Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
JULIO/DICIEMBRE 1991 VOLUMEN 1 Nº2

INGENIERIA
1991

Ingeniería 1 (2): 37-52, 1991 San José Costa Rica

LA RED GENERALIZADA

Víctor M. Alfaro *

Resumen

Se presenta el concepto de Red Generalizada, un procedimiento común para el modelado de diferentes sistemas, las ecuaciones constitutivas de los elementos generalizados y sus relaciones con los elementos de los sistemas energéticos. Se describe la obtención de la red y varios métodos para el establecimiento de las ecuaciones que la modelan.

Summary

The concept of the Generalized Network, a common procedure for modelling of different systems, the constitutive equations of the generalized elements and their relations to the elements of energetic systems are presented. How the network is achieved and several methods for its modelling are described.

INTRODUCCION

La utilización del concepto de Red **Generalizada**[1 2] permite seguir procedimientos generales para el modelado de sistemas de diferente naturaleza, tales como los sistemas mecánicos, eléctricos, fluídicos, térmicos, socioeconómicos, biológicos y otros.

Una red generalizada está formada por la interconexión de elementos y fuentes generalizadas que representan a los elementos físicos. En dicha red se tienen dos tipos de variables, las **transvariables** (v), variables que requieren de dos puntos para medirse y que se obtienen a través de los elementos, como la diferencia de potencial o la velocidad, y las **pervariables** (f), variables que se propagan por los elementos y para cuya medición se requiere solamente un punto, como la corriente eléctrica o el caudal.

La *Figura No. 1*, adaptación del tetraedro de Paynter[3], muestra las relaciones entre las variables en los diferentes elementos. Estos elementos son **elementos generalizados de una puerta de energía,** *Figura No. 2,* o de **dos terminales** y reciben o entregan energía por dicha puerta, en donde v_{21} representa la transvariable entre el par de terminales de la puerta y f_{21} la pervariable entrando a ella.

Las relaciones entre las variables de un elemento generalizado son de la forma:

$$v_{21} = Z_g\,(p)\,f_{21} \qquad (1.1)^*$$

$$f_{21} = Y_g\,(p)\,v_{21} \qquad (1.2)$$

en donde Z_g (p) es el operador **impedancia generalizada** y Y_g (p) el operador **admitancia generalizada.**

Se define además a x como la integral de la transvariable y a h como la integral de la pervariable o sea:

$$v_{21} = p\,x_{21} \qquad (2.1)$$

$$f_{21} = p\,h_{21} \qquad (2.2)$$

La potencia entrando al elemento a través de la puerta es

$$P = f_{21}\,v_{21} \qquad (3)$$

y la energía entregada al mismo en un cierto intervalo de tiempo será

* Escuela de Ingeniería Eléctrica Universidad de Costa Rica

*. p es el operador derivada, d/dt

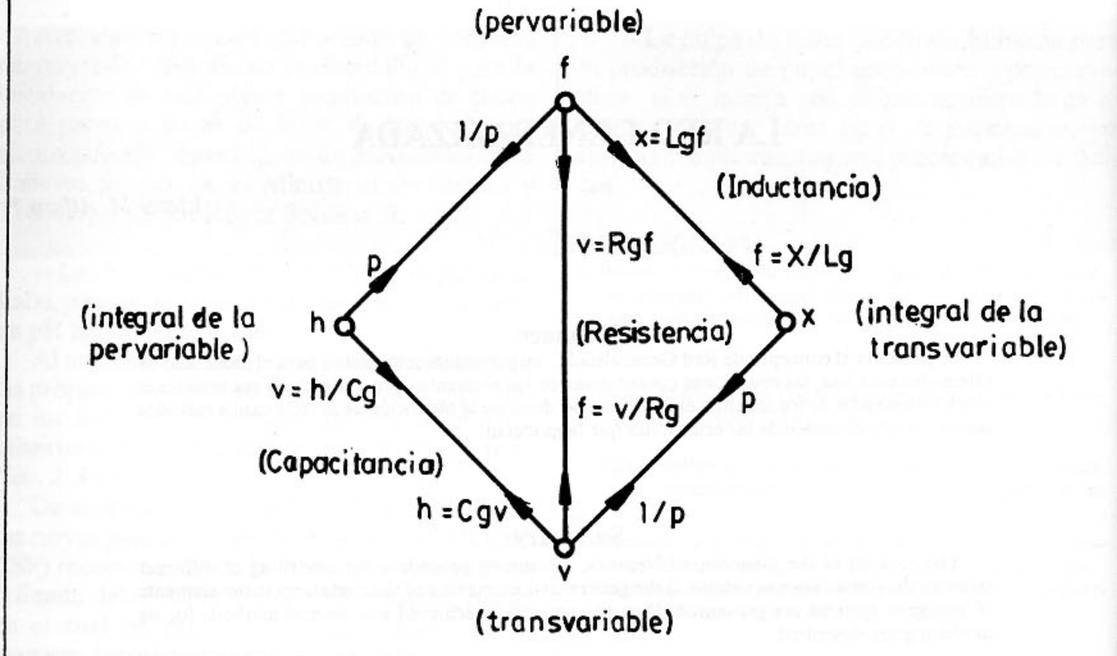


FIGURA No. 1. Relación entre las variables de la red generalizada

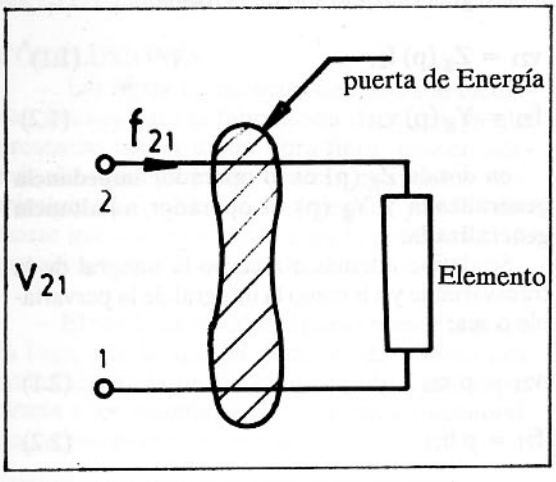


FIGURA No. 2 Elemento de una puerta de energía

$$E = \int f_{21} v_{21} \, dt \tag{4}$$

Las relaciones entre las variables en los elementos generalizados permitirán asociar a cada elemento físico un elemento generalizado y establecer analogías entre las variables y elementos de los diferentes sistemas.

