

Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
ENERO/DICIEMBRE 2000 - VOLUMEN 10 - Nº 1 y 2



ANÁLISIS TRANSITORIO DE CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN USANDO EL OPERADOR D

Ismael Retana R.¹

Resumen

Este trabajo describe cómo usar las ecuaciones diferenciales para resolver problemas relativos a circuitos eléctricos que operan en régimen transitorio. Se ocupa de la respuesta de circuitos de primer orden tanto bajo excitación variable como bajo excitación constante. Se usa el operador D con el fin de obtener el modelo matemático del sistema. Se presenta además el fenómeno del dualismo en los circuitos. El artículo también introduce al estudiante en la terminología y los conceptos propios del campo del análisis de sistemas.

Summary

This paper describes how to use differential equations to solve electrical circuits under transient conditions. It deals with the response of first order circuits under variable excitation as well as constant excitation. The D operator is used to obtain the mathematical model of the system. The dualism about circuits is also presented. Besides, this article introduces the student to the field of system analysis terms and concepts.

1. INTRODUCCIÓN.

El análisis de los circuitos eléctricos se puede realizar tanto en régimen permanente como en régimen transitorio. En el primero de los casos, generalmente se recurre al álgebra matricial, como herramienta matemática, para su estudio; en el segundo caso se recurre a las ecuaciones diferenciales.

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar cómo se hace el análisis de régimen transitorio para circuitos de primer orden, con la particularidad de que para su desarrollo se empleará el operador D, lo cual permite que aquellas complejidades que se presentan al tenerse ecuaciones integro-diferenciales, se simplifiquen y se conviertan en problemas algebraicos.

Hay que tener presente, que si bien aquí se desarrollan sólo circuitos de primer orden, la

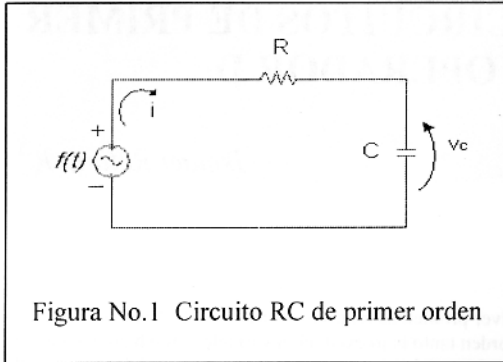
técnica mostrada se puede aplicar, con un poco de cuidado, a circuitos de orden superior.

2. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA EL CASO BASE.

Se tomará como base para el análisis el circuito de la figura No. 1, el cual corresponde a un circuito RC de primer orden con excitación variable con el tiempo. Con el fin de desarrollar su modelo matemático se usará el método de mallas [5]. No obstante, antes de proceder, se aplicará el operador D ($D = d/dt$), con el fin de obtener una ecuación algebraica. Podría decirse que se pasa del dominio del tiempo al dominio del operador D.

Como se verá más adelante, aún cuando el circuito mostrado es sencillo, los resultados obtenidos se pueden generalizar a circuitos más complicados de primer orden. De hecho los ejemplos mostrados al final de este artículo ilustran esta situación.

¹ M.Sc., Prof. Esc. Ingeniería Eléctrica, Univ. de Costa Rica.



Al aplicar el operador D a los elementos del circuito, se tiene que la resistencia queda igual. Sin embargo, la fuente pasa a ser $F(D)$ porque se está pasando al dominio del operador D , y de igual forma la capacitancia pasa de C a ser $1/CD$. De esta manera el análisis del circuito por el método de mallas sería el siguiente:

En primer término, se expresan los voltajes de los elementos pasivos en función de la corriente de malla:

$$V_R = IR \quad (1)$$

$$V_c = \frac{1}{CD}I \quad (2)$$

Luego, se escribe la ecuación de voltajes de Kirchhoff para el circuito:

$$F(D) - IR - \frac{1}{CD}I = 0 \quad (3)$$

Esta ecuación se puede factorizar así:

$$I \left(R + \frac{1}{CD} \right) = F(D) \quad (4)$$

Se introduce entonces el voltaje en el capacitor como variable de estado [4]:

$$\left(R + \frac{1}{CD} \right) CDV_c = F(D) \quad (5)$$

Acomodando los términos se tiene:

$$(RCD + 1)V_c = F(D) \quad (6)$$

Dejando sola la D se llega a:

$$\left(D + \frac{1}{RC} \right) V_c = \frac{1}{RC} F(D) \quad (7)$$

Pasando luego al dominio del tiempo se obtiene la ecuación diferencial no homogénea que corresponde al modelo matemático del circuito, nótese que ahora la función $F(D)$ vuelve a ser $f(t)$:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}f(t) \quad (8)$$

Para resolver esta ecuación diferencial se escribe la ecuación característica:

$$S + \frac{1}{RC} = 0 \quad (9)$$

La solución de la ecuación característica es el autovalor:

$$\lambda = -\frac{1}{RC} \quad (10)$$

La solución completa de la ecuación diferencial tendrá entonces dos términos: la solución complementaria y la integral particular que será una integral de convolución [2].

$$V_c(t) = V_{CC} + V_{CP} \quad (11)$$

La solución complementaria es la solución de la ecuación diferencial homogénea y en este caso corresponde a:

$$V_{C,C} = ke^{-\frac{1}{RC}t} \quad (12)$$

La solución completa será:

$$V_C(t) = V_{C,C} + \left[\frac{1}{RC} \left(e^{-\frac{t}{RC}} * f(t) \right) \right] \quad (13)$$

Desarrollando la integral de convolución se tiene como solución completa la siguiente:

$$V_C(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(t-x)}{RC}} f(x) dx \quad (14)$$

Se tomará $t_0 = 0$, que es el instante en que se inicia el proceso transitorio, esto implica que $V_C(0) = k$, o sea que k es el estado inicial.

Del desarrollo hecho se ve que la constante de tiempo va a ser:

$$\tau = RC \quad (15)$$

Resuelta la ecuación diferencial, se pueden sacar varias deducciones que tienen importancia a la hora de analizar el régimen transitorio de un circuito.

En primer lugar vemos que la solución complementaria depende del estado inicial del capacitor pero no de la excitación externa. Por el contrario, la solución particular depende de la excitación externa y no de la condición inicial. Ahora bien, como la solución complementaria tiende a cero con el tiempo, por tratarse de un sistema estable, resulta que la respuesta del circuito en régimen permanente tendrá la forma de la excitación externa.

Otro aspecto por tomar en cuenta es que conforme pasa el tiempo, la solución complementaria decrece de manera tal que al ser $t = \tau$ esta parte de la solución se ha reducido a un 36.8% del valor inicial. Para efectos prácticos se puede decir entonces que

el sistema alcanzará el régimen permanente cuando el tiempo sea igual a cuatro veces la constante de tiempo. Este criterio será una primera aproximación desde un punto de vista de la ingeniería.

Además, es importante mencionar que tiene relevancia el dibujar los autovalores en el plano complejo para estudiar la estabilidad del sistema [4]. La parte real de estas raíces debe encontrarse en el semiplano izquierdo del plano complejo y a una cierta distancia para mantener una buena reserva de estabilidad. Para el caso base es evidente que no hay problemas de estabilidad puesto que λ es negativo siempre.

Por último, hay que mencionar que el valor de la condición inicial del capacitor es un valor que en algunas ocasiones es dado, o sea que es un dato, en cuyo caso el análisis del circuito es más sencillo. No obstante, lo común es que ese valor no se dé y por ende haya que calcularlo en el instante anterior al cambio brusco que origina el régimen transitorio. Este cálculo adicional requiere que se conozca el régimen anterior al cambio, sea éste un régimen permanente, o un régimen transitorio como en el caso de que se den varios cambios en el tiempo y el inmediato anterior no haya llegado a un régimen permanente.

3. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA EL CASO DUAL.

Para el análisis de circuitos, especialmente para extender los resultados a casos complejos de primer orden, tiene importancia el estudio del circuito dual del que aparece en la figura No. 1. Dicho circuito dual se muestra en la figura No. 2 y corresponde, como se ve, a un circuito GL con excitación variable con el tiempo.

Sin entrar a fondo en el tema de la dualidad, el cual se supone conocido por el lector, se dirá que como parte de la dualidad se sustituye el circuito serie de la figura No. 1 por el circuito en paralelo de la figura No. 2. Además, se

sustituye la resistencia R por la conductancia G , la capacitancia C por la inductancia L y la fuente de voltaje por una fuente de corriente.

El análisis dual se hace usando el método de nodos [5], que es el dual del de mallas, y el desarrollo siempre se hace con base en el operador D . Debido a la dualidad, sólo se mostrarán algunos pasos del procedimiento entendiéndose que los comentarios del caso base se aplican aquí de igual manera.

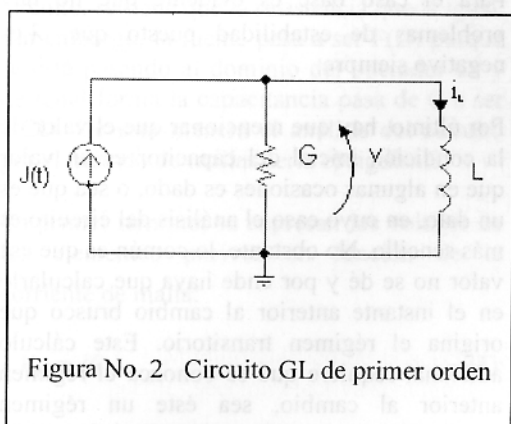


Figura No. 2 Circuito GL de primer orden

Al aplicar el operador D a los elementos del circuito, se tiene que la conductancia queda igual. Sin embargo, la fuente pasa a ser $J(D)$ porque se está pasando al dominio del operador D , y de igual forma la inductancia pasa de L a ser $1/LD$. De esta manera el análisis del circuito por el método de nodos sería el siguiente:

En primer término, se expresan las corrientes de los elementos pasivos en función del voltaje de nodo V , que es el mismo para todos los elementos, puesto que el circuito está en paralelo:

$$I_G = VG \quad (16)$$

$$I_L = \frac{1}{LD}V \quad (17)$$

Luego, se escribe la ecuación de corrientes de Kirchoff para el circuito:

$$J(D) - GV - \frac{1}{LD}V = 0 \quad (18)$$

Lo que sigue luego, como se vio en el caso base, es sustituir el voltaje V por la variable de estado que en este caso es la corriente en el inductor:

$$V = I_L LD \quad (19)$$

Haciendo las sustituciones pertinentes, se llega a la ecuación:

$$GLDI_L + I_L = J(D) \quad (20)$$

La cual se puede expresar así:

$$DI_L + \frac{1}{GL}I_L = \frac{1}{GL}J(D) \quad (21)$$

Esta ecuación en el dominio del tiempo se convierte en la siguiente:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{GL}i_L(t) = \frac{1}{GL}J(t) \quad (22)$$

Como era de esperar, se trata de la ecuación diferencial dual de la que se obtuvo en el caso base.

