

# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
JULIO/DICIEMBRE 1991 VOLUMEN 1 Nº2



INGENIERIA  
1991

# AJUSTANDO UN MODELO DE POLOS Y CEROS A UN CONJUNTO ARBITRARIO DE MUESTRAS EN FRECUENCIA

*Ing. Jorge Arturo Romero Chacón, M.Sc. \**

## Resumen

En aplicaciones de Ingeniería, es conveniente contar con métodos para aproximar la función de transferencia de un sistema, cuando ésta es conocida en un conjunto de frecuencias. El objetivo de este artículo es presentar una técnica para ajustar un modelo discreto de polos y ceros  $H(z)$  a un conjunto de muestras complejas en frecuencia  $Y(u_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, t$ . Lo novedoso de este método es el empleo de un conjunto de restricciones homogéneas introducidas por el empleo de diferencias divididas. Se proporciona como ejemplos algunos diseños de filtros y un problema de aproximación.

## Summary

In Engineering applications, it is convenient to have methods to approximate the transfer function of a system, when it is known for a set of frequencies. The objective of this article is to present a technique to fit a discrete time pole-zero filter model  $H(z)$  to arbitrary complex-valued frequency samples  $Y(u_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, t$ . The novelty of this method is the use of a set of homogeneous constraints introduced by the application of divided differences. We provide simulation results involving an approximation problem, and several filter design applications.

## 1. INTRODUCCION

Se va a derivar un algoritmo que puede emplearse en ajustar un modelo de polos y ceros a un conjunto arbitrario de muestras de respuesta de frecuencia. Por la función de transferencia  $H(z)$  de un modelo de polos y ceros se entenderá

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m}{1 + b_1z + \dots + b_nz^n} \quad (1)$$

con  $m < n$ . Nótese que se trabajará con potencias positivas de  $z$ .  $Y(u_i)$  denotará los datos de la respuesta de frecuencia compleja conocidos, y  $u_i$  las frecuencias complejas con magnitud unidad, es decir,  $u_i = 1$  para todo  $i$ . El criterio de error de modelado que se desea minimizar con respecto a las incógnitas  $(a_0, a_1, \dots, b_1, \dots, b_n)$  es entonces

$$\left| e(a,b) \right| = \left[ \sum_{i=0}^t |Y(u_i) - H(u_i)|^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

$$\left| e(a,b) \right| = \left[ \sum_{i=0}^t \left| Y(u_i) \frac{A(u_i)}{B(u_i)} \right|^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

donde  $a$  y  $b$  denotan los vectores de los coeficientes del numerador y del denominador, respectivamente. Se cuenta con  $t + 1$  muestras.

El problema que se encara al llegar a este punto es la carencia de linealidad de la ecuación (2). Se ve de (3) que se tiene  $m + 1$  incógnitas en el polinomio del numerador de  $H(z)$ , y  $n$  incógnitas en su denominador; por otro lado, no se puede linealizar la ecuación sin cambiar la definición del error que se usa. Lo que se necesita es una técnica matemática que precisamente ayude a linealizar (2) sin alterar la esencia de la definición original del error. Las diferencias divididas es un concepto que se ajusta a nuestras necesidades. Se puede acudir a (7) para consultar definición y propiedades de las diferencias divididas.

## 2. ELIMINACION DEL POLINOMIO DEL NUMERADOR USANDO DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Evalúese ahora  $H(z)$  en  $t + 1$  puntos, que corresponden al número de muestras con que se cuentan.

\*. Escuela de Ingeniería Eléctrica Universidad de Costa Rica

$$H(u_i) = \frac{A(u_i)}{B(u_i)} \quad (4)$$

con  $i = 0, 1, \dots, t$ . Lo que es equivalente a

$$H(u_i) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m}{1 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n} \quad (5)$$

$z = u_i$

Supóngase que el número de muestras satisface la desigualdad  $t + 1 > m + n$ . Si se calcula la diferencia dividida de orden  $t$  para el polinomio  $A(z)$ , tal cantidad iguala cero porque  $t > m$ ;  $A(z)$  es un polinomio de orden  $m$ . Por tanto, si se expresa este hecho en forma matemática, se tiene lo siguiente:

$$A[u_0, u_1, \dots, u_t] = \sum_{i=0}^t \frac{A(u_i)}{\prod_{k=0, k \neq i}^t (u_i - u_k)} \quad (6)$$

$$= 0 \quad (7)$$

Escribiendo  $A(z) = H(z)B(z)$  en términos de la función de transferencia y del polinomio del denominador,

$$\sum_{i=0}^t \frac{H(u_i)B(u_i)}{\prod_{k=0, k \neq i}^t (u_i - u_k)} = 0 \quad (8)$$

Considérese ahora el polinomio  $zA(z)$ . Es un polinomio de orden  $(m + 1)$ -ésimo, y su diferencia dividida de orden  $t$  es cero. Para los polinomios  $z^2A(z)$ ,  $z^3A(z)$ , ...,  $z^{t-n}A(z)$  con órdenes  $m + 2$ ,  $m + 3$ , ...,  $m + t - n$  respectivamente, todas sus diferencias divididas de orden  $t$  son cero. De modo que se puede extender el resultado de la ecuación (8) para los polinomios  $A(z)$ ,  $zA(z)$ ,  $z^2A(z)$ , ...,  $z^{t-n}A(z)$  escribiendo, con  $j = 0, 1, \dots, t - n$  y  $B(u_i) = 1 + b_1u_i + b_2u_i^2 + \dots + b_nu_i^n$

$$\sum_{i=0}^t \frac{H(u_i)B(u_i)u_i^j}{\prod_{k=0, k \neq i}^t (u_i - u_k)} = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^t \frac{H(u_i)[b_nu_i^{n+j} + b_{n-1}u_i^{n-1+j} + \dots + u_i^j]}{\prod_{k=0, k \neq i}^t (u_i - u_k)} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{l=0}^n \sum_{i=0}^t \frac{H(u_i)u_i^{l+j}}{\prod_{k=0, k \neq i}^t (u_i - u_k)} b_l = 0 \quad (11)$$