La capacitancia generalizada (C_g) representará a aquellos elementos almacenadores de energía cuyas relaciones constitutivas sean de la forma

$$C_g\, p\, v_{21} = f_{21}, \quad C_g v_{21} = h_{21} \tag{5.1}$$

$$Z_c(p) = \frac{1}{C_g\, p}, \quad Y_c(p) = C_g\, p \tag{5.2}$$

$$E = 1/2\, C_g (v_{21})^2 = 1/2\, (h_{21})^2 / C_g \tag{5.3}$$

la inductancia generalizada (L_g) representará a aquellos cuyas relaciones sean de la forma

$$L_g\, p\, f_{21} = v_{21}, \quad L_g f_{21} = x_{21} \tag{6.1}$$

$$Z1(p) = Lgp, \quad Y1(p) = 1/Lgp \tag{6.2}$$

$$E = 1/2\, Lg\, (f21)2 = 1/2\, (x21)2 / Lg \tag{6.3}$$

y la resistencia generalizada (R_g) representará a los disipadores de energía dados por

$$v_{21} = R_g f_{21} \tag{7.1}$$

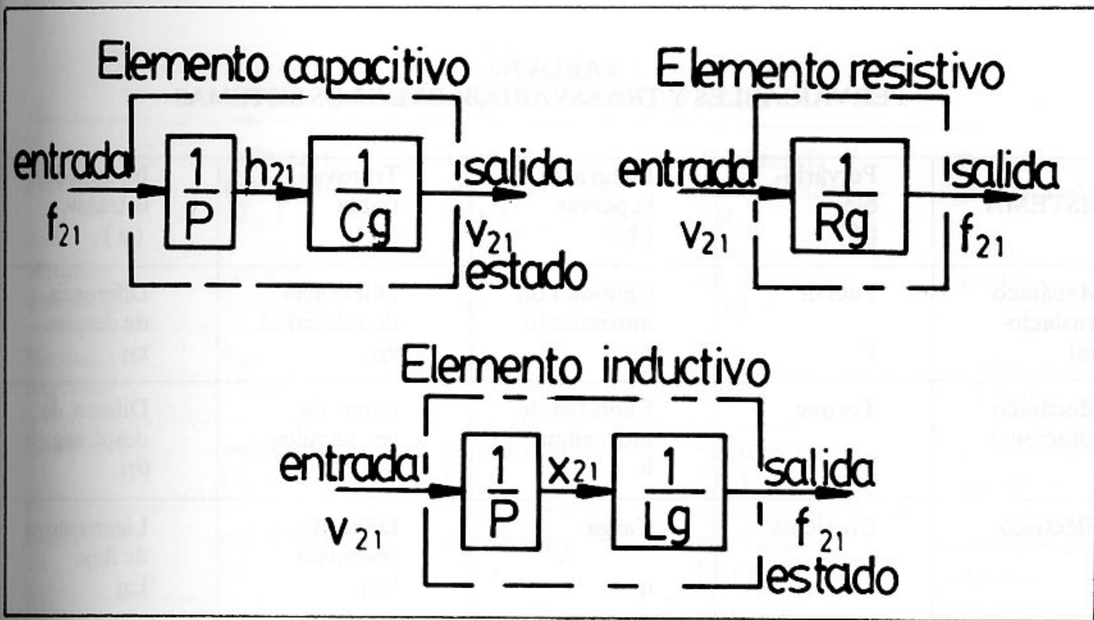


FIGURA No. 3. Causalidad de los elementos generalizados

$Z_r(p) = R_g, \qquad Y_r(p) = 1/R_g$ (7.2)

$P = (v_{21})^2 / R_g = R_g\,(f_{21})^2$ (7.3)

La *Figura No. 3* muestra la causalidad de estos elementos generalizados. Los almacenadores de energía, capacitancia e inductancia, tienen una causalidad natural de tipo integral, un cambio finito en la variable de entrada produce una acumulación en la variable de salida. Por esta razón, el estado asociado a los capacitores generalizados es su transvariable y el asociado a los inductores generalizados su pervariable.

Otros elementos de dos terminales son las fuentes de pervariable y de transvariable.

Los elementos de una puerta de energía reciben o entregan energía por la misma puerta, otros elementos, sin embargo, permiten recibirla por una puerta y entregarla por otra, estos son los **elementos de dos puertas de energia** o **cuatro terminales,** *Figura No. 4.*

Las relaciones entre las variables de un elemento de dos puertas de energía se pueden obtener suponiendo que no hay disipación ni producción de energía dentro del elemento, por lo que la energía o potencia instantanea recibida por una puerta es igual a la entregada por la otra, esto es

$v_{21}\,f_{21} = v_{43}\,f_{34}$ (8.1)

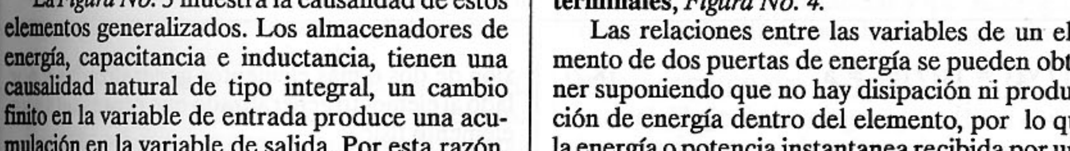


FIGURA No. 4. Elemento de dos puertas de energía

TABLA No. 1
PERVARIABLES Y TRANSVARIABLES DE LOS SISTEMAS

SISTEMA	Pervariable (f)	Integral de la pervar. (h)	Transvariable (v)	Integral de la transv. (x)
Mecánico traslacional	Fuerza F	Cantidad de movimiento p	Diferencia de velocidad v_{21}	Diferencia de desplaz. x_{21}
Mecánico rotacional	Torque T	Cantidad de mov. angul. h	Difer. de vel. angulos w_{21}	Diferen. de despl. ang. θ_{21}
Eléctrico	Corriente i	Carga q	Difer. de potencial V_{21}	Ligamento de flujo L_{21}
Fluídico	Caudal Q	Volumen V	Difer. de presión P_{21}	Cantidad de mov de pres Γ_{21}
Térmico	Flujo de calor q	Calor H	Difer. de temperatura T_{21}	— — — — —

$$v_{21} / v_{43} = f_{34} / f_{21} = a \qquad (8.2)$$

en donde "a" es la razón de transformación.

Elementos de dos puertas de energía son por ejemplo las palancas y los transformadores eléctricos.

La red generalizada permite representar los sistemas energéticos con base en el comportamiento de sus variables y elementos.

Las *Tablas No. 1* y *No. 2* presentan las pervariables y transvariables en los sistemas mecánicos traslacionales, mecánicos rotacionales, eléctricos, fluídicos y térmicos, asi como los elementos generalizados utilizados para representarlos (ver Apéndice A).

OBTENCION DE LA RED GENERALIZADA

El primer paso en el análisis de un sistema, es la obtención de la red generalizada que lo representa. Esta red tendrá asociada con cada nodo una transvariable y con cada lado una pervariable, entendiéndose por nodo el punto de interconexión de dos o más elementos generalizados y por lado al elemento generalizado que representa a un elemento físico.

La red generalizada tendrá tantos nodos como transvariables diferentes se puedan establecer en el sistema y lados como elementos tenga. Normalmente se selecciona uno de estos nodos como nodo de referencia, de manera que las transvariables de los demás nodos son relativas a éste.

Una red que representa a un sistema mecánico tendrá tantos nodos como velocidades lineales (o angulares) diferentes se puedan establecer y las pervariables serán las fuerzas (pares) por los elementos.

Para un sistema eléctrico la red equivalente tendrá tantos nodos como puntos con potencial distinto existan en el circuito y las pervariables por los elementos serán las corrientes.

Como la transvariable en un sistema fluídico es la presión, la red generalizada equivalente tendrá tantos nodos como puntos con presión diferente existan en el sistema y las pervariables por los elementos serán los caudales.

