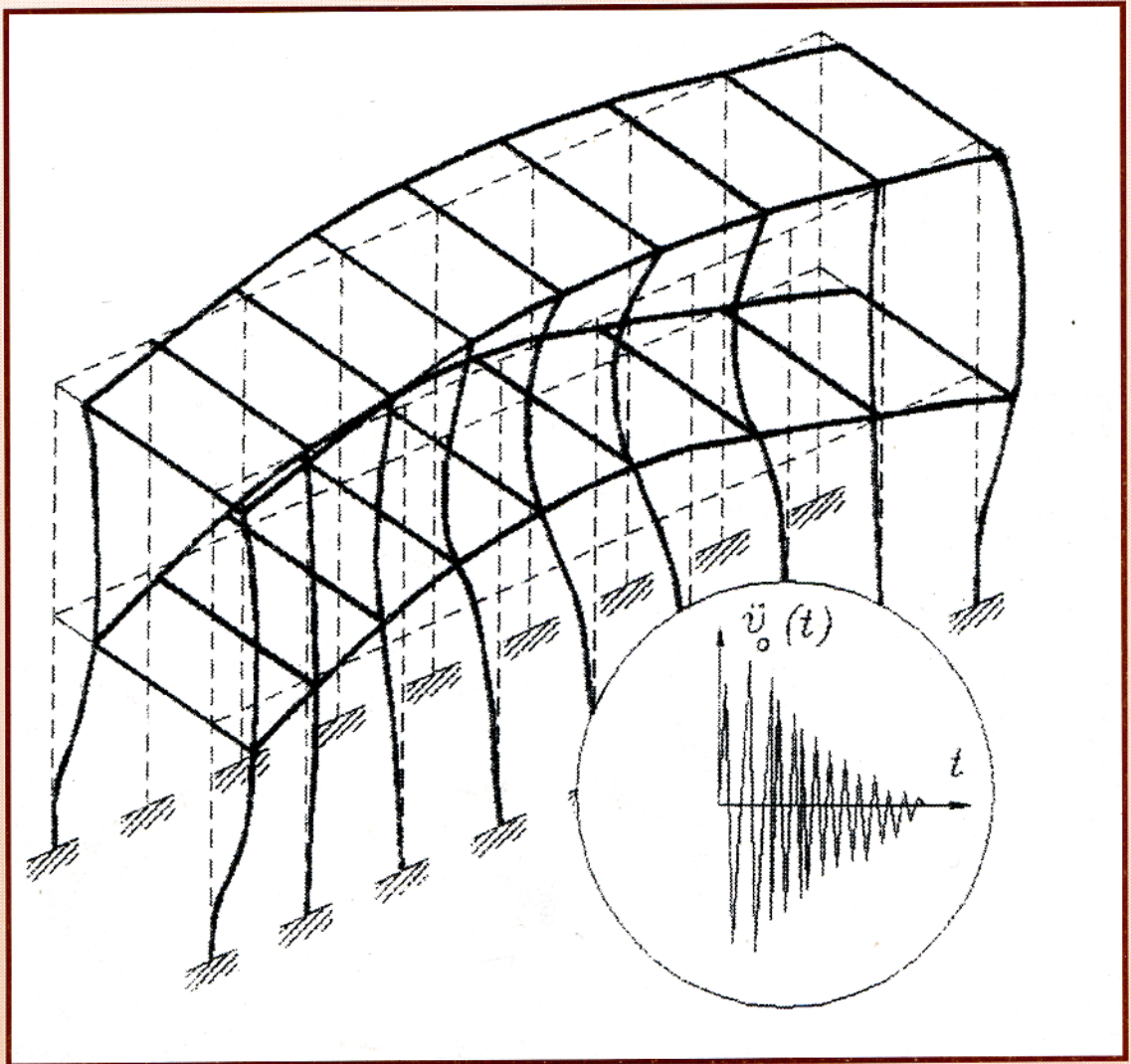


# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
Julio/Diciembre 1997 VOLUMEN 7 Nº 2



# INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica  
Volumen 7, Julio/Diciembre 1997 Número 2

## DIRECTOR

Rodolfo Herrera J.

## CONSEJO EDITORIAL

Víctor Hugo Chacón P.

Ismael Mazón G.

Domingo Riggioni C.

## CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica  
Apartado Postal 75  
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

## CANJES

Universidad de Costa Rica  
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información  
Unidad de Selección y Aquisiciones-CANJE  
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

### Suscripción anual:

Costa Rica: ₡ 1 000,00

Otros países: US \$ 25,00

### Número suelto:

Costa Rica: ₡ 750,00

Otros países: \$ 15,00



# ANÁLISIS ESPACIAL DE EDIFICIOS

Rodolfo Herrera J.

## Resumen

En este artículo se estudia el comportamiento de edificios de muchos pisos considerando simultáneamente las propiedades espaciales del sistema estructural y de las acciones sísmicas, mediante la utilización de un modelo del sistema estructural que considera la deformación de la losa en su plano y una función de excitación del desplazamiento sísmico del suelo no uniforme en el sentido longitudinal del edificio. Son desarrolladas las ecuaciones del movimiento, las funciones respuesta cinemática del sistema (estado de desplazamientos), las funciones sollicitación dinámica (fuerzas sísmicas) y un modelo de estructura sustituta análoga al oscilador de un grado de libertad en términos de coeficientes de forma espaciales, un coeficiente dinámico y unas funciones pseudo-espectrales espaciales. Se hace un análisis preliminar de las diferencias introducidas por el efecto espacial en la predicción de la respuesta sísmica en relación con el modelo plano de análisis.

## Summary

In this paper it is studied the behavior of multistory buildings considering simultaneously the spatial properties of the structural system and seismic actions, with a model that considers the deformation of slab in your plane and a function of excitation of the earthquake ground motions, no uniform in the longitudinal sense of the building. Are developed the equations of motion, the functions of the kinematic response of system (displacements state), the functions of dynamics sollicitations (seismic forces) and the model of structure substitute similar to the system of a degree-of-freedom oscillator in terms of coefficients of spatial form, a dynamic coefficient and functions pseudo-spatial. It is made a preliminary analyze of the differences introduced by the spatial effect in the prediction of the seismic response in relation with the plane model.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las fórmulas para determinar las fuerzas sísmicas en que se basan las *normas*, suponen que la oscilación de todos los puntos del suelo sustentante de las fundaciones del edificio es uniforme. Esto es válido cuando las cargas están muy concentradas o las luces son pequeñas, pudiendo suponerse la misma acción sísmica en todo el edificio. En este caso las variaciones de la onda sísmica longitudinal no afecta los edificios, pero no es así cuando las luces son muy grandes, por lo que entonces hay que considerar la no uniformidad de los desplazamientos de los suelos en toda el área de sustentación de la estructura, así como la deformación de las losas horizontales en su plano. La consideración de los efectos de las sollicitaciones dinámicas sobre un sistema estructural representado con un modelo espacial

permite explicar mejor el comportamiento, explicar muchas fallas y mejorar el diseño. Aunque la investigación en este campo no es nueva [Egupov, Komandrina, 1964], en este artículo se desarrolla una teoría unificada, clarificando los conceptos, agregando nuevos y relacionándolos con las hipótesis usuales en el análisis dinámico de edificios.

Para efecto del análisis se supondrá un *sistema estructural* constituido por un conjunto de subsistemas vinculados: *marcos (pórticos verticales) - muros (diafragmas verticales) - losas (diafragmas o placas horizontales)*, consistiendo de  $n$  niveles. La estructura se supondrá *regular* en planta y en altura, por lo que no hay efectos de torsión que considerar en el análisis por causas de estructuración. Un objeto modelo de la estructura se muestra en la figura 1.

