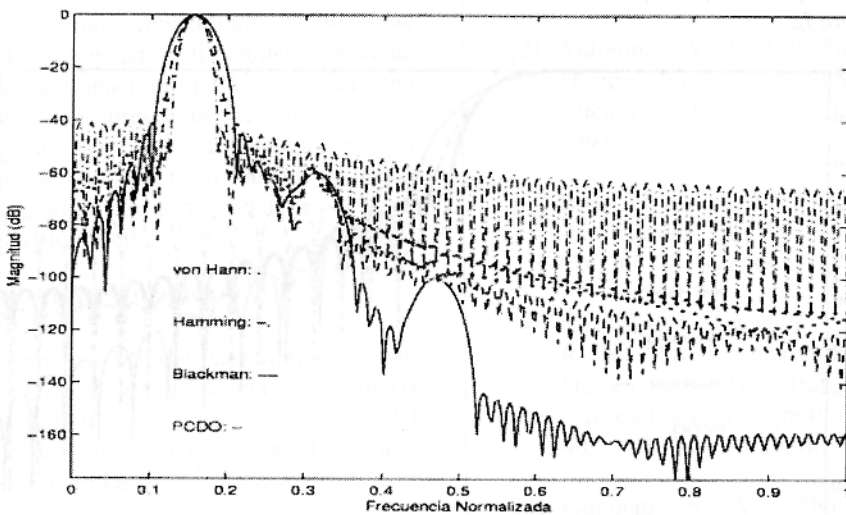


Figura No. 6. Se compara el rendimiento en el análisis espectral del filtro obtenido a partir de la ventana propuesta contra el rendimiento de los filtros digitales obtenidos de las ventanas von Hann, Hamming y Blackman de la misma longitud.



La Figura No. 7 muestra un ejemplo final donde se ha resuelto el problema matricial de autovalores para obtener polinomios concentrados de grado 60, tomando esta vez  $I_a = [-0.4, 0.4]$  e  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . La solución de mayor interés es la cuarta. La Figura No. 8 compara varias ventanas de la misma longitud entre ellas. La atenuación mínima conseguida

por la ventana propuesta en la banda de rechazo es de  $-47$  dB y su pendiente de caída es mejor que la de las otras ventanas. La Figura No. 9 muestra cómo el filtro obtenido a partir de la ventana propuesta distingue la señal más débil. Se emplea otra vez la señal de múltiples senoides de la ecuación (9).

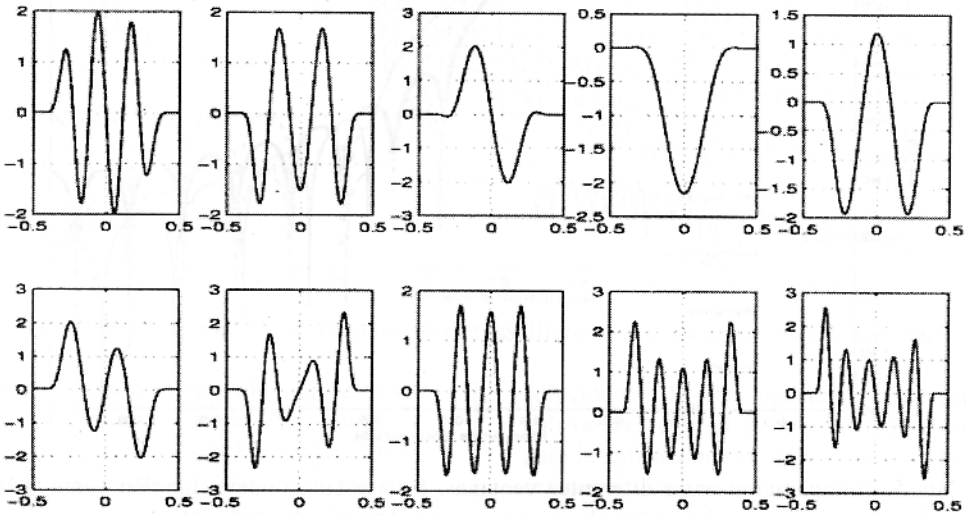


Figura No. 7. Polinomios concentrados doblemente ortogonales para un problema interior con  $n = 60$ ,  $I_a = [-0.4, 0.4]$ ,  $I_b = [-0.5, 0.5]$ . los polinomios están normalizados al valor de la integral del cuadrado del polinomio sobre  $I_b$ .

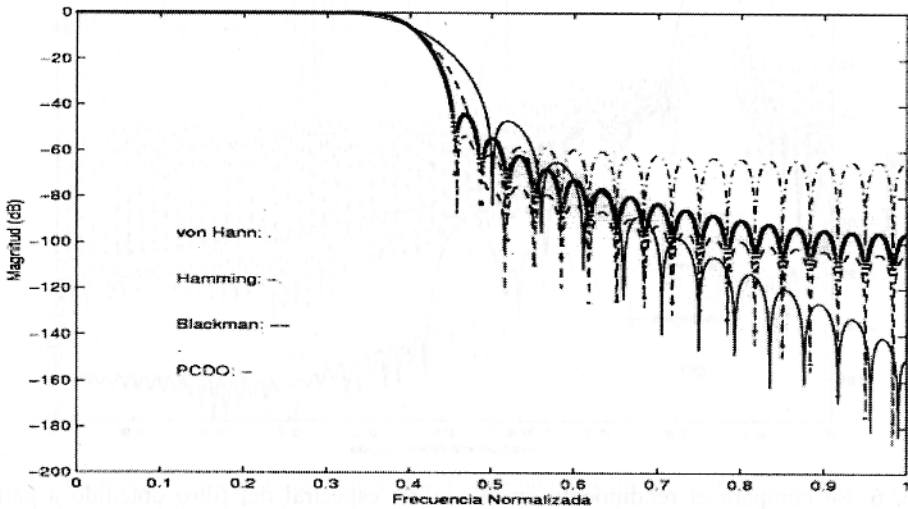


Figura No. 8. Comparación entre diferentes ventanas. Se propone como una nueva función ventana un polinomio de grado 60, cuarta solución de la ecuación matricial de autovalores, mostrada en la figura anterior.

