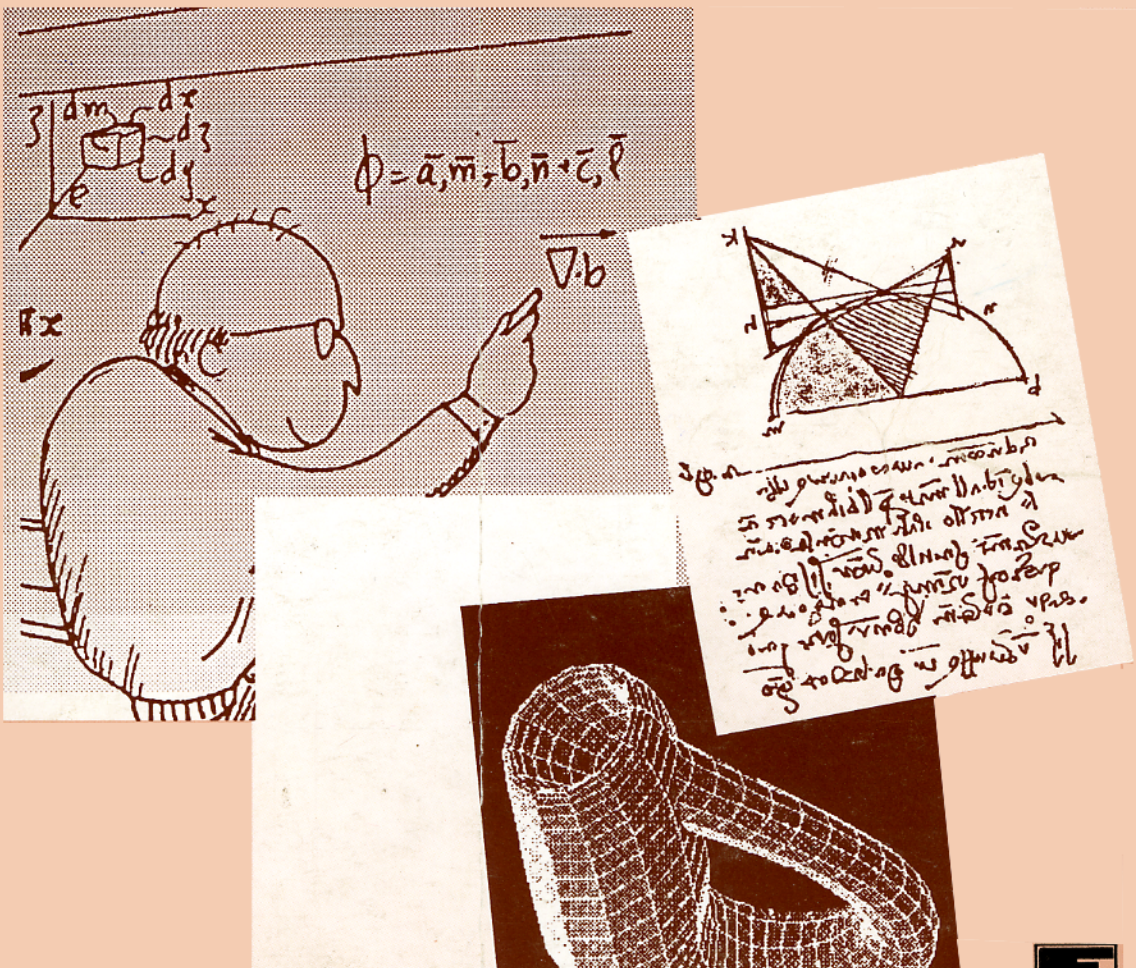
Ingeniería

Revist de la Universidad de Costa Rica
ENERO/JUNIO 1993 VOLUMEN 3 No. 1



Ingeniería 3 (1): 51-71, 1993 San José Costa Rica

LUIS GONZÁLEZ Y LAS MATEMÁTICAS EN COSTA RICA

Rodolfo Herrera J. *

Resumen

Este ensayo consiste de un breve estudio sobre la actividad intelectual y el pensamiento de Luis González G., insigne investigador y maestro de la Universidad de Costa Rica, quien fue ingeniero civil, matemático y humanista costarricense. El trabajo se refiere en especial a algunas de sus investigaciones en Matemáticas y Mecánica Racional, ciencias que cultivó con gran profundidad y creatividad. Debido a que fue el principal matemático que tuvo el país antes de 1960, su actividad cosntituye toda una época en la matemática centroamericana. El tema se desarrolla sin utilizar ningún símbolo matemático y basados en sus obras publicadas e inéditas.

Summary

This article consist on brief work on the thinking and intellectual activity of Luis González G., distinguished research worker and teacher at the Costa Rica University, and who is a costarican civil engineer, mathematician and humanist. The work refers especially to some of this investigations in Mathematics and Rational Mechanics, sciences cultivated by him with great knowledge and creativity. Because he was the chief mathematician in the country before 1960, his activity constitutes a whole period on the Central America mathematics. The subject is developed without using any type of mathematics symbols and based on his published and unpublished books.

Luis González G., (1905-1962) nació en San José, Costa Rica. Obtuvo su Bachillerato en 1924 en el Liceo de Costa Rica, como alumno de honor. Estudió Ingeniería con beca del Estado en la Universidad Libre de Bruselas, 1926-1934.

De 1923 al 1926 dio clases de Matemáticas en el sexto año del mismo Liceo de Costa Rica en donde estudiaba. Se incorporó al Colegio de Ingenieros de la época con una Tesis. Dio clases en el Colegio de Señoritas en San José. Su actividad como ingeniero civil se hizo en el período de 1934 a 1952, trabajando como ingeniero en el Ministerio de Fomento en donde realizó el diseño y supervisión de la construcción de la planta eléctrica de Liberia e igual con las graderías Sur del Estadio Nacional. Trabajó también en la Compañía de Fuerza y Luz de Cartago. En Fomento fué Jefe de la Sección de Puentes y en el Instituto Geográfico Nacional de las Secciones de Topografía y de Cálculo y Estadística.

* **Profesor emérito y exdecano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Costa Rica**

Con la apertura en 1941 de la Universidad de Costa Rica entró a trabajar como profesor titular, por horas, en la Facultad de Ingeniería, en la cual impartió *álgebra, mecánica racional, cálculo infinitesimal, cálculo vectorial y teoría de errores de observación* de 1941 hasta 1961. Es importante anotar que era la primera vez que se dictaban en el país cursos de estas materias. Los estudiantes tenían como prerequisitos pasar el primer y segundo año completo, en el cual se dictaban cursos de: *Algebra*; un curso de *Geometría Analítica*, en el que se seguía un texto del mismo nombre del Ing. Miguel A. Herrero, el cual tenía la influencia francesa donde había estudiado; también un curso de *Geometría Moderna* (un año), era un curso de *Geometría Euclideana*; un curso de *Geometría Descriptiva* (un año) equivalente a los cursos de las escuela francesa; cursos de *Física General* (dos años), *Química General* (dos años) y *dibujo* (un año). El curso de *Mecánica Racional* era de dos años y los de *Cálculo Infinitesimal* de tres años, el último posteriormente se llamó *Ecuaciones Diferenciales*. Tal fué el contexto en que desarrolló los cursos mencionados, los cuales llegaron a tener gran influencia en la formación básica y científica de los estudiantes de Ingeniería y en especial que sirvieron de medios de promoción para aquellos que tenían facilidad e interés en las Matemáticas.

Debe recordarse que en la Escuela de Ciencias, que existió antes de 1956, se dictaban algunos cursos de *matemáticas*, pero no tuvieron mayor importancia.

A partir de 1952 deja la actividad profesional en Ingeniería y se dedica enteramente a sus labores académicas, aunque el nombramiento de que fue objeto era como "profesor de horas" de la Facultad de Ingeniería. En 1956 con la reforma universitaria y la creación de la Facultad de Ciencias y Letras, fué nombrado profesor de "tiempo completo", es decir, de dedicación total a la docencia e investigación. Se encarga del curso de *Matemáticas* de los *estudios generales*, colaborando con la cátedra de Fundamentos de la Matemática que dirigía el Dr. Roberto Saumells, profesor español especialista en *filosofía de la ciencia*, y en 1958 fué titular de los cursos de *cálculo* que se abrieron en el Departamento de Física y Matemáticas de la misma Facultad. En 1957 impartió *Matemáticas para Estadística* en el Segundo Curso Centroamericano de Formación Básica en Estadística. Para los cursos de *álgebra* de la Facultad de Ingeniería hizo un texto denominado *Algebra Superior* [González L. (1941)].

Publicó en 1943-44 un texto denominado *Curso de Mecánica Racional*, consistente de cinco fascículos: geometría de los vectores y de las masas, cinemática y dinámica de puntos y sistemas de puntos materiales, de cuerpos rígidos y medios deformables, y mecánica de fluidos. El primer fascículo contiene: vectores libres, funciones vectoriales (curvas del espacio), vectores localizados o deslizantes, invariantes diferenciales, campos de vectores y geometría de las masas. Una obra muy bien escrita en el lenguaje de los vectores, dirigida a la enseñanza de Ingenieros.

Posterior y posiblemente desde 1956 a 1961, el curso de *Mecánica Racional* contenía una parte dedicada a las turbinas, de cuyas notas elaboró la obra denominada *Turbinas Hidráulicas* [González, L. (1960)], la cual se comentará luego. Como el curso era en su mayor parte para estudiantes de ingeniería, el tema le servía como ejemplo de aplicación interesante e ilustrativo para el ingeniero.

También en 1943 publicó un *Curso de Cálculo Infinitesimal*, consistente de tres partes. Las primeras dos cubrían el cálculo de una variable y principios sobre varias variables, luego desarrollaba el tema de ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado, de primer orden y grado superior, y ecuaciones en derivadas parciales y con diferenciales totales.

También en 1946 preparó un texto denominado *Curso de Geometría Vectorial*, el cual no se publicó. Contiene en la primera parte: "Curso sobre geometría vectorial": vectores libres, funciones vectoriales, y vectores localizados. La segunda parte: "Funciones Nabla y afinores": funciones nabla y los teoremas integrales, la ecuación diferencial de Laplace.

Existen muchas notas de cursos y trabajos inéditos sobre matemáticas, lo que muestra su inclinación por este campo desde que era muy joven. Una lista de lo que se conoce se da en la bibliografía. Por ejemplo se encuentra un cuaderno de 1938 que lleva el título: *Resumen de las principales ecuaciones diferenciales*, lo cual muestra que se ocupaba de estos temas aún antes de la apertura de la Universidad. Existe carpeta sobre *Problemas de Geometría Analítica*, posiblemente posterior a 1941. Hay varios manuscritos bajo el nombre de *Curso de Geometría de Vectores* y también sobre *Funciones Nabla y Afinores* de fecha 1946.

