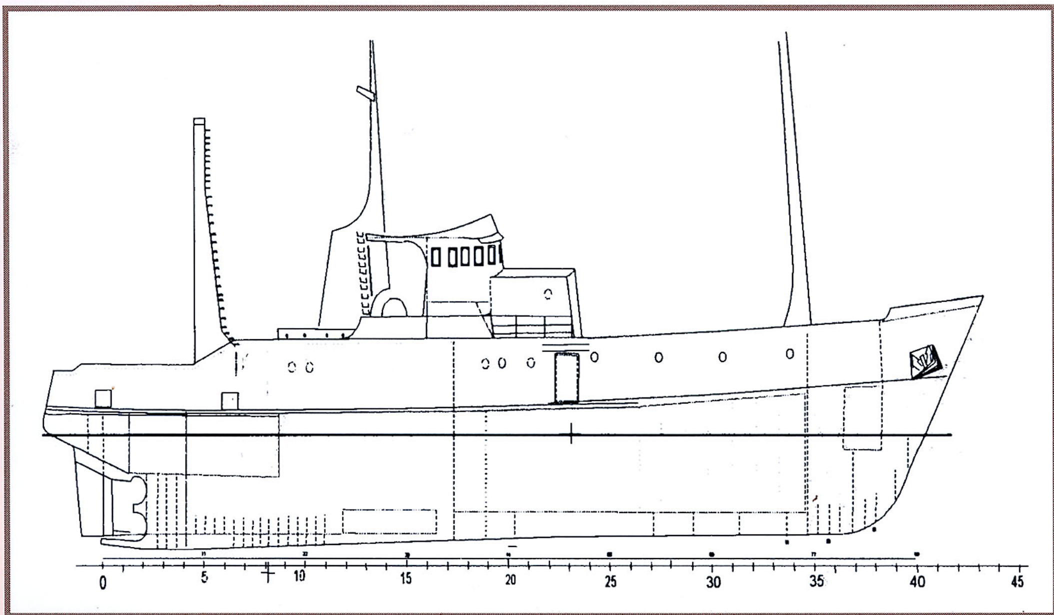
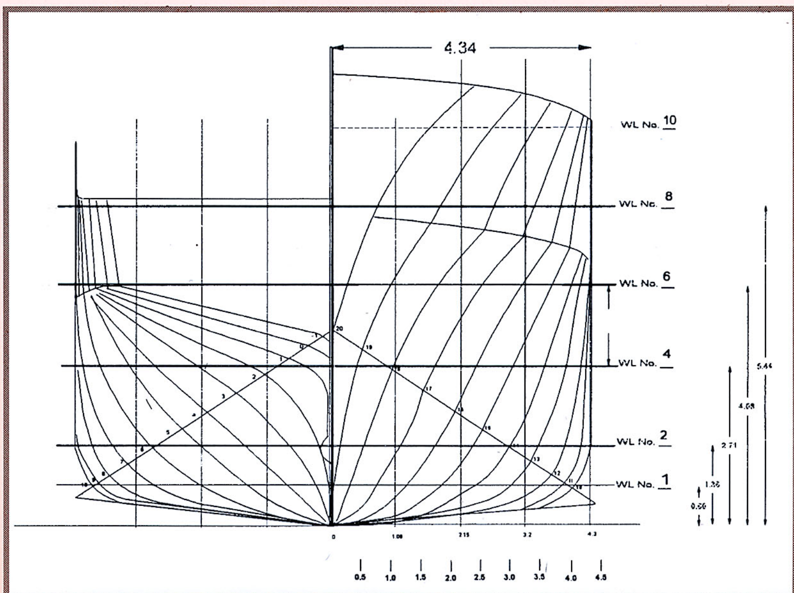
Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
Julio/Diciembre 1995 VOLUMEN 5 Nº 2





Ingeniería 5(2): 105-118, 1995 San José, Costa Rica

ROBÓTICA: POSICIONES Y MARCOS DE REFERENCIA

Horacio Vásquez C. *

RESUMEN

Un robot, o manipulador mecánico, está formado por un conjunto de brazos o miembros que se pueden programar para efectuar una serie de tareas en la industria. Los miembros de un manipulador se unen de tal forma que el punto final del último brazo, el cual se puede llamar punto de herramienta, tenga el más conveniente y amplio espacio de acción para ciertas aplicaciones. Así por ejemplo, si en este punto se coloca una garra mecánica, una boquilla para pintar, un electrodo para soldar, o cualquier otra herramienta, ésta podría moverse fácilmente en el espacio de acción deseado y así efectuar su trabajo. Este artículo presenta una introducción al análisis de posiciones y marcos de referencia asignados a los brazos de los manipuladores, utilizando la notación de Denavit-Hartenberg.