TABLA No. 2
ELEMENTOS GENERALIZADOS

SISTEMA	Inductanc. generaliz. (L_g)	Capacitanc. generaliz. (C_g)	Resistencia generalizada (R_g)	Transforma. generalizado
Mecánico traslacional	resorte (1/k)	masa (m)	amortiguador (1/b)	palanca
Mecánico rotacional	barra torc (1/K)	volante (J)	amort rot (1/B)	– engranes – bandas
Eléctrico	inductanc. (L)	capacitancia (C)	resistencia (R)	transformador eléctr.
Fluídico	ind. fluíd (I_f)	cap. fluídica (C_f)	res. fluídica (R_f)	transforma. fluídico
Térmico (*)	– – – –	capac térmica (C_t)	res. térmica (R_t)	

(*) El sistema térmico no cumple con las ecuaciones de energía o potencia de los elementos generalizados

Para representar a un sistema térmico la red equivalente tendrá tantos nodos como puntos con temperatura diferente existan y los lados tendrán como pervariable el flujo de calor.

El dibujo de la red generalizada se inicia estableciendo el número de nodos necesarios, identificándolos y representando cada componente del sistema físico por su equivalente generalizado entre los pares de nodos correspondientes. Como las velocidades de las masas y volantes, las presiones en el fondo de los tanques y las temperaturas de las capacitancias térmicas, se miden con respecto a una referencia, los capacitores generalizados que representan a estos elementos tienen un terminal conectado al nodo de referencia.

Los elementos podrán representarse por su impedancia o admitancia generalizada, dependiendo del tipo de análisis que se quiera realizar y empleando la simbología mostrada en la *Figura No. 5.*

Considere como ejemplo el caso del sistema mecánico de la *Figura No. 6.* En este sistema existen dos puntos con velocidades relativas distintas, las de los carros, con respecto a un punto de referencia o tierra, por lo que la red generalizada tendrá solamente tres nodos. Las masas de los carros serán representadas por capacitores, los resortes por inductancias y los amortiguadores por resitencias generalizadas, *Figura No. 7.*

ECUACIONES DE LA RED

Del dibujo de la red generalizada se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema y cuya solución, para una entrada dada, nos dará su evolución en el tiempo.

El procedimiento para la obtención de un modelo no es único y dependerá de cuales variables son de interés. Básicamente se pueden hacer tres tipos de análisis para obtener el modelo, uno basado en la aplicación de la Ley de incidencia de las pervariables para establecer un modelo en función de las transvariables, otro en la aplicación de la Ley de contorno de las transvariables para obtener las ecuaciones en función de las pervariables y por último utilizando las variables de estado para obtener un modelo en base a los estados asignados a los elementos almacenadores de energía.

La **Ley de incidencia de las pervariables,** es la generalización de las condiciones de continuidad que deben cumplirse al conectar entre si dos o más elementos, esto es, la conservación de la carga en los sistemas eléctricos (ley de corriente de

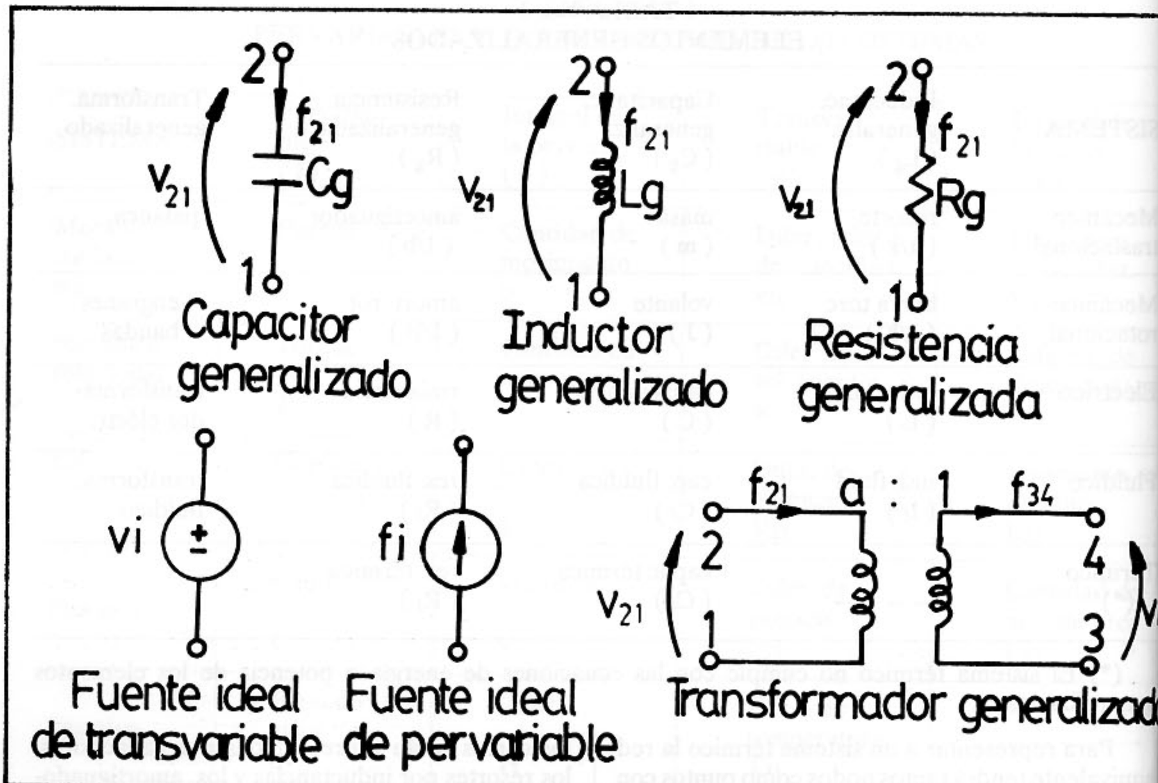


FIGURA No. 5 Símbolos para los elementos de la red generalizada

Kirchhoff), la conservación de la cantidad de movimiento en los sistemas mecánicos (leyes de Newton), la conservación de la masa en los sistemas fluídicos y la conservación de la energía en los sistemas térmicos. La **Ley de contorno de las transvariables** es la generalización de los requisitos de compatibilidad, establecidos por la forma en que los elementos son conectados y por el hecho de que el potencial eléctrico, la distancia, la presión y la temperatura son escalares, y deben sumarse al ir de un punto a otro del sistema (ley de voltaje de Kirchhoff, restricciones geométricas en los sistemas mecánicos). Se establecen entonces como[4]:

Ley de incidencia de las pervariables – "La suma de todas las pervariables que inciden en un nodo cualquiera de la red generalizada es cero".

Ley de contorno de las transvariables – "La suma de todas las transvariables tomadas a lo largo de cualquier contorno cerrado de la red generalizada es cero".

La aplicación de estas leyes nos llevará normalmente a establecer, como modelo para el sistema, un conjunto de ecuaciones integro diferenciales, mientras que la utilización de las variables de estado nos dará un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por otra parte, el número de variables necesarias para garantizar la obtención de un conjunto de ecuaciones independientes variará en cada caso.

Un punto importante en el análisis de una red es la determinación del número de ecuaciones necesarias para describirla completamente.