Estos "textos" y "notas de clase" fueron de gran utilidad para la enseñanza y difusión de las Matemáticas en esos años de la década del 40 y 50, pues no habían en el país textos en español adecuados y era primera vez que se estudiaban tales campos en nuestro medio. Ellos siguen la línea aprendida por él en Bélgica dentro de la escuela clásica francesa de *Matemáticas y Mecánica Racional*, como se puede ver por ejemplo en las obras de Appell (1902), Bouny (1924) y Bogaert-Dungen (1928), la primera escrita en la forma clásica de la escuela francesa de la época y las dos últimas con la notación vectorial generada por Gibbs [Gibbs, 1901]. Cuando él estudiaba en la Universidad estos métodos eran usuales en la enseñanza francesa y belga. En la introducción de la obra *Initiation aux Méthodes Vectorielles* [Bouligand y Rabaté, (1926)], uno de sus libros de estudiante, se afirma que las obras de Bouligand (1923) y de Châtelete (1924), fueron las primeras que introdujeron los métodos vectoriales en Francia.

Esto se refleja en la notación vectorial que utilizó en sus primeros trabajos. Por ejemplo, el momento de un vector F en el punto O era expresado como M_O F, siguiendo la notación de J. Masson (1852-1908), profesor matemático e ingeniero de la Universidad de Gand [Bouny, (1924)] en lugar de usar el *producto cruz* de la notación americana para el producto vectorial, la cual tomó posteriormente [Herrera, R. (1972)]. La terna ortogonal de referencia en un espacio euclideano la suponía *dextrorsum* como la llamaba él (es decir, opuesta a la usual hoy día y en especial a la utilizada por los autores americanos de la época). También acostumbraba representar a los vectores unitarios y ortogonales de la terna de referencia o la base del espacio, con un símbolo consistente de un "uno" con una raya encima, notación que este autor no la ha visto en otros textos. Su notación para las *diadas* era muy original pues usaba una *coma* para separar los vectores componentes. El cambiará un poco su notación más adelante bajo la influencia de los libros sobre matemáticas americanos que seguían la notación de Gibbs o Heaviside, pero no el sentido de la terna comentada ni la forma de representar los vectores unitarios.

En la obra de *análisis* de Hadamard [Hadamard, J. (1927), pp. 495] que él estudió, se utiliza la representación vectorial señalando que la ventaja que tiene no es sólo condensar la escritura y hacerla más intuitiva, sino también tener una notación independiente de la escogencia de los ejes, aunque no agrega nada esencialmente nuevo. En esta obra el autor agrega un interesante cuadro con las principales notaciones y denominaciones vectoriales utilizadas.

Como comentamos anteriormente, en la época en que Luis González estudió en Bruselas el tratamiento vectorial de los temas de la física matemática era lo usual, aunque no muy aceptada por todos. Por ejemplo, y como curiosidad, una de las obras que leyó en español es la de Torres de la Fuente, escrita en notación vectorial (algunos llamaban al vector "grandor geométrico"), en cuyo prefacio escrito por Eduardo Mier y Mura (miembro de la Academia) a pesar de que éste alaba la obra; sin embargo, considera innecesaria la tendencia a usar vectores [Torres de la Fuente, J. (1911), prefacio]. En 1909 había aparecido la obra de Burali-Forti y Marcolongo, que posiblemente influenció el movimiento en esta dirección, pues aplicaba el *cálculo vectorial* a la *geometría*, la *mecánica* y a la *física matemática* [Torres de la Fuente (1911), pp. 10, Pastor Rey (1957), Vol. II, pp. 100].

El interés de Luis González por las *Matemáticas* continuó más intensamente en la década del 50, orientación se hace evidente por la cantidad de manuscritos con temas matemáticos. Existen *Notas sobre Teoría de los Grupos* que contienen grupos, anillos, campos, relaciones de equivalencia, espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices, álgebra de Boole, etc. Existen notas manuscritas de trabajo sobre temas básicos de: topología (hasta las topologías relativas), funciones de variable compleja, teorema de Cauchy, variedades diferenciales, integral de Lebesgue, superficies de Riemann. Otros sobre álgebra en varios temas:

espacios afines, euclideanos, métricos y sobre ideales. Carpeta con un trabajo denominado: *Ejemplo de una Geometría Abstracta* y copia del capítulo primero de Hilbert: Fundamentos de la Geometría. Hay notas denominadas *Algebra de Motores*, las que tienen la influencia de Louis Brandt. También sobre *afinores*, existen manuscritos previos a su obra sobre el tema. Notas sobre *Análisis Tensorial* siguiendo a McConnell [McConnell, A. J. (1957)], notas sobre *Algebra* correspondientes al curso de Biberstein [Biberstein, O. (1959)] en la UCR.

Publicó un libro titulado *Lugares Geométricos*, editado por la UCR en 1962. La finalidad del trabajo fue didáctico y como ayuda y motivación para los estudiantes del curso de Cálculo Infinitesimal. Es un complemento al capítulo XXVI de su texto del mismo tema de la década del 40. Trata sobre ciertas *curvas* importantes y sus propiedades matemáticas, intercala biografías o anécdotas relativos a los pensadores ilustres que se ocuparon de ellas y les dieron sus nombres. Su intención era la de hacer el tema de *cálculo infinitesimal* menos árido y más accesible, con sentido cultural y humano, de tal manera que: "la ciencia no sólo debe ser nutritiva, sino que además debe ser apetecible" [González, L. (1962)]. Para cada curva presenta el proceso de gestación, los problemas en los cuales surgió. Es una obra bellamente escrita que plasma muy bien los propósitos del autor. En Lascaris (1976) se encuentra un análisis bastante completo de este trabajo.

Considerando que trabajó, como se mencionó anteriormente, en un proyecto de Ingeniería Civil relacionado con la *hidráulica* y la *electricidad*, es posible que eso lo condujera a estudiar con gran detenimiento y profundidad las *teorías tecnológicas* sobre *máquinas hidráulicas*, tema en el que llegó a ser muy experto. Es el único campo de la *Mecánica Aplicada* que cultivó, vinculando su conocimiento de la *Mecánica de los fluidos* (*hidrostática* e *hidrodinámica de los fluidos perfectos*), un capítulo de la *Mecánica Racional*, y la *Hidráulica*, una ciencia tecnológica más empírica "que estudia los fluidos reales por métodos preferentemente experimentales" [González, L. (1944), fascículo V, pp. 2].

En 1960 la UCR publicó el ya mencionado libro *Turbinas Hidráulicas*, trabajo cuyo borrador data de 1955. En esta obra resume algunos de sus amplios estudios sobre el campo. Analizó las turbinas que en su época eran las más modernas: Francis, Pelton, de hélice, Banki o Mitchel. El proyecto era más amplio pues pretendía incluir a las Ruedas Hidráulicas y a los Arietes. Hay un estudio sobre turbinas Francis de alta y de baja velocidad específica. Aunque todos los temas están desarrollados con gran claridad y brillantez didáctica y buscando el fundamento teórico de muchos de los procedimientos empíricos, hay algunos que él consideró como resultado de sus propias investigaciones en el tema: el análisis del "rendimiento máximo" y el de la "velocidad específica máxima", planteamientos que no se encontraban en los tratados sobre *Hidráulica* [González, L. (1960), pp. 14-19]. No se hará en este artículo un análisis de la obra, el cual desde el punto de vista matemático está hecho en Lascaris (1976), algunos de cuyos aspectos se comentarán luego. Su interés por el tema se evidencia por la cantidad de manuscritos inéditos sobre maquinaria hidráulica: *Teoría de Bombas Centrífugas*, con un subtítulo: "la Bomba a voluta (sin difusor)"; "El estudio del efecto del difusor en una bomba centrífuga". Existen otros manuscritos sobre turbinas como por ejemplo: *Turbina de la Planta de Birrís*. Además publicó *Tablas Hidráulicas para facilitar el Cálculo de Atarjeas* en 1941 y luego en 1956 *Tablas Hidráulicas*.

Una obra inédita importante la denominó: *Teoría de los Errores de Observación*, comenzada en 1953 y terminada en 1959. Como observación anecdótica, él la llamaba "la cruz de sus errores", posiblemente por el tiempo que la tuvo sin terminar. Este libro es producto de estudios y acumulación de datos realizados desde 1945 en el Instituto Geográfico (González, L., Informe, 30 Abril 1953), en el que trabajó en "compensación de triangulaciones y nivelaciones" y del curso que dictó hasta 1953 en la Facultad de Ingeniería denominado: *Teoría de los errores y método de cuadrados mínimos*. Consta de diez capítulos: nociones del cálculo de probabilidades, postulados fundamentales de la teoría de los errores de observación, curvas de probabilidad, índices de precisión, compensación de planos topográficos por el método de cuadrados mínimos, compensación de nivelaciones, de triangulaciones, resolución de ecuaciones normales, propagación de errores de observación. Existen algunos manuscritos inéditos sobre probabilidad, errores de observación y compensación de nivelaciones en *topografía*, anteriores a la obra comentada. Debe observarse que este campo requería en aquel tiempo una enorme labor de cálculo numérico que el autor tuvo que realizar con "paciencia benedictina", como acostumbraba decir en esos casos.

Trata el concepto de *probabilidad* como *frecuencia relativa de los sucesos*, explicando la noción con un "enfoque de ingeniero", usando procedimientos ad hoc, constructivamente y no deductivamente. El concepto de *esperanza matemática* lo ilustra mediante un ejemplo y no lo desarrolla teóricamente como *esperanza matemática de una variable aleatoria*. En el tratamiento de la *teoría combinatoria* no utiliza la teoría de conjuntos ni el concepto de función en el sentido más moderno. Con un enfoque intuitivo y con modelos gráficos resuelve problemas sin necesidad de mucho rigor matemático. Así en el caso de la *curva de probabilidad* empleó un método práctico para construir el histograma ilustrándolo con el Trebolino de Galton (una tolva con un agujero en el fondo y arena). Cuando analiza la relación entre el *histograma de Galton* y la *curva de probabilidad* continua o teórica, cuya ecuación de la función es necesario encontrar, le esclarece al lector la relación entre la abstracción mental o curva de probabilidad, como representación de la idealización de las condiciones experimentales o histograma. En esa época esto era poco tratado por los profesores de Ingeniería, y el autor piensa que los análisis de este tipo realizados por él no solo en este campo, fueron de gran ilustración y enseñanza para algunos de sus discípulos en la comprensión de los aspectos filosóficos de dichos problemas. En el estudio de las fórmulas empíricas introdujo las series de Fourier para representar analíticamente las variaciones de una función periódica. Posiblemente fue la primera vez en el país que se aplicó esta área de las *Matemáticas* en un problema práctico y análogamente el método de cuadrados mínimos. En Lascaris (1976) se estudia más exhaustivamente el contenido de la obra.