El autovalor en este caso es:

$$\lambda = -\frac{1}{GL} \quad (23)$$

La constante de tiempo es entonces:

$$\tau = GL \quad (24)$$

El resto del desarrollo es similar al del caso base, de hecho es el desarrollo dual y como solución completa de la ecuación diferencial se obtiene la siguiente expresión:

$$i_L(t) = ke^{-\frac{1}{GL}t} + \frac{1}{GL} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{GL}(t-x)} J(x) dx \quad (25)$$

Como ya se mencionó, $t_0 = 0$ en la integral de convolución. Además, las diferentes deducciones que se hicieron para el caso base se aplican también para este caso. Por ejemplo, para efectos prácticos se puede decir entonces, que el sistema alcanza el régimen permanente cuando el tiempo sea igual a cuatro veces la constante de tiempo.

4. EXTENSIÓN DE LOS RESULTADOS A CASOS MÁS COMPLEJOS.

En los apartados 2 y 3, las ecuaciones diferenciales fueron resueltas para circuitos muy sencillos. Sin embargo, si se observa con atención, se ve que el circuito que está conectado al capacitor en la figura No. 1, no es otra cosa más que un equivalente de Thévenin; por otra parte, el circuito que está conectado al inductor en la figura No. 2, corresponde precisamente a un equivalente de Norton [5].

De lo anterior se infiere que el circuito visto por el capacitor, o por el inductor en el caso dual, puede ser muy complejo. Lo que se requiere, de acuerdo con el teorema de Thévenin y su dual que es el teorema de Norton, es que este circuito cuyo equivalente se calcula, sea un circuito lineal que puede contener resistencias, o conductancias, fuentes de voltaje y de corriente que pueden ser independientes o dependientes. Estas fuentes, en general, serán función del tiempo.

Por lo tanto, en el caso del capacitor, se supone que hay un circuito complejo con la única salvedad de que sólo debe haber un elemento almacenador de energía [1]. El análisis entonces se puede generalizar muy

fácilmente, ya que lo único que hay que tener presente es que la resistencia R del circuito de la figura No. 1 corresponde a la resistencia equivalente de Thévenin del circuito lineal complejo y la fuente $f(t)$ no es otra cosa más que el voltaje de circuito abierto de Thévenin, sea $e_{oc}(t)$.

La constante de tiempo τ seguirá siendo RC, donde debe tenerse claro que la resistencia equivalente se ha de calcular para el intervalo de tiempo en que se está determinando la respuesta transitoria. Esto tiene especial importancia porque puede darse el caso de que el circuito sufra varios cambios bruscos en diferentes instantes y en ese caso hay que tener cuidado calculando la constante de tiempo para el intervalo correcto.

En conclusión, para el caso del capacitor y tomando en consideración lo dicho sobre el equivalente de Thévenin, la expresión analítica para la variable de estado $v_C(t)$, será la siguiente:

$$v_C(t) = v_C(0) e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)t} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)(t-x)} e_{oc}(x) dx \quad (26)$$

Con base en el principio de dualidad, el análisis que se hace para el caso del inductor es similar. Al respecto, se supone también que hay un circuito complejo con la única salvedad de que sólo debe haber un elemento almacenador de energía. El análisis entonces se puede generalizar muy fácilmente, ya que lo único que hay que tener presente es que la conductancia G del circuito de la figura No. 2 corresponde a la conductancia equivalente de Norton del circuito lineal complejo y la fuente $J(t)$ no es otra cosa más que la corriente de cortocircuito de Norton, sea $J_{sc}(t)$.

La constante de tiempo τ será en este caso GL, donde debe tenerse claro, igual que se dijo para el caso base, que la conductancia equivalente se ha de calcular para el intervalo de tiempo en que se está determinando la respuesta transitoria.

En conclusión, para el caso del inductor y tomando en consideración lo dicho sobre el equivalente de Norton, la expresión analítica para la variable de estado $i_L(t)$, será la siguiente:

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)t} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)(t-x)} J_{sc}(x) dx \quad (27)$$

Como observación final de este apartado, se debe indicar que las ecuaciones numeradas (26) y (27) van a ser las ecuaciones fundamentales para analizar los circuitos de primer orden cuando la excitación es función del tiempo. En síntesis, dado un circuito de primer orden con excitación variable con el tiempo, lo que hay que hacer es encontrar el equivalente visto por el almacenador de energía y luego encontrar las expresiones analíticas con base en las ecuaciones citadas.

5. EFECTO DEL CAMBIO BRUSCO SOBRE LAS VARIABLES DEL CIRCUITO.

Cuando se hace el análisis de un circuito para obtener la respuesta en el tiempo, es de suma importancia conocer en que lapso se está en régimen permanente y cuando se está en régimen transitorio.

Se dirá que el circuito está en régimen permanente cuando ha pasado relativamente mucho tiempo, o más técnicamente cuando han transcurrido muchas constantes de tiempo, desde que se puso a funcionar el circuito o desde que se presentó el último cambio brusco en él. Esto desde luego desde un punto de vista práctico porque matemáticamente sólo en infinito se puede decir que se está en régimen permanente.

Se está en régimen transitorio cuando el circuito se conecta por primera vez o cuando recién se ha producido un cambio brusco. Se debe tener claro que estos términos tienen sentido en circuitos de primer orden o de orden

superior, es decir, que hay uno o más almacenadores de energía presentes.

Aún cuando los resultados obtenidos hasta ahora se puedan extender al caso en que hay varios cambios en el tiempo, el análisis se ocupará del caso donde hay un solo cambio brusco dejando para otra oportunidad la explicación de los casos más complejos que incluyan varios cambios. Sobre el cambio brusco puede derivarse de la entrada o salida de operación de una fuente de voltaje o de corriente, o bien, puede originarse en un cambio topológico como por ejemplo la conexión de una nueva resistencia al circuito. Estos cambios se representan generalmente con la participación de la función escalón unidad o en la mayoría de los casos con la presencia en el circuito de interruptores que conectan o desconectan partes de él [1].

Por lo anteriormente dicho resulta que para efecto de la aplicación de las ecuaciones se considerará que el único cambio va a suceder en el instante $t = 0$.

Para un mejor entendimiento de la técnica que se está explicando se debe recordar la diferencia entre las variables de estado y aquellas que no lo son. Para dicha distinción no se hará el desarrollo matemático, el cual se supone conocido; solamente se dirá que las variables de estado son aquellas que no pueden cambiar bruscamente ante un cambio brusco en el circuito, mientras que las variables no de estado sí pueden sufrir cambios bruscos en dichas circunstancias. Ejemplos de variables de estado son el voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor.

Con estas aclaraciones y volviendo al asunto que interesa, se puede decir que al presentarse un cambio en el instante $t = 0$, las variables de estado mantendrán su valor en tanto que las otras podrán tener cambios instantáneos.

Con el fin de precisar lo que acontece en el eje del tiempo, se tienen las siguientes situaciones: a) antes del cambio y hasta el instante $t = 0^-$, el circuito se puede encontrar en un régimen

permanente o en un régimen transitorio, b) luego del cambio, o sea a partir del instante $t = 0+$, se inicia un régimen transitorio, c) al llegar al instante $t = +\infty$, el circuito, si es estable, alcanza un régimen permanente, en general, diferente al que había antes del cambio. Para efecto de simplificar el análisis, se supondrá en este trabajo, que antes del cambio el circuito estaba en régimen permanente [2].

Regresando a las ecuaciones (26) y (27) y tomando en cuenta lo anterior, se pueden sacar varias conclusiones. En primer lugar, que el equivalente de Thévenin, o su dual el equivalente de Norton, se obtiene para la topología del circuito válida a partir de $t = 0+$ o sea durante el régimen transitorio. Para este mismo intervalo se calcula la constante de tiempo. Vale la pena mencionar que cuando hay un cambio topológico, hay estudiantes que cometen el error de tomar el circuito anterior al cambio para calcular la resistencia equivalente.

En segundo lugar, se ve que el otro valor que hay que incorporar a las ecuaciones es el de la variable de estado en el instante $t = 0$. En los problemas que se suelen plantear en matemáticas, estos valores iniciales son dados, por lo que esta parte no acarrearía mayores complicaciones. No obstante, cuando se hacen análisis de circuitos, o de sistemas en general, dichos valores no son dados. Por esta razón, el estado inicial debe ser obtenido del análisis anterior al cambio. Este asunto plantea muchas complicaciones ya que de alguna manera hay que conocer la expresión analítica de la variable de estado antes del cambio y esto no es tan fácil. Para efectos de este trabajo, como se verá luego, se supondrá que el circuito antes del cambio se encuentra en un régimen permanente de corriente directa lo cual simplifica las cosas y lo que hay que hacer es simplemente un análisis del circuito, en régimen permanente, usando el método de mallas o de nodos, y conociendo los modelos que sustituyen al capacitor o al inductor en estas circunstancias [5]. Como se verá, en este caso, el circuito no contendrá en apariencia

almacenadores de energía y su análisis se hará con las herramientas de circuitos de mallas o nodos. El circuito equivalente para el instante $t = 0-$, será como una foto instantánea en que el circuito sólo tendrá fuentes de voltaje o de corriente y resistencias.

6. CASO PARTICULAR DE CIRCUITOS CON EXCITACIÓN CONSTANTE.

Como se mencionó antes, las ecuaciones (26) y (27) dan la respuesta de las variables de estado para los casos de excitación variable con el tiempo. Resulta entonces, que dichas ecuaciones son válidas también para el caso de excitación constante. A pesar de lo anterior, en este último caso, si se desarrollan las ecuaciones para excitación de corriente directa, se obtienen expresiones más simples e ilustrativas que le permiten al estudiante conocer y entender más adecuadamente lo que sucede en los circuitos.