Para determinar las pervariables o transvariables que se requieren para modelar una red generalizada, es necesario analizar, a partir de su gráfica, sus características topológicas, esto facilitará la escritura de las ecuaciones del modelo.

GRAFICA DE LA RED GENERALIZADA

Al dibujar la gráfica de una red se conservan todos los nodos, pero los elementos o lados sencillamente se representan or lineas y la parte generadora de las fuentes se hace cero, esto es, una fuente ideal de pervarible se sustituirá por un

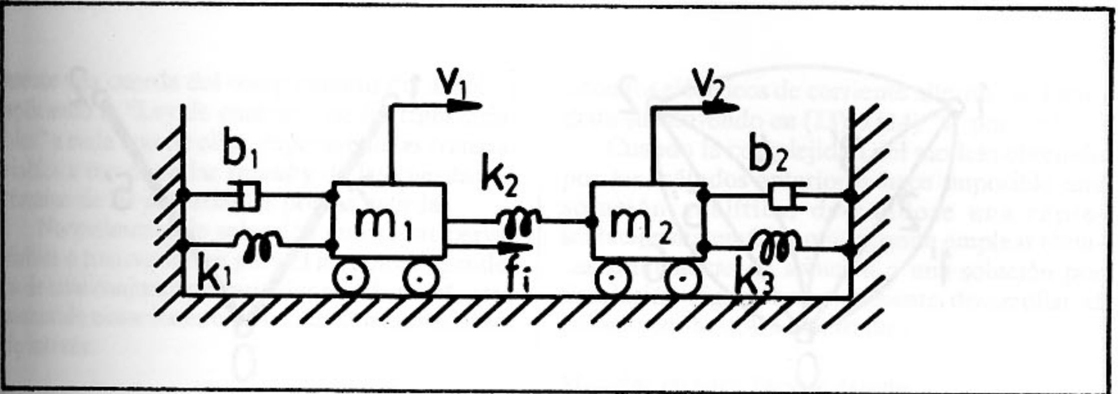


FIGURA No. 6. Sistema mecánico

circuito abierto y una de transvariable por un corto circuito.

Por ejemplo, en la *Figura No. 8a* se muestra la gráfica de la red de la *Figura No. 7.* Esta gráfica tiene tres nodos y siete lados. En la *Figura. 8b* se muestra un posible árbol para esta gráfica. La gráfica tiene entonces dos ramas y cinco cuerdas.

Para obtener el conjunto de variables independientes necesarias para modelar la red, se analizan las pervariables por las cuerdas de la gráfica y las transvariables entre pares de nodos del árbol.

PERVARIABLES DE LAZO Y TRANSVARIABLES ENTRE PARES DE NODOS

"El número de pervariables de lazo independientes en una red es igual al número de cuerdas".

"El número de transvariables entre pares de nodos independientes es igual al número de ramas del árbol".

Si la gráfica tiene N nodos y L lados, el número de ramas será R = N-1 y el de cuerdas C = L-(N-1) = L-N+1.

ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES

A partir del sistema original se dibuja la red generalizada, indicando la impedancia de los elementos. Luego se dibuja su gráfica. Se selecciona un árbol adecuado, escogiendo las ramas de manera que estén incluidos todos los lados correspondientes a los elementos que están en serie con una fuente de transvariable, pero ninguno de los que corresponden a elementos en serie con una fuente de pervariable. Se cuentan los nodos, los lados, las ramas y las cuerdas de la gráfica.

Aplicación de la "Ley de incidencia de las pervariables"

Se toma la suma de las pervariables en cada nodo, suponiendo siempre que el nodo bajo consideración tiene una transvariable mayor que todos los demás (o sea que las pervariables salen del

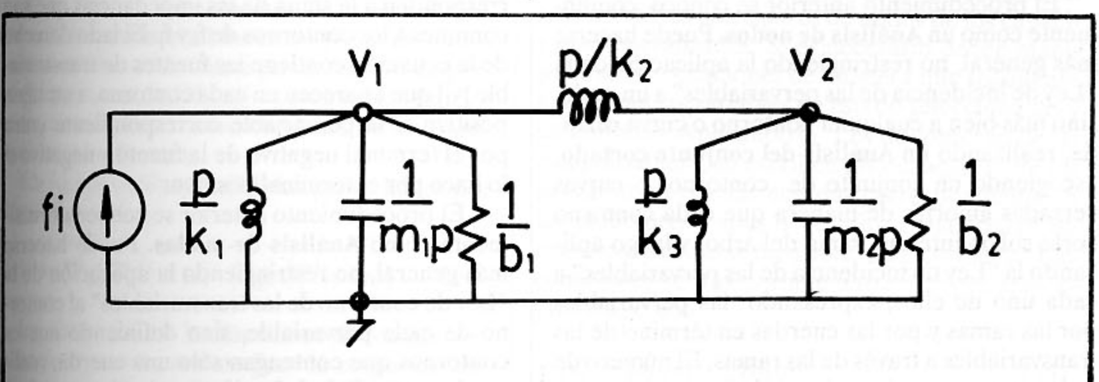


FIGURA No. 7 Red generalizada del sistema mecánico

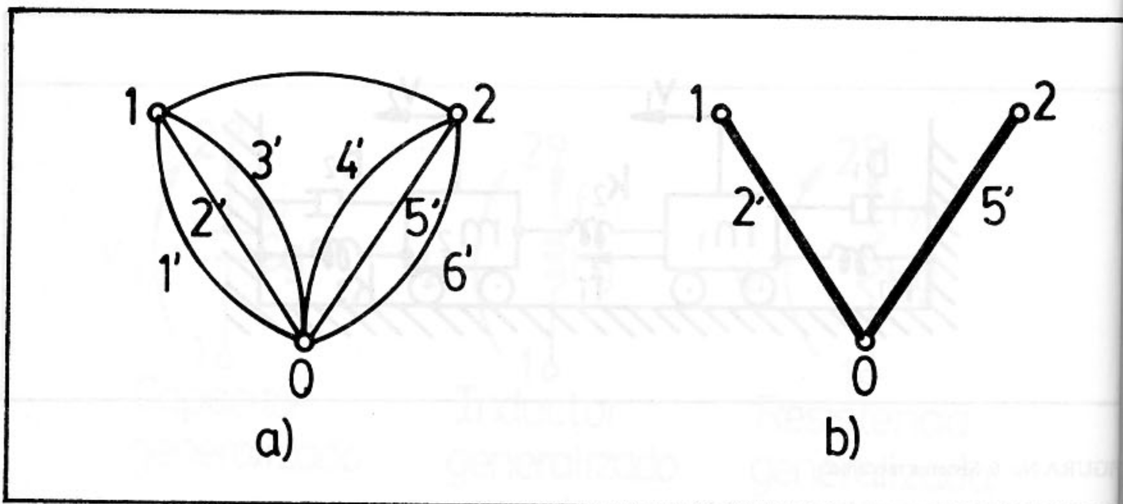


FIGURA No. 8 Gráfica y árbol de la red

nodo), y se iguala a la suma de las pervariables de las fuentes que entran al nodo, esto da

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}(p)\,(v_i - v_j) + \phi_i = \sum_{j} f_i \qquad (9)$$

Ordenando las ecuaciones se obtiene

$$[Y_g(p)]\,[v] = [f_i] - [\phi i] \qquad (10)$$

en donde $[Y_g(p)]$, la matriz de admitancias de la red, debe ser simétrica. Los elementos de la diagonal son positivos y corresponden a la suma de las admitancias generalizadas conectadas al nodo vi, los elementos fuera de la diagonal son negativos y corresponden a la suma de las admitancias que se encuentran entre los nodos vi y v_j. El lado derecho de la ecuación contiene las fuentes de pervariable $[f_i]$ positivas si inciden en el nodo y negativas si salen.