En 1952 existió el interés de algunos profesores y alumnos de la Facultad de Ingeniería de la UCR, porque se desarrollara una Escuela de Matemáticas. Ello coincide con la mayor incorporación de él a las labores universitarias, cuando además algunos de sus exalumnos como el Ing. Fernando Chavarría L. y el Ing. Walter Sagot C., ya se habían unido a las labores docentes en la Facultad de Ingeniería y posteriormente a la Facultad de Ciencias y Letras en el Departamento de Física y Matemáticas. Este último, exdecano de la Facultad de Ingeniería y de reconocida trayectoria universitaria, había desarrollado su tesis sobre *Cálculo Operacional*, en la que cristalizó una investigación original sobre los *teoremas de traslación generalizados* y en la cual trata la transformada de Laplace aplicándola muy originalmente en la resolución de problemas de *ingeniería eléctrica y estructural* [Sagot, W. (1958)]. El profesor Sagot sustituyó a en la cátedra de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ingeniería hasta 1969 e introdujo el *cálculo operacional*, etc. en la enseñanza. Además en 1953 lo sustituyó en el curso de *Teoría de los Errores de Observación*, la cual fué posteriormente sustituida por un curso que tuvo el nombre de *Topografía*. Debe observarse que los cursos de *Mecánica Racional* y *Ecuaciones Diferenciales* de la Facultad de Ingeniería no pasaron en la Reforma Universitaria de 1956 a la Facultad de Ciencias y Letras o su Departamento de Física y Matemáticas. Al traslado él se opuso [Informe al Decano, 25 Octubre de 1955], y análogamente sucedió con el curso de Ecuaciones Diferenciales, cuya cátedra mantuvo y dictó magistralmente el profesor Sagot, el cual se trasladó hasta fines de la década de 1970. El profesor F. Chavarría dictó cursos de *geometría* en la Facultad de Ingeniería en la década del 50.

Entre las actividades en *Matemáticas* que se dieron a inicios del 50 fué la participación en 1952 durante tres meses del profesor Ph.D. en

Física Antonio Quesada del Instituto Tecnológico de Massachusetts, quien dictó un corto Seminario sobre *ecuaciones diferenciales*, especialmente transformadas de Laplace y de Fourier, el cual no tuvo mayor influencia, salvo que comentó sobre su trabajo en el "diseño de computadoras", tema que abrió mucha curiosidad en los asistentes. En ese año Luis González dictó un curso de *geometría descriptiva* avanzado y también de *ecuaciones diferenciales*. En 1953 el profesor don José Joaquín Trejos, matemático que recién llegaba de la Universidad de Chicago, dictó el curso Algebra Moderna siguiendo a Birkhoff [Birkhoff, (1951)] el primero que se dictaba en el país en tal línea. A tal curso asistieron varios estudiantes de Ingeniería de la época, como por ejemplo el Ing. Enrique Borbón (instructor en el curso), Dr. Gil Chaverri, Ing. Manuel Antonio Calvo y el suscrito. El curso constó de un exámen formal para su aprobación. En 1954-55 el profesor J.J. Trejos dictó un curso denominado Teoría de Matrices, el cual también llevó con gran interés. Estos cursos sí tuvieron una mayor proyección, tanto en su pensamiento, como en el de otros de los nuevos estudiantes, creándose un clima diferente para tal tipo de actividades.

Se puede decir que esta etapa constituye la "preparación" o los prolegómenos para la apertura en la UCR del Departamento de Física y Matemáticas como entidad independiente de la Facultad de Ingeniería, lo cual ocurriría hasta 1957. Los ingenieros que dictaban lecciones de *matemáticas* para ingenieros fueron trasladados, con los cursos, bajo la administración de la nueva Facultad de Ciencias y Letras. A corto plazo muchos de ellos dejaron de dictar tales cursos, pues se abrieron los nuevos planes de estudio del Departamento de Física y Matemáticas con cursos de servicio en ambas disciplinas para otras carreras, entre ellas, la de Ingeniería.

En dicha época en la Facultad de Ingeniería se discutió mucho sobre la Reforma Universitaria hecha bajo la administración del rector Rodrigo Facio y sus posibles efectos en la enseñanza de la *ingeniería*. Se dudaba del nivel de los cursos de *matemáticas* que se darían en el primer año, pues en realidad ese período de la carrera era bastante fuerte, en especial en esa disciplina, constituyéndose en un verdadero filtro de control de calidad o de selección de los alumnos de la segunda enseñanza, que de por sí ya era mejor que la actual.

Su incorporación en el proceso de la Reforma Universitaria de 1956 se dio mediante la cátedra que dirigía el Dr. Saumells denominada *Fundamentos de la Matemática para Estudios Generales*, actividad que le produjo una gran motivación intelectual. Estableció relación con el citado Dr. Saumells y con el filósofo Dr. Constantino Lascaris, los cuales lo motivaron para estudiar más los problemas filosóficos de las *matemáticas* y de la *ciencias*, en especial los cambios producidos por las nuevos campos de la *Física*. Por influencia de Lascaris estudió a algunos de los filósofos griegos: los presocráticos, Euclides, Aristóteles, Platón, así como a Descartes. Por primera vez se tocaban problemas sobre la *filosofía de la ciencia* en la Universidad y posiblemente el nuevo ambiente académico le permitió dialogar o consultar con una mayor cantidad de profesores. Sin embargo en el Departamento de Física y Matemáticas en el período de 1957 a 1962 tuvo relativamente poca influencia suya, acaso debido a su comportamiento muy alejado de las actividades de administración académica. El fue un investigador, un pensador y un gran maestro, pero nulo para la actividad política en general, de ahí que lo que realmente pensaba costaba que llegara con convencimiento a los demás. Específicamente en 1959 llega al país contratado un profesor de Matemáticas de gran nivel, el Dr. Olgier Biberstein, el cual cambió mucho los planes originales del Departamento. Dictó los cursos de *Algebra*, *Análisis*, *Geometría*, *Electromagnetismo*, *Mecánica Cuántica* y en especial en *análisis* cambió el panorama que en ese momento existía. Se comenzaron a dictar y estudiar verdaderos cursos de *matemáticas* orientados a producir buenos matemáticos para el futuro, asunto que no se comprendió adecuadamente en la comunidad académica de aquel entonces. El comprendió todo esto, pero como decía, ya no estaba para tales faenas. Le molestaba la metodología formalista o deductivista opuesta a la suya, en especial el proceso de desgeometrización de las matemáticas o de su enseñanza. Su método no descuidaba este aspecto y era más constructivista y heurístico, debido al tipo de objetivos de sus cursos, y en especial a la búsqueda que hacía siempre de analogías con la realidad sensible, en especial la geometría euclideana. La explicación de algunos conceptos con base en su origen histórico, a su generación por necesidad de los problemas de las ciencias factuales como la *Mecánica Racional*, era lo que hacía de sus cursos obras maestras de la didáctica matemática.

El proceso le sirvió para capacitarse más, preguntar y meditar dentro de un proceso de investigación y pensamiento que coronaba mucho de lo que había trabajado en épocas más juveniles, pero que nunca había tenido la oportunidad de investigar y desarrollar. Entre 1954 y 1961 se dedica a investigar y escribir sus libros no publicados, en el campo de los *Tensores*, área que siempre le apasionó estudiar. Sus trabajos y desarrollos en el tema los explicó y discutió con muchos de sus exdiscípulos y amigos académicos, entre ellos el Dr. Gil Chaverri, el Dr. Enrique Góngora, el Ing. Manuel A. Calvo, el Ing. Fernando Chavarría y el suscrito entre otros. También con profesores como José J. Trejos y Roberto Saumells. Personalmente el autor tuvo la suerte de contar con su amistad y ayuda, por lo que compartió muchas veces con él sus inquietudes intelectuales y fué auxiliar en su curso de *Mecánica Racional*, en especial durante su período de enfermedad, y continuó posteriormente a su muerte con su cátedra.

En 1959 llegó al país por un período corto el profesor Dr. Francisco Navarro, costarricense graduado en Matemáticas en el MIT. El profesor Navarro dictó un curso bajo el nombre de *Monoides* a algunos estudiantes y profesores de la época, entre los que se contaba en especial Luis González , siempre ávido de nuevos conocimientos que le permitieran mejorar sus lecciones y sus investigaciones. El curso a pesar de lo breve dejó mucha inquietud y estudio en la pequeña comunidad matemática de la época.

Su desarrollo teórico en *Mecánica Racional* lo llevó a interesarse por la *Teoría de la Relatividad*, cuya comprensión y dominio conceptual requiere de un conocimiento matemático de los tensores, de las geometría riemanniana, etc. En relación con estas dificultades reprodujo lo que escribió en 1922 Nordmann (astrónomo del observatorio de París) en su libro *Einstein y el Universo* [González, L. (1960), pp. 2]: "Mientras que para comprender a Spinoza, no es necesario sino saber un poco de latín, monstruos espantosos montan la guardia ante Einstein y se esfuerzan con horribles muecas en impedir el acceso. Se agitan detrás de extrañas rejas, tan pronto rectangulares, tan pronto curvilíneas, que se llaman coordenadas. Llevan nombres monstruosos como ellos mismos. Llámanse: vectores contravariantes y covariantes, tensores, escalarios, determinantes, vectores ortogonales, símbolos de tres índices generalizados... qué se yo!. Todos estos seres, importados del fondo más salvaje de la selva matemática, se agrupan o se subdividen con una extraña promiscuidad por esas asombrosas cirugías que se llaman la integración y la diferenciación. En una palabra si Einstein es un tesoro, una horrible legión de reptiles matemáticos aleja de él al curioso".

Aunque ya había estudiado el tema de los tensores en los cursos de *mecánica racional*, limitados a los tensores de rango dos o afinores (esta última forma fue con la que recibió sus primeros cursos), no dejó de mantener durante la década del 40 su estudios de profundización y su programa para eliminar a los monstruos tensoriales. Sus primeras lecturas se dan dentro de la notación usual dada en el primer cuarto de siglo XX, los mismos trabajos de Einstein, Brilloin, Jeffreys, Appell, en español Bouny, Palacios, Loedel, Morán, etc. Curiosamente no estudió a Schouten, Struick o Levi-Civita. El problema que se propuso fue primero didáctico sobre el tema de los tensores, por lo que para ello se propuso llegar a los conceptos abstractos mediante un proceso en el que el andamiaje geométrico-físico no fuera eliminado desde el arranque. Decía: "el hecho de que hayamos definido a un *tensor* fuera de cualquier interpretación geométrica, no quiere decir que renunciaremos a ella de ahora en adelante, pues la verdad es que para la explicación de los conceptos dicha interpretación resulta sumamente adecuada" [González, L. (1957), pp. 211]. En la década del 50 lee obras sobre vectores y tensores de autores americanos, tales como Lass, Brandt, Phillips, Coburn, etc., los cuales le gustaban por su simplicidad didáctica y metodológica, dado que estaban orientados hacia las aplicaciones. Comparado con las obras de los profesores franceses, que a decir del profesor y filósofo Dr. Constantino Lascaris no les interesaba que los entendiera nadie, estas obras le fueron muy útiles. Sin embargo, en ellas el tratamiento de los tensores le seguía siendo insuficiente y complicado.