SUMMARY

A robot, or manipulator, consists of a group of members which can be programmed to perform several tasks in industry. Manipulator members are connected to each other in such a way that the end effector has the most convenient action space for different applications. For example, if a gripper, a device to paint or to weld, is located at the end effector, it could easily move in the action space to achieve the job. This article presents an introduction to the analysis of the positions and reference frames of the manipulator members, using the Denavit-Hartenberg notation.

INTRODUCCIÓN

En este artículo se presenta un preámbulo al análisis de las posiciones y marcos de referencia asignados a los miembros, o brazos, de un manipulador. Este análisis utiliza la notación de Denavit-Hartenberg, la cual se diseñó para describir físicamente los brazos del manipulador. La teoría presentada aquí se complementa con ejemplos sencillos que ilustran la conveniencia y eficacia del método de análisis. Se estudia, además, la primera parte de la cinemática de manipuladores, sin adentrarse en el análisis de velocidades y aceleraciones.

POSICIONES, ORIENTACIONES, Y MARCOS DE REFERENCIA

Posición: La posición de un punto en el espacio se puede expresar con respecto a un sistema de coordenadas por medio de un vector de tamaño 3x1. En la figura 1 el vector ${}^{A}P$ se refiere a la posición del punto P con respecto al sistema de coordenadas {A}, y ${}^{A}P$ se lee como la posición de P respecto a {A}.

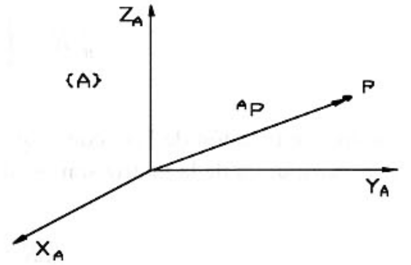


Fig. 1. Posición de Prespecto al marco de referencia A.

* Ing. MSc., Profesor de la Escueala de Ingeniería Mecánica. U.C.R.

El vector ^{A}P se puede escribir como:

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{1}$$

donde p_x, p_y, y p_z son las distancias a lo largo de los ejes *x, y,* y *z* del marco de referencia {A}.

Orientación: La orientación de un cuerpo en el espacio se puede expresar por medio de un sistema de coordenadas unido al cuerpo. En la figura 2 se muestra como la orientación del cuerpo C está definida por el sistema de coordenadas {B} que está unido a él, y cuyo origen se encuentra en la posición ^{A}P [Craig, 1989].

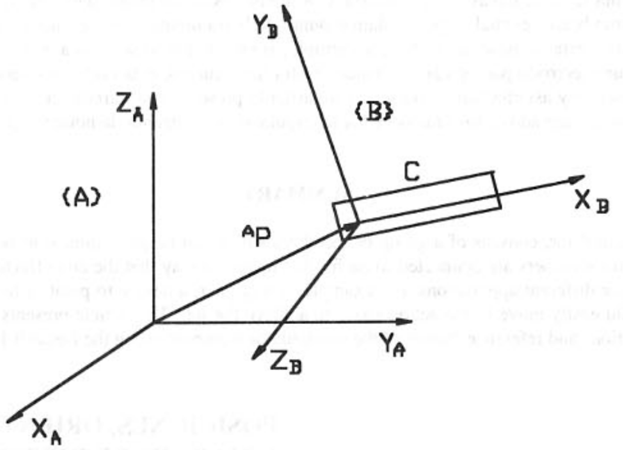


Fig. 2. Orientación y posición de {B} respecto a {A}.

En conclusión, la posición y orientación del cuerpo C están dadas por el vector ^{A}P, que indica la posición del origen de {B} con respecto a {A}, y por el marco de referencia {B} unido al cuerpo.