Por esta razón, se hará aquí el desarrollo correspondiente para la ecuación (26) y luego usando el concepto de dualidad se extenderá el resultado a la ecuación (27). Se partirá entonces del caso particular de excitación constante en el circuito por lo que el voltaje equivalente de Thévenin será una constante. Esto significa que en la ecuación (26) se va a sustituir la expresión de $e_{OC}(t)$ por la constante E obteniéndose el siguiente resultado:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)(t-x)} E dx \quad (28)$$

Luego se tiene:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{E}{\tau} \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{\tau}\right)x} e^{-\frac{1}{\tau}(t-x)} dx \quad (29)$$

Integrando resulta:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ee^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \left[\frac{e^{t/\tau}}{1/\tau} \right]_0^t \quad (30)$$

Evaluando los límites:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + Ee^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \quad (31)$$

Y luego:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(E - Ee^{\frac{t}{\tau}} \right) \quad (32)$$

O bien factorizando el exponencial se obtiene:

$$V_C(t) = E + e^{-\frac{t}{\tau}} (V_C(0) - E) \quad (33)$$

Como se dijo antes, se puede hacer un desarrollo dual para la ecuación (27), en donde la corriente de Norton $J_{sc}(t)$ será sustituida por una constante que se designará con I . En este caso se llega a la ecuación dual de la (33) que es la siguiente:

$$i_L(t) = I + e^{-\frac{t}{\tau}} (i_L(0) - I) \quad (34)$$

Ahora bien, si en ambas ecuaciones se toma el límite cuando t tiende a ∞ , se ve que $E = v_C(\infty)$ y que $I = i_L(\infty)$. Esto implica que las ecuaciones para las variables de estado van a ser, en el caso de excitación constante, las siguientes:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(0) - V_C(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (35)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (36)$$

Del análisis de estas dos ecuaciones, se ve que el tiempo sólo aparece en el exponencial, lo cual significa que los otros términos son constantes y corresponden a la constante de tiempo y al valor de las variables de estado en dos instantes particulares que son $t = 0$ y $t = \infty$.

Las consideraciones que hay que hacer para el cálculo de la constante de tiempo y el valor de las variables de estado en $t = 0$, son las mismas que se indicaron en los dos últimos párrafos de la sección 5 de este trabajo, por lo que no se insistirá en ello. Basta aclarar que para las ecuaciones (35) y (36) no se calcula ni el equivalente de Thévenin ni el de Norton, pero sí se tienen que hallar la resistencia equivalente, o la conductancia equivalente, vista por el capacitor o el inductor según el caso.

Para resolver estos circuitos con excitación constante se requieren entonces tres datos [2]:

- Valor inicial de la variable de estado. Ésta se da como dato, o se calcula del régimen permanente o transitorio anterior al cambio en el circuito según se explicó.
- Valor final de la variable de estado que se calcula del régimen permanente en $t = +\infty$.
- La constante τ que se calcula como RC o GL según el caso.

En lo que respecta al valor final de la variable de estado y a cómo se calcula, se aplica lo mismo que para el instante $t = 0$, sólo que ahora corresponde a $t = +\infty$. En este caso resulta, como el circuito se encuentra en un régimen permanente de corriente directa, lo que hay que hacer es simplemente un análisis del circuito, en régimen permanente, usando el método de mallas o de nodos, conociendo eso sí los modelos que sustituyen al capacitor o al inductor en estas circunstancias. Como se verá, en este caso, el circuito no contendrá en

aparición de almacenadores de energía y su análisis se hace con las herramientas de circuitos de mallas o nodos. El circuito equivalente para el instante $t = +\infty$, será como una foto instantánea en que el circuito sólo tendrá fuentes de voltaje o de corriente y resistencias.

La expresión dada por las ecuaciones (35) y (36) para las variables de estado, también es válida para las variables no de estado del circuito con excitación constante. Sin embargo, hay que tener muy presente que estas variables sí pueden sufrir cambios bruscos en $t = 0$. Por esta razón, y tomando en cuenta que las expresiones analíticas buscadas son las válidas para el régimen transitorio a partir de 0, hay que indicar que el valor inicial de las variables no de estado es el que corresponde al instante $t = 0^+$. Entonces, en circuitos RC o GL de primer orden, el voltaje y la corriente en cualquier parte del circuito vienen dados por la expresión:

$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)] e^{-t/\tau} \quad (37)$$

A esta ecuación se aplica todo lo dicho sobre el cálculo de la constante de tiempo y sobre el análisis en el instante $t = +\infty$. Lo nuevo es que se requiere el valor de las variables no de estado en $t = 0^+$. En este caso también se hace un análisis de mallas o de nodos, sólo que el capacitor o el inductor son sustituidos por un equivalente, que más adelante se desarrollará. El circuito equivalente para el instante $t = 0^+$, será también como una foto instantánea en que el circuito sólo tendrá fuentes de voltaje o de corriente y resistencias.

En resumen, para las variables no de estado se requieren tres datos:

- El valor inicial que se obtiene del análisis del circuito en $t = 0^+$. En este caso debe recordarse que las variables de estado no cambian su valor bruscamente, por lo que $v_c(0^+) = v_c(0^-)$ e $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.

- El valor final que se obtiene del análisis del circuito en $t = +\infty$. En este caso debe recordarse que en dicho tiempo ha desaparecido la respuesta complementaria.
- La constante de tiempo τ que es la misma calculada para las ecuaciones del capacitor o del inductor y que es común a todo el circuito.

7. MODELOS DEL CAPACITOR Y DEL INDUCTOR BAJO EXCITACIÓN CONSTANTE.

En la sección anterior se dijo que el capacitor y el inductor tienen modelos particulares que se utilizan en el análisis de régimen permanente, sea éste en el instante $t = 0^-$ o en el instante $t = +\infty$, y en el análisis del primer instante del régimen transitorio $t = 0^+$. Se desarrollarán en esta sección dichos modelos y se explicará de dónde surgen [3].

En primer lugar, se establecen las reglas para sustituir al capacitor o al inductor cuando se realiza el análisis en el instante $t = 0^+$.

Para el caso del capacitor se tiene que éste se sustituye por una fuente de voltaje con el valor de $V(0^-) = V(0^+)$.

Para el caso del inductor se tiene que éste se sustituye por una fuente de corriente con el valor de $i_L(0^-) = i_L(0^+)$.

En segundo lugar, se exponen los modelos para régimen permanente de corriente directa los cuales, dicho sea de paso, son los mismos sea que se trate del instante $t = 0^-$ o del instante $t = +\infty$.

Para el caso del capacitor se tiene que éste se sustituye por un circuito abierto.

Para el caso del inductor se tiene que éste se sustituye por un corto circuito.

Antes de explicar estas reglas, es importante comentar, en primer lugar, que ellas son aplicables para el análisis no sólo de circuitos de primer orden, sino también para el caso del análisis de circuitos de orden superior. En segundo lugar, hay que decir que una vez más se hace patente el principio de dualidad por cuanto se sabe que una fuente de corriente es el dual de una fuente de voltaje, y, además, se sabe que un corto circuito es el dual de un circuito abierto y que el capacitor y el inductor son duales entre sí.

Se procede ahora a explicar las reglas apuntadas.

Para el caso del capacitor se tiene el modelo matemático siguiente:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du + V_C(0) = V_{C1}(t) + V_C(0) \tag{38}$$

Este modelo se presenta en la figura No. 3.

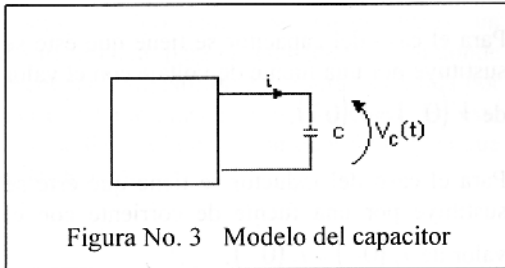


Figura No. 3 Modelo del capacitor

Con base en el principio de linealidad y considerando la ecuación (38) se puede representar como se ve en la figura No. 4.

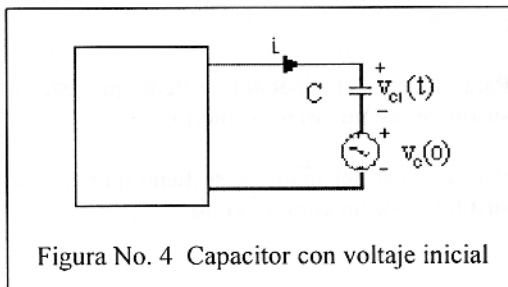


Figura No. 4 Capacitor con voltaje inicial

Ahora bien, si en la ecuación (38) se considera que se está analizando sólo el instante $t = 0+$, el modelo se convierte en el de la figura No. 5 que es precisamente una fuente de voltaje.

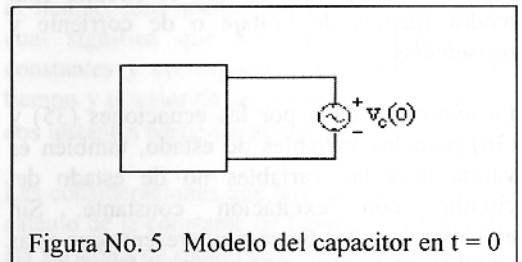


Figura No. 5 Modelo del capacitor en $t = 0$

Para el caso del inductor se tiene el modelo matemático siguiente:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(u) du + i_L(0) = i_{L1}(t) + i_L(0) \tag{39}$$

Este modelo se presenta en la figura No. 6.

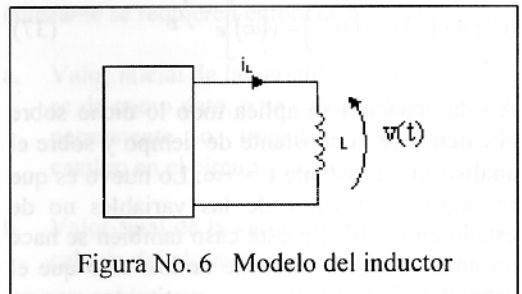


Figura No. 6 Modelo del inductor

Con base en el principio de linealidad y considerando la ecuación (39) se puede representar como se ve en la figura No. 7.

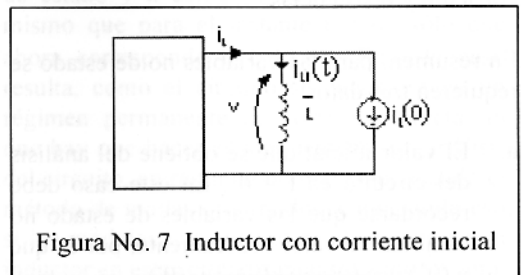


Figura No. 7 Inductor con corriente inicial

Ahora bien, si en la ecuación (39) se considera que se está analizando sólo el instante $t = 0+$, el modelo se convierte en el de la figura No. 8 que es precisamente una fuente de corriente.

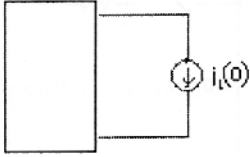


Figura No. 8 Modelo del inductor en $t = 0$

Para el caso de régimen permanente, la explicación es la siguiente.

Para el caso del capacitor se tiene que según la ecuación (35) la expresión analítica válida en el régimen transitorio es la siguiente:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(0) - V_C(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (40)$$

Ahora bien, si se toma el límite cuando el tiempo tiende a infinito, que es cuando se alcanza el régimen permanente, y se considera el modelo matemático del capacitor en su forma diferencial, resulta que:

$$i_C(\infty) = C \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (41)$$

Lo cual corresponde a un circuito abierto.