Al reconocer la utilidad de los *tensores* para realizar con provecho estudios superiores o aplicaciones interesantes se propuso buscar una exposición que fuera didáctica, no eliminando el álgebra de los vectores, sino más bien desarrollando más extensamente tal línea, usando la notación de Gibbs para las operaciones entre vectores y tensores. Los fundamentos del álgebra de las *diádicas* o *afinores* había sido desarrollada por Gibbs y Wilson y se encuentra en su libro pionero sobre *análisis vectorial* [Gibbs, (1901)], el cual parece él no había estudiado directamente. Si estudió otras obras sobre el tema escritas con la misma orientación, como las de Phillips, Morán, Sah y posiblemente Heaviside (revise Bibliografía).

Esta orientación quedará plasmada en sus trabajos inéditos sobre el campo en: *Nociones sobre la Teoría de los Afinores* [González, L. (1961)], trata en especial los "tensores cartesianos" y en *Vectores, Afinores y Tensores* [González, L. (1957)], extiende su estudio a niveles superiores y menos elementales que los tensores cartesianos. El primero de estos libros fue analizado por Lascaris [Lascaris, T. (1976)], obra que sirve de referencia al presente artículo. El segundo es utilizado como referencia en este artículo y es parte del programa de investigación del autor, por lo que actualmente está en proceso de revisión, corrección y redacción para su posible publicación posterior.

En estas obras trata el concepto de un tensor derivándolo de la idea de un *producto de vectores*, una manera *natural* que surge en el estudio de los *afinores*, de la representación diádica de un tensor de rango o valencia dos, como se describirá posteriormente. Esta representación es útil en la *mecánica racional y aplicada*, pues como se sabe el concepto del ente matemático denominado afinor o tensor, se originó al estudiar la distribución de las tensiones internas en los medios continuos deformables. En tales condiciones resulta también "natural" el desarrollo matemático con la dirección del andamiaje geométrico de los vectores y afinores, para el paso posterior a niveles más altos de abstracción.

Así explica la noción de un tensor mediante el desarrollo del concepto de producto de vectores, a partir de la noción de *diada* o de una *diádica* o *afinor*: una función bilineal de vectores. La diada, constituida por dos vectores, la representaba mediante los dos vectores separados por una *coma*, notación cómoda y no usual entre los autores americanos o italianos. El afinor, una suma de diadas, representado con la notación de Gibbs, al igual que los vectores comunes y corrientes de la *Mecánica Racional*, no perdía su carácter geométrico fácilmente y tenía la característica más importante para su concepción y su utilidad en la *Mecánica*: su carácter de *símbolo operatorio* o *operador*. Al respecto solía decir que hablando en términos de filosofía aristotélica, los operadores tienen una significación *potencial*, poseen una capacidad operacional latente. Así refiriéndose al *afinor* escribe: "Cada uno de los símbolos que acabamos de recordar, evoca en nuestro entendimiento un programa adecuado de operaciones a realizar sobre un cierto ente, al cual debe aplicarse el símbolo considerado. Cuando lo aplicamos al ente que le corresponde, entonces su capacidad operacional, que estaba latente, cristaliza en una realidad, adquiere una significación *actual*" [González, L. (1957), pp. 109].

Es interesante seguir por un momento su razonamiento y forma usual de exponer el tema: "... Un afinor es un símbolo operatorio en el sentido que acabamos de explicarlo. Pero entonces sobre cuál ente matemático actúa un afinor en calidad de símbolo operatorio?. Cualquiera puede adivinarlo mirando el segundo miembro de la igualdad (*): un afinor actúa sobre un vector ..."...

"Lo que falta es inventar un símbolo operatorio para representarlo. Pero ahora cabe preguntarse: cuál es el "efecto operacional" que produce un afinor al actuar sobre un vector?. La respuesta es sencillísima: un afinor "transforma" a un vector en otro vector", es decir, su carácter de operación potencial ante un vector es que lo puede transformar en otro vector". [González, L. (1957), pp. 110]. Es evidente su estilo: usa un lenguaje sencillo y convierte a su materia en algo interesante para el estudiante.

A pesar de que él había estudiado el tratamiento de los afinores como tranformaciones lineales, en su época de estudio con Bouny [Bouny (1924)] y luego con la revisión de otros autores como Phillips [Phillips (1950)] no trató nunca el problema desde el punto de vista de funciones, tampoco a los productos tensoriales, lo que no era además muy usual en esos años. T. Lascaris trató este tema en su trabajo [Lascaris T. (1976)].

Dado que lo esencial de una diada, y asunto que como decía "hay que tener bien presente", es que sus términos no deben ser "multiplicados" entre sí, ni escalarmente ni de ninguna otra manera, hasta tanto uno de ellos, generalmente el segundo, no haya sido multiplicado escalarmente por el vector sobre el cual operará. Esta misma propiedad le condujo a nombrar a la diada como un *producto coma* y como demostrará luego, como un caso particular de un producto más genérico. Al respecto escribió: "...nos damos cuenta de un hecho sumamente curioso e importante, y es que la coma (que es un signo de no multiplicación) posee la propiedad distributiva, que es característica de todos los signos de multiplicación. Por ese motivo, todavía podemos llamar *multiplicación* a esa extraña operación representada por la coma, que consiste, precisamente, de abstenerse de multiplicar" [González, L. (1961), pp. 11].

El afinor lo representa mediante componentes sobre vectores base linealmente independientes. En la *teoría de los afinores* es importante el concepto de *afinor identidad* y por tanto el de *vectores recíprocos*, conocidos en el *cálculo vectorial* usual en tres dimensiones, nociones que estudió profundamente: "De todas las nociones que se analizan en la teoría de los afinores, la más importante es, sin duda alguna, la de vectores recíprocos" [González, L. (1961), pp. 24]. Utilizó también el nombre *afinor neutro* usando evidentemente el lenguaje de la *teoría de los grupos* [González, L. (1961), pp. 25]. En realidad la *base recíproca* de una base dada es equivalente a la *base dual de un espacio vectorial*, concepto que conocía pero no utilizó en estos trabajos.

Desarrolló el *álgebra de los afinores*, una álgebra lineal asociativa (satisfacen los axiomas para un espacio vectorial), muy didácticamente como se puede comprobar en su libro *Nociones sobre la Teoría de los Afinores*, la cual tiene un gran valor didáctico y la aplicación del *tensor-afinor* a la *mecánica del medio continuo*. Originalmente se había propuesto escribir un libro elemental sobre *afinores* con dos partes, una con la teoría y otra con aplicaciones [Informe al Decano, 30 de Junio de 1960]; pero en realidad su proyecto debe haber variado, en parte debido a su enfermedad, pues la obra comentada se orienta hacia las aplicaciones indicadas.

En el proceso de explicar la extensión de la teoría de los afinores a n dimensiones escribió: "... Pero podría uno preguntarse si es factible hallar vectores recíprocos en un espacio de dos, o de cuatro, o de n dimensiones. La respuesta es afirmativa". Esa posibilidad "reside, sustancialmente, en extender las ideas de producto *punto* y producto *cruz* a n dimensiones" [González, L. (1961), pp. 29]. La extensión de la idea del producto vectorial a n dimensiones le permitió obtener, utilizando el mismo lenguaje geométrico, la base recíproca para n dimensiones, puesto que en tal caso en realidad lo que se requiere es determinar un "producto vectorial de n-1 vectores en n dimensiones".

Utilizó la idea de Grassman-Cartan para el producto vectorial de tres vectores en 4 dimensiones, según lo indica Brilloin [Brilloin (1949), pp. 41]; también en Butty, [Butty, (1931), Vol. I, pp. 189 y Vol. II, pp. 250] se tratan los "semivectores y semitensores" (denominación de Butty), aunque su esquema nemotécnico no es enteramente análogo. Pareciera, sin embargo, que él leyó la citada obra de Brilloin solo hasta 1958, aunque si había estudiado el libro de Butty.

Brilloin en el libro citado, trata el producto vectorial de dos vectores en tres dimensiones como un típico tensor antisimétrico, y también define un *producto exterior* de vectores, llamándolos multivectores (producto exterior es el nombre original para el producto vectorial y no corresponde al concepto moderno). Además en su extensa obra tiene un capítulo sobre seudotensores en geometría vectorial, densidades y capacidades tensoriales.

Así en el caso del producto vectorial de "tres vectores en cuatro dimensiones", el procedimiento que utilizó [González, L. (1961), pp. 30-31] consistió en representar la operación mediante un "determinante simbólico" con la primera fila que contiene a los cuatro "vectores unitarios y ortogonales de base" del espacio de cuatro dimensiones y las siguientes tres filas a las componentes en esa base de los tres vectores factores del producto. Análogamente, el procedimiento se puede extender al producto de n-1 vectores en n dimensiones. En el caso comentado del producto de tres vectores en cuatro dimensiones, obtiene como resultado de aplicar la regla inventada, un vector en cuatro dimensiones con cuatro componentes consistentes del producto de un escalar, representado por un determinante, como coeficiente de los cuatro vectores de la base unitaria y ortogonal. El determinante es obtenido al eliminar la primera fila y la columna del vector base correspondiente. Lo anterior es equivalente al resultado de multiplicar distributivamente el producto de los tres factores vectoriales expresados en sus componentes en la misma base. Este mismo procedimiento lo aplica al caso del producto de un vector en dos dimensiones, es decir, "el producto *cruz* que consta de un solo factor" [González, L. (1961), pp. 33]. Lo inventa usando el esquema "matricial" con la primera fila los dos vectores unitarios y ortogonales de la base del espacio bidimensional y en la segunda con las componentes en esa base del único vector, factor del *producto cruz*, lo cual da como resultado al resolver el determinante, un vector perpendicular al factor mismo. Es decir, hace inteligible lo que parecía extraño, simplemente, como él decía: inventando entes conceptuales ficticios, en este caso entes matemáticos.

Es evidente que la regla la puede extender a cualquier número de dimensiones, por lo que como escribió: "De una manera general el producto cruz de n-1 vectores linealmente independientes en un espacio de n dimensiones es un nuevo vector"... "perpendicular a los n-1 vectores que forman el producto. También es perpendicular a los n-1 factores que forman el producto... y a cualquier combinación lineal de esos n-1 vectores y, en una palabra, al espacio de n-1 dimensiones determinado por esos vectores" [González, L. (1961), pp. 32]. Esto le permitirá extender la teoría de los vectores recíprocos a espacios de cualquier número de dimensiones.

En la obra *Nociones sobre la Teoría de los Afinores*, introduce una nota que dice lo siguiente: "Habrá quedado tal vez en el ánimo del lector, la idea de que un producto cruz formado con solo dos vectores no tiene sentido nada más que en un espacio de 3 dimensiones. Esto no es cierto porque es perfectamente posible hallarle sentido a esa operación en espacios de n dimensiones. Lo que pasa es que en más de tres dimensiones, el resultado de esa operación ya no es un vector, sino que es un tensor" [González, L. (1961), pp. 35]. De esto se había ocupado años antes en la obra inédita *Vectores, Afinores y Tensores* [González, L. (1957)], de la cual el autor ha tomado mucha información para este artículo.