Si se escribe en forma matricial la última expresión, se tiene,

$$BUDh = 0 \quad (12)$$

donde las matrices  $B$ ,  $U$  y  $D$  se definen abajo.

$$B = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_n & \dots & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & * & * & * & * & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n-1} & \dots & * & b_2 & b_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_0^t & u_1^t & \dots & u_t^t \\ u_0^{t-1} & u_1^{t-1} & \dots & u_t^{t-1} \\ * & * & \dots & * \\ u_0^n & u_1^n & \dots & u_t^n \\ u_0^{n-1} & u_1^{n-1} & \dots & u_t^{n-1} \\ * & * & \dots & * \\ u_0 & u_1 & \dots & u_t \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$D$  es una matriz diagonal cuyos elementos están definidos por la ecuación:

$$[D]_{kk} = \frac{1}{t \sum_{i=0, i \neq k}^t \pi(u_k - u_i)} \quad (15)$$

donde  $k = 0, 1, \dots, t$ .  $h$  es el vector  $[H(u_0), H(u_1), \dots, H(u_t)]^T$  y las dimensiones de las matrices  $B$ ,  $U$  y  $D$  son respectivamente,  $(t+1-n)x(t+1)$ ,  $(t+1)x(t+1)$  y  $(t+1)x(t+1)$ . Véase que se ha eliminado el polinomio del numerador usando propiedades de diferencias divididas. El resultado es un sistema de ecuaciones homogéneas, las que pueden usarse como condiciones restrictivas en la minimización del error definido en (2). La linealización se ha conseguido al "aniquilar" el polinomio del numerador con el empleo de diferencias divididas.

### 3. MINIMIZACION DEL ERROR USANDO UN SISTEMA DE ECUACIONES HOMOGENEAS COMO CONDICIONES RESTRICTIVAS

Como la ecuación (12) ha de satisfacerse, se puede considerar junto con (2) para formular un problema de minimización de error usando multiplicadores de Lagrange, como sigue:

$$\|e(a,b)\|^2 = \|y - h\|^2 + \mu^T BUDh \quad (16)$$

donde  $\mu^T$  es el vector de multiplicadores de Lagrange  $[\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{1n}]$  e  $y$  es el vector de muestras (datos conocidos). Sea  $BUD = C$ . Expandiendo la ecuación (16),

$$\begin{aligned} \|e(a,b)\|^2 &= \|y - h\|^2 + \mu^T Ch \\ &= (y - h)^Y (y - h) + \mu^T Ch \\ &= (y^Y - h^Y)(y - h) + \mu^T Ch \\ &= y^Y y - y^Y h - h^Y y + h^Y h + TTC h \quad (17) \end{aligned}$$

" $^Y$ " denota transpuesta conjugada. No se puede diferenciar directamente (17) para obtener el valor de  $h$  que minimiza (16), porque es un vector con entradas complejas. Para superar esta inconveniencia, sea  $h = h_r + jh_i$ ,  $\mu = \mu_r + j\mu_i$ . Se puede diferenciar ahora con respecto a  $h_r$  y  $h_i$ , e igualar ambos resultados a cero.

$$\frac{\delta \|e(a,b)\|^2}{\delta h_r} = -y^Y - y^T + 2h_r^T + \mu^T C \quad (18)$$

$$= -2y_r^T + 2h_r^T + \mu^T C \quad (19)$$

$$\frac{\delta \|e(a,b)\|^2}{\delta h_i} = -jy^Y + jy^T + 2h_i^T + j\mu^T C \quad (20)$$

$$= -2y_i^T + 2h_i^T + j\mu^T C \quad (21)$$

El símbolo " $\delta$ " se usa para indicar el operador de diferenciación parcial. Después de multiplicar (21) por  $-j$ , y de sumar el par de ecuaciones así obtenidas de las diferenciaciones, se tiene lo siguiente:

$$-2y_r^T + 2jy_i^T + 2h_r^T - 2jh_i^T + 2\mu^T C = 0$$

La última expresión puede ser acomodada de las dos formas siguientes:

$$y^Y - h^Y = \mu^T C \quad (22)$$

$$y - h = C^{**} \mu \quad (23)$$

El símbolo " $^{**}$ " denota conjugado complejo. Usando ahora  $Ch = 0$ , que se obtiene al diferenciar (16) con respecto a las partes real e imaginaria de  $\mu$ ,

$$[CC^Y]^{-1} C y = \mu^* \quad (24)$$

$$y^Y C^Y [CC^Y]^{-1} = \mu^T \quad (25)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en (16), y usando (12) otra vez,

$$\|e(a,b)\|_{\min}^2 = (y^Y - h^Y)(y - h) \quad (26)$$

$$= (\mu^T C)(C^Y \mu^*) \quad (27)$$

$$= \mu^T C C^Y \{ [CC^Y]^{-1} C y \} \quad (28)$$

$$= \mu^T C y \quad (29)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|e(a,b)\|_{\min}^2 &= y^Y C^Y [C C^Y]^{-1} C y \\ &= y^Y (BUD)^Y [BUD(BUD)^Y]^{-1} BUD y \quad (30) \\ &= \|e(b)\|_{\min}^2 \end{aligned}$$

De la expresión del error se ha eliminado el vector  $a$  porque los coeficientes del polinomio del numerador no están directamente involucrados en (30). El problema de minimización del error que se ha descrito otra vez empleando multiplicadores de Lagrange permanece no-lineal, pero se ha podido simplificar la expresión de modo que se considere sólo uno de los dos conjuntos de coeficientes involucrados en (2) mediante la cancelación de la dependencia respecto a  $a$ . La expresión del error mínimo se puede usar para definir un algoritmo para calcular los coeficientes del polinomio del denominador. Esto es materia de la próxima sección.