Una manera de describir la orientación de {B} con respecto a {A} es a través de los vectores unitarios del marco de referencia {B} con respecto a {A}. Considerando estos vectores unitarios como columnas de una matriz, la orientación de {B} con respecto a {A} se puede expresar como:

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} ^{A}\hat{X}_B & ^{A}\hat{Y}_B & ^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} \tag{2}$$

llamada matriz de rotación de {B} con respecto a {A}. Este tipo de matriz es ortogonal y por lo tanto la inversa y la transpuesta de la matriz son iguales a la matriz original:

$$^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} \tag{3}$$

La posición y o
quedan completamente

APLICACIONES DE

Los siguientes ej
tes para transformar p

Ejemplo 1: La p
ma orientación pero se
la figura 3. Debemos e

Para encontrar la p
gen de {B} con respecto

Así por ejemplo, s

La posición y orientación del marco de referencia {B} con respecto al marco de referencia {A}, quedan completamente determinados por la matriz de rotación y el vector de posición:

$$\{B\} = \{\ {}^{A}_{B}R,\ {}^{A}P_{BORG}\} \tag{4}$$

APLICACIONES DEL VECTOR DE POSICIÓN Y LA MATRIZ DE ROTACIÓN

Los siguientes ejemplos ilustrarán cómo el vector de posición y la matriz de rotación son importantes para transformar posiciones de un marco de referencia a otro.

Ejemplo 1: La posición de P se encuentra dada en un marco de referencia {B} el cual tiene la misma orientación pero se encuentra trasladado con respecto al marco de referencia {A}, como se muestra en la figura 3. Debemos encontrar la posición de P con respecto al marco de referencia {A}.

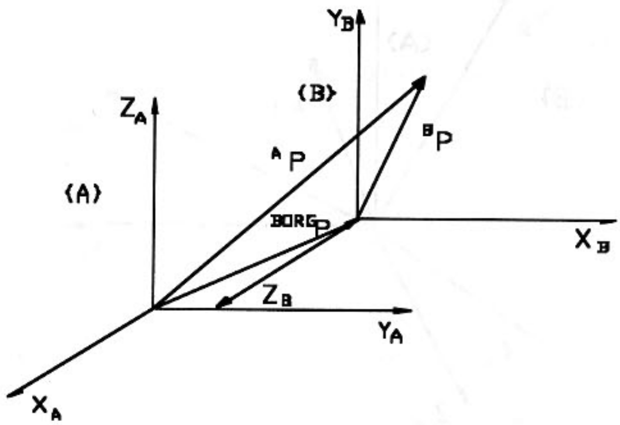


Fig. 3. Sistema {B} trasladado con respecto al sistema {A}.

Para encontrar la posición de P con respecto a {A} debemos sumar los vectores de posición del origen de {B} con respecto a {A} y la posición de P con respecto a {B}:

$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \tag{5}$$

Así por ejemplo, supongamos que :

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \ ;\ \text{y}\ {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

entonces al utilizar la ecuación (5):

$$^{A}P = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ejemplo 2: En este ejemplo, la posición de P está determinada con respecto a un marco de referencia {B}, el cual tiene el mismo origen pero está rotado con respecto al marco de referencia {A}, como se presenta en la figura 4. Debemos encontrar la posición de P con respecto al marco de referencia {A}.

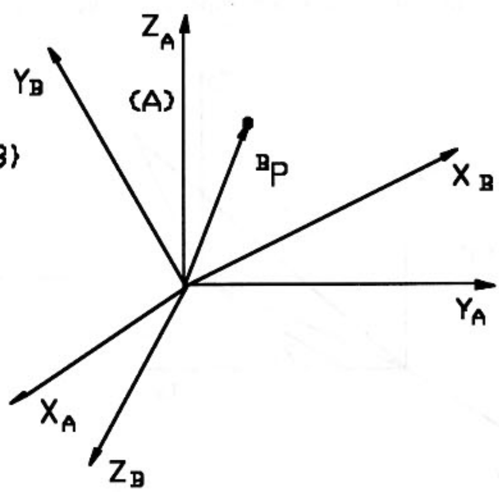


Fig. 4. Sistema {B} rotado con respecto al sistema {A}.

Para resolver el problema, primero se encuentra la matriz de rotación de {B} con respecto a {A}:

$$^{A}_{B}R = \left[{}^{A}\hat{X}_{B} \quad {}^{A}\hat{Y}_{B} \quad {}^{A}\hat{Z}_{B} \right] \tag{8}$$

y luego se determina la posición de P con respecto a {A} de la siguiente manera:

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}P \tag{9}$$

Suponiendo que los marcos de referencia {A} y {B} son los mostrados en la figura 5, en donde {B} está rotado un ángulo θ con respecto a {A} alrededor del eje z, y la posición de P respecto a {B} está dada, debemos encontrar la posición de P con respecto a {A}.