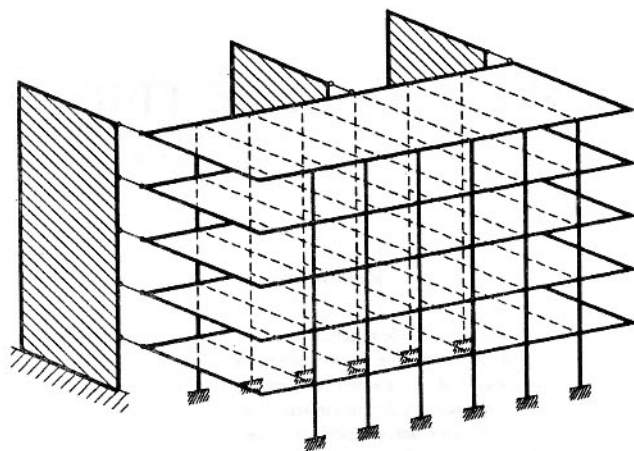


Fig. 1. Modelo de cálculo del edificio

Sea el sistema estructural referido a un marco de referencia fijo  $O'xyz$ , independiente del medio soportante, cuando las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  corresponden a la altura, a la longitud y al ancho transversal del edificio, respectivamente (fig. 1).

Además se suponen las siguientes propiedades de la estructura. Las losas tienen longitud total  $L$  y flexo-rigidez  $B = EI_L$  constante en cada nivel, cuando  $I_L$  es el momento de inercia de la sección de la losa-viga respecto a un eje baricéntrico vertical y  $E'$  es su módulo de elasticidad. Así  $E' = \bar{k}E$ , cuando  $\bar{k} \leq 1$  es un factor que considera el efecto reductor de la rigidez para losas construidas con elementos prefabricados y  $E$  es el módulo de elasticidad del concreto para la losa monolítica. La magnitud de  $\bar{k}$  es un dato empírico, variable para cada tipo constructivo, por ej. para losetas vinculadas en sus bordes de contacto:  $\bar{k} = 1/32$ , compuestas de elementos prefabricados vinculados:  $\bar{k} = 1/15$  [Komandrina, 1964].

Para el análisis la losa se modela como una viga-losa (o viga-pared) de longitud total  $L$  apoyada en sus extremos (en los muros de

borde) y longitudinalmente en los muros o diafragmas intermedios y en los marcos (fig. 1). Se supondrá que puede deflectarse en su propio plano como viga funcionando a lo Saint Venant y despreciándose el efecto de las deformaciones por cortante. Sin embargo en algunos casos será necesario considerar las deformaciones por cortante.

$m_k(y)$  - es la magnitud de la masa por unidad de longitud del edificio, localizada en el nivel  $k$ ,  
 $C_k^{(i)}$  - es la rigidez dinámica transversal de los marcos en el nivel  $k$  y modo  $i$ -ésimo de oscilación;

$C_k^{*(i)}$  - es la rigidez dinámica transversal de los muros en el nivel  $k$  y modo  $i$ -ésimo de oscilación;

$\gamma, \gamma_1$  - son los factores de resistencia inelástica del material o factores de amortiguamiento histerético de las losas en cualquier nivel y de los elementos verticales, respectivamente [ver apéndice];

$K^{(i)} = pC^{(i)}/L$  es la rigidez dinámica de los apoyos verticales o marcos, distribuida longitudinalmente y en el modo  $i$ -ésimo, con

$C_k^{(i)} = C^{(i)}$  constante;  
 $p$  es el número de marcos.

## 2. DESPLAZAMIENTOS: ECUACIÓN CINEMÁTICA

El efecto de una acción sísmica ondulatoria sobre un edificio se representa simplificada considerando un desplazamiento traslatorio horizontal  $v_0(t)$  impreso a la fundación del mismo, no dependiente de las coordenadas espaciales. Esta es la hipótesis usual para el cálculo estructural. La información para este proceso se obtiene del correspondiente *acelerograma*  $\ddot{v}_0(t)$  y *sismograma*  $v_0(t)$ , donde  $v_0(t)$  es el desplazamiento superficial del suelo debido al sismo (fig. 3) respecto al marco de referencia fijo  $O'xyz$ .

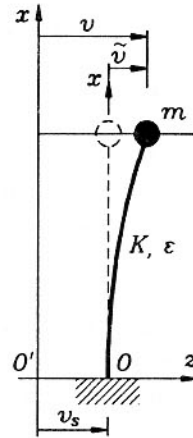


Fig. 2. Oscilador de un grado de libertad (SDOF).

En este trabajo se analizará el caso más general, en el cual el desplazamiento transversal producido por el sismo, cumple con una ley de distribución no constante en el sentido longitudinal de la estructura (fig. 3) y considerando además el efecto de la deformación de la losa en su plano.

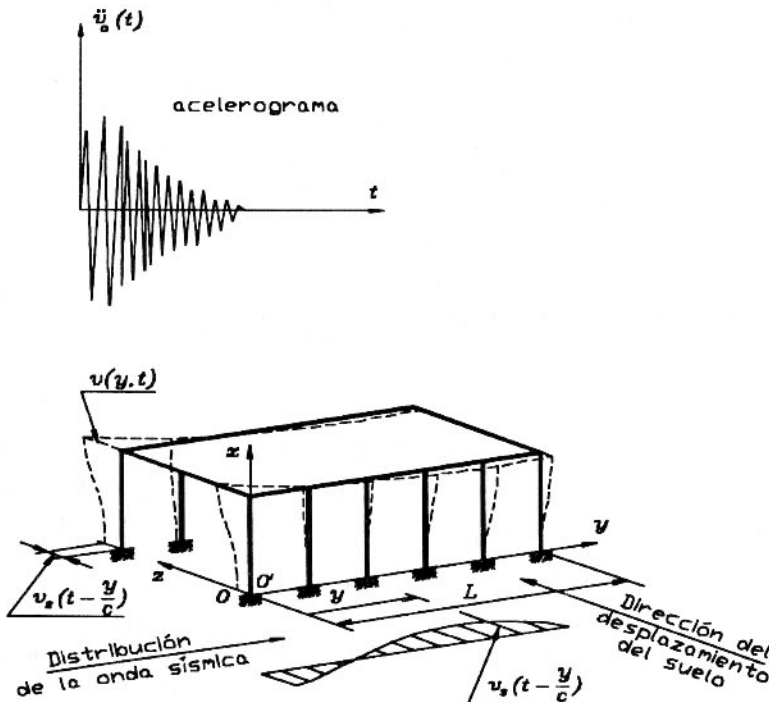


Fig. 3. Esquema con desplazamiento no uniforme del suelo.

Para determinar los efectos del desplazamiento producido por el movimiento sísmico, se introduce un marco de referencia  $Oxyz$  solidario con la fundación del edificio y según el eje longitudinal  $y$  de la losa (fig. 3), el cual tendrá un movimiento traslatorio horizontal de dirección  $z$  (transversal) y de frecuencia circular  $\omega_0$  respecto a  $O'xyz$ .

El estado de desplazamientos del suelo (en la superficie) en todo instante dependerá de la coordenada longitudinal  $y$ , de la velocidad de propagación  $c$  de la onda sísmica (puede variar en el intervalo 0.2-5.6 km/s según el tipo de medio) y del tiempo  $t$ , como sigue:

$$v_s(y, t) = v_s\left(t - \frac{y}{c}\right) \quad [2.1]$$

donde  $v_s$  es la función desplazamiento traslatorio de la fundación durante el sismo (historia del desplazamiento prescrito en los apoyos). Se usará indistintamente como argumento al tiempo retardado  $\bar{t} = t - y/c$ .

En este caso la aceleración  $\ddot{v}_s(y, t)\hat{k}$  respecto al marco fijo, es ahora dependiente de la coordenada longitudinal (fig. 3). El caso particular usual se obtiene cuando la distribución es constante en el sentido longitudinal:  $v_s(y, t) = v_0(t)$ , es decir, el desplazamiento no depende de  $y$ . Análogamente la aceleración será  $\ddot{v}_0(t)$ .

