Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
Enero/Junio 1996 VOLUMEN 6 Nº 1

INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica
Volumen 6, Enero/Junio 1996 Número 1

CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica
Apartado Postal 75
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

CANJES

Universidad de Costa Rica
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información
Unidad de Selección y Aquisiciones-CANJE
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

Suscripción anual:
Costa Rica: ¢ 1 000,00
Otros países: US $ 25,00

Número suelto:
Costa Rica: ¢ 750,00
Otros países: $ 15,00

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica.

Revisión Filológica: *Lorena Rodríguez*

Diseño Gráfico, Diagramación y Control de Calidad:
Unidad de Diseño Gráfico de Revistas
Oficina de Publicaciones

Impreso en la Oficina de Publicaciones
de la Universidad de Costa Rica

Revista
620.005
I-46i Ingeniería / Universidad de Costa Rica. ——
Vol. I, no. 1 (ene./jun. 1991)— . —— San José, C. R. : Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1991— (Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica)
v. : il

Semestral.

1. Ingeniería - Publicaciones periódicas.

CCC/BUCR—250

Ingeniería 6(1): 97-102, 1996 San José, Costa Rica

GPS: EL CALCULO DE COORDENADAS APROXIMADAS

*Juan Gilberto Serpas**
*Manuel Ramírez Nuñez***

SUMMARY

The software for processing the information for GPS is a black box. The user has no idea, most of the time, how the data is processed. We will try to explain the process of approximately positioning the receiver.

Global Positioning System was developed by the U.S. Department of Defense to obtain in real time the position of a receiver in any place of the world. Very convenient in war time (i.e. if used for navegation) to locate troops or ships, cars or planes, independently of weather conditions. Initially it was created to locate the position of a single receiver. This was called "absolute positioning". Without this basis idea we would not have the system today. This article was intended for this kind of positioning.

RESUMEN

La mayoría de programas para el procesamiento de datos del sistema de posicionamiento global (GPS) es una caja negra. El usuario no tiene idea, casi nunca, de cómo se procesan los datos internamente en el programa de cálculo. La intención de este artículo es explicar cómo se determina la posición aproximada del receptor, uno de los primeros pasos en el procesamiento de datos GPS.

El GPS fue creado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos para obtener, en tiempo real, la posición de un receptor en cualquier lugar de la tierra. Este sistema es muy conveniente en tiempo de guerra ya que indica a las tropas en qué lugar se encuentran y hacia donde dirigirse, sólo con la ayuda de una antena. Esta recibe la señal de 24 satélites que orbitan alrededor de la tierra.

En la actualidad el uso del sistema ya no solo es de uso militar. La comunidad civil ha sacado ventaja del GPS y es usado por diversidad de disciplinas científicas. Como ejemplos, de la aplicación del sistema, se pueden mencionar: la localización de rutas, la determinación de sistemas coordenados para grandes regiones, el control geodésico y análisis de deformación de la corteza terrestre y de obras de ingeniería, apoyo en la elaboración de mapas, etc.

El sistema se creó, inicialmente, para proveer posicionamiento en tiempo real, mediante el uso de un receptor. Esto se conoce como posicionamiento absoluto. Sin esta idea básica, el sistema no existiría en la actualidad, y es desde esta perspectiva que se abordará este artículo.

PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

El GPS funciona mediante la transmisión de señales de radio, que un receptor puede captar en tierra. La distancia entre el satélite y el receptor puede calcularse en función del tiempo de viaje de la señal entre los dos puntos. Esto se logra mediante el uso de la conocida relación d=c*(t, en donde c es la velocidad de la luz en el vacío, (t el tiempo de recorrido de la señal entre receptor y emisor, y d la distancia entre el receptor y el satélite. La distancia d está afectada por un error en los relojes, tanto del receptor como de los satélites. Dicha distancia es comúnmente llamada pseudo-distancia.

* Ing. M.Sc. Prof. Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional, Costa Rica, 1996
** Ing. Prof. Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional, Costa Rica, 1996

La ecuación básica que representa la medición de pseudo-distancias (considerando una atmósfera ideal y que el error del reloj del satélite puede ser modelado) se escribe como (Teunissen P. y Kleusberg A. ,1995)

$$P_i^k = \rho\left(t, t - \tau_i^k\right) + c \cdot dt_i(t) + e_i^k \qquad (1)$$

En donde:

P_i^k: Pseudo-distancia medida

$\rho\left(t, t - \tau_i^k\right)$: distancia geométrica entre el satélite al tiempo de transmisión y el receptor al tiempo de recepción.

$dt_i(t)$: es el error del reloj en el receptor

e_i^k error aleatorio en la medición.