El procedimiento anterior se conoce comúnmente como un **Análisis de nodos.** Puede hacerse más general, no restringiendo la aplicación de la "Ley de incidencia de las pervariables" a un nodo, sino más bien a cualquier contorno o curva cerrada, realizando un **Análisis del conjunto cortado,** escogiendo un conjunto de contornos o curvas cerradas amorfas de manera que cada contorno corte solamente una rama del árbol y luego aplicando la "Ley de incidencia de las pervariables" a cada uno de ellos, expresando las pervariables por las ramas y por las cuerdas en término de las transvariables a través de las ramas. El número de contornos necesarios es igual al número de ramas.

Aplicación de la "Ley de contorno de las transvariables"

Se tomá la suma de las transvariables a través de cada contorno cerrado recorriéndolo en el sentido asignado a la pervariable del contorno bajo consideración, esto da

$$\sum_{j=1}^{c} Z_{ij}(p)\,(f_i - f_j) + \phi i = \sum_{j} vi \qquad (11)$$

Ordenando las ecuaciones se obtiene

$$[Z_g(p)]\,[f] = [v_i] - [\phi_i] \qquad (12)$$

en donde la matriz de impedancias, $[Z_g(p)]$, debe ser simétrica.

Los elementos de la diagonal son positivos y corresponden a la suma de las impedancias en el contorno cerrado correspondiente a f_i. Los elementos fuera de la diagonal son negativos y corresponden a la suma de las impedancias que son comunes a los contornos de f_i y f_j. El lado derecho de la ecuación contiene las fuentes de transvariable $[v_i]$ que aparecen en cada contorno, con signo positivo si la pervariable correspondiente entra por el terminal negativo de la fuente y negativo si lo hace por el terminal positivo.

El procedimiento anterior se conoce normalmente como **Análisis de mallas**. Puede hacerse más general, no restringiendo la aplicación de la "Ley de contorno de las transvariables" al contorno de cada pervariable, sino definiendo nuevos contornos que contengan sólo una cuerda, realizando un **Análisis de lazos,** escogiendo un conjunto de lazos de manera que cada lazo incluya solamente una cuerda del complemento del árbol y aplicando la "Ley de contorno de las transvariables" a cada uno de ellos, expresando las transvariables a través de las ramas y de las cuerdas en término de las pervariables por las cuerdas.

Normalmente, la selección entre usar pervariables o transvariables para el modelo, dependerá de cual conjunto de variables nos da un número menor de ecuaciones o de cuales son las variables de interés.

Funciones de transferencia

Se han enumerado los procedimientos para establecer un conjunto de ecuaciones, que sean necesarias y suficientes, para resolver la red y obtener las pervariables y transvariables en cualquier parte de la misma. Este conjunto de ecuaciones normalmente está constituido por ecuaciones diferenciales de orden alto, e incluso por ecuaciones integro diferenciales. Este planteamiento resulta adecuado cuando el objetivo del estudio es la obtención de una función de transferencia, entre una variable de la red y alguna de sus entradas, permitiendo obtener la respuesta a estado cero para esa variable, hacer un estudio de la respuesta de frecuencia del sistema o una simulación analógica, pero normalmente no permite una solución analítica simple o una solución por simulación digital.

Las ecuaciones diferenciales del modelo pueden convertirse fácilmente a un conjunto de ecuaciones algebráicas en la frecuencia compleja sustituyendo el operador derivada "p" por "s". Haciendo esto en (10) y resolviendo para las transvariables entre pares de nodos se obtiene que

$$[v(s)] = [Y_g(s)]^{-1}[f_i(s)] - [Y_g(s)]^{-1}[\phi i(s)] \qquad (13)$$

Si la red no tiene fuentes de transvariable, entonces las transvariables entre pares de nodos son una combinación lineal de las fuentes de pervariable y la matriz $[Y_g(s)]^{-1}$ contiene las funciones de transferencia entre cada una de las transvariables y las fuentes.

En forma similar, en (12) las pervariables por las cuerdas serían

$$[f(s)] = [Z_g(s)]^{-1}[v_i(s)] - [Z_g(s)]^{-1}[\phi i(s)] \qquad (14)$$

La obtención de las funciones de transferencia en frecuencia para analizar la respuesta del sistema a entradas periódicas (como es el caso del análisis de los sistemas mecánicos vibratorios o los circuitos eléctricos de corriente alterna), es inmediata sustituyendo en (13) o (14) "s" por "jw".

Cuando la complejidad del modelo obtenido por los métodos anteriores hace imposible una solución analítica, deseándose una representación matemática que permita emplear técnicas sistemáticas de solución o una solución por simulación digital, es conveniente desarrollar el modelo en variables de estado.

Modelos en variables de estado

La formulación en variables de estado permitirá emplear el álgebra matricial para la solución analítica del modelo y es apropiada también para la solución con un computador tanto analógico como digital.

Se mencionó anteriormente que los elementos almacenadores de energía tienen una causalidad natural integral, y que las variables de estado asociadas a los capacitores son las transvariables y a los inductores las pervariables. El número de variables de estado necesarias para modelar la red está relacionado, entonces, con el número de almacenadores de energía que tenga el sistema, siendo el número mínimo necesario igual al número de almacenadores de energía independientes existentes.

Dibujada la gráfica de la red se escoge un árbol que contenga, en sus ramas, a todos los lados correspondientes a los capacitores generalizados, pero ningún lado correspondiente a los inductores generalizados. Se asignan las variables de estado a las transvariables entre nodos de los capacitores generalizados en las ramas del árbol y a las pervariables por las inductancias generalizadas en las cuerdas. Aplicando la "Ley de incidencia de las pervariables", se escriben las ecuaciones de las transvariables entre pares de nodos de los capacitores generalizados. Si es necesario deben manipularse las ecuaciones de manera que solamente contengan las variables de estado seleccionadas y las entradas. Aplicando la "Ley de contorno de las transvariables", se escriben las ecuaciones de las pervariables por las cuerdas correspondientes a los inductores y si es necesario se manipulan las ecuaciones como se mencionó anteriormente. Las ecuaciones se transforman hasta que puedan expresarse como

$$p\,[x] = [A][x] + [B][u] \qquad (15)$$

en donde [x] es el vector de estado (transvariables y pervariables) y [u] el vector de entradas (fuentes). Si las variables de interés o variables de salida [y] no coinciden con alguna de las pervaribles o transvariables de estado, deben poderse escribir como una combinación lineal de éstas y de las entradas, entonces

$$[y] = [C][x] + [D][u] \tag{16}$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es bien conocida y está dada por

$$[x(t)] = [\varnothing(t, t_0)]\,[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t} [\varnothing(t-\tau)]\,[B]\,[u(\tau)]\,d(\tau)) \tag{17.1}$$