Sean  $\tilde{v}(x_k, y, t)\hat{k}$  el desplazamiento relativo respecto  $O'xyz$  y  $v(x_k, y, t)\hat{k}$  el desplazamiento absoluto respecto a  $Oxyz$ , de un elemento longitudinal de masa en un punto  $P(y, t)$  del eje  $y$  de la losa-viga, respecto a su posición original en  $t = 0$ , ambos en la dirección transversal  $z$ .

Entonces los desplazamientos absoluto, relativo y del suelo, en la dirección  $z$  están relacionados por la siguiente ecuación cinemática (fig. 2 y 3):

$$v(x_k, y, t) = v_s(y, t) + \tilde{v}(x_k, y, t) \quad [2.2]$$

que define el desplazamiento absoluto de un punto  $(x_k, y)$  del eje de la viga-losa en el nivel  $k$  en cada instante, cuando se supone  $v_s$  aplicado estáticamente (desplazamiento pseudo-estático). Cuando se considera que el desplazamiento del suelo en toda la longitud del edificio es uniforme (no depende de  $y$ ), se tiene el caso particular usual, con o sin deformación de la losa:

$$v(x_k, y, t) = v_0(t) + \tilde{v}(x_k, y, t) \quad [2.3]$$

Suponiendo la función no uniforme [2.1] para el desplazamiento la ecuación [2.2] será:

$$v(x_k, y, t) = \tilde{v}(x_k, y, t) + v_s\left(t - \frac{y}{c}\right) \quad [2.4]$$

Hasta aquí no se ha definido la ley de variación de la función desplazamiento. Sin embargo la función desplazamiento sísmico se puede expresar separándola en dos variables, una dependiente y otra independiente del tiempo, a saber:

$$v_s(x, y, t) = v_0(t)F(y) \quad [2.5]$$

cuando  $v_0(t)$  es una función del tiempo de igual magnitud en cualquier coordenada,  $F(y)$  es una función que depende de las condiciones dinámicas del suelo, como la velocidad de las ondas sísmicas  $c$  y de la propiedad longitudinal del edificio  $L$ . Función de desplazamiento pseudo-estático aplicado (estáticamente) a la fundación del edificio. Como ilustración se puede suponer que la función aceleración

sísmica cumple aproximadamente con la siguiente ley empírica:

$$\ddot{v}_s(y, t) = \ddot{v}_0(t) \left[ 1 + \mu_1 \left( 1 - \frac{2y}{L} \right) + \mu_2 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L} \right] = \ddot{v}_0(t) F(y) \quad [2.6]$$

donde  $\mu_1, \mu_2$  son coeficientes que se determinan mediante leyes empíricas que dependen del tipo de medio soportante y específicamente de  $c$  [Sanikov, 1966]. La ley anterior es la sumatoria de tres términos en el orden mostrado: una aceleración puntual, un desplazamiento antisimétrico y otro simétrico. Para representar adecuadamente las acciones sísmicas es necesario conocer la *sismicidad regional*. En general el *grado de sismicidad* se representa con un *coeficiente sísmico*  $k_s$  (*factor de sismicidad* o *amenaza sísmica*), determinado según las propiedades estadísticas de la potencial amenaza sísmica. En la filosofía de diseño usual, expresada en las normas existentes (CSCR, 86), este coeficiente es igual a la *máxima aceleración probable*  $a_{mp}$  o *aceleración pico* como fracción de la gravedad, determinada para una zona geográfica específica:  $k_s = a_{mp}/g$ . Sin embargo, un criterio de diseño más racional deberá incluir las características de las excitaciones sísmicas en el sitio, como los parámetros de *amplitud, duración y período o frecuencia predominante*. Para ello se han desarrollado otros conceptos como el de *aceleración efectiva*, que reflejan mejor el daño potencial de un sistema [Housner, 1982; Zahra, 1982]. Ambos son datos empírico-estadísticos *no estructurales*, es decir, no dependientes del sistema estructural por diseñar, aunque su selección determina criterios distintos de diseño.

### 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO PARA UNA ESTRUCTURA DE UN NIVEL.

Se analizará el caso más general en el que se considera que la losa no se comporta como un diafragma rígido, por lo que será necesario considerar las deformaciones en su plano. Se planteará el problema para estructuras regulares en planta y altura y no se considerará el efecto de las deformaciones por cortante o por inercia rotatoria de la losa.

Utilizando el método de fuerzas se establece como estructura auxiliar el sistema constituido por la losa en un nivel  $k$  y los marcos, y desvinculado de los diafragmas verticales (fig. 4) y sustituida por un modelo de viga-losa (en este caso una viga con deformación a flexión) apoyada elásticamente en los marcos supuestos distribuidos longitudinalmente con una rigidez  $K^{(i)} = pC^{(i)}/L$ , para  $C_k^{(i)} = C^{(i)}$  constante en altura. Esto es válido si se supone un número  $p$  de marcos grande  $p > 4$  (sentido longitudinal), condiciones que permiten sustituir a la disposición discreta de marcos por una continua en cada nivel en el sentido longitudinal. Lo cual está en acuerdo con las dimensiones en planta de la losa, la cual tener una relación largo/ancho mayor que 4 o 5 para no considerar los efectos del cortante.

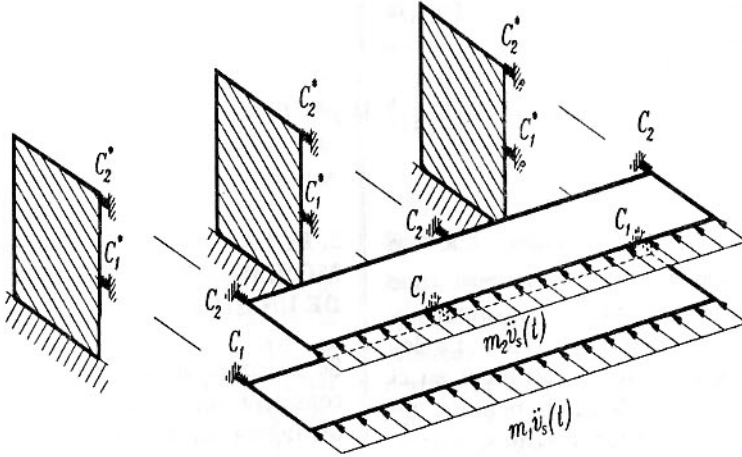


Fig. 4. Modelo cuasi-estático de una estructura espacial

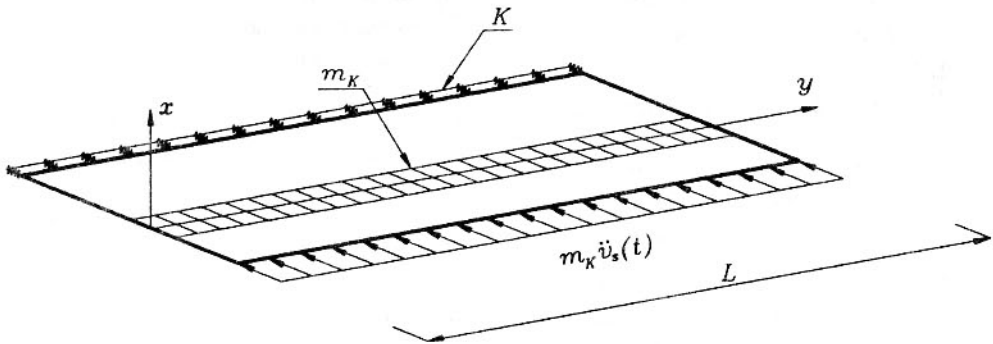


Fig. 5. Modelo cuasi-estático de la losa

Para obtener la ecuación del movimiento para un pedazo elemental de masa  $m_k(y)dy$  de la viga-losa en el nivel  $k$  (fig. 5), se debe establecer la condición estático-dinámica o el *equilibrio dinámico* (D'Alembert) en la dirección  $z$ . En efecto, respecto al marco de referencia fijo