CALCULO DE COORDENADAS APROXIMADAS

Existen diferentes métodos para calcular las coordenadas aproximadas del punto de observación y se han desarrollado métodos iterativos de búsqueda basados en la posición de los satélites (Goad, 1995). Sin embargo, aunque los mecanismos de búsqueda son robustos, consumen mucho tiempo para su cálculo. Por otro lado, las técnicas analíticas facilitan el entendimiento de los aspectos geométricos para la solución del problema. Uno de los métodos analíticos más usados es el método de Bancroft (1985), el cual exige que se observen al menos 4 satélites.

La solución de Bancroft

Este método se basa en el producto interno de Lorentz. Siguiendo a Goad (1995) tenemos:

(g,h) se define como g^T M h, (2)

g, h $\in \Re^4$,

$$M_{4x4} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Corrigiendo la ecuación (1) tenemos:

$$P^i = \sqrt{\left(x^i - x\right)^2 + (y^i - y)^2 + (z^i - z)^2} + c \cdot dt \qquad (3)$$

Nótese que $c \cdot dt$ es un escalar . Tomemos entonces $b = c \cdot dt$, la ecuación (3) se transforma en:

$$P^i - b = \sqrt{\left(x^i - x\right)^2 + (y^i - y)^2 + (z^i - z)^2} \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado a ambos lados y reagrupando términos se obtiene:

$$\left[x^{i^2} + y^{i^2} + z^{i^2} - P^{i^2}\right] - 2\left[x^i x + y^i y + z^i z - P^i b\right] = -\left[x^2 + y^2 + z^2 - b^2\right] \qquad (5)$$

o de otra manera usando (2):

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} r^i \\ P^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^i \\ P^i \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} r^i \\ P^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ P \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{6}$$

En donde r^i es el vector de posición del i-ésimo satélite, y r el vector de posición del receptor. Para cada pseudo-distancia existe una ecuación similar a esta (6). Se necesitarían al menos 4 pseudo-distancias para resolver la posición del receptor y el error del reloj. Ahora hagamos la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & P^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & P^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & P^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & P^4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

En donde i=1..4 corresponde al i-ésimo satélite. Ahora, las cuatro pseudo distancias pueden ser representadas como:

$$\alpha - BM\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix} + \Lambda\tau = 0 \tag{8}$$

en donde:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}\right), \quad \text{y} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con α siendo un vector de dimensiones 4x1, definido como:

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} r^i \\ P^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^i \\ P^i \end{bmatrix}\right) \tag{9}$$

Resolviendo (8) para $\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix} = MB^{-1}(\Lambda\tau + \alpha) \tag{10}$$

Sustituyendo (10) en (8), para ambos Λ y $\begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}$, y tomando en consideración que M*M=I y M^T=M, por lo tanto también *(Mg, Mh) = (g, h)*, tenemos:

$$\left(B^{-1}\tau, B^{-1}\tau\right)\Lambda^2 + 2\left[\left(B^{-1}\tau, B^{-1}\alpha\right) - 1\right]\Lambda + \left(B^{-1}\alpha, B^{-1}\alpha\right) = 0 \tag{11}$$

Sustituyendo la solución para ((obtenida a partir de la ecuación (11)), en la ecuación (10) nos provee la solución buscada. Nótese, sin embargo, que la ecuación (11) al ser cuadrática, nos dará dos soluciones en el espacio. Sólo una de estas soluciones será valida para el punto de interés. La ecuación (10) nos resuelve el problema en el caso de que solamente contemos con 4 pseudo-distancias. La mayoría del tiempo se tienen más observaciones, lo que nos facilita identificar cuál es la solución correcta. Aplicando el mismo procedimiento a por lo menos dos grupos de cuatro pseudo-distancias, nos permitiría aislar el valor correcto para la solución, ya que ésta sería común a todos los grupos.

Ejemplo práctico

A continuación se presenta un cálculo detallado de la posición aproximada del punto de observación para que sirva como ejemplo y que clarifique de una manera práctica el procedimiento explicado anteriormente:

1) Formemos la matriz B (de acuerdo a ecuación (7)) con las coordenadas x, y, z de 4 satélites y las pseudo-distancias medidas a los mismos:

$$B=\begin{bmatrix} 11030181.799 & -22484411.719 & 9712614.496 & 21245771.379 \\ -6872327.351 & -25052773.555 & 5605746.446 & 21586630.703 \\ -4861559.870 & -15458089.565 & 21055358.277 & 20745809.795 \\ -15727376.405 & -6434841.690 & 20196439.598 & 22993586.729 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de los satélites son calculadas a partir de las efemérides transmitidas en el archivo de navegación.