Su idea básica, que la llamaba una "chispita caída del cielo" [González, L., Informe al Decano, 30 Abril 1954], fué la de "inventar" un "producto vectorial" en un número de dimensiones mayor que las tres usuales. Todos los libros en los que había estudiado decían que no era posible ni significativo tal producto, excepto la obra de Brilloin. Este trabajo lo va a plasmar en su obra inédita *Vectores Afinores y Tensores* ya mencionada, cuya introducción da una idea muy clara de sus objetivos, por lo que conviene reproducirla: "El presente trabajo no pretende ser, ni remotamente, un tratado sobre la materia. No se ha pretendido exponer el asunto en forma exhaustiva, ni siquiera bastante completa. Solamente se han desarrollado aquí unas cuantas ideas fundamentales acerca de los temas del título. Por otra parte no se ha adoptado el método de exposición axiomático, que parece ser hoy día el más adecuado para exponer la ciencia matemática en un tratado con aspiraciones de perfección científica. Tampoco es un libro de texto; debería tener para ello una colección de ejercicios cuidadosamente seleccionada, y lo más completa posible. Sin embargo, se parece más a un libro de texto que a un tratado sobre el tema, pues ha sido escrito con una finalidad didáctica. Este trabajo se dirige a los principiantes. Presupone en el lector una cierta familiaridad con el cálculo vectorial corriente, tal y como se enseña en una escuela de Ingeniería, pero nada más. Esto explica la razón por la que no se ha adoptado el método axiomático. No dudamos de que este método sea el mejor, si se miran las cosas desde un punto de vista estrictamente teórico; pero presupone de parte del lector una gran madurez mental. A nadie se le ocurriría por ejemplo, enseñar geometría en los colegios de segunda enseñanza siguiendo el método axiomático de Hilbert. Las ideas fundamentales del cálculo tensorial no son difíciles; sin embargo, el método de exposición generalmente adoptado en los tratados, las hace prácticamente incomprensibles para los principiantes. Don Enrique Loedel Palumbo en el prefacio de su notable obra *Física Relativista*, en forma pintoresca compara la teoría de los tensores con una alambrada de púas. Pero nosotros creemos que la dificultad no radica en el contenido conceptual de la teoría, sino únicamente en el método de exposición. El presente trabajo puede considerarse como una especie de introducción a la lectura de verdaderos tratados sobre la materia. Los temas que aquí se exponen no son novedosos, y algunos de ellos han sido profundamente desarrollados por diversos autores. En lo que creemos que este trabajo difiere de los otros de la misma índole, es en la manera de presentar el asunto. Se ha tratado de hacer ver al lector que aun las ideas más abstractas del cálculo vectorial, son de origen intuitivo (tachado "experimental" en el manuscrito original). Es en el campo de la *Física* donde se ha encontrado elementos que han servido de base para la elaboración de los conceptos matemáticos más abstractos. No es pues de extrañar que sea también en el campo de la *Física* donde este cálculo encuentre sus más útiles aplicaciones. La idea central que ha prevalecido en la elaboración del presente trabajo, es la de extender y conservar en espacios multidimensionales la técnica operatoria del cálculo vectorial tridimensional. La ventaja de esta manera de proceder reside en que, tanto los desarrollos como los resultados obtenidos aparecen más tangibles, menos abstractos..." [González, L. (1957), Introducción, pp. 1 y 2].

Aunque el trabajo había sido terminado en 1956, fue revisado por el Dr. Saumells, cuyo informe es de fecha 1957 [Informe al Decano, 30 de Junio de 1957]. Además hizo correcciones al manuscrito antes de 1959, de ahí su nota sobre el libro de Brilloin. Los manuscritos existentes tienen una redacción final solo parcial en especial los tres primeros capítulos (revisar las referencias bibliográficas).

Como se comentó anteriormente estudió a Brilloin hasta 1958 y evidentemente después de haber terminado su trabajo básico (1957). En la redacción final de este [González, L. (1957-59), pp. 37] reproduce a Brilloin diciendo: "Nos parece oportuno citar aquí lo que dice Monsieur Léon Brilloin (profesor del Colegio de Francia) acerca de los productos vectoriales considerados como tensores antisimétricos, en su obra *Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité* (Cap. II, art. XIII, pág. 41) "XIII. Exemples de tenseurs antisymétriques formés au moyen de produits de vectors. Products exterieurs. Nous avons déjà pris le produit vectoriel de 2 vecteurs, dans une espace à 3 dimensions, comme exemple typique de tenseur antisymétrique. Les règles de formation de ce genre de produits peuvent être étendues, suivant une méthode indiquée par Grassman at E. Cartan". Y luego continúa el autor explicando en qué consiste el método de Grassman y Cartan, que no es sino una variante de los esquemas que él utilizó. Por otra parte comenta lo que afirma Mr. N. Coburn, profesor de matemáticas de la Universidad de Michigan, en su obra *Vector and Tensor Analysis* (Cap VI, art. 42, pág. 149): "42. Extension of the Previous Theory to Euclidean n-Spaces. The main body of the previous ideas can inmediately extended to Euclidean n-space. The single exception is the cross product of two vectors. In three space, one can associate the vector perpendicular to two given vectors with those vectors. It is for this reason that one can define the cross product. In n-space, there are (n-2) vectors orthogonal to two given vectores. Hence, we cannot discuss the cross products". Coburn escribe lo anterior a pesar de que en su bibliografía está la obra de Brilloin. A renglón seguido escribe: "Es evidente que nosotros no podemos estar de acuerdo con Mr. Coburn porque, precisamente, el punto de partida de este trabajo consiste en generalizar el concepto de producto vectorial de dos o más vectores a n dimensiones, hallarle interpretación adecuada y establecer el modus operandi, conservando al mismo tiempo la técnica operatoria del cálculo vectorial tridimensional" [González, L. (1957), pp. 37].

En relación con las notaciones usuales en la enseñanza de los tensores, señalaba que las notaciones que no incluyen a la base geométrica del espacio, con la práctica corriente de escribir solo la letra que representa los componentes, seguida de los índices superiores e inferiores adecuados a las circunstancias, no queda clara la dependencia de la simbología de los *sistemas coordenados tensoriales*. Ya que en efecto: "al adoptar tal sistema de notaciones simplificado no se ha tenido solo la intención de simplificar la escritura, sino que se trata de algo más trascendental. Al despojar a los tensores de su andamiaje geométrico se ha querido construir un cuerpo de doctrina matemático que sea absoluto, independiente de todos los sistemas coordenados y aun de toda interpretación geométrica. Por eso es que la teoría de los tensores, tal como se la expone corrientemente en los tratados, siguiendo un método de exposición axiomático, resulta tan difícil para los principiantes. Sin embargo, la estructura de ese edifico abstracto está íntimamente vinculada, incluso en sus menores detalles, a las consideraciones de carácter geométrico que le dieron origen" [González, L. (1957), pp. 106]. Y refiriéndose a su investigación escribe en el mismo texto: "En este modesto trabajo, hemos querido deliberadamente ese andamiaje geométrico, que permite comprender con facilidad las ideas fundamentales del cálculo tensorial." Recuérdese que la presentación actual de estos temas apenas se iniciaba en esos años. El estilo didáctico que empleó tal vez tiene la influencia de alguno de los autores y obras que estudió, como fue la de Castelnuovo en cuya introducción [Castelnuovo, G. (1943), prefacio, pp. 1] el autor escribe: "por otra parte la experiencia didáctica me enseñó cuán ventajoso es, en lo posible, hacer recorrer en la mente de los alumnos las mismas etapas a través de las cuales ha pasado la ciencia en su desarrollo", un camino que siempre trató de seguir en sus famosas lecciones.

Es evidente que un producto de vectores no es algo que se imponga al entendimiento, con perfiles bien delineados por la fuerza de la lógica y que tenga que ser de determinada manera, porque, de no ser así, se puede caer en contradicción. De ahí que escribió: "el producto de vectores no es una verdad *necesaria*, en el sentido que daba Leibnitz a esta palabra. Pues muy al contrario, las cosas suceden precisamente al revés; el entendimiento puede inventar libremente, y no cabe preguntarse cuál de todas esas concepciones del pensamiento es la *verdadera*, pues ninguna de ellas es *verdadera* ni *falsa*, sino que todas son convencionales. Y este es el punto de vista de la matemática moderna. Ningún matemático cree hoy día que su ciencia representa un cuerpo de *verdades absolutas*" [González, L. (1957), pp. 20]. Meditación que en realidad es una toma de posición filosófica respecto a la naturaleza de las matemáticas [Herrera, R. (1986)].

Desarrolló el producto *cuaternio* o de Hamilton [estos conceptos se remontan a los orígenes del Cálculo Vectorial con los trabajos de Hamilton (1843) y Grassmann (1844): puede revisarse Pastor Rey (1957)] en tres dimensiones combinando el producto escalar y el vectorial, como un ejemplo de un *producto* diferente. En *Electricidad* la utilización de la representación compleja de *vectores planos* o *escalares complejos* era muy usada y él conocía bien la relación y diferencia con los *vectores* [revísese por ejemplo las obras de Birkhoff, Bouny y Sah de la bibliografía que él estudió]. En la *Física* moderna los *espinores* o el *Algebra de los espinores* es útil en las teorías gravitacionales [Misner, Ch. (1973)].

Analizó los productos: escalar, vectorial y cuaternio, como casos particulares de un producto genérico que denominó *producto tensorial* en n dimensiones [González, L. (1957), pp. 20]. En este proceso de generalización introduce un símbolo *operatorio* entre dos vectores o una *multiplicación vectorial* y representando dos vectores en tres dimensiones en una base ortogonal y unitaria, expresa ese denominado producto tensorial como un nuevo ente *unidad tensorial* poseyendo dos índices. La notación que utiliza para el producto es una "v" pequeña y en imprenta entre los dos vectores. De esa manera el producto tensorial de dos vectores en tres dimensiones se expresará por medio de nueve componentes sobre nueve unidades tensoriales con dos índices (los productos tensoriales de los vectores de base), que se pueden conceptualizar como *magnitudes dirigidas con diferentes dimensiones*. De tal concepto generalísimo de producto, utilizando una axiomática arbitraria más restringida y diferente para cada caso particular, pudo representar los casos de los productos mencionados anteriormente y además el *producto diádico*. Conceptos que los extiende a espacios de n dimensiones utilizando la misma notación.

Es evidente que los afinores (o tensores de rango dos), como se comentó en párrafos anteriores, constituyen una álgebra lineal asociativa (con casi todas las propiedades de los números reales), por lo que considerarlos como simples *números hipercomplejos* o *diadas* (o *nonios*) y no como *arreglos* o funciones bilineales, es a veces bien instructivo. Estos *números* se pueden considerar en tres dimensiones como combinaciones lineales de las *unidades hipercomplejas* de dos índices, que fue el camino que escogió, pero trasladando el concepto a espacios de mayor dimensión.