$O'xyz$  las *fuerzas* solicitando la masa elemental en el eje de la viga-losa en un instante dado, expresadas en función del *desplazamiento absoluto*  $v(x_k, y, t)$ , son:

$$f_k = m_k(y) \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2}$$

es la fuerza de inercia absoluta;

$$S(x_k, y, t) = B \frac{\partial^4 v(x_k, y, t)}{\partial y^4} dy$$

es la fuerza elástica restauradora de la losa;



$\frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} S(x_k, y, t)$  - es la fuerza no-elástica restauradora o amortiguamiento de la losa;

$$R(x_k, y, t) = K\tilde{v}dy = K[v(x_k, y, t) - v_s(t - y/c)]dy$$

- es la fuerza restauradora elástica de los marcos, es decir, la resistencia debida a los marcos distribuida en cada modo de oscilación de la estructura, proporcionalmente al desplazamiento producido;

$$\frac{\gamma_1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} R(x_k, y, t) = \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \bar{c}\dot{v} - \text{es}$$

la fuerza inelástica o de amortiguamiento de los marcos [ver apéndice].

Estableciendo la *ecuación de equilibrio dinámico* (D'Alembert) por sumatoria de fuerzas en la dirección  $z$ , se obtiene:

$$m_k(y)dy \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2} = S(x_k, y, t) + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} S(x_k, y, t) + R(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} R(x_k, y, t) \quad [3.1]$$

la cual es la *ecuación diferencial del movimiento oscilatorio de un elemento de masa en el nivel de losa  $k$* . Esta ecuación debe cumplir en cada nivel con las condiciones de frontera o la compatibilidad cinemática con los muros externos e internos del sistema estructural, como se expresará posteriormente.

Esta ecuación se puede expresar en función del desplazamiento y de la aceleración del suelo, que son los datos empíricos obtenidos del *sismograma* y del *acelerograma*.

Sustituyendo en la [3.1] las expresiones para  $S$  y  $R$  resulta:

$$m_k(y)dy \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2} = B \frac{\partial^4 v(x_k, y, t)}{\partial y^4} dy + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ B \frac{\partial^4 v(x_k, y, t)}{\partial y^4} dy \right] + K \left[ v(x_k, y, t) - v_s \left( t - \frac{y}{c} \right) \right] dy + \frac{\gamma_1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ K \left[ v(x_k, y, t) - v_s \left( t - \frac{y}{c} \right) \right] dy \right\} \quad [3.2]$$

y luego eliminando  $dy$ , la ecuación [3.1] tiene la siguiente forma:

$$B \frac{\partial^4 v(x_k, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 v(x_k, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + K v(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial v(x_k, y, t)}{\partial t} + m_k(y) \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2} = K v_s \left( t - \frac{y}{c} \right) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial}{\partial t} v_s \left( t - \frac{y}{c} \right) \quad [3.4]$$

la cual es la *ecuación diferencial del movimiento oscilatorio de la estructura en el nivel de losa  $k$* . El miembro derecho es la *fuerza*

*efectiva* expresada en términos de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Esta expresión es rara vez usada para el cálculo de la

respuesta sísmica, en especial porque los principales datos son obtenidos en términos de las aceleraciones del suelo.

La influencia del segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior puede despreciarse, por lo que resulta una ecuación en términos de la función del *desplazamiento del suelo*  $v_s(t - y/c)$ :

$$B \frac{\partial^4 v(x_k, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 v(x_k, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + K v(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial v(x_k, y, t)}{\partial t} + m_k(y) \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2} = K v_s \left( t - \frac{y}{c} \right) \quad [3.5]$$

Diferenciando ahora dos veces esta ecuación respecto al tiempo, resulta una ecuación en términos de la función de la *aceleración absoluta* del sistema (de la masa distribuida en el nivel de losa):

$$B \frac{\partial^4 \bar{v}(x_k, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 \bar{v}(x_k, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + K \bar{v}(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial \bar{v}(x_k, y, t)}{\partial t} + m_k(y) \frac{\partial^2 \bar{v}(x_k, y, t)}{\partial t^2} = K \ddot{v}_s(t - y/c) \quad [3.6]$$

donde la *aceleración absoluta* del sistema es:

$$\bar{v}(x_k, y, t) = \frac{\partial^2 v(x_k, y, t)}{\partial t^2} \quad [3.7]$$

Así se han obtenido dos ecuaciones diferenciales [3.5] y [3.6] describiendo al movimiento de la losa del edificio bajo la acción de una onda sísmica oscilatoria de la fundación. La primera

[3.5] requiere de la información del *sismograma* y la segunda [3.6] del *acelerograma*. Sustituyendo de la [2.4] en la [3.4], el desplazamiento absoluto en términos del relativo y de arrastre, resulta:

$$B \frac{\partial^4 [\bar{v}(x_k, y, t) + v_s(\bar{t})]}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 [\bar{v}(x_k, y, t) + v_s(\bar{t})]}{\partial y^4 \partial t} + K [\bar{v}(x_k, y, t) + v_s(\bar{t})] + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial [\bar{v}(x_k, y, t) + v_s(\bar{t})]}{\partial t} + m_k(y) \frac{\partial^2 [\bar{v}(x_k, y, t) + v_s(\bar{t})]}{\partial t^2} = K v_s(\bar{t}) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} v_s(\bar{t}) \quad [3.8]$$

o simplificando resulta la ecuación del movimiento en términos de la *aceleración relativa* y la *aceleración de arrastre o sísmica*:

$$B \frac{\partial^4 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + K \tilde{v}(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K \frac{\partial \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial t} +$$

$$+ m_k(y) \frac{\partial^2 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial t^2} = -B \frac{\partial^4 v_s \left( t - \frac{y}{c} \right)}{\partial y^4} - \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 v_s \left( t - \frac{y}{c} \right)}{\partial y^4 \partial t} - m_k(y) \frac{\partial^2 v_s \left( t - \frac{y}{c} \right)}{\partial t^2}$$

[3.9]

El sentido físico de la [3.9] se puede deducir del estudio de cada uno de sus términos. Así en el miembro derecho de la ecuación se tiene la *carga efectiva* cuyo primer término representa al efecto de la resistencia elástica de la losa; el segundo al efecto del amortiguamiento de la losa; y el último a las *fuerzas de inercia de arrastre* actuando sobre la losa, todos en la suposición de que el nivel de la losa se desplazara conjuntamente con el desplazamiento de la fundación. La sumatoria del miembro izquierdo representa a la fuerza resistente en el nivel  $k$  de la estructura, resultado de la sumatoria de las fuerzas objetivas resistentes y la fuerza ficticia relativa, suma la cual por equilibrio dinámico, es igual a las *fuerzas efectivas* que producen la excitación forzada solicitando la fundación.

Este resultado se puede sintetizar como sigue:

*La fuerza sísmica que solicita a un edificio en el nivel de la losa, durante un movimiento oscilatorio producido por una onda sísmica transversal, es equivalente a la aplicación en ése nivel de una fuerza ficticia de arrastre horizontal. Esta fuerza de arrastre es igual a la suma de una fuerza de restauradora elástica de la losa, una fuerza amortiguadora inelástica o de amortiguamiento de la losa y una fuerza de inercia, aplicadas en el nivel de la losa y considerando a ésta aislada de la estructura y*

*moviéndose en conjunto con la fundación, es decir, con el marco de referencia solidario con ella. Esto equivale a un movimiento forzado, en donde la fuerza dinámica efectiva no solo depende de la masa y de la aceleración del suelo, sino también de las propiedades mecánico-estructurales de la losa.*

Si las propiedades mecánicas de rigidez y amortiguamiento de las losas son iguales en cada piso, la magnitud de los términos del miembro derecho de la [3.9] son iguales en cada nivel. Para estudiar la magnitud relativa de los dos primeros términos del miembro derecho de la [3.9], respecto al tercero, se puede usar la ley [2.6] para la aceleración sísmica, lo cual permite demostrar que en general se pueden despreciar.