2) Se calcula el vector (mediante el uso de la ecuación (9):

$$\alpha=\begin{bmatrix} 135082879863834.7 \\ 120156057063274.7 \\ 137763392745835.3 \\ 83974348965765.19 \end{bmatrix}$$

3) Planteamos la ecuación cuadrática definida en (11) tomando

$$\alpha=\left(B^{-1}\tau,B^{-1}\tau\right),\quad \mathrm{b}=2\left[\left(B^{-1}\tau,B^{-1}\alpha\right)-1\right]\quad \text{y}\quad \mathrm{c}=\left(B^{-1}\alpha,B^{-1}\alpha\right)$$

entonces tenemos:

$$\mathrm{a}:=\left[\left(B^{-1}\cdot\tau\right)^{\mathrm{T}}\cdot M\cdot\left(\mathrm{B}^{-1}\cdot\tau\right)\right]\quad \mathrm{b}=\left[\left[\left(B^{-1}\cdot\tau\right)^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{M}\cdot\left(\mathrm{B}^{-1}\cdot\alpha\right)\right]-1\right]\cdot 2\quad \mathrm{c}=\left[\left(\mathrm{B}^{-1}\cdot\alpha\right)^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{M}\cdot\left(\mathrm{B}^{-1}\cdot\alpha\right)\right]$$

$$\mathrm{a}_{1,1}\cdot\lambda^2+\mathrm{b}_{1,1}\cdot\lambda+\mathrm{c}_{1,1}=0$$

resolviendo esta ecuación obtenemos dos soluciones ,

$$\lambda 1:=\frac{-\mathrm{b}_{1,1}+\sqrt{\left(\mathrm{b}_{1,1}\right)^2-4\cdot\mathrm{a}_{1,1}\cdot\mathrm{c}_{1,1}}}{2\cdot\mathrm{a}_{1,1}}\qquad \lambda 2:=\frac{-\mathrm{b}_{1,1}-\sqrt{\left(\mathrm{b}_{1,1}\right)^2-4\cdot\mathrm{a}_{1,1}\cdot\mathrm{c}_{1,1}}}{2\cdot\mathrm{a}_{1,1}}$$

4) Resolviendo para las coordenadas y el error del reloj de acuerdo a la ecuación (10) se tiene:

$$R1 := M \cdot B^{-1} \cdot (\lambda 1 \cdot \tau + \alpha) \qquad R1 = \begin{bmatrix} 192518.5426793728 \\ 7958985.510747805 \\ -6963496.167429298 \\ 57609875.19862624 \end{bmatrix}$$

$$R2 := M \cdot B^{-1} \cdot (\lambda 2 \cdot \tau + \alpha) \qquad R2 = \begin{bmatrix} 594954.4819379605 \\ -4856508.02421155 \\ 4078269.47608358 \\ -0.003441052511334 \end{bmatrix}$$

Una de las dos soluciones anteriores es correcta. Para distinguir cuál solución es la correcta, se calcula nuevamente la posición usando otro grupo de satélites. A continuación, se presentan los resultados usando 2 nuevos grupos de satélites:

SOLUCION	X(m)	Y(m)	Z(m)
Λ1	192518.543	795898.551	-696349.617
*Λ2	594954.482	-4856508.024	4078269.476
Λ1	227218.648	399742.894	-426109.439
*Λ2	594954.466	-4856510.837	4078271.075
Λ1	229833.037	369643.232	-405594.274
*Λ2	594954.464	-4856511.118	4078271.235

Puede observarse que para todos los casos la solución 2 produce resultados similares (aquí denotados con (*)). La posición aproximada del receptor se calcula promediando cada uno de los resultados anteriores.

CONCLUSIONES

Como fue mencionado, las coordenadas aproximadas de un receptor GPS pueden ser calculadas a través de diferentes metodologías. En este artículo se explicó detalladamente el método de Bancroft. El algoritmo descrito es de fácil implementación e ilustra en forma geométrica la manera de calcular la posición de observación. Esta posición es usada posteriormente en un ajuste por mínimos cuadrados cuando se desee obtener una mejor exactitud en la determinación de coordenadas. Incluso en métodologias geodésicas en donde la exactitud es de suma importancia, este algoritmo proporciona una primera aproximación de las coordenadas usadas para el cálculo de vectores o líneas base.

BIBLIOGRAFIA:

Hoffmann -Wellenhof B., Lichtenegger H. & Collins J. *Global Positioning System Theory and Practice*, segunda edición, Springer-Verlag Wien, New York, 1993.

Teunisen P. & Kleusberg A. GPS Observation Equations and Positioning Concepts, *Notas de la Escuela Internacional de GPS para Geodesia.,* Holanda, marzo 26-abril 1, 1995.

Goad C., Single Site GPS Models, *Notas de la Escuela Internacional de GPS para Geodesia.,* Holanda, marzo 26-abril 1, 1995.