#### 4. UN ALGORITMO PARA EL AJUSTE DE UN MODELO DE POLOS Y CEROS PARA MUESTRAS EN FRECUENCIA ARBITRARIAS

##### 4.1 Obtención de un conjunto de valores iniciales para los coeficientes del polinomio del denominador

Antes de modificar ligeramente la ecuación (30) para hacerla adecuada para el cálculo algorítmico de los coeficientes del denominador, se obtendrá un valor inicial para  $h = [1, b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  usando el siguiente procedimiento. Hágase en (30)  $(BUD)(BUD)^Y = I$  (matriz unitaria),  $UDy$  e identifiqúese por  $\Omega$  el arreglo hecho:

$$\Omega = y^Y (BUD)^Y (I) BUD y \quad (31)$$

$$= y^Y D^Y U^Y B^Y BUD y \quad (32)$$

$$= \Gamma^Y B^Y B \Gamma \quad (33)$$

$$= h^Y Z^Y Z h \quad (34)$$

es un vector de  $t+1$  dimensiones.  $Z$  está definida por  $B\Gamma = Zh$ . Se puede reconocer en la última igualdad una "razón de Rayleigh" o "coeficiente de Rayleigh", cuyo denominador viene dado por  $h^Y Z h = 1$ . Obsérvese además que  $Z^Y Z$  es hermitiana. Ambas particularidades implican que

el principio de Rayleigh es aplicable en este caso, el cual enuncia, que al variar  $h$ , la cantidad

$$\Omega = h^Y Z^Y Z h \quad (35)$$

es estacionaria cuando  $h$  es un autovector y el autovalor correspondiente de  $Z^Y Z$ . El máximo y el mínimo de la cantidad corresponden a los autovalores mayor y menor, respectivamente. Si se minimiza tal razón de Rayleigh con la condición restrictiva  $h^Y Z h = 1$ ,  $h$  igualará el autovector dado por el autovalor más pequeño de  $Z^Y Z$ . De esta manera se obtiene un valor inicial para  $h$ .

##### 4.2 Cálculo de los coeficientes del denominador usando iteraciones sucesivas

Con el valor inicial de  $h$ , que se denotará por  $h_0$ , se crea una matriz  $B_0$  (del tipo Toeplitz) de acuerdo a la ecuación (13), y se reescribe  $\Omega$  para expresar un procedimiento iterativo, con el uso de  $k$  y  $k+1$  para distinguir entre pasos sucesivos.

$$\begin{aligned} \Omega &= y^Y (B_{k+1}UD)^Y [B_kUD(B_kUD)^Y]^{-1} B_{k+1}UD y \\ &= (b_{k+1})^Y Z^Y A Z b_{k+1} \quad (36) \end{aligned}$$

con  $k = 0, 1, \dots$  y  $A = [B_kUD(B_kUD)^Y]^{-1}$ . Las iteraciones subsiguientes proceden de la misma forma: se calcula el autovalor mínimo de  $Z^Y A Z$  y  $h_{k+1}$  será su correspondiente autovector; posteriormente, siguiendo a (13), se forma la nueva matriz  $B_k$  y se sustituye en . El procedimiento se repite hasta alcanzar la convergencia. Con cada iteración se disminuye el error, y al mismo tiempo se está obteniendo los coeficientes del denominador. Los coeficientes obtenidos con (36) son complejos.

##### 4.3 Cálculo de los coeficientes del polinomio del numerador mediante mínimos cuadrados

Después de obtener el conjunto deseado de coeficientes del denominador, sigue el cálculo de los coeficientes del numerador. Estos se obtienen usando la solución de mínimos cuadrados al problema de la minimización de

$$\|e(a)\|^2 = \sum_{k=0}^t \left[ Y(u_k) - \frac{A(u_k)}{B(u_k)} \right]^2 \quad (37)$$

con respecto a  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T$ . La solución está dada por

$$\mathbf{a} = [\theta^X \theta]^{-1} \theta^X \mathbf{y} \quad (38)$$

donde se define como la multiplicación de una matriz diagonal, calculada usando el polinomio del denominador obtenido por el procedimiento iterativo, y una matriz  $\Phi$  (del tipo Vandermonde):

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^m \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^m \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_t & u_t^2 & \dots & u_t^m \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[\Pi]_{ii} = \frac{1}{B(u_i)} \quad (40)$$

con  $i = 0, 1, \dots, t$ .