#### 4. ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO PARA UNA ESTRUCTURA DE MUCHOS NIVELES.

Se tratará ahora el análisis del sistema estructural con  $n$  niveles (o grados de libertad transversal).

Despreciando los dos primeros términos del miembro derecho de la [3.8], el sistema estructural estará solicitado por una familia de fuerzas de inercia efectivas aplicadas en cada nivel de piso, según el vector de inercia (fig. 5):

$$f_k = -m_k \ddot{v}_s(\bar{t}) = [-m_1 \ddot{v}_s(\bar{t}), -m_2 \ddot{v}_s(\bar{t}), \dots, -m_n \ddot{v}_s(\bar{t})] \tag{4.1}$$

donde  $\bar{t} = t - y/c$  y se está considerando a la masa independiente de  $y$ .

Es posible para el análisis de la estructura desmembrarla en elementos planos (fig. 5). Para descomponer la estructura espacial en elementos planos se deben cumplir con las siguientes condiciones o hipótesis: (i) igualdad de rigidez de los componentes verticales de apoyo y del empuje elástico correspondiente; (ii) igualdad de las frecuencias de oscilación de las losas aisladas de la estructura; (iii) semejanza de las formas de flexión o de los modos de oscilación de los elementos verticales aislados de la estructura.

Utilizando el método de fuerzas se establece, para la estructura auxiliar al sistema de  $n$  niveles constituido por las losas y los marcos desvinculados de los diafragmas verticales, debe cumplir con la ecuación de compatibilidad de los desplazamientos en el nivel del primer piso. La condición de compatibilidad de los desplazamientos en los otros pisos se establece automáticamente. La amplitud de las fuerzas de inercia sobre los elementos componentes, deben ser proporcionales a las masas y a los desplazamientos de los apoyos elásticos (muros, marcos), entonces se puede escribir el sistema de ecuaciones desacopladas siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{v}_s(\bar{t}) &= m_1 X_1(x_1) \psi_1(\bar{t}) + m_1 X_2(x_1) \psi_2(\bar{t}) + \dots + m_1 X_n(x_1) \psi_n(\bar{t}) \\ m_2 \ddot{v}_s(\bar{t}) &= m_2 X_1(x_2) \psi_1(\bar{t}) + m_2 X_2(x_2) \psi_2(\bar{t}) + \dots + m_2 X_n(x_2) \psi_n(\bar{t}) \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \ddot{v}_s(\bar{t}) &= m_n X_1(x_n) \psi_1(\bar{t}) + m_n X_2(x_n) \psi_2(\bar{t}) + \dots + m_n X_n(x_n) \psi_n(\bar{t}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$m_k \ddot{v}_s(\bar{t}) = \sum_{i=1}^n m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) \quad k = 1, \dots, n \tag{4.3}$$

donde  $X_i(x_k) = X[x_k; C_1^{(i)}]$  es la magnitud del desplazamiento de la configuración del modo  $i$ -ésimo de los elementos verticales de apoyo (plano transversal al edificio). Es decir, es la función forma o modal en el sentido vertical. La función  $m_k X_i(x_k)$  se suele

denominar el factor de excitación sísmica modal, evidentemente diferente para cada modo.

Las funciones  $\psi_i(\bar{t})$  se determinan mediante la solución de las ecuaciones [4.2]. En efecto de la condición de ortogonalidad de los modos de flexión de los componentes de apoyo (o base elástica constituida por los marcos), resulta:

$$m_1 X_i(x_1) X_j(x_1) + m_2 X_i(x_2) X_j(x_2) + \dots + m_n X_i(x_n) X_j(x_n) = 0 \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k) X_j(x_k) = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad [4.4]$$

Multiplicando cada una de las ecuaciones de [4.2] por  $X_i(x_1), X_i(x_2), \dots, X_i(x_n)$  y sumándolas, resulta:

$$\begin{aligned} & -\ddot{v}_s(\bar{t}) [m_1 X_i(x_1) + m_2 X_i(x_2) + \dots + m_n X_i(x_n)] = \\ & = \psi_1(\bar{t}) [m_1 X_1(x_1) X_i(x_1) + m_2 X_1(x_2) X_i(x_2) + \dots + m_n X_1(x_n) X_i(x_n)] + \\ & + \dots + \psi_i(\bar{t}) [m_1 X_i^2(x_1) + m_2 X_i^2(x_2) + \dots + m_n X_i^2(x_n)] \\ & + \dots + \psi_n(\bar{t}) [m_1 X_n(x_1) X_i(x_1) + m_2 X_n(x_2) X_i(x_2) + \dots + m_n X_n(x_n) X_i(x_n)] \end{aligned} \quad [4.5]$$

De la condición de ortogonalidad [4.4], resulta:

$$\psi_i(\bar{t}) = -\frac{\ddot{v}_s(\bar{t}) [m_1 X_i(x_1) + m_2 X_i(x_2) + \dots + m_n X_i(x_n)]}{[m_1 X_i^2(x_1) + m_2 X_i^2(x_2) + \dots + m_n X_i^2(x_n)]} \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad [4.6]$$

o también:

$$\psi_i\left(t - \frac{y}{c}\right) = \psi_i(\bar{t}) = -\ddot{v}_s\left(t - \frac{y}{c}\right) \frac{\sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} \quad [4.7]$$

donde el segundo factor del miembro derecho se suele denominar *factor de participación*, pues caracteriza la diferencia entre la respuesta de un sistema SDOF y la de un *sistema generalizado* a sistemas estructurales de varios niveles (MSDOF), a saber:

$$g_i = \frac{\sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} = \frac{\bar{L}}{M^*} \quad [4.8]$$

el cual depende de la distribución de la *masa* en sentido vertical y de la *función modal*, y además es una constante para cada modo. Los términos  $\bar{L}$  y  $M^*$  se llaman *factor de excitación sísmica modal* y *masa generalizada* del sistema respectivamente, cuando la estructura tiene más de un nivel, en el modo  $i$ .

Ahora se puede estudiar el movimiento oscilatorio forzado de la losa desacoplada del nivel  $k$ , bajo la sollicitación de las *fuerzas de inercia efectivas* aplicadas en cada nivel, representadas por el vector:

$$m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) = [m_1 X_i(x_1) \psi_i(\bar{t}), m_2 X_i(x_2) \psi_i(\bar{t}), \dots, m_n X_i(x_n) \psi_i(\bar{t})] \quad [4.9]$$

sustituyendo [4.7] resulta:

$$f_k = -m_k X_i(x_k) \frac{\sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} \ddot{v}_s(\bar{t}) \quad [4.10]$$

$$B \frac{\partial^4 \tilde{v}_i(x_k, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^5 \tilde{v}_i(x_k, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + K^{(i)} \tilde{v}_i(x_k, y, t) + \frac{\gamma_1}{\omega_0} K^{(i)} \frac{\partial \tilde{v}_i(x_k, y, t)}{\partial t} + m_k \frac{\partial^2 \tilde{v}_i(x_k, y, t)}{\partial t^2} = m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) \quad [4.11]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio de la  $k$ -ésima losa desmembrada de la estructura, para el  $i$ -ésimo modo vertical.