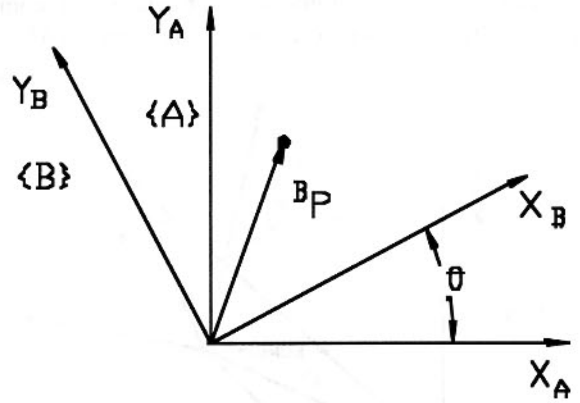


Fig. 5. Rotación de {B} respecto a {A} alrededor del eje z.

Supongamos que:

$$\theta = 45^{o};\ \text{y} \quad {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

La matriz de rotación de {B} con respecto a {A} en este caso es:

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Entonces, al usar la ecuación (9):

$${}^{A}P = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$${}^{A}P = \begin{bmatrix} -3.535 \\ 7.777 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Se determinaron así, las coordenadas del punto P con respecto al sistema {A}, haciendo uso de la matriz de rotación de {B}con respecto a{A}, y del vector de posición de P con respecto a {B}.

Ejemplo 3: En general, la posición de P se encuentra determinada con respecto a un marco de referencia {B}, trasladado y rotado con respecto al marco de referencia {A}, como se ilustra en la figura 6. Se debe encontrar la posición de P con respecto a el marco de referencia {A}.

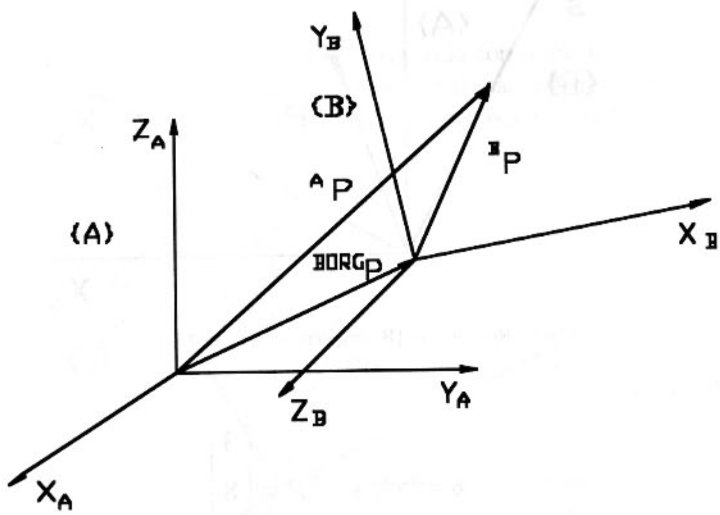


Fig. 6. Rotación y traslación de {B} con respecto a {A}.

Para obtener la posición de P con respecto a {A} debemos utilizar tanto la matriz de rotación de {B} con respecto a {A}, como el vector de posición del origen de {B} con respecto a{A} y el vector de posición de P con respecto a {B}:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Una de las matrices de la derecha es de tamado 4x4, siendo la cuarta fila de ceros excepto en la posición de la diagonal donde hay un uno. A esta matriz se le llama transformación homogénea de {B} con respecto a {A} o, simplemente, matriz de transformación de {B} a {A}, y se escribe:

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Supongamos ahora que los marcos de referencia {A} y {B} son los mostrados en la figura 7 y que debemos encontrar la posición de P respecto a {A}:

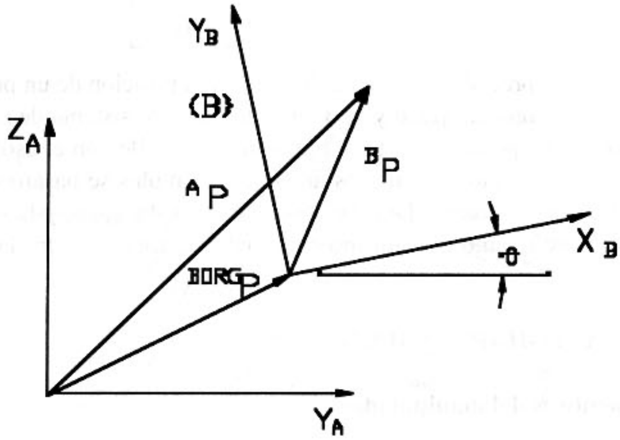


Fig. 7. Sistema {B} trasladado y rotado con respecto a {A}.