### 5. MEJORAMIENTO EN LA CONVERGENCIA DEL ALGORITMO EMPLEANDO LA TECNICA DE OPTIMIZACION DE NEWTON-RAPHSON

Cualesquiera hayan sido los resultados que se hayan alcanzado para los coeficientes del numerador y del denominador, no hay plena seguridad de que el error sea el mínimo alcanzable. Se puede usar los valores de los coeficientes como condiciones iniciales para aplicar una técnica de optimización, la cual mejore la aproximación al punto mínimo. En vez de mostrar interés únicamente en el aumento de la rapidez de convergencia que su empleo pudiera traer, se usará el algoritmo de Newton-Raphson para mejorar la convergencia al mínimo global o local que el método ofrece. Cuando se usa este algoritmo, no se puede garantizar que se llegará al mínimo global, pero empleando los valores dados por el algoritmo anterior, se podría llegar a un valor significativo. Para principiar, y a fin de evitar la diferenciación compleja, se redefine  $\mathbf{h}$  de tal forma que sus primeros  $n$  elementos son partes reales de coeficientes, y su segunda mitad son las partes imaginarias:

$$\mathbf{b} = [\text{Re}(b_1), \dots, \text{Re}(b_n), \text{Im}(b_1), \dots, \text{Im}(b_n)]^T \quad (41)$$

Sea  $T(k) = (B_k U D)^X$ . La matriz generalizada inversa de  $T(k)$  está dada por  $T(k)^+ \{T(k)^X T(k)\}^{-1} T(k)^X$ . El subíndice  $k$  denota la itera-

ción  $k$ -ésima de Newton-Raphson. Se reescribe (30) como

$$\|e(\mathbf{b})\|_{\min}^2 = \mathbf{y}^X T(k) T(k)^+ \mathbf{y} \quad (42)$$

$$= \mathbf{y}^X P_{T(k)} \mathbf{y} \quad (43)$$

donde  $P_{T(k)} = T(k) T(k)^+$  es una proyección lineal ortogonal sobre el espacio lineal originado de las columnas de la matriz  $T(k)$ . Se define también  $P_{T(k)}^\perp = I - P_{T(k)}$  como la proyección lineal en el complemento ortogonal del espacio de las columnas de  $T(k)$ . Las dos definiciones siguientes atañen al espacio lineal originado de las filas de la matriz  $T(k)$ , y poseen significados análogos a los anteriores:

$$T(k) P = T(k)^+ T(k) \quad (44)$$

$$T(k) P^\perp = I - T(k)^+ T(k) \quad (45)$$

$$= I - T(k) P \quad (46)$$

Una iteración Newton-Raphson puede escribirse como

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k - \mathcal{A}E_k^{-1} \heartsuit e(\mathbf{b})_k \quad (47)$$

donde  $\mathcal{A}E_k$  y  $\heartsuit e(\mathbf{b})_k$  denotan el hessiano y el gradiente para la iteración  $k$ -ésima, respectivamente, con respecto a los coeficientes  $\mathbf{h}$ . El componente  $i$ -ésimo del gradiente está dado por

$$[\heartsuit e(\mathbf{b})_k]_i = \mathbf{y}^X D_i P_{T(k)} \mathbf{y} \quad (48)$$

$$= \mathbf{y}^X \{P_{T(k)}^\perp \Gamma_i T(k)^+ + (P_{T(k)}^\perp \Gamma_i T(k)^+)^X\} \mathbf{y}$$

donde

$$\Gamma_i = D_i T(k) \quad (49)$$

$$= D_i (B_k U D)^X \quad (50)$$

$$= D^X U^X (D_i B_k)^X \quad (51)$$

$D_i P_{T(k)}$  denota la derivada de  $P_{T(k)}$  tomada con respecto al  $i$ -ésimo elemento del vector  $\mathbf{h}$ .  $D_i B_k$  denota la derivada tomada con respecto al  $i$ -ésimo elemento en  $\mathbf{h}$ . Nótese que  $\Gamma_i$ , en este caso, es una matriz cuyos elementos no son varia-

bles. Los elementos del hessiano  $\mathcal{A}E_k$  están dados por

$$[\mathcal{A}E_k]_{ij} = \mathcal{Y}^{\mathcal{Y}} \{ -D_i P_{T(k)} \Gamma_j T(k)^+ + (-D_i P_{T(k)} \Gamma_j T(k)^+)^{\mathcal{Y}} + P_{T(k)} \perp \Gamma_j D_i T(k)^+ + (P_{T(k)} \perp \Gamma_j D_i T(k)^+)^{\mathcal{Y}} \} \mathcal{Y} \quad (52)$$

donde  $D_i T(k)^+ = -T(k)^+ \Gamma_i T(k)^+ + T(k)^+ (T(k)^+)^{\mathcal{Y}}$

$$\Gamma_i^{\mathcal{Y}} P_{T(k)} \perp + T(k) P \perp \Gamma_i^{\mathcal{Y}} (T(k)^+)^{\mathcal{Y}} T(k)^+ \quad (53)$$

Para las ecuaciones anteriores,  $i, j=1, 2, \dots, n$ . Se usa las ecuaciones (48) y (52) para realizar las iteraciones Newton-Raphson cuyo uso se mostrará en los ejemplos.