Sustituyendo en la [3.8], que es la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio de una losa en el nivel  $k$  para el modo  $i$  (para una estructura de un nivel), a la fuerza efectiva  $m_k \ddot{v}_s(t - y/c)$  por  $m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t})$  y despreciando la magnitud de los dos primeros términos del miembro derecho de esa ecuación [3.8], se tiene la expresión siguiente

Además la función  $\tilde{v}(x_k, y, t)$  debe cumplir las siguientes condiciones de frontera y compatibilidad de los desplazamientos entre la viga-losa (viga-pared) y los soportes discretos (muros, etc.):

$$\begin{aligned} \left[ B \frac{\partial^2 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^3 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^2 \partial t} \right]_{y=0, L} &= 0 \\ \left[ B \frac{\partial^3 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^3} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^4 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^2 \partial t} \right]_{y=0, L} &= \mp \left[ C_1^{*(i)} \zeta_k \tilde{v}(x_k, y, t) + \frac{\gamma}{\omega_0} C_1^{*(i)} \zeta_k \frac{\partial \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial t} \right]_{y=0, L} \\ \left[ B \frac{\partial^3 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^3} + \frac{\gamma}{\omega_0} B \frac{\partial^4 \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial y^3 \partial t} \right]_{y_p-0}^{y_p+0} &= \left[ C_{1p}^{(i)} \zeta_k \tilde{v}(x_k, y, t) + \frac{\gamma}{\omega_0} C_{1p}^{(i)} \zeta_k \frac{\partial \tilde{v}(x_k, y, t)}{\partial t} \right] \quad [4.12] \end{aligned}$$

donde  $y_p$  es la coordenada que define la posición de cada muro de apoyo respecto al marco de referencia del sistema estructural usado;  $C_1^{(i)}$  y  $C_{1p}^{(i)}$  son las rigideces dinámicas  $i$ ésimo modo en el nivel 1 respectivamente, del marco de apoyo y de los muros de apoyo y

$\zeta_k = C_k / C_1$ . El momento flector en los extremos de la losa se puede despreciar, puesto que su rigidez en torsión es muy pequeña comparada con la de los muros de apoyo.

### 5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO.

La solución de la ecuación [4.11] se puede plantear por separación de variables, expresando el desplazamiento relativo del eje de la viga-losa como sigue:

$$\tilde{v}(x_k, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(y) f_j(t) \quad [5.1]$$

donde la función  $V_j(y)$  es una función de la coordenada  $y$  que representa la forma o el modo de la vibración de la losa en el modo  $j$  en el sentido longitudinal y  $f_j(t)$  es un parámetro función del tiempo, una coordenada generalizada que determina la amplitud del movimiento. Lo anterior expresa la hipótesis de que la forma de vibración de las vigas-losa no cambian con el tiempo (se asume que en el plano se deforma con una única forma estacionaria en cada modo) variando solo la amplitud del movimiento. Por las hipótesis expresadas en el art. 4, la frecuencia de oscilación y el modo de oscilación de todas las

losas son iguales, es decir, se asume que  $V_j(y)$  es igual para todas las losas del sistema estructural.

En este caso para determinar la frecuencias y los modos de oscilación se pueden despreciar las fuerzas de amortiguamiento ( $\gamma = \gamma_1 = 0$ ) sin afectar los resultados. La función  $V_j(y)$  satisface para oscilaciones libres no amortiguadas la ecuación siguiente:

$$BV_j''''(y) + (K_i - m_k \omega_{ij}^2) V_j(y) = 0 \quad [5.2]$$

donde  $\omega_{ij}$  es la frecuencia de oscilación del sistema estructural libre no amortiguado y se supone para simplicidad y sin perder generalidad a la masa constante en el sentido longitudinal, es decir,  $m_k(y) = m_k = \text{constante}$ . Sustituyendo en la [4.9] y arreglando términos y haciendo la aproximación empírica de que  $\gamma = \gamma_1$ , resulta:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ m_k \ddot{f}_j(t) + \frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) + m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) \right\} V_j(y) = m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) \quad [5.3]$$

El usar en esta expresión a la frecuencia no amortiguada ( $\omega'_{ij} \approx \omega_{ij}$ ) para efectos de cálculo no afecta los resultados del análisis, pues la magnitud de  $\xi_{ij} = \xi$  para edificios es comparativamente pequeña (para concreto reforzado  $0.03 < \xi < 0.07$  y para acero  $0.0 < \xi < 0.03$ ).

La [5.3] se puede escribir como:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j(t) V_j(y) = m_k(y) X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) \quad [5.4]$$

Multiplicando la [5.4] por  $V_\rho(y)$  e integrando de 0 a  $L$  y aplicando la condición de ortogonalidad

$$\int_0^L V_j(y)V_\rho(y)dy = 0 \text{ resulta:}$$

$$m_k(y)X_i(x_k)\int_0^L \psi_i(\bar{t})V_\rho(y)dy = P_\rho(t)\int_0^L V_\rho^2(y)dy$$

de donde

$$P_\rho(t) = \frac{m_k(y)X_i(x_k)\int_0^L \psi_i(\bar{t})V_\rho(y)dy}{\int_0^L V_\rho^2(y)dy} \quad [5.5]$$

y sustituyendo en la [5.4]:

$$m_k(y)X_i(x_k)\psi_i(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_k(y)X_i(x_k)\int_0^L \psi_i(\bar{t})V_j(y)dy}{\int_0^L V_j^2(y)dy} V_j(y) \quad [5.6]$$

y de la [5.3]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ m_k \ddot{f}_j(t) + \frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) + m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) \right\} V_j(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_k(y)X_i(x_k)\int_0^L \psi_i(\bar{t})V_j(y)dy}{\int_0^L V_j^2(y)dy} V_j(y)$$

$$m_k \ddot{f}_j(t) + \frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) + m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) = \frac{m_k(y)X_i(x_k)\int_0^L \psi_i(\bar{t})V_j(y)dy}{\int_0^L V_j^2(y)dy} \quad [5.7]$$

y entonces la solución de la anterior ecuación será:

$$f_j(t) = \frac{X_i(x_k)}{\omega_{ij} \int_0^L V_j^2(y)dy} \int_0^t e^{-\epsilon_{ij}(t-\tau)} \int_0^L \psi_i(\bar{t})V_j(y)dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)]d\tau \quad [5.8]$$

donde  $\bar{t} = \tau - y/c$ . Sustituyendo en la anterior la expresión para  $\psi_i$  de la [4.7], resulta:



$$f_j(t) = - \frac{X_i(x_k) \sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)}{\omega_{ij} \int_0^L V_j^2(y) \sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} \int_0^t e^{-\varepsilon_y(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s(\bar{t}) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau$$

$$f_j(t) = - \frac{\eta_i(x_k)}{\int_0^L V_j^2(y)} \frac{1}{\omega_{ij}} \int_0^t e^{-\varepsilon_y(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s(\bar{t}) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau$$

[5.9]

donde

$$\eta_i(x_k) = \frac{X_i(x_k) \sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} \tag{5.10}$$

es un *coeficiente de forma* en sentido vertical que depende de las características dinámicas del sistema estructural con independencia del movimiento sísmico y que se puede considerar como un coeficiente de corrección o de equivalencia de la respuesta dinámica de un sistema estructural de  $n$  masas (o de varios niveles o grados de libertad) para obtener un sistema equivalente de una sola masa o un grado de libertad (SDOF). Obsérvese que  $\eta \leq 1$

decrece con el aumento de  $n$ ; para  $n = 1$ ,  $\eta_i = 1$ . El término

$m_e = \eta m = m X \bar{L} / M^*$  se denomina *masa equivalente* del sistema estructural de  $n$  niveles para un MSDOF:

Introduciendo la expresión [5.9] en la serie [5.1] se obtiene la función que representa el *estado de desplazamientos relativos* de la estructura, a saber:

$$\tilde{v}_{ij} = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(x_k, y, t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta_i(x_k) V_j(y)}{\int_0^L V_j^2(y)} \frac{1}{\omega_{ij}} \int_0^t e^{-\varepsilon_y(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s(\bar{t}) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \tag{5.11}$$

En la práctica se incluyen solo las respuestas modales significativas. Cada término de esta serie es la función desplazamiento en cada instante o la respuesta cinemática del sistema en

el modo  $ij$  de oscilación del sistema estructural. Obsérvese que para integrar de 0 a  $L$  se debe considerar que para la función es nula. La [5.11] se puede escribir como sigue:

$$\tilde{v}_{ij}(x_k, y, t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \eta_i(x_k) \bar{v}(y) \frac{1}{\omega_{ij}} \int_0^t e^{-\varepsilon_y(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s\left(\tau - \frac{y}{c}\right) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \tag{5.12}$$

donde

$$\bar{\tau}_j(y) = \frac{V_j(y)}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [5.13]$$

es un *coeficiente coeficiente modal factor* o *factor de participación* en el sentido longitudinal, que depende de las características dinámicas del sistema estructural con independencia del movimiento sísmico. Aquí, por las hipótesis hechas en el artículo 4:  $V_j(y)$

y  $\omega_{ij}$ , son iguales para todas las losas y análogamente este coeficiente de forma.