$$[Y(t)] = [C]\,[\varnothing(t, t_0)]\,[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t} [C]\,[\varnothing(t, t_0)]\,[B]\,[u(\tau]\,d\tau) + [D]\,[u(t) \tag{17.2}$$

para cualquier [u(t)] y [x(t_o)] y en donde la matriz de transición de estados [ϕ(t)] está dada por

$$[\phi(t)] = [\,L^{-1}\{\,(\,s[I] - [A])^{-1}\,\}\,] \tag{18}$$

Cuando la red es sencilla, las ecuaciones de estado se pueden escribir directamente por inspección, asignando los estados como se explic anteriormente, obteniendo la expresión de la pervariables por cada capacitor generalizado e función solamente de los estados asignados y d las entradas, e igualándolas al producto de s admitancia por su transvariable (C_i p v_i) y la ex presión de las transvariables entre el par de nodo de cada inductor generalizado en función sola mente de los estados asignados y de las entrada igualándolas posteteriormente al producto de s impedancia por su pervariable (L_j p f_j); se obti nen las variables de interes o varibles de salida e función de los estados y de las entradas; se ord nan las ecuaciones y se escriben en la forma m tricial dada por [15] y [16].

PROPIEDADES DE LA RED GENERALIZAD

- La Red Generalizada es lineal y para su análi se puede emplear la superposición, encontrar r des equivalentes, aplicar el teorema de Theveni el de Norton, el de Tellegen o el de reciprocida

CONCLUSIONES

La utilización del concepto de Red General zada permite sistematizar el análisis de sistem diferentes, permitiendo abstraerse del medio f rico del sistema y el uso de un único conjunto d herramientas para el análisis de, por ejempl sistemas mecánicos, eléctricos, fluídicos y térm cos. En el *Apéndice B* se presenta un ejemp ilustrativo de su uso.

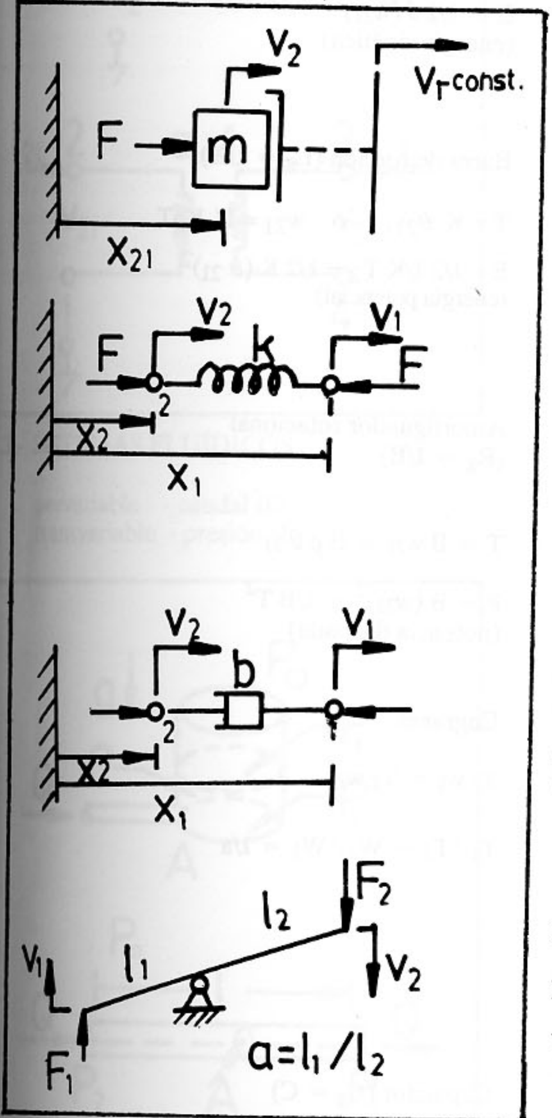
APENDICE A

Relaciones entre los elementos de los sistemas energéticos y los elementos de la red generalizada[5],[6]. Se presentan las relaciones costitutivas de diferentes sistemas físicos, en forma tal que su relación con los elementos generalizados resulte evidente.

1.- Sistemas mecánicos

1.1- ELEMENTOS MECÁNICOS EN TRASLACIÓN

pervariable - fuerza (F)
transvariable - velocidad (v)



Masa ($C_g = m$)

$F = m\,p\,v_{21} = m\,p^2\,x_{21}$
$E = 1/2\,m\,(v_{21})^2$
(energía cinética)

Resorte ($L_g = 1/k$)

$F = k\,x_{21}$, o $v_{21} = 1/k\,p\,F$

$E = 1/2\,k\,(x_{21})^2 = 1/2\,1/k\,F^2$
(energía potencial)

Amortiguador ($R_g = 1/b$)

$F = b\,v_{21} = b\,p\,x_{21}$

$P = b\,(v_{21})^2 = 1/b\,F^2$
(potencia disipada)

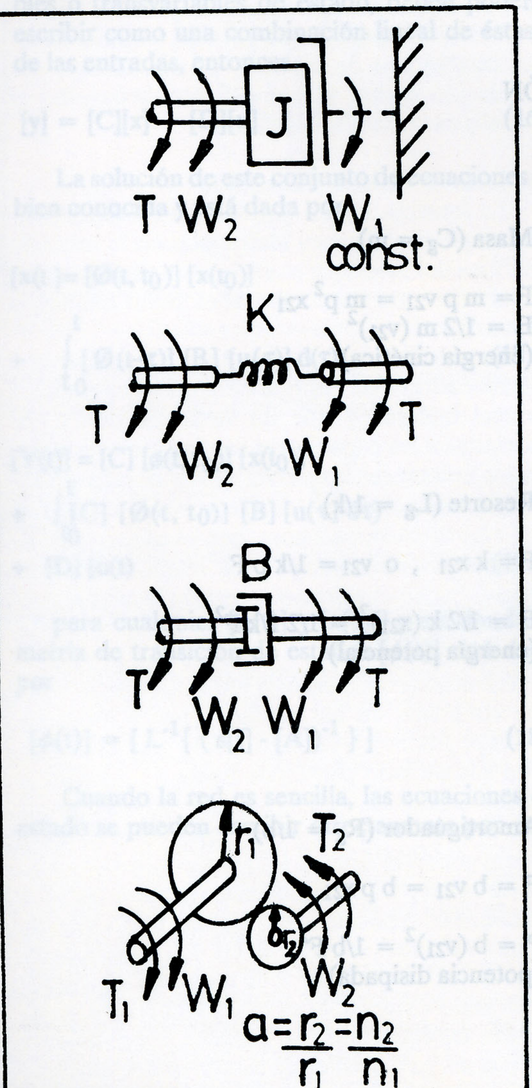
Palanca

$F_1\,l_1 = F_2\,l_2$

$v_2 / v_1 = F_1 / F_2 = l_2 / l_1 = 1 / a$

1.2- ELEMENTOS MECANICOS EN ROTACION

pervariable - torque (T)
transvariable velocidad angular (w)



Volante, inercia ($C_g = J$)

$T = J\,p\,w_{21} = J\,p^2\ \theta 21$

$E = 1/2\,J\,(w_{21})^2$
(energía cinética)