### 6. COMPORTAMIENTO DEL ALGORITMO PARA EL AJUSTE DE UN MODELO DE POLOS Y CEROS A UN CONJUNTO DE MUESTRAS EN FRECUENCIA

#### 6.1 Empleo del algoritmo en un problema de aproximación

Considérese la siguiente función de transferencia de sexto orden:

$$H(z) = (1 + 0,87z)^{-1} \left[ \begin{aligned} &1 / (1 - 0,85e^{j(\pi/4)} z) (1 - 0,85e^{-j(\pi/4)} z) + \\ &1 / (1 - 0,83e^{j(\pi/2)} z) (1 - 0,83e^{-j(\pi/2)} z) + \\ &1 / (1 - 0,8e^{j(3\pi/4)} z) (1 - 0,8e^{-j(3\pi/4)} z) \end{aligned} \right]$$

La magnitud en decibelios para  $H(z)$  se muestra en la *Figura No. 1*, y su diagrama correspondiente de polos y ceros en la *Figura No 2*. Una muestra se denota por el símbolo “\*”; la muestra podría denotar, de acuerdo con la figura, una muestra de entrada o una muestra de salida; en el

primer caso, la muestra pertenece a un conjunto de valores que el algoritmo recibe como entrada. El algoritmo calcula entonces los coeficientes respectivos para un modelo de polos y ceros, y se usa así esta información para definir una función de transferencia de la cual se calcula valores o “muestras” a las mismas frecuencias donde se tiene muestras de entrada. Esto es lo que se denomina aquí una muestra de salida, y que se representa también por un asterisco.

En la *Figura No. 3* se muestra la salida del algoritmo; nótese que prácticamente el algoritmo recupera la función de transferencia. En las *figuras No.1. y No. 3.* se muestra un diagrama continuo, aunque se trabaja a frecuencias discretas,

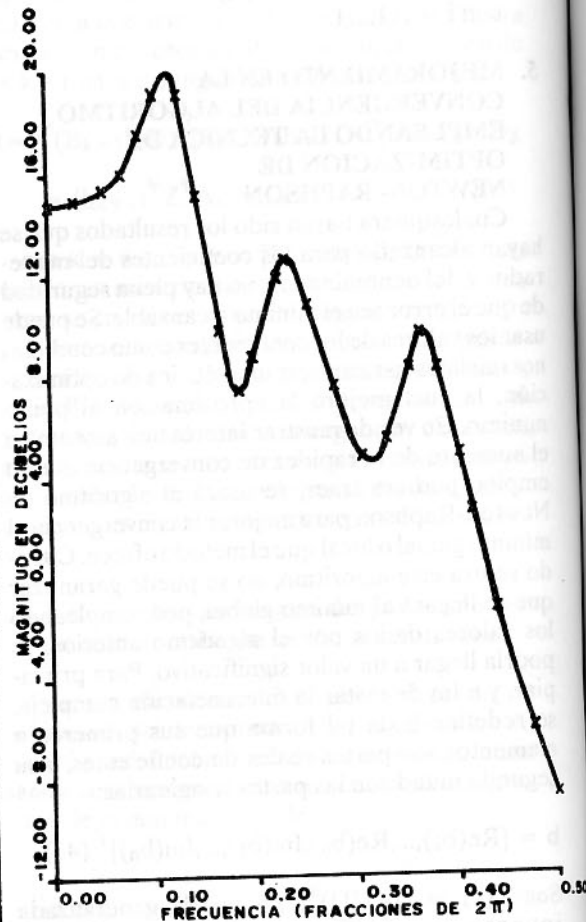


FIGURA No. 1. Gráfico de la magnitud en dB de una función de transferencia de sexto orden,  $H(z)$ .

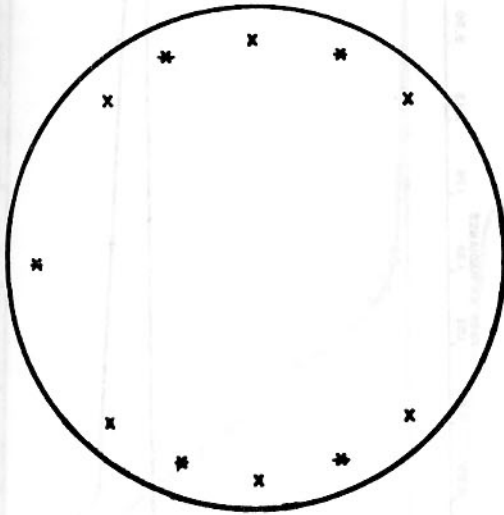


FIGURA No. 2. Diagrama de polos ("x") y ceros ("\*") de la función de transferencia  $H(z)$  de sexto orden.

para dar una idea del comportamiento de la función.

### 6.2 Ejemplos de diseño de filtros digitales

Se presenta ahora un par de ejemplos que se utilizaron para ilustrar el uso del algoritmo en el diseño de filtros digitales. En la *Figura No. 4* se muestra la plantilla de un filtro paso-bajo digital ideal, con frecuencia de corte de banda de paso  $f_p = 0,25$  y frecuencia de corte de banda de rechazo  $f_s = 0,375$ . En un primer caso, a las muestras de la plantilla se les dio una fase de cero, y en el segundo caso, se les dio una fase lineal. La atenuación en la banda de rechazo para el filtro ideal fue de 0,000001. En las *figuras No. 5* y *No. 6* se muestra los resultados para el filtro paso bajo, en cuanto a magnitud en dB y fase; véase cómo en la banda de paso la fase es constante. En las *Figuras No. 7* y *No. 8* se muestra los resultados correspondientes para el filtro paso bajo con fase lineal; otra vez es de notar la forma de la fase, que es lineal en la banda de paso. Es de notar que la atenuación alcanzada para el primer caso fue de 64 dB, y para el segundo, de 51 dB. En ambos casos, se hizo que el algoritmo originara una función de transferencia de orden seis para el diseño

de los filtros. En las *Tablas No. 1* y *No. 2* se muestra los coeficientes del denominador y del numerador, los polos estables e inestables resultantes del diseño, los ceros y el error, este último calculado de acuerdo con la ecuación (2).