De la [5.12] se observa que el *estado de desplazamientos relativos* depende de la función o *integral de la respuesta sísmica*:

$$U(t) = \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \int_0^L \bar{v}_s \left( \tau - \frac{y}{c} \right) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \quad [5.14]$$

la cual es determinada por las *características dinámico-estructurales*, para una frecuencia  $\omega_0$  del suelo, a saber: la relación  $\omega_{ij}/\omega_0$  o razón entre la frecuencias de oscilación del sistema estructural  $\omega_{ij}$  y de la onda sísmica  $\omega_0$ ; de las características del amortiguamiento del sistema  $\varepsilon_{ij}$ ; de las propiedades dinámicas de la onda sísmica y el medio de propagación o función aceleración sísmica  $\bar{v}_s$ ; y finalmente de la función de forma o modal en el sentido longitudinal  $V_j(y)$ , dependiente de las propiedades mecánicas de las losas. Por tanto:

*Para un sistema estructural en el que se consideran los efectos de la deformación espacial de la losa y para una distribución no uniforme en sentido longitudinal de las aceleraciones sísmicas (dependientes de la coordenada longitudinal), el comportamiento cinemático del modelo espacial es determinado por una función tal que su integral de respuesta sísmica depende de la velocidad de*

*propagación de la onda sísmica, de las propiedades del suelo y de la función forma longitudinal.*

## 6. DESPLAZAMIENTO RELATIVO MÁXIMO

Los resultados anteriores permiten intentar estudiar la respuesta sísmica mediante el enfoque usual de la integral de Duhamel y el concepto de *espectro de respuesta* estandar [Housner, 59, 82], es decir, siguiendo el postulado de que la probabilidad de falla de una estructura bajo carga sísmica se puede calcular utilizando un modelo o oscilador equivalente, constituido por un sistema de un grado de libertad (SDOF). Para ello se estudiará a la integral de la respuesta sísmica [5.14] y en analogía se harán las siguientes definiciones. Para determinar la *magnitud máxima del desplazamiento relativo* se define el *parámetro pseudo-desplazamiento espectral espacial* siguiente:

$$\bar{S}_d = \frac{1}{\omega_{ij}} \max_t \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s \left( \tau - \frac{y}{c} \right) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \right| \quad [6.1]$$

definido para un sistema estructural con  $\varepsilon$  o  $\xi$  dados y para cada sismo o función sísmica excitadora.

También se define la función *seudo-velocidad espectral espacial* tal que  $\bar{S}_v = \omega_{ij} \bar{S}_d$ , a saber:

$$\bar{S}_v = \max_t \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s \left( \tau - \frac{y}{c} \right) V_j(y) dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \right| \quad [6.2]$$

También se define la *seudo-aceleración espectral espacial* como sigue:

$$\bar{S}_a = \omega_{ij} \bar{S}_v = \omega_{ij}^2 \bar{S}_d \quad [6.3]$$

El *desplazamiento relativo máximo* (o el valor máximo de la respuesta relativa a la excitación sísmica) para el modo  $ij$  se puede calcular como el máximo de cualquiera de las series [5.12] y

[5.11] y expresar aproximadamente en función del *seudo-desplazamiento espectral espacial* o de la *seudo-velocidad espectral espacial* definidos, así:

$$\tilde{v}_{\max}(x_k, y, t) = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \frac{\bar{S}_v}{\omega_{ij}} = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \bar{S}_d \quad [6.4]$$

Como el sentido de la respuesta sísmica no tiene importancia en general, se ha quitado el signo negativo en la expresión anterior. En analogía con el SDOF (sistema de un grado de libertad, fig. 3), se puede obtener lo siguiente:

(fig.6), cuyos espectros de *seudo-desplazamiento* o *velocidad* son dependientes de la frecuencia y amortiguamiento espacial y de otras propiedades dinámicas de la estructura (modo de oscilación de la losa) y de la función de aceleración sísmica dependiente del tiempo y de las propiedades dinámicas del suelo (forma de propagación de la onda sísmica).

La respuesta cinemática del "modelo espacial" es *equivalente* a un "oscilador espacial" (OE)

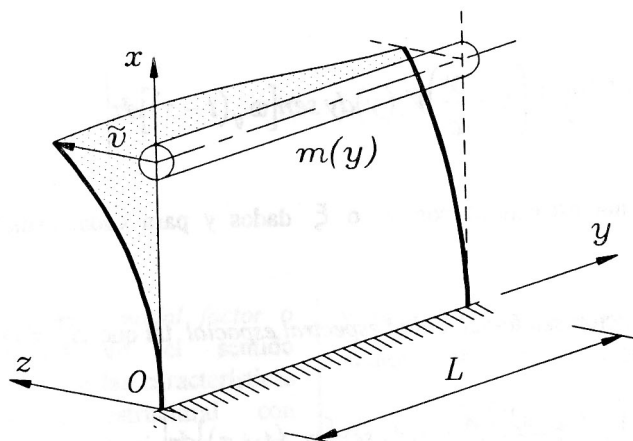


Fig. 6. Oscilador espacial (OE).

Si se expresan los *parámetros espectrales espaciales* definidos por las [6.1], [6.2] y [6.3] en términos de la función  $F(y)$ , se obtiene la expresión siguiente para la *seudo-velocidad espectral espacial*:

$$U(t) = \int_0^L F(y)V_j(y)dy \times \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \text{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)]d\tau \quad [6.5]$$

a partir de la cual se podría obtener una expresión para la función velocidad. Sin embargo, como se conoce, si se usa la función *seudo-velocidad espectral* esta se aproxima en un  $\pm 5\%$ , que sigue siendo válida en este caso. Entonces:

$$\bar{S}_v = \int_0^L F(y)V_j(y)dy \times \max_t \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \text{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)]d\tau \right| \quad [6.6]$$

$$\bar{S}_v = \int_0^L F(y)V_j(y)dy \times S_v^e \quad [6.7]$$

donde

$$S_v^e = \max_t \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \text{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)]d\tau \right| \quad [6.8]$$

es análoga en forma a la *seudo-velocidad espectral*  $S_v$  para un sistema simple (SDOF), pero cuya frecuencia ahora incluye a la frecuencia de oscilación del sistema estructural (de la losa y de los elementos verticales de apoyo).

Por [6.3] la *seudo-aceleración espectral espacial* se puede expresar como sigue:

$$\bar{S}_a = \omega_{ij} \bar{S}_v = \int_0^L F(y) V_j(y) dy \times \omega_{ij} S_v^e = \omega_{ij}^2 \bar{S}_d \quad [6.9]$$

Cumplen con las mismas relaciones que las funciones espectrales para un SDOF:  $S_a = \omega_{ij} S_v = \omega_{ij}^2 S_d$ .