El conjunto de unidades tensoriales linealmente independientes que definió, le permitieron crear, generar, definir, un *espacio tensorial* (en realidad es un espacio vectorial). Refiriéndose a esto decía: "notemos pues, que estamos asistiendo en este instante al hermoso espectáculo de ver nacer un espacio. Un *espacio tensorial* vacío de tensores, es una esencia, es una posibilidad de ser que todavía no es. Tienen un sentido comparable al que en la esfera de lo real, tienen hoy las generaciones que poblarán la tierra en el futuro: pueden llegar a ser, van a ser, pero todavía no son. Este modo de ver las cosas es una mera aplicación de las ideas de Leibnitz acerca del espacio sensible que nos rodea, y también acerca del tiempo" [González, L. (1957), pp. 21].

Comparó la teoría de los *afinores* y las *matrices*, considerando a estas últimas también como símbolos operatorios que producen, análogamente a los primeros, una transformación lineal. Existe, decía, "un verdadero isomorfismo o identidad de estructura lógica entre ambos entes, de tal manera que se puede decir que los afinores son las transformaciones lineales vistas desde la ventana de la *Geometría* y las *Matrices* son esas mismas transformaciones vistas desde la ventana de la *Aritmética*" [González L. (1957), pp. 4 del Apéndice del capítulo II]. Percibía el fuerte movimiento intelectual encaminado hacia la aritmetización de toda la ciencia matemática, por cuya razón los matemáticos profesionales, afirmaba: "quieren ignorar voluntariamente los afinores. Los físicos en cambio, tienen buenas razones para seguir sirviéndose de ellos. Pues el afinor tiene la ventaja de que nos habla en un lenguaje más asequible a la intuición y se presta muy bien para analizar situaciones físicas concretas. Además es un ente más general que la matriz, pues ésta, aunque pretende ser un ente aritmético autónomo, independiente de todo sistema de coordenadas y aun de toda interpretación geométrica, de hecho se encuentra dentro del marco geométrico impuesto por los vectores de base unitarias y ortogonales, lo cual no sucede con el afinor" [idem nota anterior].

Para representar e interpretar los afinores como tensores los expresa por medio de sus *componentes* de dos índices, sustituyendo el símbolo genérico de producto tensorial por la *coma* del *producto diádico*, un símbolo específico, que como comentaba "se le llama así a despecho de que multiplicar diádicamente dos vectores quiere decir, precisamente, no multiplicarlos de ninguna manera". Sin embargo, es un lenguaje cómodo. Como no basta que un objeto tenga la forma de un tensor para que lo sea, investiga la ley de transformación ante un cambio de base, comentando: "No hay nada más sencillo en el mundo que resolver este problema. Cómo?. Pues echando mano del concepto de *producto escalar doble* entre *afinores* [González, L. (1957), pp. 127], problema que ya había resuelto para n dimensiones. Las consideraciones sobre el *tensor-afinor*, un ente importante en la mecánica de los medios deformables, se pueden extender a afinores cuyas diadas estén formadas con productos tensoriales de vectores. Con igual línea se pueden construir tétradas, péntadas, etc. La idea de *tensor* se convierte así en algo muy general en donde le caben los escalarios (tensores de rango cero), los vectores (tensores de rango uno) que son magnitudes dirigidas, los afinores (tensores de rango dos) que son símbolos operatorios y los productos vectoriales de vectores.

En efecto, estudió con cuidado los entes matemáticos constituidos sustituyendo el producto *tensorial* por el producto *cruz*, expresados con componentes de dos índices en una base constituida por productos vectoriales como tensores de base y no díadas, y demostrando que son verdaderos tensores antisimétricos. Con el producto vectorial, un tensor antisimétrico en tres dimensiones, lo que sucede es que el resultado en n dimensiones no es otro vector, sino que es un tensor y que hay que introducir unas condiciones restrictivas en su álgebra o axiomática. En este caso las unidades tensoriales están constituidas por el producto vectorial de n vectores ortonormales de base, y entonces por nuevos tipos de entes o como las denominaba *unidades tensoriales* de n índices, que dadas las características restrictivas del producto vectorial, son verdaderos *tensores antisimétricos*. Así desarrolló también el producto de m vectores en n dimensiones y analizó las condiciones restrictivas correspondientes.

Analizó además la diferencia entre el *tensor-afinor*, un ente operacional, y el tensor construído utilizando el producto vectorial, es decir, el que se obtiene al sustituir el producto tensorial por el producto cruz, un ente típicamente direccional. Cuando utiliza para comprobar si su ente es un tensor el *criterio de tensorialidad*, señala que lo esencial de un tensor no es que su ley de transformación afecte tal o cual forma particular, sino que esa ley exista y nos asegure la invariancia del tensor frente a las transformaciones de coordenadas. O sea, que exista el *afinor identidad* adecuado. Para ello va a usar un afinor identidad constituido por el *producto vectorial doble* de dos afinores, con lo que resuelve el problema. Este tipo de producto lo había desarrollado usando su metodología de trabajo, asunto que se comentará más adelante.

Siguiendo el enfoque genérico de los tensores, trató además de otra manera y muy originalmente el caso ya comentado del producto vectorial de dos vectores en n dimensiones, utilizando también un esquema *matricial* o *arreglo* diferente al utilizado posteriormente por él en *Nociones sobre la Teoría de los Afinores*. En el esquema citado la primera fila contiene a los vectores unitarios y ortogonales de base y en la segunda y tercera a las componentes respectivas de los dos factores vectoriales del producto, y con n columnas. Obtuvo una manera de desarrollar el esquema, que no es ni matriz ni determinante, el cual le da como resultado una suma de los n-1 componentes como verdaderos determinantes coeficientes de las unidades tensoriales, que en este caso son los productos vectoriales entre los vectores de la base.

En forma análoga analizó el producto vectorial de más de dos vectores. En el caso de que el producto tenga tres factores el esquema nemotécnico tiene cuatro filas y n columnas, el cual resuelto es equivalente a que se lo hubiera calculado realizando distributivamente el producto de los vectores expresados en las componentes en la base correspondiente. Las unidades tensoriales serán, en este caso, entes de tres índices, ordenados de acuerdo con la convención necesaria en el caso de los productos vectoriales. Así el producto vectorial de los tres factores viene a ser un tensor antisimétrico de tercer rango.

En el estudio de las propiedades del producto de más de dos vectores en n dimensiones, demuestra que puede recibir diversas interpretaciones dependientes de la colocación de los paréntesis, es decir, del hecho de su no asociatividad en general. En el caso de cuatro vectores en cuatro dimensiones sin paréntesis entre los factores, el ente resultante viene a ser una magnitud dirigida y definida por un solo componente en una única dirección. Por tal hecho se le llama *seudoescalario*. En realidad el producto vectorial es asociativo si el número de factores es menor que el número de dimensiones y no lo es en caso contrario, o sea, cuando el número de factores es igual o mayor que el número de dimensiones.

Como se señaló en párrafos anteriores, dado que el producto vectorial es antisimétrico, introdujo tal restricción al producto genérico para obtener el *producto vectorial en n dimensiones*. Demuestra que tal ente puede ostentar el título de *tensor* porque es invariante frente a una transformación de coordenadas, al contrario del producto simétrico. Aun así todavía no podía juzgar si tales productos antisimétricos eran tensores, pues es sabido que existen otros entes que siendo tensores antisimétricos típicos no son productos vectoriales. En su proceso era una admisión provisional, y será en otro momento que demostrará por qué motivo el producto simétrico correspondiente no era un tensor y cuáles son las dificultades que se encuentran para considerar al producto vectorial como un tensor antisimétrico.

En su proceso ad hoc de construcción matemática, la palabra *tensor* ya no va a caracterizar a un individuo matemático, sino más bien a un conjunto de individuos que, aún cuando tienen propiedades específicas muy diferentes, poseen sin embargo, ciertas características genéricas que permiten clasificarlos, a todos dentro de una misma categoría. Al respecto hacía el siguiente símil, procedimiento que era usual en él y para lo que tenía una gran habilidad: "nadie confundiría por ejemplo a una papa con un tomate y, para el profano, estos dos individuos botánicos son completamente diferentes. Los botánicos, sin embargo, prescindiendo de las diferencias específicas han descubierto entre ellos analogías profundas que permiten clasificarlos dentro de una misma familia: la de las solanáceas. Hablar de tensores viene a ser entonces algo así como hablar de solanáceas, y no de papas o de tomates" [González, L. (1957), pp. 27].

Siguiendo la metodología usual, sabía que además de las nociones del producto tensorial, le era necesario definir un *criterio de tensorialidad* que representara la invariancia de tal ente matemático ante las transformaciones de coordenadas, a las cuales les dedicó mucha atención; mostrada por su interés por conseguir bases recíprocas en n dimensiones. En su trabajo desarrolla los problemas de la transformación de tensores en coordenadas generales (o sea, no solo rectilíneas) y define los tensores de una manera completamente abstracta, y todo utilizando su metodología.

En realidad aunque su desarrollo no se dirige a constituir un *espacio vectorial*, sí utiliza en su ordenamiento de las propiedades del ente que quiere constituir las líneas del álgebra de la época. La influencia de Lichnerowicz en las nociones de *producto tensorial* y *espacio vectorial de los tensores* prácticamente no le llegaron, pues no conocía las obras del autor, y además el libro sobre el tema no salió sino hasta el año 1962 en español. Con base a ello el autor piensa que fue muy original, pues los tratados existentes no contenían tales nociones y menos los que él utilizó de base.

Un aspecto interesante desde un punto de vista práctico, es que los métodos del álgebra vectorial desarrollados por él para un espacio tetradimensional, son un instrumento de trabajo que permite resolver con facilidad y elegancia muchos problemas de geometría tridimensional, tarea que hizo con elegancia en muchos casos.

Se puede decir, aunque en otro lenguaje, que su concepción de las Matemáticas es que esta es una práctica teórica en la que se inventan objetos conceptuales o constructos en forma convencional y los cuales no necesariamente tienen un referente factual. Aunque no dudaba de que su origen nace de las necesidades y problemas de las ciencias factuales, posición cuya mejor prueba es su misma metodología de la enseñanza.

En su proceso constructivo de vectores, tensores y sus productos en espacios de n dimensiones, explicaba al lector que "no deberá preocuparse en lo más mínimo por el hecho de no poderse formar una imagen intuitiva sensible de un espacio de más de tres dimensiones, pues tales espacios no son, desde luego, realidades sensibles del mundo físico que nos rodea, sino realidades conceptuales de un mundo de ideas abstractas. Podemos decir que el ámbito del pensamiento lógico es mucho más dilatado que el de la realidad sensible. Podemos entender estas cosas en abstracto sin necesidad de imaginarlas, esto es, sin que las ideas tengan que ir acompañadas de imágenes intuitivas sensibles. Si adoptamos una actitud de renuncia a la intuición sensible estaremos en magníficas condiciones para entender estas doctrinas abstractas" [González, L. (1957), pp. 29].