Para el caso del inductor se tiene que según la ecuación (36) la expresión analítica válida en el régimen transitorio es la siguiente:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (42)$$

Ahora bien, si se toma el límite cuando el tiempo tiende a infinito, que es cuando se alcanza el régimen permanente, y se considera el modelo matemático del inductor en su forma diferencial, resulta que:

$$v_L(\infty) = L \frac{di_L}{dt} = 0 \quad (43)$$

Lo cual corresponde a un corto circuito

De esta manera se concluye la presentación teórica sobre la técnica para resolver problemas de circuitos de primer orden. En la sección que sigue se resolverán dos problemas que ilustran la aplicación del método tanto para el caso de excitación variable con el tiempo, como para el caso de excitación constante.

8. EJEMPLO DE CIRCUITO CON EXCITACIÓN VARIABLE CON EL TIEMPO.

El desarrollo teórico realizado en las secciones anteriores es, si se quiere, bastante abstracto, por esta razón se hace necesario presentar algunas aplicaciones que ilustren en forma práctica y sencilla lo explicado. Con este fin se presenta en esta sección un ejemplo de un circuito con excitación variable con el tiempo, dejando para la siguiente sección el caso particular de la excitación constante.

Se tomará como base el circuito que se presenta en la figura No. 9. Se pide que se obtenga la expresión analítica, del voltaje en el capacitor, válida para todo $t > 0$.

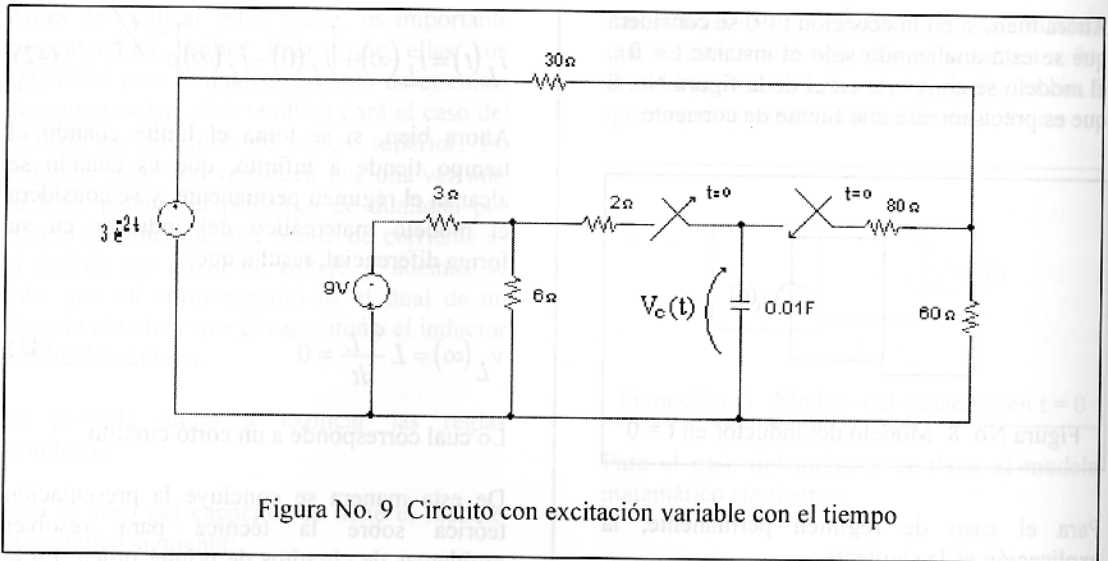


Figura No. 9 Circuito con excitación variable con el tiempo

Como se observa, hay un par de interruptores, uno que se abre y otro que se cierra en $t = 0$. Se supone que ambos actúan al unísono.

Lo primero que se hace es el análisis del circuito antes de que ocurra el cambio brusco. Dicho circuito se muestra en la figura No. 10. Hay que aclarar que esta parte del circuito es la que interesa por ser la que está conectada al capacitor.

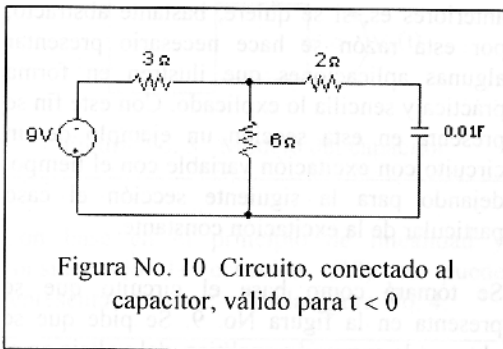


Figura No. 10 Circuito, conectado al capacitor, válido para $t < 0$

De este circuito, según lo estudiado, lo único que interesa es el valor de la variable de estado en el instante $t = 0^-$. Considerando el modelo del capacitor en ese instante, el circuito aparecerá como se muestra en la figura No. 11.

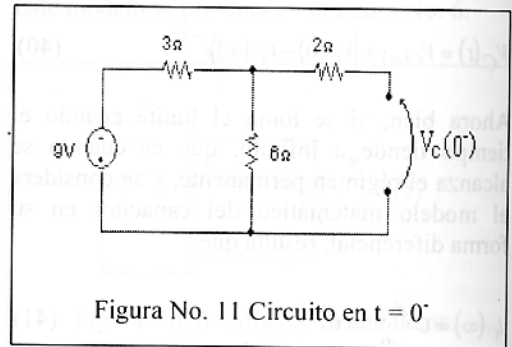
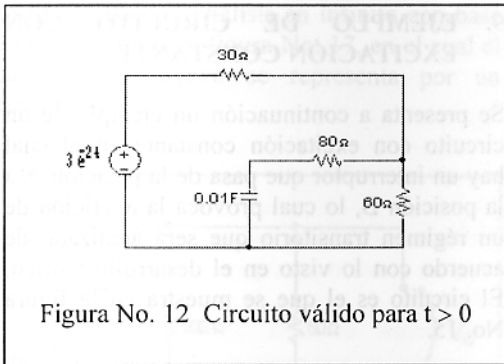


Figura No. 11 Circuito en $t = 0^-$

En este circuito se calcula el valor de la variable de estado.

$$V_C(0^-) = \frac{-9 \times 6}{3 + 6} = -6v$$

Luego de que han actuado los interruptores, el circuito que interesa es el que se muestra en la figura No. 12, que es el circuito válido para $t > 0$.

Figura No. 12 Circuito válido para $t > 0$

Como en este ejemplo se está analizando un circuito de primer orden con capacitor, la respuesta vendrá dada por la ecuación (26). Viendo dicha ecuación, se nota que se requieren varios datos. En primer lugar, el valor de la variable de estado en el momento del cambio, la cual ya se calculó. En segundo lugar, hay que encontrar el equivalente de Thévenin visto por el capacitor en la figura No. 12.

Para el cálculo de la resistencia equivalente, se desactivan todas las fuentes independientes, por lo que se tiene el siguiente circuito:

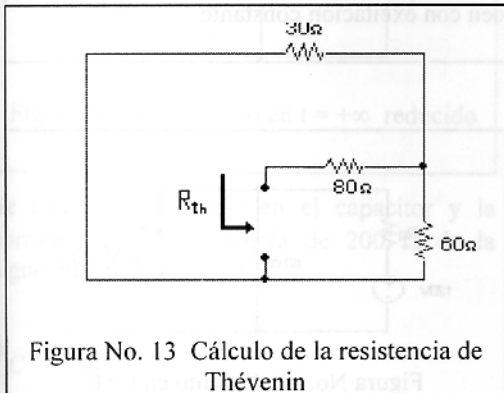


Figura No. 13 Cálculo de la resistencia de Thévenin

La resistencia equivalente será la siguiente:

$$R_{eq} = 80 + (30 // 60) \Omega$$

$$R_{eq} = 80 + 20 = 100 \Omega$$

Para el cálculo del voltaje de Thévenin, se desconecta el circuito exterior, que en este caso es el capacitor y se calcula el voltaje en circuito abierto tal y como se muestra en la figura No. 14.

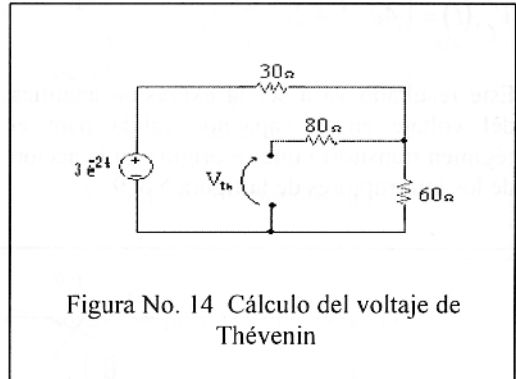


Figura No. 14 Cálculo del voltaje de Thévenin

El voltaje de Thévenin se calculará así:

$$v_{th} = 3e^{-2t} \left(\frac{60}{30 + 60} \right)$$

$$v_{th} = 3e^{-2t} \left(\frac{60}{90} \right) = 2e^{-2t}$$

Obtenido el equivalente de Thévenin, se calcula la constante de tiempo τ usando la ecuación (15):

$$\tau = 100 \times 0.01 = 1 \text{ seg.}$$

Por último, se sustituyen los valores encontrados en la ecuación (26) y se procede a realizar los cálculos pertinentes para obtener la expresión analítica de la respuesta, de la siguiente manera:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-x)} V_{th}(x) dx$$

$$V_C(t) = -6e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-x)} 2e^{-2x} dx$$

$$V_C(t) = -6e^{-t} + 2e^{-t} \int_0^t e^x e^{-2x} dx$$

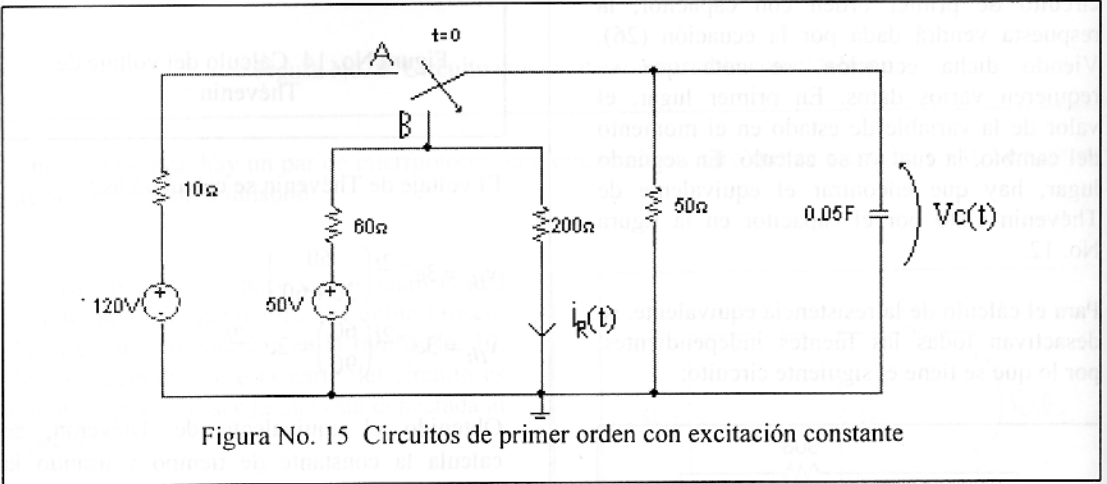
El cual nos lleva al siguiente resultado:

$$V_C(t) = -4e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Este resultado va a ser la expresión analítica del voltaje en el capacitor válida para el régimen transitorio que se origina en la acción de los interruptores de la figura No. 9.