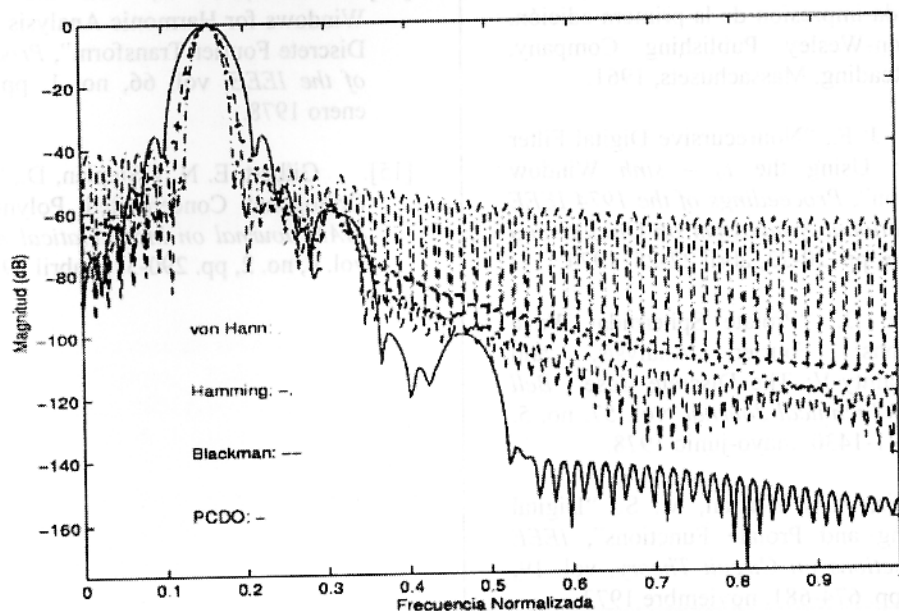


Figura No. 9. Comparación del rendimiento en el análisis espectral de los filtros digitales obtenidos de las diferentes ventanas.

### 3. CONCLUSIONES

El propósito de este artículo fue comunicar al lector interesado la utilidad que en el análisis espectral tiene una función ventana derivada de los polinomios concentrados doblemente ortogonales. En general, su pendiente de caída garantiza su capacidad para visualizar una señal débil en presencia de señales más fuertes. Su principal desventaja es su resolución debido a su mayor ancho de banda al ser comparada con otras funciones ventana de la misma longitud.

### 4. AGRADECIMIENTO

Al ingeniero José Miguel Páez Jiménez, en su momento Director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, por su apoyo para la inscripción del proyecto de investigación que dio como resultado este artículo.

### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Jackson, L. B. *Digital Filters and Signal Processing*. Tercera edición. Kluwer Academic Publishers: Boston, 1996.
- [2]. Antoniou, A. *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*. Segunda edición. McGraw-Hill, Inc.: New York, 1993.
- [3]. Bose, N. K. *Digital Filters: Theory and Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc.: New York, 1985.
- [4]. Burrus, C. S., Soewito, A. W. y Gopinath, R. A., "Least Squared Error FIR Filter Design with Transition Bands", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1327-1340, junio 1992.
- [5]. Gopinath, R. A., "Thoughts on Least Squared-Error Optimal Windows", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 984-987, abril 1996.

- [6]. Cheng, D. K. *Analysis of Linear Systems*. Segunda impresión de la primera edición. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.: Reading, Massachusetts, 1961.
- [7]. Kaiser, J. F., "Nonrecursive Digital Filter Design Using the  $I_0 - \sinh$  Window Function", *Proceedings of the 1974 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 20-23, abril 22-25, 1974.
- [8]. Slepian, D., "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty-V: The Discrete Case", *Bell System Technical Journal*, vol. 57, no. 5, pp. 1371-1430, mayo-junio 1978.
- [9]. Papoulis, A. y Bertrán, M. S., "Digital Filtering and Prolate Functions", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 19, no. 6, pp. 674-681, noviembre 1972.
- [10]. Durrani, T. S. y Chapman, R., "Optimal All-Pole Filter Design Based on Discrete Prolate Spheroidal Sequences", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 32, no. 4, pp. 716-721, agosto 1984.
- [11]. Mathews, J. D.; Breakall, J. K. y Karawas, G. K., "The Discrete Prolate Spheroidal Filter as a Digital Signal Processing Tool", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 33, no. 6, pp. 1471-1478, diciembre 1985.
- [12]. Wilson, R., "Finite Prolate Spheroidal Sequences and Their Applications I: Generation and Properties", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 9, no. 6, pp. 787-795, noviembre 1987.
- [13]. Adams, J. W., "A New Optimal Window", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 8, pp. 1753-1769, agosto 1991.
- [14]. Harris, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 1, pp. 51-83, enero 1978.
- [15]. Gilbert, E. N. y Slepian, D., "Doubly Orthogonal Concentrated Polynomials", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 4, no. 2, pp. 290-319, abril 1977.