En el diseño del filtro digital, como parámetro adicional se puede usar el número de iteraciones, dado que no es cualquier número aleatorio de iteraciones el que proporciona una curva correcta que satisfaga las condiciones, ya sea que estas correspondan a simetría, atenuación u otro factor. Para estos ejemplos, se empleó una combinación de cinco iteraciones del algoritmo original, y tres iteraciones del método de Newton-Raphson.

El algoritmo presentado aquí no garantiza que el diseño final dará una función de transferencia estable; en ambos casos anteriores se obtuvo una función  $H(z)$  inestable.

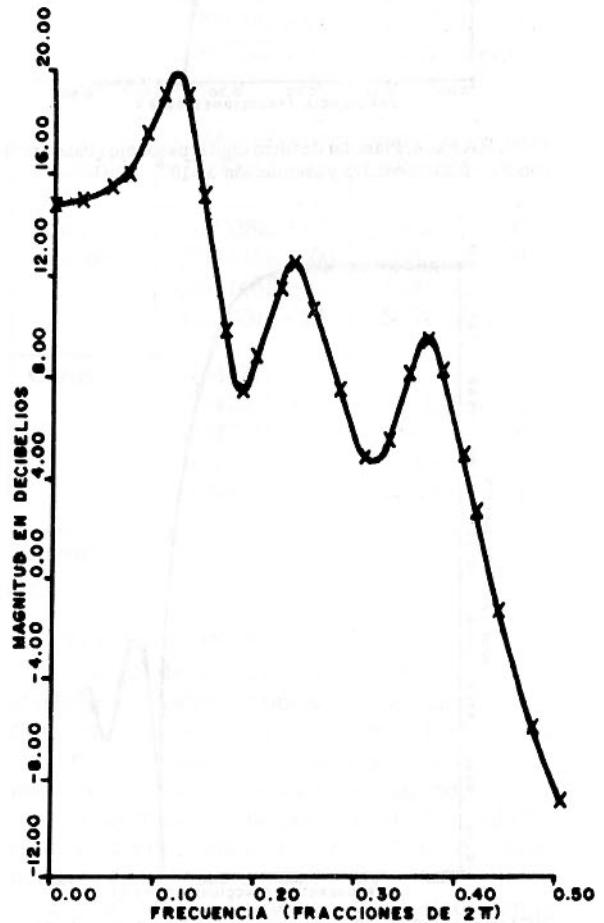


FIGURA No. 3. Aproximación a  $H(z)$  obtenida usando el algoritmo del texto.



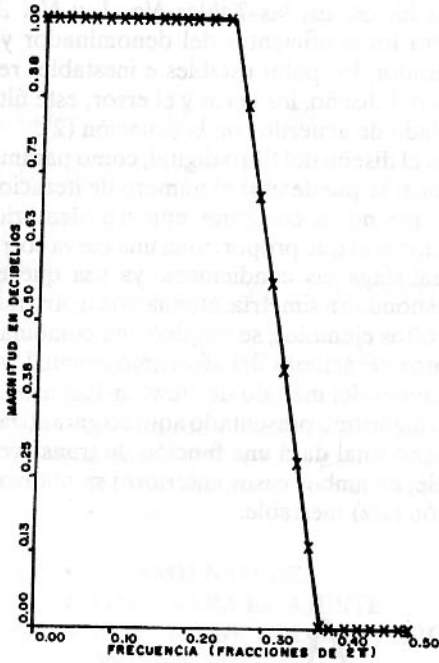


FIGURA No. 4. Plantilla de filtro digital pasabajo (Fase cero) con  $F_p = 0,25$ ,  $f_s = 0,375$  y atenuación de  $10^{-6}$ .

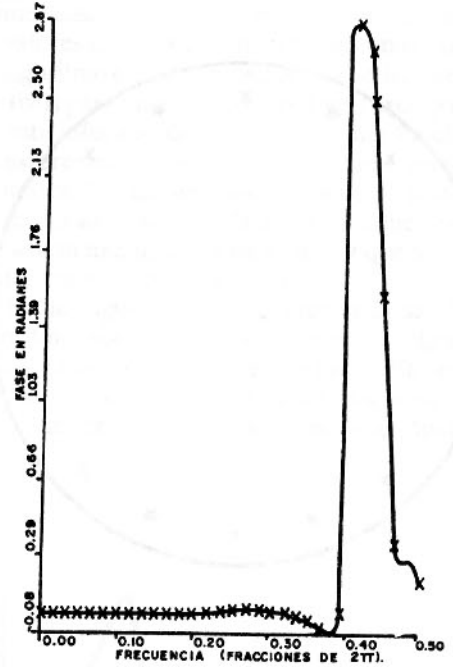


FIGURA No. 6. Gráfico de fase en radianes para el filtro de la Figura No. 5. Las muestras de la plantilla tienen cero radianes de fase.

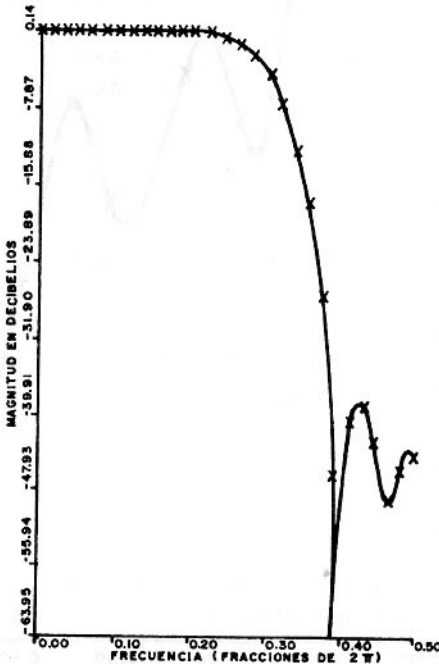


FIGURA No. 5. Gráfico de magnitud en decibelios de filtro digital de sexto orden que corresponde a muestras con fase cero de la plantilla de la figura No. 4.