9. EJEMPLO DE CIRCUITO CON EXCITACIÓN CONSTANTE.

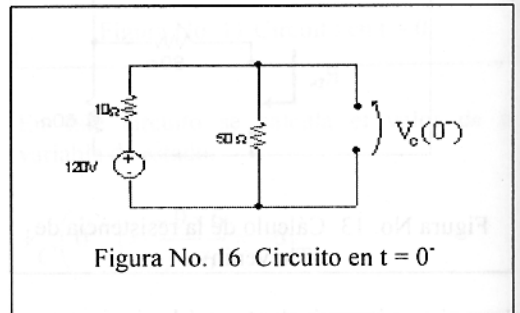
Se presenta a continuación un ejemplo de un circuito con excitación constante en el cual hay un interruptor que pasa de la posición A a la posición B, lo cual provoca la aparición de un régimen transitorio que será analizado de acuerdo con lo visto en el desarrollo teórico. El circuito es el que se muestra en la figura No. 15.



En este ejemplo se pide que se obtengan las expresiones analíticas del voltaje en el capacitor $V_C(t)$ y la corriente $i_R(t)$ válidas para $t = 0$.

Con este fin se hace primero el análisis en el instante $t = 0^-$, el cual en este caso sólo se hace para la variable de estado $V_C(t)$.

Para este caso el capacitor se representa por un circuito abierto y aparece como se muestra en la figura No. 16.



Por división de voltajes se obtiene el voltaje en el capacitor:

$$V_C = \frac{120 \times 50}{60} = 100V$$

Luego se hace el análisis en infinito con base en el circuito de la figura No. 17, en el cual el capacitor de nuevo se representa por un circuito abierto.

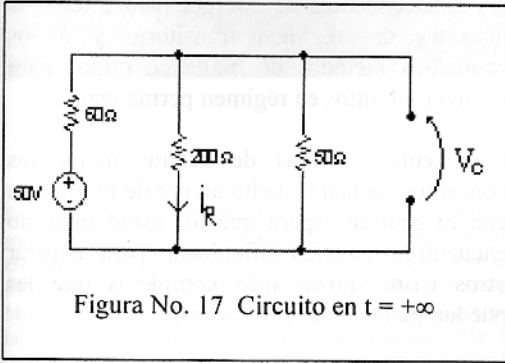


Figura No. 17 Circuito en $t = +\infty$

Combinando resistencias en paralelo, se obtiene el circuito de la figura No. 18.

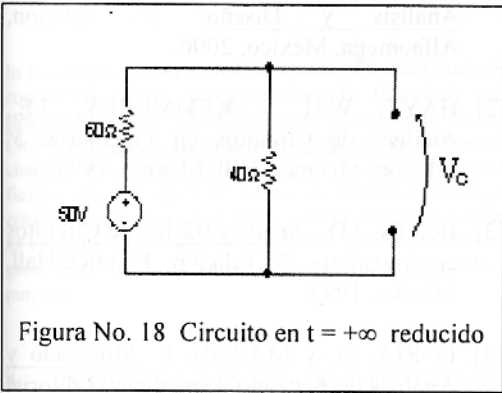


Figura No. 18 Circuito en $t = +\infty$ reducido

Se calculan el voltaje en el capacitor y la corriente en la resistencia de 200Ω de la siguiente manera:

$$V_C = \frac{50 \times 40}{100} = 20V$$

$$i_R = \frac{V_C}{200} = \frac{20}{200} = 0.1A$$

Por lo que $V_C(\infty) = 20V$ e $i_R(\infty) = 0.1A$.

Luego se hace el análisis en $t = 0+$. Nótese que el capacitor se representa por una fuente de

voltaje conocido. Este análisis es de interés sólo para las variables que no son de estado.

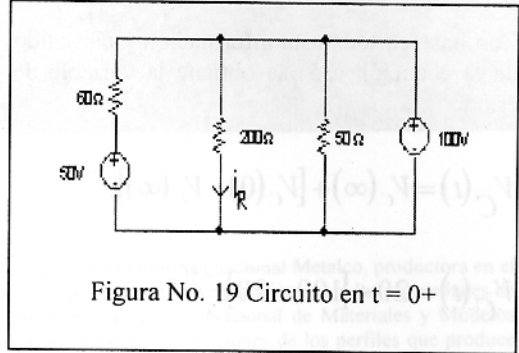


Figura No. 19 Circuito en $t = 0+$

Claramente se puede ver lo siguiente:

$$i_R = \frac{100}{200} = 0.5A.$$

$$i_R(0^+) = 0.5A$$

Por otra parte se debe determinar la naturaleza de la respuesta para lo cual se calcula la constante de tiempo. Con este fin se calcula la resistencia equivalente vista por el capacitor con base en el circuito de la figura No. 20:

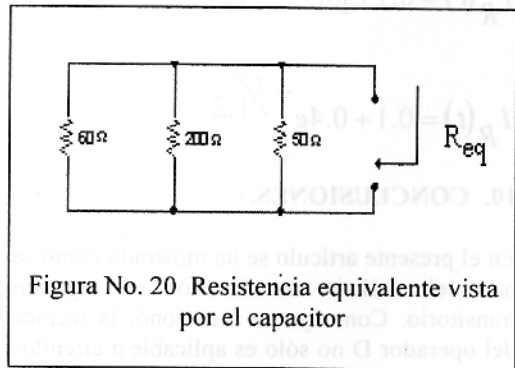


Figura No. 20 Resistencia equivalente vista por el capacitor

La resistencia será:

$$R_{eq} = 60 // 200 // 50 = 24\Omega$$

Por lo que la constante de tiempo será:

$$\tau = 24 \times 0.05 = 1.2 \text{ seg.}$$

Con base en toda esta información y partiendo de la ecuación (35) se obtiene la variable de estado:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(0) - V_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$V_C(t) = 20 + [100 - 20]e^{-t/1.2}$$

$$V_C(t) = 20 + 80e^{-t/1.2}$$

De manera similar y partiendo de la ecuación (37) se obtiene la expresión para la corriente en la resistencia de 200Ω , la cual no es una variable de estado:

$$I_R(t) = I_R(\infty) + [I_R(0^+) - I_R(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$I_R(t) = 0.1 + [0.5 - 0.1]e^{-t/1.2}$$

$$I_R(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2}$$

10. CONCLUSIONES.

En el presente artículo se ha mostrado cómo se hace el análisis de circuitos en régimen transitorio. Como ya se mencionó, la técnica del operador D no sólo es aplicable a circuitos de primer orden, sino que puede ser empleada en circuitos de orden superior haciendo la correcta transformación de los elementos para pasar de un dominio a otro.

Este artículo ha presentado no sólo la forma como se resuelve la ecuación diferencial que

modela al circuito, sino que también ha mostrado cómo se deben analizar los circuitos para obtener la información que se requiere para incorporarla en las ecuaciones resultantes. Se ha recurrido a los modelos particulares de los almacenadores de energía para diferentes instantes del régimen transitorio y a los conocidos métodos de mallas o nodos para resolver circuitos en régimen permanente.

Finalmente, en aras de aclarar mejor los conceptos, se han resuelto un par de problemas con lo cual se espera que los estudiantes no encuentren mayores dificultades para analizar otros casos quizás más complejos que les puedan plantear sus profesores.

11. BIBLIOGRAFÍA.

- [1]. DORF, R.C. y SVOBODA, J.A., Circuitos Eléctricos: Introducción al Análisis y Diseño, 3ª. Edición, Alfaomega, México, 2000.
- [2]. HAYT, W.H. y KEMMERLY, J.E., Análisis de Circuitos en Ingeniería, 5ª Edición, McGraw-Hill, México, 1993.
- [3]. IRWIN, J.D., Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería, 5ª Edición, Prentice-Hall, México, 1997.
- [4]. LORÍA, G. y MAZÓN, I., Modelado y Análisis de Sistemas Dinámicos, Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, 1989.
- [5]. NILSSON, J.W. y RIEDEL, S.A., Circuitos Eléctricos, 6ª Edición, Prentice-Hall, México, 2001.

TABLAS Y PROPIEDADES DE PERFILES LAMINADOS EN FRÍO PERTENECIENTES A LA FABRICA NACIONAL METALCO

Marija Romanjek¹

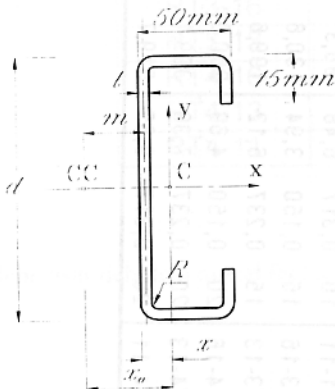
Resumen

En este artículo se presentan los resultados de un estudio hecho por la autora para la fábrica nacional Metalco, productora en el país de elementos de acero laminados en frío. Dicho estudio es parte de un programa de investigación sobre las propiedades de este tipo de elementos estructurales, el cual la autora está realizando en el Laboratorio Nacional de Materiales y Modelos Estructurales (LANAMME). Se obtienen tablas con las propiedades geométricas de las secciones de los perfiles que produce Metalco, las cuales contienen las características del acero utilizado: el límite de fluencia incrementado en compresión y flexión, las capacidades nominales a flexión, la capacidad de las vigas a flexión y cortante combinados para el método de esfuerzos de trabajo y el de esfuerzos últimos, la fuerza crítica nominal para el pandeo del alma debido a fuerza concentrada, las capacidades nominales de los perfiles considerados como columnas. Las tablas y sus datos cumplen con las especificaciones de *American Iron and Steel Institute (AISI)* y son de utilidad para los diseñadores de los sistemas estructurales, debido a que actualmente no hay manuales confiables en el país para tal efecto.

Summary

In this article are presented the results of a study made by the author for the national company Metalco, which produces in the country the cold-formed steel elements. This study is part of an investigation program about the properties of this type of structural element, which the author is making in the National Laboratory of Materials and Structural Models (LANAMME). Charts with geometric properties of the sections of the profiles that Metalco produces have been made. This charts contain the characteristics of the steel used; the increased yield point in compression and flexion, the nominal capacities of the profiles in flexion, the strength of the beams for combined bending and shear for the method of Load Factors and Load Combinations, the critic nominal strength for the web crippling strength because of a concentrated load, the nominal capacities of the profiles used as columns. The charts and their data agree with the specifications of the *American Iron and Steel Institute (AISI)* and are of great utility for those who design structural systems; this is because actually there are no trusted manuals in the country for this purpose.