Tal como "en un espacio de n dimensiones siempre es posible, aunque solo sea en el pensamiento, tener n vectores unitarios y ortogonales", cuando trata las nociones de *perpendicularidad* y *paralelismo* entre unidades tensoriales en n dimensiones, considera que el paso a tal nivel de abstracción sólo se da "apelando a la intuición", pero de seguido comenta: "apelando abiertamente a la intuición del lector parece haber en esto una contradicción flagrante; pero es que aquí no apelamos a la intuición sensible, sino a una intuición intelectual, que es algo muy diferente de una intuición sensible. Estas intuiciones intelectuales suelen ser, con frecuencia, los puntos de partida de las teorías matemáticas, y aparecen en ellas en forma de *definiciones*" [González, L. (1957), pp. 33].

Al desarrollar la noción de un *producto escalar de dos productos tensoriales*, para lo cual tuvo que definir unidades tensoriales perpendiculares (productos tensoriales de vectores, por ejemplo, en el caso de tres vectores denotadas con tres índices), comenta: "es evidente que no podemos demostrar que tal cosa sea efectivamente cierta. La realidad es que no es ni cierta ni falsa, sino puramente convencional. Podemos adoptar esta convención porque no encierra contradicción íntima, y no nos conduce a conclusiones contradictorias" [González, L. (1957), pp. 99]. Utiliza entonces la convención, para este producto escalar de dos productos tensoriales de igual rango, de una manera análoga a como se define un producto escalar de dos vectores, diciendo que es la suma de los productos de las componentes de iguales índices. Lo anterior le permitió desarrollar tensores recíprocos y explicar muy claramente los conceptos de vectores y tensores covariantes y contravariantes.

La *multiplicación doble* de Gibbs en el álgebra de diádicas o afinores en tres dimensiones, aunque no extensivamente usada es muy útil en la teoría de los circuitos eléctricos, pues por medio de ella el recíproco de la suma de dos afinores se puede expresar concisamente en términos de funciones de cada afinor. Así el *producto escalar doble y el producto vectorial doble de dos diadas* [Phillips, (1944), pp. 303] o [Sah, (1939), pp. 95] son respectivamente: (i) la cantidad escalar obtenida del producto escalar entre los antecedentes y los consecuentes del afinor y (ii) la diada cuyo antecedente es el producto vectorial de los antecedentes de la dos diadas y cuyo consecuente es el producto vectorial de los consecuentes de las dos diadas.

En esa línea estudió distintas posibilidades de productos entre afinores, pero en n dimensiones [González, L. (1957), pp. 127], para lo cual se sirvió de un procedimiento muy atractivo para demostrarle al estudiante o al lector que existían muchas posibilidades de inventar tales productos, como decía en un estilo muy local: "a gusto del consumidor", procedimiento que consistía en un diálogo entre matemáticos donde cada uno de ellos inventa el producto que considera mejor. Entre los productos que estudia está el *producto tensorial de afinores* (análogo al de vectores) y sus propiedades algebraicas, un producto genérico a partir del cual define los productos escalar y vectorial de afinores.

Obviamente, también estudia la forma de aplicar o manipular tales entes como operadores, como por ejemplo: el producto vectorial doble de n afinores sobre el producto vectorial de n vectores en n dimensiones.

En la obra comentada *Vectores, Afinores y Tensores* aplicó los conceptos y métodos descritos en *geometría diferencial* en n dimensiones, en la aplicación de las nociones a una *cinemática* en n dimensiones, y desarrollando las *funciones nabla* en n dimensiones. Dado que no aparecen los manuscritos completos sobre los temas indicados en este párrafo, es posible reconstruirlos en base a las notas al respecto desarrolladas por el autor.

En estos campos de las *matemáticas* no trabajó en otras ciencias que no fueran la *Mecánica Racional* o las *Mecánicas Aplicadas*, por lo que su planteamiento y metodología de la enseñanza es muy válido. Es como el que normalmente utiliza o debería utilizar un físico cuando trabaja con *Física Teórica o Física Matemática*. De ahí que él nunca trató o vió otras posibilidades de utilización de los conceptos tan abstractos que se generaban con los vectores, tensores, matrices o en general el *álgebra lineal o multilineal*, en otras campos de las ciencias o de las tecnologías en los cuales la representación de tales entes matemáticos no requieren una liga con la realidad sensible en el sentido de la *Física*. En el caso de las *matrices*, que como anotamos la llamaba la "ventana algebraica" en contraposición con el afinor o "la ventana geométrica", aclaró muy bien en sus intervenciones y notas la diferencia mutua con los tensores, pero creo que no le vió su potencialidad práctica, lo cual no era extraño pues en ese tiempo apenas se iniciaba la aplicación de estas disciplinas en las ciencias tecnológicas y tampoco las obras de *álgebra lineal* abundaban. Por ello, a pesar de su conocimiento del *álgebra de matrices* y los *espacios vectoriales*, en sus trabajos siempre ligó el problema con los enfoques de la *Mecánica*, de modo que el concepto de *vector*, etc., no lo relacionó con otras posibilidades de representación. Como en ésa época la *computadora* y la *computación* modernas apenas nacían, la utilización del enfoque matricial de muchos problemas era muy limitada. Sin embargo como se ha afirmado él conocía muy bien esas matemáticas pero sólo le interesaron sus aplicaciones en la resolución de problemas en la Ingeniería (Mecánica Racional o Aplicada y Electricidad). Por ejemplo, aparte del Birkhoff, estudió *matrices* en 1955 en una obra de Cahen [Cahen, 1955] con aplicaciones en la Electricidad, una forma moderna en la época frente a trabajos antiguos como el de Sah [Sah, (1939)].

En *análisis matemático* o *cálculo infinitesimal* como lo llamaban antiguamente, lo estudió en muchas obras de autores reconocidos de la primera mitad de este siglo, como Appell, Granville, Hadamard, Rey Pastor, Courant, etc., algunas de cuyas nociones o metodologías no son ya utilizadas por los matemáticos modernos.

Se interesó mucho por las *ecuaciones diferenciales* y su utilización en la resolución de los problemas de las ciencias de Ingeniería, campo en el que fué un verdadero maestro. Evidencia de ello, entre muchas otros argumentos, es su trabajo denominado: "*una interpretación vectorial de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes* [González, L. (1957)] y como promovió el estudio del *cálculo operacional* para la resolución de problemas prácticos en la Ingeniería [Sagot, W., (1948), prefacio].

En algunos casos [González, L. (1957)] utilizó en los desarrollos de las ecuaciones procedimientos que algunos llaman poco rigurosos, sin embargo el concepto de rigurosidad es relativo y depende también de los objetivos de un curso o de un campo, en especial si de lo que se trataba era de la enseñanza para ingenieros y de la resolución de problemas de las ciencias de Ingeniería, en donde a veces se omiten las justificaciones teóricas del proceso matemático.

Una ilustración se encuentra en el procedimiento utilizado por él en algunos desarrollos matemáticos en los que se cancelan los diferenciales en una expresión [González, L. (1960)], es decir, se considera a la derivada como cociente de dos diferenciales. *simplificación* que conduce a resultados correctos y la cual era usada *mecánicamente* por ingenieros sin justificar el proceso. Sin embargo ello no permite atribuirle a él una confusión entre un *infinitesimal* o "variable que se aproxima a cero" o "incremento muy pequeño" y el concepto de *diferencial* [Lascaris T. (1976), pp. 242], aunque no se usaba en la enseñanza la noción de diferencial como una función de dos variables. También la noción de integral como límite de una sumatoria no se podía obviar en la enseñanza, aunque en muchos procesos se omitía la justificación teórica.

Es evidente que no tuvo mucho acceso a la información sobre el desarrollo de las matemáticas a nivel mundial, en parte debido al aislamiento cultural del país y en parte por su misma formación y carácter, la que no correspondía con los procesos modernos que se estaban engendrando en la década del 50. A él le correspondió vivir en una época difícil pues llega a Costa Rica en 1934 después o en medio de la gran crisis económica, en un país que no tenía Universidad. La década del 40 también fué difícil: la guerra mundial, los procesos político sociales que afectaron el país que concluyeron en una guerra civil, la persecución de las ideas, la mediocridad socio-cultural, etc. No fué sino hasta el inicio de la década del 50 que apenas se comienzan a respirar nuevos aires en el país y en el mundo, cosa que favoreció para que pudiera hacer lo que él mismo llamaba "abrir una brecha" en un mundo sin cultura matemática ni científica. Sin embargo, aún ya fundado el Departamento de Física y Matemáticas, es evidente que no tuvo mucho apoyo para publicar sus obras, en especial las de *matemáticas*.

Lo que es un hecho histórico es que su labor de investigador y maestro, fué la que introdujo en el país el pensamiento racional de las ciencias modernas como las *Matemáticas*, la *Mecánica Racional* y de algunas ciencias tecnológicas. El representa el cambio cultural, en el campo de tales ciencias, que coincide con la apertura de la UCR.

Finalmente es conveniente señalar que la Tesis de la Lic. Tatiana Lascaris [Lascaris, T. (1976)], matemática y profesora costarricense, no tiene un análisis de la obra inédita *Vectores, Afinores y Tensores*", debido a que no se contaba con los manuscritos correspondientes, aunque si con una lista de los temas desarrollados en la obra [Informe, 30 de Junio de 1956]. Para este estudio se ha contado con el rescate de parte de los manuscritos y también con las "notas" del suscrito tomadas en las "lecciones" informales que recibió con él.

Actualmente el autor estudia y corrige los manuscritos y notas en relación con esta obra, con el propósito de su posible publicación. Tal vez si ello se hiciera realidad, el espíritu de Luis González, el gran sabio y maestro costarricense, descanse en paz en sus mundos tretradimensionales.

Bibliografía

Esta lista de Referencias contiene únicamente aquellas obras matemáticas de las que se tiene certeza que consultó o estudió y las cuales han sido mencionadas en su mayor parte en el texto de este artículo. Son excepción los títulos marcados con un asterisco.

Appell M. Paul. Traité de Mécanique Rationnelle. 5 tomos, décima edic., Edit. Gauthier Villars: Paris, 1955 (la primera edición: 1902-1904). Tomo 5: Elements de Calcul Tensoriel, por René Thiry, 2ª edic. 1933 y 10ª edic., 1955.

Becquerel, Jean. Exposé élémentaire de la Théorie d'Einstein et sa Generalization. Edit. Payot & Cie: Paris, 1922.

Birkhoff, Garret D. and MacLane, Saunders. A Survey of Modern Algebra. 10ª edic., Edit. Macmillan Co.: New York, 1951 (primera edición: 1941).

Bogaert W, E.D. y Dungen, F. van den. Mécánique Rationnelle. T I y II. Edit. Maurice Lamertin: Bruxelles y J. Hermann: Paris, 1928.

Bouny, Francois. Lecons de Mecánique

Rattionelle, T. I y II. Edit. Libr. Scientifique, Mons. Albert Blanchard: Paris, 1924.

Bouligand, G. y Rabaté, G. Initiation aux Méthodes Vectorielles. Edit. Libraire Vuibert: Paris, 1926.

______________ Lecons de Géométrie vectorielle. Con un prefacio de M. E. Goursat, 1ª edic. Edit. Libraire Vuibert: Paris, 192?. (3ª edic. 1949).