Barra de torción ($L_g = 1/K$)

$T = K\ \theta_{21}$, o $w_{21} = 1/\ KpT$

$E = 1/2\ 1/K\ T_2 = 1/2\ K\ (\theta\ _{21})^2$
(energía potencial)

Amortiguador rotacional
($R_g = 1/B$)

$T = B\,w_{21} = B\,p\,\theta\ _{21}$

$P = B\ (w_{21})^2 = 1/B\ T^2$
(potencia disipada)

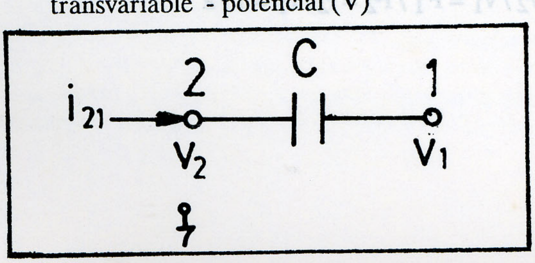
Engranes

$T_1\,w_1 = T_2\,w_2$

$T_1 / T_2 = W_2 / W_1 = 1/a$

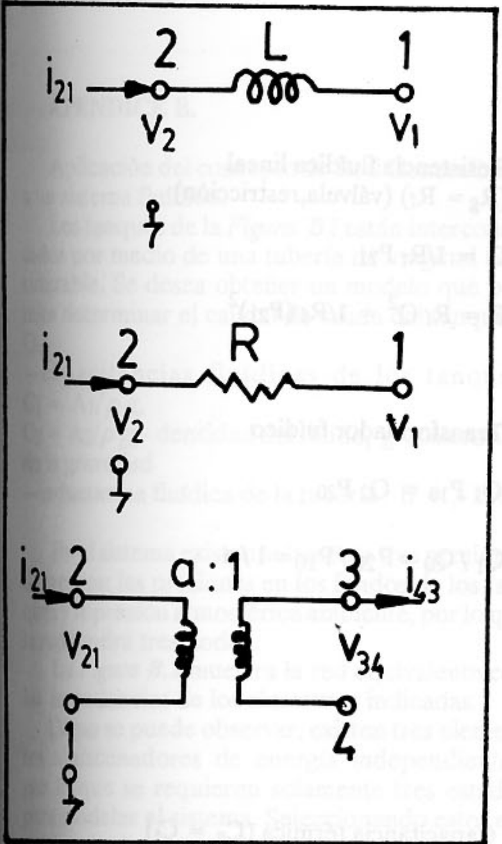
2.- SISTEMAS ELÉCTRICOS

pervariable - corriente (i)
transvariable - potencial (V)



Capacitor ($C_g = C$)

$i_{21} = C\,p\,V_{21}$
$E = 1/2\,C\,(V_{21})^2$
(energía de campo eléctrico)



Inductor (L_g = L)

V_{21} = L p i_{21}

E = 1/2 L $(i_{21})^2$
(energía de campo magnético)

Resistencia (R_g = R)

i_{21} = 1/R V_{21}

P = R i_{21}^2 = 1/R $(V_{21})^2$
(potencia disipada)

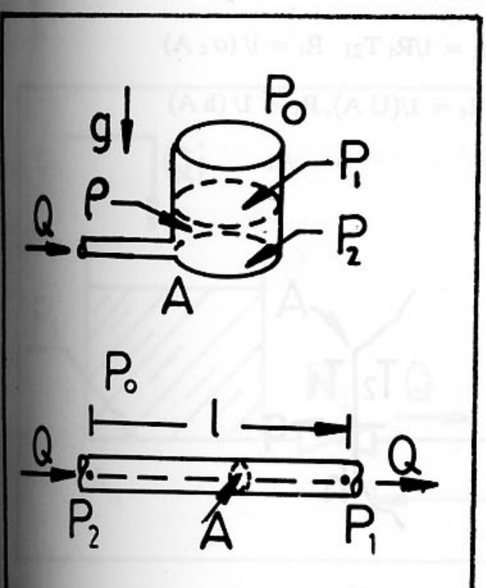
Transformador ideal

$V_{21}\, i_{21} = V_{34}\, i_{43}$

$i_{21} / i_{43} = V_{34} / V_{21} = 1 / a$

3.- SISTEMAS FLUÍDICOS

pervariable - caudal (Q)
transvariable - presión (P)



Capacitancia fluídica (C_g = C_f)
(tanque)

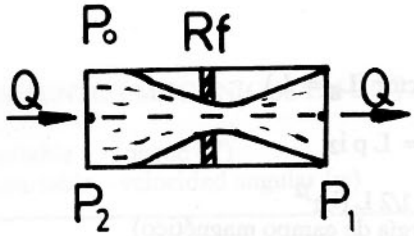
Q = C_f p P_{21}, C_f = A/(ρg)

E = 1/2 C_f $(P_{21})^2$

Inductancia fluídica (L_g = I_f)
(tubería larga)

P_{21} = I_f p Q, I_f = ρ l/A

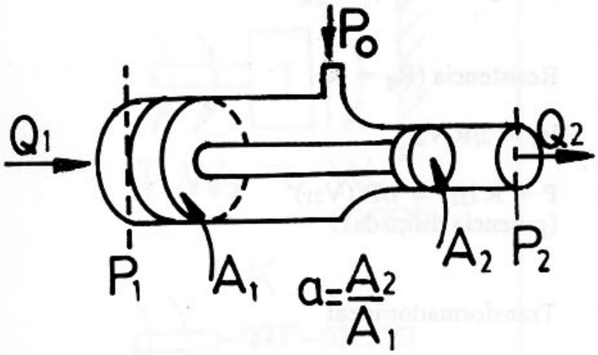
E = 1/2 I_f Q^2



Resistencia fluídica lineal
($R_g = R_f$) (válvula,restricción)

$Q = 1/R_f\, P_{21}$

$P = R_f\, Q^2 = 1/R_f\, (P_{21})^2$



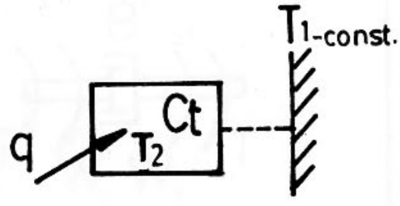
Transformador fuídico

$Q_1\, P_{10} = Q_2\, P_{20}$

$Q_1 / Q_0 = P_{20} / P_{10} = 1 / a$

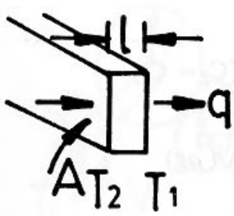
4.- SISTEMAS TÉRMICOS

pervariable - flujo de calor (q)
transvariable - temperatura (T)



Capacitancia térmica ($C_g = C_t$)

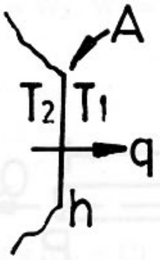
$q = C_t\, p\, T_{21} \quad C_t = C_p\, m$



Resistencia térmica ($R_g = R_t$)

$q = 1/R_t\, T_{21} \quad R_t = l/(\sigma_c\, A)$

$R_t = 1/(U\, A), R_t = 1/(h\, A)$



APENDICE B.