1. PROPIEDADES DE LAS SECCIONES



CC = centro de cortante
 C = centroide de la sección
 $R_{prom} = 6 \text{ mm}$

¹ Ing., Prof., Esc. Ing. Mecánica, Facultad de Ingeniería, Univ. de Costa Rica

TABLA No. 1. Propiedades geométricas de las secciones

Perfil	d cm	t cm	A cm ²	Eje x			Eje y			x cm	m cm	J cm ⁴	C _w cm ⁶	j cm	r _o cm	-X ₀ cm
				I _x cm ⁴	S _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	S _y cm ³	i _y cm							
RT0-16	7	0,150	2,74	22,1	6,32	2,84	9,52	3,14	1,866	1,968	2,646	0,0205	137,5	5,58	5,67	4,54
RT1-16	10	0,150	3,19	50,5	10,10	3,98	10,91	3,31	1,850	1,701	2,450	0,0239	269	6,32	5,99	4,08
RT1-13	10	0,237	4,93	76,5	15,30	3,94	16,12	4,88	1,808	1,699	2,393	0,0924	391	6,28	5,88	3,97
RT1-11	10	0,317	6,48	98,3	19,67	3,90	20,25	6,13	1,769	1,698	2,340	0,2169	484	6,24	5,78	3,88
RT3-16	15	0,150	3,94	130,6	17,42	5,76	12,51	3,47	1,783	1,391	2,188	0,0295	624	8,65	6,97	3,50
RT3-13	15	0,237	6,12	199,6	26,61	5,71	18,51	5,13	1,739	1,393	2,134	0,1146	917	8,69	6,87	3,41
RT4-16	20	0,150	4,69	260,0	26,00	7,45	13,60	3,56	1,704	1,180	1,984	0,0351	1171	12,29	8,24	3,09
RT4-13	20	0,237	7,30	399,1	39,91	7,39	20,12	5,28	1,660	1,186	1,932	0,1367	1731	12,46	8,15	3,00
RT4-11	20	0,317	9,65	519,7	51,97	7,34	25,30	6,64	1,619	1,192	1,885	0,3231	2175	12,64	8,06	2,92

donde:

A = área de la sección

C_w = constante del alabeo de la sección

J = constante de la torsión de la sección (constante de St. Venant)

j = parámetro para determinar momento elástico crítico de la sección

r_x = radio del giro de la sección con respecto al eje x

r_y = radio del giro de la sección con respecto al eje y

r_o = radio del giro polar con respecto al centro del cortante de la sección

I_x = momento de inercia de la sección con respecto al eje x ,

I_y = momento de inercia de la sección con respecto al eje y

S_x = módulo elástico de la sección con respecto al eje x

$min S_y$ = módulo elástico mínimo de la sección con respecto al eje y

Nota: calculado según las expresiones dadas en el manual de AISI.

2. PROPIEDADES DEL ACERO

Límite de Fluencia Mínimo del Acero Virgen: $F_y = 227$ MPa

Esfuerzo Último Mínimo del Acero Virgen: $F_u = 340$ MPa

Módulo de Elasticidad: $E = 200$ GPa

Módulo de Rigidez: $G = 77$ GPa

TABLA No. 2. Límite de Fluencia Incrementado, F_{yf} , según la Sección A7.2 de AISI, con $F_y = 227$ MPa

Perfil	COMPRESIÓN	FLEXIÓN
	[MPa]	[MPa]
RT0-16	248*	261
RT1-16	245*	261
RT1-13	254	277
RT1-11	261	291
RT3-16	242*	261
RT3-13	249*	277
RT4-16	239*	261*
RT4-13	245*	277
RT4-11	250*	291

* No se debe usar debido a que el factor de reducción, "ρ", es menor que uno. Usar $F_y = 227$ MPa

3. PROPIEDADES DE LOS PERFILES COMO VIGAS

Según la Sección C3 de AISI.

TABLA No. 3. Capacidades de los perfiles como vigas restringidas al pandeo lateral (basado en el inicio de fluencia)

Perfil	$S_e=S_x$ [cm ³]	f [MPa]	M_{nxo} [kNm]	L_u [m]	V_n [kN]	ν (ASD)	ν (LRFD)
RT0-16	6.32	261	1.651	1.28	11.24	1.5	1.0
RT1-16	10.10	261	2.64	1.22	17.37	1.5	1.0
RT1-13	15.30	277	4.24	1.19	26.88	1.5	1.0
RT1-11	19.67	291	5.72	1.17	35.26	1.5	1.0
RT3-16	17.42	261	4.55	1.18	22.42	1.67	0.9
RT3-13	26.61	277	7.38	1.14	43.02	1.5	1.0
RT4-16	26.00	227	5.90	1.24	17.63	1.67	0.9
RT4-13	39.91	277	11.07	1.10	55.97	1.67	0.9
RT4-11	51.97	291	15.10	1.07	78.43	1.5	1.0

donde:

S_e = Módulo elástico de la sección efectiva para la flexión alrededor del eje x . En todos los perfiles sección efectiva será igual a la sección total.

f = Esfuerzo máximo en la sección = F_{ya}

M_{nxo} = Momento nominal de la sección para la flexión alrededor del eje x centroidal con el esfuerzo máximo f . Debe modificarse con el Factor de Seguridad ó con el Factor de Resistencia;

- usando el Método de Esfuerzos de Trabajo (ASD) se divide con el factor de seguridad: $\Omega_b = 1.67$
- usando el Método de Esfuerzos Últimos (LRFD) se multiplica con el factor de resistencia: $\Phi_b = 0.95$

L_u = La longitud máxima de la viga para la cual no es necesario considerar el pandeo lateral o torsional.

V_n = Fuerza Cortante Nominal (con $F_y = 227$ MPa). Debe modificarse con el factor de seguridad, Ω_v , o con el factor de resistencia, " Φ_v ", indicados en la Tabla No. 3 y según el método de diseño que se está usando

TABLA No. 4. Capacidades de los perfiles como vigas con posibilidad del pandeo lateral

$K_y L_y = K_t L_t$	RT0-16	RT1-16	RT1-13	RT1-11	RT3-16	RT3-13	RT4-16	RT4-13	RT4-11
[m]	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$	$M_c = M_h$
[m]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]
0,5	1,650	2,64	4,24	5,72	4,55	7,37	5,90	11,06	15,12
1,0	1,650	2,64	4,24	5,72	4,55	7,37	5,90	11,06	15,12
1,5	1,585	2,50	3,99	5,37	4,25	6,80	5,60	10,06	13,58
2,0	1,410	2,18	3,50	4,77	3,64	5,80	4,87	8,42	11,32
2,5	1,204	1,794	2,95	4,12	2,89	4,62	3,95	6,42	8,66
3,0	0,976	1,361	2,36	3,46	2,09	3,43	2,91	4,63	6,37
3,5	0,764	1,042	1,867	2,83	1,577	2,65	2,18	3,53	4,96
4,0	0,621	0,834	1,541	2,38	1,241	2,14	1,697	2,81	4,03
4,5	0,521	0,689	1,310	2,06	1,010	1,790	1,369	2,32	3,38
5,0	0,448	0,585	1,139	1,812	0,844	1,532	1,133	1,960	2,91
5,5	0,393	0,506	1,008	1,621	0,720	1,337	0,959	1,692	2,55
6,0	0,349	0,445	0,905	1,467	0,625	1,185	0,825	1,486	2,27

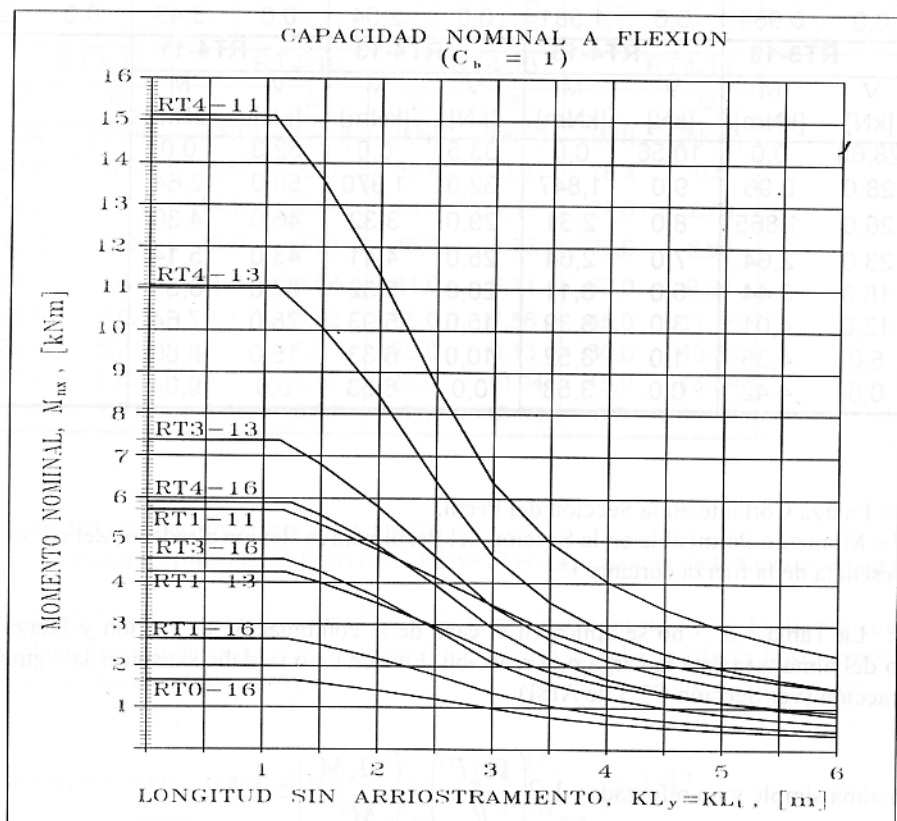


GRÁFICO No. 1. Diagramas Momento Nominal – Longitud sin Arriostramiento

donde:

$K_y L_y, K_z L_z$ = longitudes del pandeo lateral y torsional respectivamente.

M_c = Momento Crítico de la sección para la flexión alrededor del eje x centroidal.

M_n = Momento Nominal de la sección para la flexión alrededor del eje x centroidal. Debe modificarse con el Factor de Seguridad ó con el Factor de Resistencia iguales como en el caso de M_{nxo} .