Brandt, Louis. Vector and Tensor Analysis. Edit. John Wiley and Sons., Inc.: New York, 1947 (edición consultada de 1953).

Brilloin, Léon. Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. 10ª Ed., Edit. Masson et Cie.: Paris, 1949 (primera edición, 1936).

Burali-Forti, C y Marcolongo, R. Elementi di calcolo vettoriale. 1ª edic., Edit Zanichelli: Bolonia, 1909, con reedición posterior (Traducción francesa, 1910).

Butty, Enrique. Introducción a la Física Matemática, Vol. I y II. Ed. Universidad de Buenos Aires: Argentina, 1931-1934.

Cahen, Gilbert. Eléments de Calcul Matriciel. Edit. Dunod: Paris, 1955.

Castelnuovo, Guido. Lecciones de Geometría Analítica. 1ª edición en castellano, trad. de la 7ª en italiano, Editorial Mundo Científico: La Plata, Argentina, 1943. Originalmente publicada bajo el nombre de Lezioni de Geometria Proiettiva. Ed. Sociedad Editora Dante Aligheri de Albrighi e C. Milan: Roma, Nápoles, 1903-1905 y con el nombre de Lezioni de Geometría Analitica, 7ª edic., 1928.

Coburn, Nathaniel. Vector and Tensor Analysis. 10ª edición, Edit. Macmillan Co.: New York, 1955 (la primera edición es de 1941 y fué la que posiblemente consultó LG).

Chatelet A. y Kampé de Fériet J. Calcul vectoriel. Théorie. Applications géométriques et cinématiques. Edit. Gauthier-Villars: Paris, 1924.

Granville W.A. y Smith, P.F. Eléments de Calcul différentiel et integral. Edit. Libraire Vuibert: Paris, 1927.

Gibbs J. W. and Wilson, E. B. Vector Analysis*. 1ª edic., Edit. C. Scriber's Sons: New York, 1901. (7ª edic. Edit. Yale Univ. Press: New Haven, EUA, 1931).

Einstein, Albert. Théorie de la Relativité Restreinte et Généralisée (mise la portée de tout le monde). Edit. Gauthier-Villars: Paris, 1921.

Hadamard, J. Analyse Mathématique. Tomos I y II. Edit. Libraire Scientifique, J. Hermann: Paris, 1927, 1930.

Herrera, Rodolfo. Algebra Vectorial. Ed. Ofic. Publ. Univ. de Costa Rica, 1967.

______________ Notas sobre Tensores. Univ. de Costa Rica, 1975.

______________ *El Pensamiento Filosófico de Luis González.* Presentado en el 2 Congreso Centroamericano de Historia de la Ciencia y la Tecnología, Univ. de Costa Rica, 1985. No publicado.

______________ *Luis González: in memoriam.* Rev. Ingeniería, t.2, Nº. 1, Univ. de Costa Rica, 1993.

______________ y Calvo, Manuel. *La Matemática en Costa Rica y la influencia del Dr. Biberstein.* Univ. de Costa Rica, 1990. No publicado.

Jeffrey, H. Cartesian Vectors*. Cambridge University Press: London, 1931.

McConnell, A. J. Applications of Tensor Analysis. Edit. Dover Publ., Inc.: New York, N.Y.,

1957. Original publicado por Blackie Co. en 1931 con el título: Applications of the Absolute Differential Calculus.

Misner, Charles W., Thorne. Kip S., Wheeler, John Archibald. Gravitation*. Edit. W. H. Freeman and Co.: New York, 1973.

Morán, Francisco. Los Tensores Cartesianos Rectangulares. 2ª edic., Ed. Talleres del Instituto Geográfico y Catastral: Madrid, 1959 (La primera edic. es de 1954).

Lainé, E. Précis D'Analyse Mathématique. Edit. Libraire Vuibert: Paris, 1927.

Lascaris, S., Tatiana.: *Una Epoca en la Matemática Costarricense*. Tesis de Grado para Lic. en Mat. Esc. Mat. Univ. de Costa Rica, 1976.

Lass, Harry. Vector and Tensor Analysis. Edit. McGraw-Hill Book Co.: New York, 1950.

Levi-Civita, Tullio. The Absolute Differential Calculus*. Edit. Blackie and Sons: London, 1926-28.

— Edit. Dover Publ. Inc.: New York, 1947. Lichnerowicz, A. Algèbre et Analyse Linéaire*. Edit. Masson et Cie.: Paris, 1947.

— Eléments de Calcul tensoriel. 5ª. edic., Edit. Libraire Armand Colin: Paris, 1960.

——Elementos de Cálculo Tensorial. 1ª edic. (traducida de la 5ª edic. en francés), Edit. Aguilar: Madrid, 1962.

Loedel, P. Enrique. Física Relativista. Edit. Kapeluz: Buenos Aires, 1955.

Perucca, Eligio. Física General y Experimental. Tomo I y II, Edit. Gustavo Gili S.A.: Madrid, ?

Phillips, H.B. Vector Analysis. 1ª edic., Edit. John Wiley & Sons Inc.: New York, 1933. (edición consultada de 1944).

——Análisis Vectorial. Edit. UTHEA: México, 1946.

Rey Pastor, Julio, Calleja Pi, P., Trejo, C.A. Análisis Matemático, 1ª edic., Edit. Kapeluz : Buenos Aires, 1957.

Sagot, C. Walter. Cálculo Operacional. Tesis de Grado para Ingeniero Civil, Fac. de Ing., Univ. de Costa Rica. 1ª edic. Edit. B.A.S: San José, Costa Rica, 1948.

Sah, A. Peng-Tung. Dyadic Circuit Analysis. International Texbook Co.: Scranton, Pennsylvania, 1939.

Torres de la Fuente, Jorge. Elementos de Mecánica Racional. Editor Adrián Romo, Libr. Intern.: Madrid, 1911.

Bibliografía de Luis González.

I. Obras Publicadas.

1. Tablas de Hidráulica para facilitar el cálculo de atarjeas. En colaboración con Adrián Arroyo. Edit. Imprenta Nacional: San José, 1941, pp. 12.

2. Algebra Superior. Edit. Librería Lehmann: San José, mimeógrafo, pp.138, 1941.

3. Curso de Cálculo Infinitesimal. Edit. Librería Lehmann: San José, 1943. Tres tomos, tercera parte: pp. 149.

4. Curso de Mecánica Racional. Edit. Librería Lehmann: San José. Mimeógrafo, Fascículo primero, 1943, pp. 138. Fascículo quinto, 1944, pp. 57.

5. *Tres puntos cruciales en la evolución del pensamiento matemático*. Rev. Filosofía Univ. de Costa Rica, # 3 (1958) 325-334.

6. *Meditaciones en torno a la relatividad.* Rev. Filosofía Univ. de Costa Rica, #7, pp. 209-224 (1960).

7. Turbinas Hidráulicas. Edit. Univ. de Costa Rica, 1960, pp. 267.

8. *La axiomática moderna y el principio de identidad.* Actas, Segundo Congreso E. Interamericano de Filosofía. Edit. Imprenta Nacional: San José, 1962, pp. 103-11.

9. Lugares Geométricos. Edit. Univ. de Costa Rica, 1962, pp. 151.

II. Inéditos.

Curso de geometría vectorial. Segunda parte: Funciones Nabla, Afinores, 1946, 163 hojas, ms. En otro libro de registro, el borrador.

/Ecuaciones, probable para topografía/. pp. 236-475; ms.

/Un cuaderno denominado "Resumen de los principales tipos de Ecuaciones Diferenciales"/, 1938, páginas, ms.

Nociones sobre la Teoría de los Afinores. 204 hojas; ms., 1961.

Teoría de las bombas centrífugas. 55 hojas + un gráfico, ms.

Geometría Vectorial. 174 hojas; ms.

Notas sobre la Teoría de los Grupos. 58 hojas. Incluye: Algebra Lineal, 4 hojas. Vectores, 19 hojas; ms. Posterior a 1956.

/Identidades y coeficientes de integración/, 15 hojas + 5 cuadros; ms. Encuadernado.

Tablas para la compensación de planos topográficos por el método de los cuadrados mínimos. 102 hojas; ms. Un libro de registro.

Una carpeta con 228 hojas, con Problemas de Geometría Analítica y otros más; ms.

Carpeta con varios trabajos: La masa, pp.9; Geometría, Axiomas y Postulados, 7 hojas. Acepciones de la palabra Racional, 2 hojas. Definiciones... de Euclides, 2 hojas.

Ejemplo de una Geometría Abstracta, 4 hojas, y dos copias del capítulo primero de Hilbert, Fundamentos de la Geometría; ms.

Turbinas Hidráulicas, 8 hojas; ms.

Turbina Planta Birrís, unas 200 hojas; ms. Parte corresponde a Turbinas Hidráulicas y parte a otros temas de turbinas. Tablas.

/Portafolios negro/Problemas sobre envolventes, pp. 16.

Curso de Geometría vectorial, primera parte, pp.13; ms.

Sin título: carpeta con unas doscientas hojas, de numeración variada, ,anuscritos. Contenido: Precipitados cristalinos. Compensación de Nivelaciones, Problemas sobre Cálculo de Probabilidades.

Un portafolio con Tablas Hidráulicas. 12 tablas, y otras tablas variadas. Cien páginas.

Algebra de Motores, 33 hojas, ms.

/Sin título/, cuaderno manuscrito, con 74 hojas escritas por cara impar, excepto la primera hoja, que al dorso incluye un horario. Comprende Algebra.

Teoría de los errores de observación, pp. 235, mecanografiado.

Una carpeta con un gráfico, Distribución real...; Propagación de errores, pp. 28-81; Problemas..., 4 hojas.

Teoría de los errores de observación, pp. 236-475, ms.

Carpeta con notas ordenadas sobre "Cuerpos libres", 34 hojas, ms. y "Curso de Algebra Moderna" de Fco. Navarro, 18 mec., 1958. Notas sobre "Tensores" (siguiendo la obras de McConnell), 31 hojas, ms.

Vectores, Afinores y Tensores. Indice de temas según Informe al Decano, 30 de Abril de 1954: capítulos: Vectores, pág. 1-106; Afinores, pág. 107-188; Tensores, pág. 189-270; El tensor antisimétrico interpretado como un símbolo operatorio, pág. 271-318; Algunos conceptos sobre geometría enedimensional, pág. 319-393; Curvas alabeadas en n dimensiones, pág. 394-425; Velocidad y aceleración en movimiento relativo enedimensional, pág. 426-445; Interpretación vectorial de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, pág. 446-461; Las funciones nabla en n dimensiones, pág...; ms. borrador, 1956. Existen los tres primeros capítulos y notas borrador de lo indicado en los siguientes (ver Herrera, R. Notas sobre Tensores].

Para Informes y Contratos de Luis González, ver Lascaris (1976).

Apuntes de Dr. Gil Chaverri, ver Lascaris (1976).

Apuntes de Dr. Rodolfo Herrera J. (1954 a 1960).