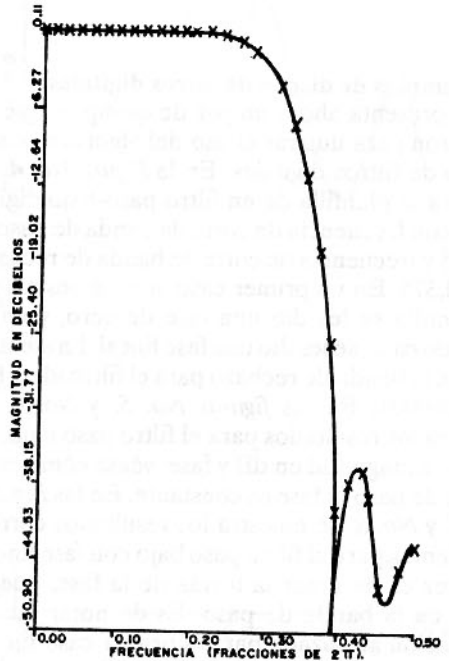


FIGURA No. 7. Gráfico de magnitud en decibelios de filtro digital de sexto orden que corresponde a muestras con fase lineal de la plantilla de la Figura No. 4.

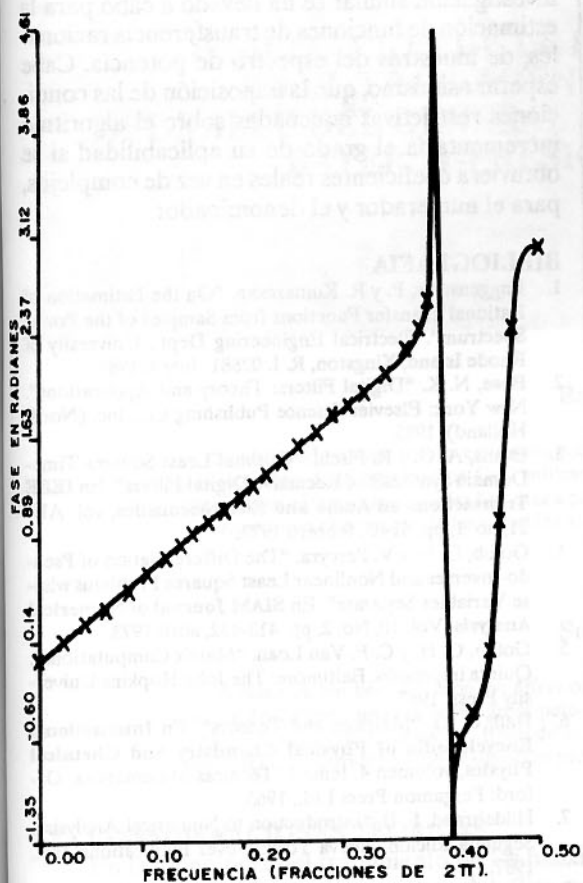


FIGURA No. 8. Gráfico de fase en radianes para el filtro digital de la figura No. 7. Las muestras de la plantilla tienen fase lineal.

Si se quisiera estabilizar el diseño, se puede usar varias técnicas tales como estabilización por medio de funciones "pasatodo" (en inglés, "allpass"), la técnica plana inversa de mínimos cuadrados o el método de estabilización por medio de la transformada discreta de Hilbert.

Si se hiciera la pregunta de si es posible obtener un filtro digital que tuviera fase lineal, y fuera al mismo tiempo estable, habría que responder que, de acuerdo a lo estudiado por otros autores, la especificación independiente de magnitud y fase en el diseño de un filtro digital, violaría con toda seguridad la relación existente entre la magnitud y fase de un filtro  $H(z)$  discreto, lineal, invariante en el tiempo y causal de fase mínima. Ambos ejemplos de diseño dieron como resultado filtros inestables debido a tal especificación independiente.

Tabla No. 1.

Parámetros obtenidos por el algoritmo, correspondientes al filtro pasabajo de la figura No. 5. Recuérdese que, como en este estudio se usó potencias positivas de  $z$ , los polos inestables son aquellos situados dentro del círculo unitario.

Parámetro	Parte real	Parte imaginaria
b <sub>0</sub>	,100000E + 01	,000000E + 00
b <sub>1</sub>	,296941E + 01	,588692E - 01
b <sub>2</sub>	,617081E + 01	,149137E + 00
b <sub>3</sub>	,576721E + 01	,274965E + 00
b <sub>4</sub>	,262992E + 01	,127296E + 00
b <sub>5</sub>	,828969E + 00	,628204E - 01
b <sub>6</sub>	-,579866E - 01	-,615626E - 02
a <sub>0</sub>	,753137E + 00	-,366995E - 03
a <sub>1</sub>	,326546E + 01	,494505E - 01
a <sub>2</sub>	,595698E + 01	,172119E + 00
a <sub>3</sub>	,570920E + 01	,240692E + 00
a <sub>4</sub>	,286178E + 01	,160280E + 00
a <sub>5</sub>	,596161E + 00	,424560E - 01
Polos inestables	-,244816E + 00 -,249265E + 00	,491202E + 00 -,488588E + 00
Polos estables	-107338E + 01 -,711446E + 00 -,695146E + 00 ,172243E + 02	,604320E - 01 -,160105E + 01 ,161165E + 01 -,503195E + 00
Ceros	-,104471E + 01 -,794248E + 00 -,797725E + 00 -,106392E + 01 -,109457E + 01	,225215E + 00 ,602012E + 00 -,599073E + 00 -,200066E + 00 ,445489E - 01
Error	,144496E + 00	

## 7. CONCLUSIONES

1. Se ha desarrollado un algoritmo para el ajuste de un modelo de polos y ceros a un conjunto de muestras arbitrarias en frecuencia. La novedad del método consiste en la aniquilación del polinomio del numerador mediante el empleo de diferencias divididas, lo que permitió el cálculo de los coeficientes del denominador, sin tener que ocuparse de los del numerador.