Para este ejemplo se asume que:

$$\theta = 45^{o}\ ; \quad {}^{B}P = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{y} \qquad {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

y encontramos que la matriz de transformación de {B} a{A} es:

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 8 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

entonces, de la ecuación (14) tenemos que:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 8 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

y finalmente:

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} 8.000 \\ 14.656 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Se puede notar cómo el procedimiento para determinar la posición de un punto en un sistema de referencia, conociendo la posición del origen y la orientación de otro sistema de referencia respecto al primero, así como la posición del punto respecto al segundo, es sencillo con el uso de la matriz de transformación de un sistema con respecto al otro. Los anteriores ejemplos se basaron en situaciones donde la rotación del sistema {B} con respecto a {A} fue sólo alrededor del eje z, y la solución es relativamente fácil. Sin embargo, el procedimiento es el mismo para cualquier rotación y traslación en general.

NOTACIÓN DE DENAVIT-HARTENBERG

Parámetros de los miembros del manipulador

Los miembros de un manipulador están conectados por junturas que generalmente son uniones de revoluta o prismáticas, como se muestra en la figura 8. Una unión de revoluta permite a los miembros rotar uno con respecto al otro, mientras que una unión prismática permite a los miembros trasladarse uno con respecto al otro.

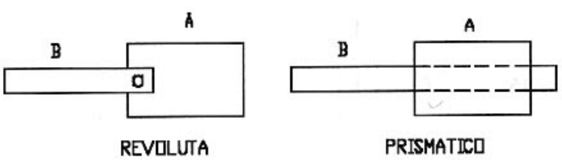


Fig. 8. Unión de revoluta y prismática entre los miembros A y B.

Los miembros del manipulador se enumeran comenzando con la base, o parte fija, a la cual se le asigna el número cero. A cada unión entre los miembros del manipulador se le asigna un eje. Así, el eje i está definido por la línea en la cual el miembro i rota con respecto al miembro i-1 si la unión es de revoluta, o se traslada si la unión es prismática. Con la notación de Denavit-Hartenberg, los miembros del manipulador se caracterizan por dos parámetros: longitud a_i y el doblez α_i. [Craig, 1989; Klafter, 1989). (Ver la figura 9).

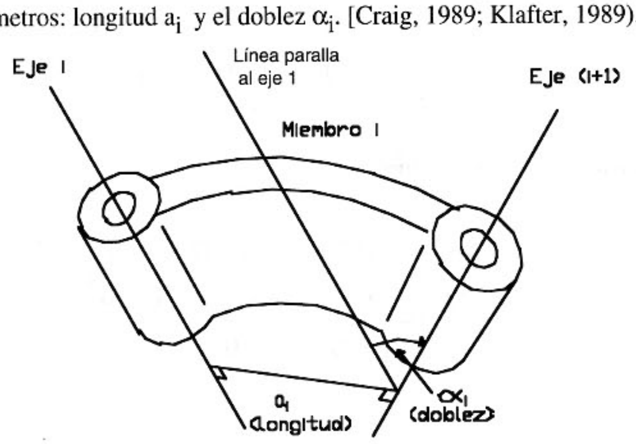


Fig. 9. Longitud a_i y el doblez (i de los miembros de un manipulador).

Para miembros intermedios se asignan dos parámetros adicionales llamados: *desalineamiento* d_i *y ángulo de la unión* θ_i, los cuales se presentan en la figura 10.