Aplicación del concepto de Red Generalizada a un sistema fluídico.

Los tanques de la *Figura. B1* están interconectados por medio de una tubería de longitud considerable. Se desea obtener un modelo que permita determinar el caudal de salida del tanque 2, Q_o.

- capacitancias fluídicas de los tanques: $C_1 = A_1/\rho\, g$, $C_2 = A_2/\rho\, g$; - densidad del fluido, g aceleración de la gravedad
- inductancia fluídica de la tubería : $I_f = \rho\, L/A_o$

En el sistema existen solamente tres presiones diferentes: las presiones en los fondos de los tanques y la presión atmosférica ambiente, por lo que la red tendrá tres nodos.

La *Figura B.2* muestra la red equivalente con las impedancias de los elementos indicadas.

Como se puede observar, existen tres elementos almacenadores de energía independientes, por lo que se requieren solamente tres estados para modelar el sistema. Seleccionando estos estados como las transvariables a través de los capacitores y la pervariable por el inductor, P_1', P_2' y Q donde $P_1' = P_1 - P_0$, $P_2' = P_2 - P_0$. (P' - presión relativa), por inspección se obtienen las siguientes ecuaciones

Tanque 1 $\quad C_1\, p\, P_1' = Q_i - Q$

Tanque 2 $\quad C_2\, p\, P_2' = Q - P_2/R_2$

Tubería larga $\quad I_f\, p\, Q = P_{1'} - P_{2'} - R_1\, Q$

Caudal de salida $\quad Q_o = P_2'/R_2$

definiendo $u \cong Q_i$, $y \cong Q_o$, $[x]^T \cong [P_{1'}\ P_{2'}\ Q]$, el modelo se puede reescribir como

$$p\,[x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/C_1 \\ 0 & -1/R_2C_2 & 1/C_2 \\ 1/I_f & -1/I_f & -R_1/I_f \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\,0\ \ 1/R_2\ \ 0\,]\,[x]$$

Dado un u(t) ($Q_i(t)$) y conocidos los parámetros del sistema, la solución de este modelo es trivial y se obtendría y(t) ($Q_o(t)$).

Si lo que interesa son los niveles en los tanques ($y_1' \cong H_1$, $y_2' \cong H_2$), entonces como $P_1' = \rho g\, H_1$ y $P_2' = \rho\, g\, H2$

$$[y'] = \begin{bmatrix} 1/\rho g & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho g & 0 \end{bmatrix} [x]$$

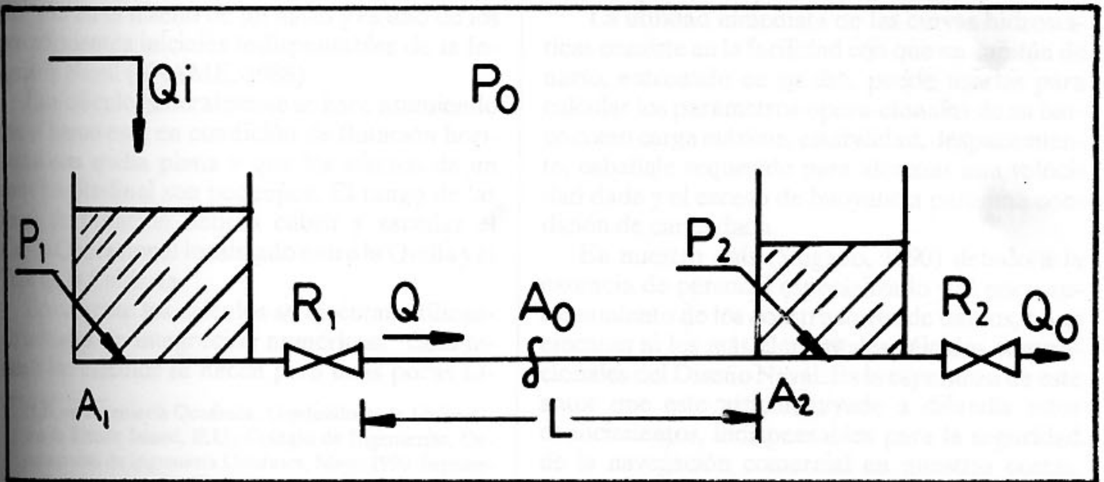


FIGURA No. B1. Sistema fluídico

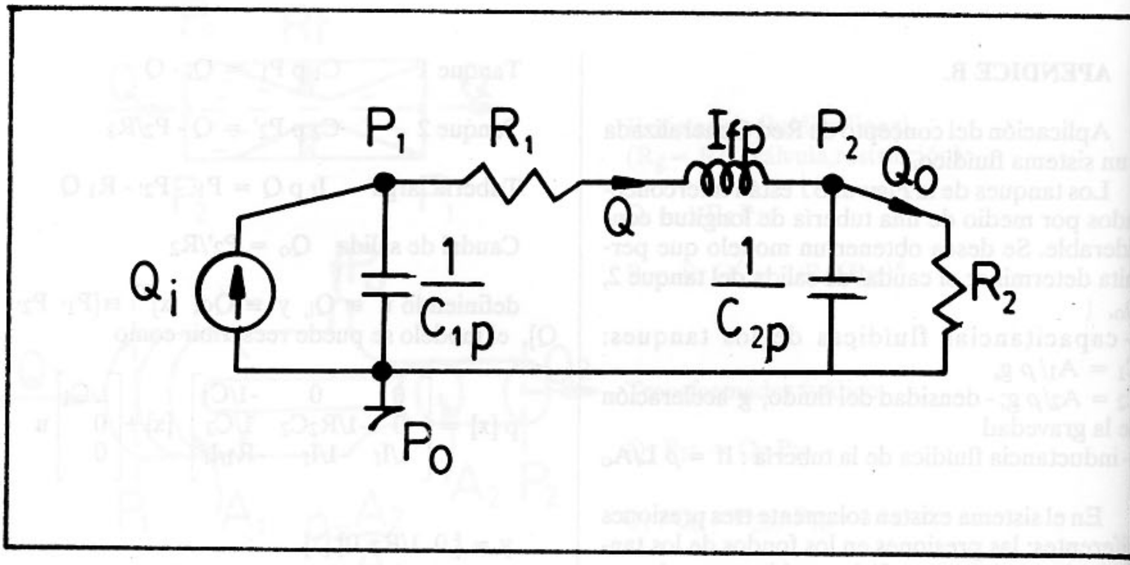


FIGURA No. B2. Red generalizada equivalente

BIBLIOGRAFIA

1. Alfaro, V. M. "La Red Generalizada, Teoremas y propiedades", Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Panamá, 1986.
2. Alfaro, V. M. "Sistematización del Análisis de la Red Generalizada" Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, 1989.
3. Paynter, H. M. "Analysis and Design of Engineering Systems", MIT Press, 1961.
4. Orozco, R. "Introduction al Análisis de Sistemas", Universidad de Costa Rica, 1975
5. Shearer, J. L., A. T. Murphy y H. H. Richarson "Introducción to System Dynamics", Addison-Wesley, 1967.
6. Takahashi, Y., M. J. Rabins y D. M. Auslander "Control and Dynamic Systems", Addison-Wesley, 1970.