TABLA No. 5. Capacidades de las vigas con flexión y cortante combinados
Método de Esfuerzos de Trabajo (ASD) (C3.3.1, AISI)

RT0-16		RT1-16		RT1-13		RT1-11		RT3-16	
V	M	V	M	V	M	V	M	V	M
[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]
7,49	0,00	11,58	0,0	17,92	0,0	23,51	0,0	13,42	0,0
7,0	0,353	11,0	0,494	16,0	1,143	23,0	0,707	12,0	1,222
6,0	0,592	10,0	0,797	14,0	1,585	21,0	1,539	10,0	1,818
5,0	0,736	8,0	1,143	11,0	2,00	19,0	2,02	8,0	2,19
4,0	0,836	6,0	1,352	8,0	2,27	15,0	2,64	6,0	2,44
3,0	0,906	4,0	1,484	5,0	2,44	10,0	3,10	4,0	2,60
1,0	0,980	2,0	1,557	2,0	2,52	5,0	3,35	2,0	2,69
0,0	0,989	0,0	1,581	0,0	2,54	0,0	3,43	0,0	2,72
RT3-13		RT4-16		RT4-13		RT4-11			
V	M	V	M	V	M	V	M		
[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]		
28,68	0,0	10,56	0,0	33,5	0,0	52,3	0,0		
28,0	0,96	9,0	1,847	32,0	1,970	50,0	2,64		
26,0	1,865	8,0	2,31	29,0	3,32	46,0	4,30		
23,0	2,64	7,0	2,64	25,0	4,41	43,0	5,14		
18,0	3,44	5,0	3,11	20,0	5,32	37,0	6,39		
12,0	4,01	3,0	3,39	15,0	5,93	28,0	7,64		
5,0	4,35	1,0	3,52	10,0	6,33	15,0	8,66		
0,0	4,42	0,0	3,53	0,0	6,63	0,0	9,04		

donde:

V = Fuerza Cortante en la Sección del Perfil.

M = Momento Permisible en la Sección del Perfil para la flexión alrededor del eje x en la presencia de la fuerza cortante V .

NOTA: La Tabla No. 5 no se aplica en el caso de la combinación de flexión y fuerza concentrada (pandeo del alma) sea ésta la carga o la reacción. En este caso se debe satisfacer la siguiente ecuación de interacción (ver Sección C3.5 de AISI):

$$\text{para un alma simple y no reforzada } 1.2 \left(\frac{\Omega_w P}{P_n} \right) + \left(\frac{\Omega_b M}{M_{nxo}} \right) \leq 1.5$$

donde:

- P = fuerza concentrada en la presencia del momento.
- M = momento en la sección ó en la sección muy cercana al punto de aplicación del P .
- P_n = fuerza nominal del pandeo del alma en ausencia del momento (ver Tabla No. 7)
- M_{nxo} = momento nominal alrededor del eje x centroidal (ver Tabla No. 3)
- Ω_w = coeficiente de seguridad para el pandeo del alma = 1.85
- Ω_b = coeficiente de seguridad para el momento = 1.67

TABLA No. 6. Capacidades de las vigas con flexión y cortante combinados
Método de Esfuerzos Ultimos (LRFD) (C3.3.2,AISI)

RT0-16		RT1-16		RT1-13		RT1-11		RT3-16	
V_u	M_u	V_u	M_u	V_u	M_u	V_u	M_u	V_u	M_u
[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]
11,24	0,0	17,37	0,0	26,9	0,0	35,3	0,0	20,2	0,0
11,0	0,322	17,0	0,515	26,0	1,02	34,0	1,440	19,0	1,455
10,0	0,716	16,0	0,976	25,0	1,48	33,0	1,914	18,0	1,953
8,0	1,102	14,0	1,485	22,0	2,31	30,0	2,86	16,0	2,63
6,0	1,326	11,0	1,941	19,0	2,85	25,0	3,83	13,0	3,31
4,0	1,466	7,0	2,30	15,0	3,34	20,0	4,48	9,0	3,87
2,0	1,543	3,0	2,47	10,0	3,74	10,0	5,21	5,0	4,19
0,0	1,568	0,0	2,51	0,0	4,03	0,0	5,43	0,0	4,32
RT3-13		RT4-16		RT4-13		RT4-11			
V_u	M_u	V_u	M_u	V_u	M_u	V_u	M_u		
[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]	[kN]	[kNm]		
43,0	0,0	15,87	0,0	50,4	0,0	78,4	0,0		
42,0	1,518	14,0	2,64	48,0	3,19	77,0	2,73		
40,0	2,58	13,0	3,21	45,0	4,73	72,0	5,69		
36,0	3,84	11,0	4,04	41,0	6,11	60,0	9,24		
30,0	5,02	9,0	4,62	35,0	7,56	45,0	11,75		
20,0	6,21	7,0	5,03	25,0	9,13	30,0	13,25		
10,0	6,82	4,0	5,42	15,0	10,04	15,0	14,08		
0,0	7,01	0,0	5,61	0,0	10,52	0,0	14,35		

Donde:

- V_u = fuerza cortante en la sección del perfil.
- M_u = momento permisible en la sección del perfil en la presencia de la fuerza cortante V_u .

NOTA: La Tabla No. 6 no se aplica en el caso de la combinación de flexión y fuerza concentrada (pandeo del alma) sea ésta la carga o la reacción. En este caso se debe satisfacer la siguiente ecuación de interacción (ver Sección C3.5 de AISI):

$$\text{para un alma simple y no reforzada: } 1.07 \left(\frac{P_u}{\Phi_w P_n} \right) + \left(\frac{M_u}{\Phi_b M_{nxo}} \right) \leq 1.42$$

donde:

P_n = fuerza concentrada en la presencia del momento.

M_n = momento en la sección ó en la sección muy cercana al punto de aplicación del P_n .

P_n = fuerza nominal del pandeo del alma en ausencia del momento (ver Tabla No. 7).

M_{nx} = momento nominal alrededor del eje x centroidal (ver Tabla No. 3).

Φ_b = coeficiente de resistencia para la flexión = 0.95

Φ_w = coeficiente de resistencia para el pandeo del alma = 0.75.

4. PANDEO DEL ALMA DEBIDO A UNA FUERZA CONCENTRADA

Según la Sección C3.4 de AISI. Calculado con $F_y = 227$ MPa.

TABLA No. 7. Fuerza crítica nominal del pandeo del alma

Perfil	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
	P_n	P_n	P_n	P_n
N = 50 mm	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
RT0-16	3,55	8,11	2,57	9,24
RT1-16	3,41	7,88	2,43	8,64
RT1-13	11,30	20,92	8,18	25,29
RT1-11	22,29	38,49	16,22	48,61
RT3-16	3,17	7,49	2,22	7,63
RT3-13	10,83	20,28	7,74	23,55
RT4-16	2,94	7,09	2,00	6,61
RT4-13	10,36	19,64	7,30	21,81
RT4-11	20,94	36,77	14,95	43,77
N = 100mm				
RT0-16	4,55	9,76	3,21	10,01
RT1-16	4,37	9,47	3,04	9,00
RT1-13	13,27	23,61	9,60	25,97
RT1-11	25,32	42,31	18,42	49,59
RT3-16	4,07	9,00	2,77	7,94
RT3-13	12,72	22,89	9,09	24,18
RT4-16	3,77	8,53	2,50	6,89
RT4-13	12,17	22,17	8,57	22,39
RT4-11	23,78	40,41	16,98	44,65
N = 150mm				
RT0-16	5,88	12,17	3,85	10,01
RT1-16	5,65	11,82	3,65	9,35
RT1-13	15,48	26,36	11,03	26,65
RT1-11	28,35	46,13	20,62	50,56
RT3-16	5,26	11,23	3,32	8,26
RT3-13	14,84	25,56	10,43	24,81
RT4-16	4,87	10,64	3,00	7,16
RT4-13	14,20	24,75	9,84	22,97
RT4-11	26,62	44,06	19,01	45,52
N = 200mm				
RT0-16	7,21	14,58	4,49	10,40
RT1-16	6,93	14,16	4,26	9,71
RT1-13	18,44	30,59	12,45	27,32
RT1-11	31,85	50,00	22,82	51,54
RT3-16	6,45	13,45	3,88	8,58
RT3-13	17,67	29,66	11,78	25,44
RT4-16	5,98	12,75	3,49	7,44
RT4-13	16,91	28,72	11,11	23,55
RT4-11	29,91	47,76	21,04	46,40

donde:

P_n = Fuerza Crítica Nominal del Pandeo del Alma. Debe modificarse con el Factor de Seguridad o con el Factor de Resistencia;

- usando el Método de Esfuerzos de Trabajo (ASD) se divide entre el factor de seguridad: $\Omega_w = 1.85$.
- usando el Método de Esfuerzos Últimos (LRFD) se multiplica por el factor de resistencia: $\Phi_w = 0.75$.

N = Ancho del Apoyo (aplastamiento).

CASO A: Para las reacciones o cargas concentradas en los extremos de una viga o voladizo cuando la distancia entre el borde del apoyo de la fuerza y el borde de la viga es menor de $1.5h$ y cuando la separación entre los bordes de los apoyos de las cargas o reacciones adyacentes y opuestas, actuando éstas sea en el ala superior o inferior, es mayor de $1.5h$.

CASO B: Para las reacciones o cargas concentradas cuando la distancia entre el borde del apoyo y el borde de la viga es igual o mayor de $1.5h$ y cuando la separación entre los bordes de los apoyos de las cargas o reacciones adyacentes y opuestas, actuando éstas sea en el ala superior o inferior, es mayor de $1.5h$.

CASO C: Para las reacciones o cargas concentradas en los extremos de una viga o voladizo cuando la distancia entre el borde del apoyo de la fuerza y el borde de la viga es menor de $1.5h$ y cuando la separación entre los bordes de los apoyos de las cargas o reacciones adyacentes y opuestas, actuando éstas simultáneamente en el ala superior e inferior, es igual o menor de $1.5h$.

CASO D: Para las reacciones o cargas concentradas cuando la distancia entre el borde del apoyo y el borde de la viga es igual o mayor de $1.5h$ y cuando la separación entre los bordes de los apoyos de las cargas o reacciones adyacentes y opuestas, actuando éstas simultáneamente en el ala superior e inferior, es igual o menor de $1.5h$.

Donde h es la altura del alma: $h = d - 2R - 2t$

5. CAPACIDADES DE LOS PERFILES COMO COLUMNAS

Según la Sección C4 de AISI, la fuerza axial nominal, " P_n ", en un elemento comprimido céntricamente será:

$$P_n = A_e F_n$$

donde:

A_e = área efectiva de la sección de un elemento céntricamente comprimido con los esfuerzos F_n y que depende de estos mismos.

Usando el Método de Esfuerzos de Trabajo, (ASD), la fuerza axial nominal, " P_n ", debe dividirse con el Factor de Seguridad $\Omega_c = 1.80$ y usando el Método de Esfuerzos Últimos (LRFD) debe multiplicarse con el Factor de resistencia $\Phi_c = 0.85$.

6. COLUMNAS RESTRINGIDAS AL PANDEO

En las columnas restringidas al pandeo, P_n depende únicamente del área efectiva de la sección del perfil y ésta a su vez de los esfuerzos f . Gráfico No. 2 muestra la variación del área efectiva, A_e , en función de los esfuerzos f .