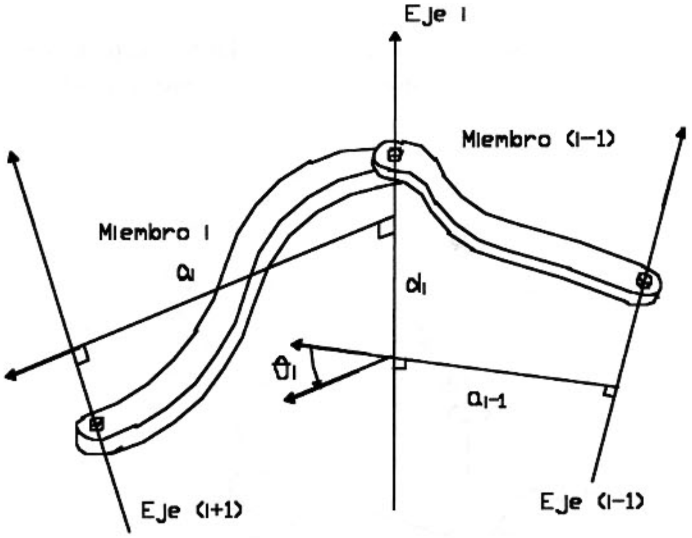


Fig. 10. Desalineamiento d_i y ángulo de la unión θ_i de los miembros de un manipulador.

Observando la figura 10, se concluye que d_i es la distancia a lo largo del eje i que separa a los ejes de a_{i-1} y a_i , siendo con signo positivo desde a_{i-1} hasta ai en la dirección del eje i. El parámetro θ_i es el ángulo formado por los ejes de a_{i-1} y a_i cuando ambos son proyectados a un plano perpendicular al eje i, y es positivo desde a_{i-1} hasta a_i. Para el primer y último miembro se recomienda usar a_i y α_i igual a cero, así que $a_O = a_N = 0$, y $\alpha_O = \alpha_N = 0$. Si la unión 1 es revoluta, se escoge $\theta_1 = 0$ arbitrariamente, y entonces $d_1 = 0$ siempre. Si la unión 1 es prismática, se escoge $d_1 = 0$ arbitrariamente , y entonces $\theta_1 = 0$ siempre. Cuando se trabaja con uniones de revoluta, los parámetros (i son llamados variables y los parámetros a_i, α_i, y, α_i son fijos [Craig, 1989, Klafter, 1989] .

A cada miembro i del manipulador se le asigna un marco de referencia {i} de acuerdo con el siguiente procedimiento:

1- Se definen los ejes de las uniones y se imaginan (dibujan) líneas infinitas a lo largo de ellos.

2- Se identifican dos de los ejes, i e i+1, se encuentra la línea perpendicular común entre los ejes y al punto de intersección con el eje i se le asigna el origen del marco de referencia i.

3- Se asigna la coordenada z_i apuntando a lo largo del eje i.

4- Se define x_i apuntando a lo largo de la línea perpendicular común, o si los ejes se intersecan, se define x_i normal al plano de los dos ejes.

5- Se asigna y_i tal que se cumpla la regla de la mano derecha.

6- Se identifica el marco de referencia {0} igual al marco de referencia {1}cuando $\theta_1 = 0$, o cuando $d_1 = 0$, dependiendo de si la unión en el eje 1 es revoluta o prismática, respectivamente. Para el marco de referencia {N}, el último en la cadena, se escoge un origen y se asigna x_N en cualquier dirección, pero tratando de hacer la mayoría de parámetros cero para ese miembro [Craig, 1989; Klafter, 1989].

El siguiente ejemplo ayudará a entender el procedimiento anterior, y presentará una aplicación de las matrices de transformación conjuntamente con la notación de Denavit-Hartenberg.

Ejemplo: Este problema consiste en determinar los parámetros a_i, α_i, d_i, y θ_i para cada miembro, y asignar los marcos de referencia a los cuatro miembros del robot mostrado en la figura 11.

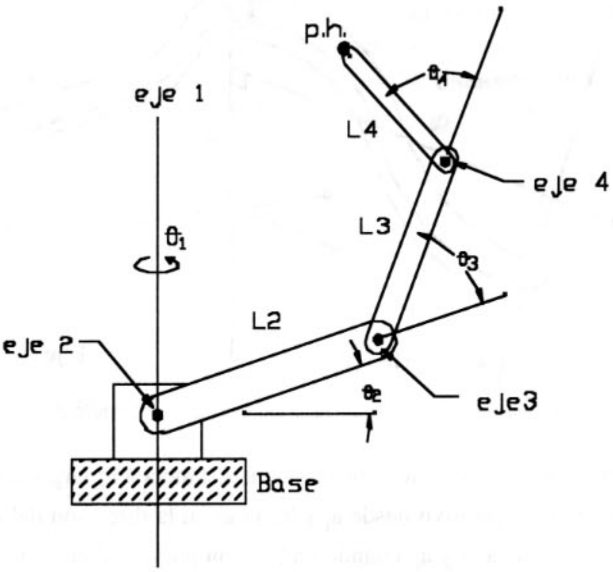


Fig. 11. Robot de cuatro miembros con uniones de revoluta.