2. El algoritmo da excelentes resultados en la aproximación de un filtro digital de sexto orden. No se mencionó en el artículo que el algoritmo,

Tabla No. 2.  
Parámetros correspondientes a la  
figura No. 7, resultantes del diseño  
de un filtro pasabajo digital.

Parámetro	Parte real	Parte imaginaria
b <sub>0</sub>	,100000E + 01	,000000E + 00
b <sub>1</sub>	,199904E + 01	-,112955E-01
b <sub>2</sub>	,415922E + 01	,194440E-01
b <sub>3</sub>	,211012E + 01	-,475815E-01
b <sub>4</sub>	,864154E + 00	,232935E-01
b <sub>5</sub>	,441915E-01	-,180010E-01
b <sub>6</sub>	-,649496E-01	,711842E-02
a <sub>0</sub>	,339502E-01	-,163154E-02
a <sub>1</sub>	,743664E + 00	-,141078E-02
a <sub>2</sub>	,248755E + 01	,909189E-04
a <sub>3</sub>	,358349E + 01	-,634443E-02
a <sub>4</sub>	,252193E + 01	-,131155E-01
a <sub>5</sub>	,728120E + 00	-,776565E-02
Polos inestables	-,231414E + 00	,518862E + 00
Polos estables	-,238883E + 00	-,516816E + 00
	-,675578E + 00	-,177810E + 01
	-,616219E + 00	,175471E + 01-
	,261375E + 01	-,317155E + 00
	,507818E + 01	,138316E + 00
Ceros	-,549719E-01	,309943E-02
	-,789879E + 00	,587200E + 00
	-,916301E + 00	-,199139E + 00
	-,910087E + 00	,182945E + 00
	-,792180E + 00	-,593031E + 00
Error	,137277E + 00	

junto con una versión mejorada que utiliza la técnica de optimización de Newton-Raphson, se comporta muy bien para la estimación de la misma función de transferencia cuando las muestras vienen acompañadas de ruido gaussiano blanco moderado.

3. Para el diseño de filtros pasabajo digitales, el algoritmo demostró ser de mucha utilidad. Aunque no se puede garantizar que el resultado del diseño sea una función estable, se puede acudir a varias técnicas que estabilizan el diseño, produciendo una función estable idéntica en magnitud a la original, pero inevitablemente diferente en fase.

4. La aplicabilidad de la investigación realizada no está limitada a los ejemplos propuestos; una

investigación similar se ha llevado a cabo para la estimación de funciones de transferencia racionales, de muestras del espectro de potencia. Cabe esperar asimismo, que la imposición de las condiciones restrictivas adecuadas sobre el algoritmo incrementaría el grado de su aplicabilidad si se obtuviera coeficientes reales en vez de complejos, para el numerador y el denominador.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Baggenstoss, P. y R. Kumaresan. "On the Estimation of Rational Transfer Functions from Samples of the Power Spectrum". Electrical Engineering Dept., University of Rhode Island, Kingston, R. I. 02881. July 4, 1989.
2. Bose, N. K. "Digital Filters: Theory and Applications". New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc. (North Holland), 1985.
3. Evans, A. G. y R. Fischl. "Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters". En *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-21, no. 1, pp. 61-65, febrero 1973.
4. Golub, G. H. y V. Pereyra. "The Differentiation of Pseudo-Inverses and Nonlinear Least Squares Problems whose Variables Separate". En *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 10, No. 2, pp. 413-432, abril 1973.
5. Golub, G. H. y C. F. Van Loan. "Matrix Computations". Quinta impresión. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1987.
6. Hall, G. G. "Matrices and Tensors". En *International Encyclopedia of Physical Chemistry and Chemical Physics*, volumen 4, tema 1: Técnicas Matemáticas. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1963.
7. Hildebrand, F. B. "Introduction to Numerical Analysis". Segunda edición. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1987.
8. Johnson, D. H. "The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems". En *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, No. 9, pp. 1018-1028, setiembre 1982.
9. King, R. E. y G. W. Condon. "Frequency Domain Synthesis of a Class of Optimum Recursive Digital Filters". En *International Journal of Control*, vol. 17, no. 3, pp. 497-509, marzo 1973.
10. Kumaresan, R. "On Identifying a Rational Transfer Function from the Frequency Response Samples". Enviado a *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, agosto 16, 1988.
11. Pierre, D. A. "Optimization Theory with Applications". Nueva York: Dover Publications, Inc., 1986.
12. Rao, C. R. y S. K. Mitra. "Generalized Inverse of Matrices and its Applications". Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1971.
13. Romero Chacón, Jorge A. "Fitting a Pole-Zero Model to Arbitrary Frequency Response Samples". M.Sc. Thesis. Electrical Engineering Dept., University of Rhode Island, Kingston, R. I. 02881. Octubre 23, 1989.
14. Zadeh, L. A. y C. A. Desoer. "Linear System Theory". Nueva York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.