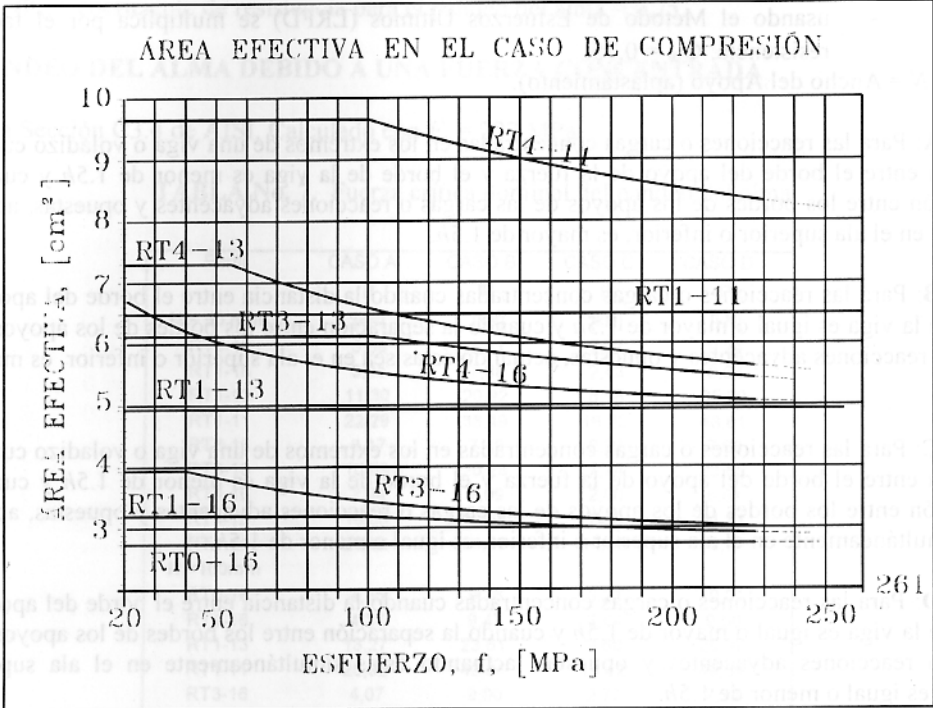


GRÁFICO No. 2. Diagramas Área Efectiva - Esfuerzos

NOTA: Para los esfuerzos < 20 MPa, el área efectiva será igual al área total de la sección.

7. COLUMNAS CON POSIBILIDAD DEL PANDEO

En las columnas con posibilidad del pandeo, P_n depende del área efectiva y de las longitudes del pandeo, KL . Tabla No. 8 muestra los valores de P_n para diferentes longitudes del pandeo con respecto al eje x , $K_x L_x$, y a la vez con diferentes longitudes del pandeo con respecto al eje y , $K_y L_y$, y diferentes longitudes del pandeo torsional, $K_t L_t$, considerándolos como una fracción de $K_x L_x$.

TABLA No. 8. Fuerza axial nominal concentrada, " P_n ", en kN

PERFI	$K_x L_x$	APUNTALADO $y L_y = K_y L_y$				
	[m]	=0	$=K_x L_x/4$	$=K_x L_x/3$	$=K_x L_x/2$	$=K_x L_x$
RT0-16	1,0	58,4	57,6	56,9	54,7	44,6
	1,5	54,0	52,3	50,9	46,7	30,7
	2,0	48,4	45,7	43,5	37,6	19,6
	2,5	42,0	38,5	35,8	28,7	13,7
	3,0	35,3	31,2	28,1	20,9	10,4
	3,5	28,8	24,4	21,2	15,7	8,4
	4,0	22,7	18,7	16,4	12,3	7,7
	4,5	17,9	14,8	13,1	10,0	$\max KL =$ 3,73m
	5,0	14,5	12,0	10,6	8,3	
	5,5	12,0	10,0	8,9	7,0	
	6,0	10,1	8,4	7,5	6,1	
RT1-16	1,0	64,2	63,8	63,4	62,1	54,7
	1,5	62,1	61,3	60,4	57,6	44,0
	2,0	59,3	57,8	56,4	52,0	33,1
	2,5	55,8	53,7	51,7	45,6	23,1
	3,0	51,9	49,1	46,5	39,0	17,2
	3,5	47,6	44,1	41,0	32,6	13,6
	4,0	43,0	39,0	35,5	26,0	12,6
	4,5	38,4	33,9	29,9	21,0	para
	5,0	33,7	28,6	24,5	17,3	$\max KL =$
	5,5	28,9	23,7	20,4	14,7	3,70
RT1-13	1,0	121,0	120,0	119,0	115,8	99,3
	1,5	115,8	113,7	111,7	105,4	77,7
	2,0	109,0	105,6	102,4	92,8	58,8
	2,5	100,8	96,0	91,6	79,5	44,1
	3,0	91,6	85,5	80,2	66,5	31,0
	3,5	81,9	74,6	68,8	54,6	22,8
	4,0	71,9	63,8	57,8	44,1	21,3
	4,5	62,0	53,6	47,5	36,2	para
	5,0	52,6	44,1	39,0	30,5	$\max KL =$
	5,5	43,8	36,6	32,7	26,2	3,62m
	6,0	36,8	30,9	27,8	22,8	

Continuación de la tabla No. 8. Fuerza axial nominal concentrada, " P_n ", en kN

PERFIL	$K_x L_x$	APUNTALADO ($K_y = K_L$)				
	[m]	=0	= $K_x L_x/4$	= $K_x L_x/3$	= $K_x L_x/2$	= $K_x L_x$
RT1-11	1,0	163,1	161,7	160,4	156,0	134,6
	1,5	155,8	152,9	150,2	141,8	108,8
	2,0	146,2	141,5	137,3	125,3	83,3
	2,5	134,7	128,2	122,7	108,3	56,1
	3,0	121,9	113,7	107,3	92,0	39,0
	3,5	108,3	98,9	92,0	77,1	28,6
	4,0	94,5	84,3	77,5	63,8	28,0
	4,5	81,0	70,5	64,0	53,0	para
	5,0	68,1	57,9	52,8	44,9	$\max KL =$
	5,5	56,4	48,2	44,4	38,7	3,54m
RT3-16	1,0	67,5	67,3	67,0	65,9	60,1
	1,5	66,5	66,0	65,4	63,1	51,3
	2,0	65,0	64,2	63,2	59,4	41,0
	2,5	63,3	62,0	60,5	55,1	30,8
	3,0	61,2	59,5	57,3	50,3	22,7
	3,5	58,8	56,6	53,9	45,2	17,4
	4,0	56,2	53,5	50,2	40,2	16,9
	4,5	53,3	50,1	46,3	35,3	para
	5,0	50,3	46,7	42,4	30,6	$\max KL =$
	5,5	47,2	43,1	38,5	26,3	3,57m
RT3-13	1,0	121,7	121,4	120,9	119,0	107,9
	1,5	119,9	119,0	117,9	113,9	91,2
	2,0	117,3	115,8	113,9	107,4	72,0
	2,5	114,1	111,9	109,2	99,8	51,3
	3,0	110,3	107,3	103,5	91,2	35,6
	3,5	105,9	102,1	97,4	81,8	26,5
	4,0	101,1	96,4	91,0	72,0	para
	4,5	95,9	90,4	84,1	62,1	$\max KL =$
	5,0	90,4	84,1	77,2	51,3	3,48m
	5,5	84,7	77,7	70,5	42,4	
6,0	78,8	71,2	63,8	35,6		

Continuación de la tabla No. 8. Fuerza axial nominal concentrada, "P_n", en kN

PERFIL	K _x L _x	APUNTALADO (yL _y =K _t L _t)				
	[m]	=0	=K _x L _x /4	=K _x L _x /3	=K _x L _x /2	=K _x L _x
RT4-16	1,0	68,9	68,7	68,4	67,0	60,5
	1,5	68,3	67,9	67,0	64,2	51,0
	2,0	67,4	66,8	65,2	60,5	40,2
	2,5	66,3	65,3	63,1	56,0	29,7
	3,0	65,0	63,6	60,5	51,0	22,1
	3,5	63,5	61,7	57,5	45,6	18,0 para max KL= 3,41m
	4,0	61,8	59,5	54,4	40,2	
	4,5	60,0	57,2	51,0	34,8	
	5,0	58,0	54,7	47,4	29,7	
	5,5	55,8	52,0	43,9	25,4	
6,0	53,6	49,3	40,2	22,1		
RT4-13	1,0	126,6	126,3	125,5	123,1	110,7
	1,5	125,4	124,8	123,1	117,7	92,8
	2,0	123,9	122,7	119,7	110,7	72,5
	2,5	121,9	120,1	115,7	102,3	52,7
	3,0	119,6	117,1	110,7	92,8	38,7
	3,5	116,8	113,6	105,1	82,8	31,6 para max KL= 3,32m
	4,0	113,8	109,7	99,3	72,5	
	4,5	110,4	105,5	92,8	62,4	
	5,0	106,7	101,0	86,0	52,7	
	5,5	102,8	96,3	79,5	45,0	
6,0	98,7	91,4	72,5	38,7		
RT4-11	1,0	187,8	187,3	186,1	182,3	163,0
	1,5	186,1	185,1	182,3	174,0	135,2
	2,0	183,8	182,0	177,0	163,0	103,6
	2,5	180,8	178,2	170,8	149,9	70,1
	3,0	177,3	173,6	163,0	135,2	48,7
	3,5	173,1	168,4	154,3	119,6	41,7 para max KL= 3,24m
	4,0	168,5	162,6	145,4	103,6	
	4,5	163,4	156,4	135,2	86,5	
	5,0	157,9	149,7	124,7	70,1	
	5,5	152,0	142,7	114,5	57,9	
6,0	145,7	135,2	103,6	48,7		

donde:

- $K_x L_x$ = longitud del pandeo alrededor del eje x.
- $K_y L_y$ = longitud del pandeo alrededor del eje y.
- $K_t L_t$ = longitud del pandeo torsional.

Las fuerzas axiales nominales, indicadas en la Tabla No. 8, se deben modificar con el Factor de Seguridad o con el Factor de Resistencia:

- usando el Método de Esfuerzos de Trabajo (ASD) se divide entre el factor de seguridad: $\Omega_c = 1.80$.
- usando el Método de Esfuerzos Últimos (LRFD) se multiplica por el factor de resistencia: $\Phi_c = 0.85$.

8. BIBLIOGRAFÍA

[1]. Cold Formed Steel Design Manual, edit. American Iron and Steel Institute (AISI), USA, 1996.

[2]. "Capacidad Estructural de los Perfiles de Acero Laminado en Frío Costarricenses". Tesis de Maestría, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Esc. Ing. Civil y Lanamme, UCR.