Los parámetros de cada uno de los miembros se obtienen con la ayuda de las figura 9 y 10, más la figura 11. Estos parámetros se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de los miembros del robot mostrado en figura 11

Miembro i	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	90^o	θ_2	0
3	L2	0	θ_3	0
4	L3	0	θ_4	0

Para asignar los marcos de referencia a los miembros del robot, debemos seguir el procedimiento explicado arriba, y así se obtienen los resultados presentados en la figura 12:

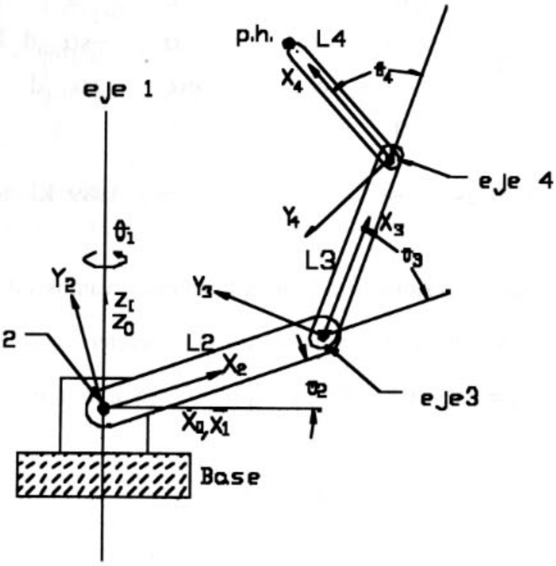


Fig. 12. Asignación de los marcos de referencia a los brazos del robot.

En las dos figuras anteriores, p.h. es la abreviación usada para el punto de la herramienta. Es recomendable seguir el procedimiento explicado arriba para verificar la determinación de los parámetros y la asignación de los marcos de referencia a cada miembro del robot.

Matriz de transformación entre marcos de referencia de miembros consecutivos

Basándose en la figura 13, la cual consiste en una representación gráfica de dos miembros consecutivos de un manipulador, se obtiene la matriz de transformación entre los marcos de referencia {i} e {i-1}.

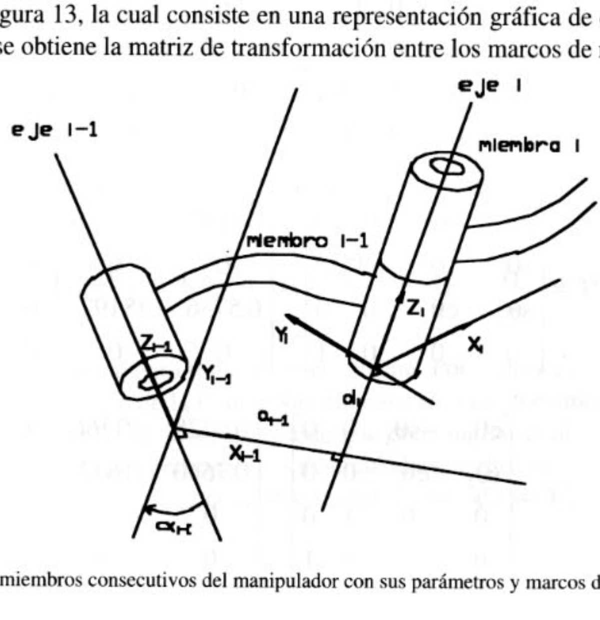


Fig. 13. Dos miembros consecutivos del manipulador con sus parámetros y marcos de referencia.

La matriz de transformación del marco de referencia {i} con respecto al marco de referencia {i-1} es:

$$ {}^{i-1}_{\ i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20} $$

en donde $s\theta_i$ es el seno y $c\theta_i$ es el coseno del ángulo θ_i [Craig, 1989, Klafter,1989).

Ejemplo: Utilizando los resultados del ejemplo anterior, vamos a determinar las matrices de transformación ${}^3_4T$; ${}^2_3T$; ${}^1_2T$; y ${}^0_1T$; y usando las siguientes características físicas L_2 = 30 cm, L_3 = 35 cm, L_4 = 20 cm, $\theta_1 = 50^{O}$, $\theta_2 = 35^{O}$, $\theta 3 = 40^{O}$, y $\theta_4 = 30^{O}$, encontraremos ${}^0_4T$; a través de la siguiente ecuación:

$$ {}^0_4T = {}^0_1T \, {}^1_2T \, {}^2_3T \, {}^3_4T \tag{21} $$

Utilizando la tabla 1 y la ecuación (20) podemos obtener las matrices de transformación, con la longitud de los miembros en metros:

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_3 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5000 & 0 & 0.35 \\ 0.5000 & 0.8660 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7660 & -0.6428 & 0 & 0.30 \\ 0.6428 & 0.7660 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.5736 & 0.8192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24} $$

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6428 & -0.7660 & 0 & 0 \\ 0.7660 & 0.6428 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25} $$

La matriz de transformación del marco de referencia {4} al marco de referencia {0} se encuentra utilizando la ecuación (21):

$$ {}_4^0T = \begin{bmatrix} -0.1664 & -0.6209 & 0.7660 & 0.2162 \\ -0.1983 & -0.7399 & -0.6428 & 0.2576 \\ 0.9659 & -0.2589 & 0 & 0.5102 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26} $$

Para localizar el punto de la herramienta, el cual se encuentra en el extremo del miembro 4 del robot, con respecto al marco de referencia {0} se debe calcular:

$$ \begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = {}_4^0T \begin{bmatrix} {}^4P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27} $$

tenemos que:

$$ {}^4P = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28} $$

y finalmente, utilizando la ecuación (27):

$$ {}^0P = \begin{bmatrix} 0.1829 \\ 0.2180 \\ 0.7030 \end{bmatrix} \text{ en metros} \tag{29} $$

Este resultado puede comprobarse analizando la figura 11 y observando que:

$$ p_x = (L_2 c\theta_2 + L_3 c(\theta_2 + \theta_3) + L_4 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))\, c\theta_1 = 0.1829 \text{ metros} \tag{30} $$

$$ p_y = (L_2 c\theta_2 + L_3 c(\theta_2 + \theta_3) + L_4 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))\, s\theta_1 = 0.2180 \text{ metros} \tag{31} $$

$$ p_z = L_2 s\theta_2 + L_3 s(\theta_2 + \theta_3) + L_4 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0.7080 \text{ metros} \tag{32} $$

Se concluye que el procedimiento trabaja perfectamente. Por supuesto, no siempre se puede comprobar el resultado por observación de la figura. Nuestro caso sólo es un ejemplo sencillo, utilizado para resolver el problema con el fin de verificar el método que combina las matrices de transformación y la notación de Denavit-Hartenberg. Generalmente los manipuladores industriales son de seis miembros y en casos así es cuando, verdaderamente, se nota la versatilidad del método arriba estudiado.

CONCLUSIÓN

La posición de un punto con respecto a un marco de referencia se puede expresar como un vector de tamaño 3x1, y la orientación de un marco de referencia respecto a otro se puede expresar como una matriz de tamaño 3x3. La matriz de transformación es una matriz de tamaño 4x4 formada por la matriz de rotación y el vector de posición del origen de un marco de referencia {B}con respecto a otro marco de referencia{A}. Así, conociendo la posición de un punto con respecto a el marco de referencia {B}, y la matriz de transformación de {B} con respecto a {A}, se puede encontrar la posición de ese punto con respecto al marco de referencia {A}, solamente con multiplicar la matriz por el vector conocido.

Junto a la anterior conclusión, y al utilizar la notación de Denavit-Hartenberg para asignar los marcos de referencia a los miembros de un manipulador, se logra determinar la posición del punto de la herramienta con respecto a la base de un manipulador. Esto se consigue al multiplicar sucesivamente las matrices de transformación de un marco de referencia, comenzando por el último, con respecto al marco de referencia anterior hasta llegar a la base. Así, la matriz ${}^{0}_{N}T$; se encuentra donde N es el último miembro del manipulador y la base del manipulador generalmente está unida a la tierra y se le asigna el marco de referencia {0}. En general, el método estudiado en este artículo es muy adecuado y conveniente para determinar la posición del punto de la herramienta con respecto a la base de un robot o manipulador.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Craig, John J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[2] Klafter, Richard; Chmielewski, A.T.; Negin, M. *Robotic engineering: an integrated approach.* New Jersey, Prentice - Hall, Inc., 1989.