El desplazamiento máximo relativo para el modo  $ij$  resulta para este caso de la [6.4]:

$$\tilde{v}_{\max}(x_k, y, t) = \eta_i(x_k) \tilde{\tau}_j(y) \times \frac{S_v^e}{\omega_{ij}} = \eta_i(x_k) \tilde{\tau}_j(y) \times S_d^e \quad [6.10]$$

donde

$$\tilde{\tau}_j(y) = \frac{V_j(y) \int_0^L F(y) V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [6.11]$$

es un coeficiente de forma espacial general que depende de las características dinámicas del sistema estructural (*modos de oscilación* en el sentido longitudinal) y de las propiedades de medio soportante (velocidad de propagación de la onda sísmica). Es decir, al contrario de los coeficientes de forma  $\eta$  y  $\bar{\tau}$ ,  $\tilde{\tau}(y)$  depende del medio en el que se produce el movimiento sísmico y por las hipótesis hechas es igual para cada nivel. De lo anterior resulta:

La respuesta cinemática del "modelo espacial" es equivalente a la de un "oscilador espacial" (OE) (fig. 6), cuyos espectros de pseudo-desplazamiento o velocidad son dependientes de la frecuencia y del amortiguamiento espacial, y de la función aceleración sísmica solo dependiente del tiempo, respuesta modificada por coeficientes de forma espaciales: verticales y

longitudinales para cada modo de oscilación, que dependen de las propiedades dinámicas-estructurales del sistema estructural y de las propiedades dinámicas del suelo (forma de propagación de la onda sísmica).

Obsérvese que ahora la analogía con el SDOF es más completa, pues las características de los espectros son análogas, salvo en la consideración de la frecuencia y amortiguamiento espacial del sistema. Se podría decir que OE es un SDOF generalizado.

El vector desplazamiento relativo máximo del sistema estructural para todas las respuestas modales, se puede escribir en forma matricial como sigue:

$$\{\tilde{v}_{k\max}\} = X_i(x_k) V_j(y) \left\{ g_i(x_k) \hat{\tau}_j(y) \times \frac{S_v^e}{\omega_{ij}} \right\} = X(x_k) V(y) \{ g_i(x_k) \hat{\tau}_j(y) \times S_d^e \} \quad [6.12]$$

donde:

$$\hat{\tau}_j(y) = \frac{\int_0^L F(y) V_j^2(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [6.13]$$

es un coeficiente de participación modal en el sentido longitudinal. Los vectores modales  $X_i(x_k)$  y  $V_j(y)$  son matrices columna y hilera respectivamente y contienen a todas las formas o configuraciones modales que corresponden a la excitación. El vector entre paréntesis representa a un vector para cada modo considerado en el análisis.

## 7. FUERZAS SÍSMICAS

La función para la fuerza sísmica en cada nivel  $k$  es función de la aceleración absoluta y se puede obtener como sigue:

$$s_{ij}(x_k, y, t) = -m_k \frac{\partial^2 \tilde{v}_{ij}(x_k, y, t)}{\partial t^2} - m_k \frac{\partial^2 v_s(t - y/c)}{\partial t^2} \quad [7.1]$$

sustituyendo de la [4.3]:

$$s_{ij}(x_k, y, t) = -m_k \frac{\partial^2 \tilde{v}_{ij}(x_k, y, t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n m_k X_i(x_k) \psi_i(\bar{t}) \quad [7.2]$$

de la [5.6] resulta:

$$s_{ij}(x_k, y, t) = -m_k \frac{\partial^2 \tilde{v}_{ij}(x_k, y, t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_k X_i(x_k) \int_0^L \psi_i(\bar{t}) V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} V_j(y) \quad [7.3]$$

De la [5.7]:

$$m_k \ddot{f}_j(t) = -\frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) - m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_k X_i(x_k) \int_0^L \psi_i(\bar{t}) V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [7.4]$$

De [5.1]  $\partial^2 \tilde{v}_{ij}(x_k, y, t) / \partial t^2 = V_j(y) \ddot{f}_j(t)$  y sustituyendo en la [7.3] resulta:

$$-m_k V_j(y) \ddot{f}_j(t) = \left[ \frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) + m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_k X_i(x_k) \int_0^L \psi_i(\bar{t}) V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \right] V_j(y)$$

Sustituyendo esta expresión en la [7.3] se tiene:

$$s_{ij}(x_k, y, t) = \left[ \frac{\gamma}{\omega_0} m_k \omega_{ij}^2 \dot{f}_j(t) + m_k \omega_{ij}^2 f_j(t) \right] V_j(y) \quad [7.5]$$

Si se desprecia el primer término del amortiguamiento ( $\xi = 0$ ), resulta la expresión siguiente para la fuerza sísmica en cada nivel  $k$ , que en general es una buena aproximación, pues siempre  $\xi$  es pequeño:

$$s_{ij}(x_k, y, t) = m_k \omega_{ij}^2 V_j(y) f_j(t) = m_k \omega_{ij}^2 \tilde{v}(x_k, y, t) \quad [7.6]$$

De la anterior se obtiene la máxima fuerza sísmica respecto al tiempo en cada nivel  $k$ , correspondiente a los  $ij$ -ésimo modo de la vibración del edificio, a saber:

$$s_{ij}(x_k, y) = m_k \omega_{ij}^2 \tilde{v}_{\max}(x_k, y, t) \quad [7.7]$$

En analogía con la solución de un oscilador equivalente se tiene, en términos de los coeficientes espectrales espaciales, las expresiones siguientes para las fuerzas elásticas efectivas:

$$s_{ij}(x_k, y) = m_k \omega_{ij}^2 \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \frac{1}{\omega_{ij}} \bar{S}_v = m_k \omega_{ij}^2 \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \bar{S}_d = m_k \omega_{ij} \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \bar{S}_v$$

o

$$s_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times m_k \bar{S}_a = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \frac{\bar{S}_a}{g} q_k \quad [7.8]$$

donde  $q_k = m_k g$  es la carga gravitacional para sismo por unidad de longitud  $L$  del edificio, supuesta uniformemente distribuida en el nivel de la losa. Aquí la magnitud de  $\bar{S}_a$  ( $\xi = 0$ ) es una buena aproximación para cualquier  $\xi$  típico.

Debido a que la [7.8] es una solución aproximada, el estado de fuerzas obtenido no produce el estado de desplazamientos relativos reales. Sin embargo, es una expresión general para las fuerzas elásticas desarrolladas en el sistema estructural amortiguado solicitado por fuerzas sísmicas. Introduciendo el coeficiente sísmico  $k_s$  en la ecuación anterior, resulta:

$$s_{ij}(x_k, y) = m_k \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \frac{\bar{S}_a}{k_s g} k_s g = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) \times \frac{\bar{S}_a}{k_s g} k_s q_k$$

$$s_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) \bar{\tau}_j(y) k_s \bar{\beta}_{ij} q_k \quad [7.9]$$

donde

$$\bar{\beta}_{ij} = \frac{1}{k_s g} \max_t \omega_{ij} \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \int_0^L \ddot{v}_s \left( \tau - \frac{y}{c} \right) V_j(y) \times dy \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \right| \quad [7.10]$$

es un *coeficiente dinámico espacial*. Este coeficiente se puede expresar también en términos de las funciones espectrales espaciales ya definidas, como sigue:

$$k_s \bar{\beta}_{ij} = \frac{1}{g} \omega_{ij}^2 \bar{S}_d = \frac{1}{g} \omega_{ij} \bar{S}_v = \frac{\bar{S}_a}{g} \quad [7.11]$$

Así el producto del coeficiente dinámico espacial por el coeficiente sísmico es igual a la razón de la pseudo-aceleración espectral espacial con  $g$ , y la [7.9] es análoga al caso de un MSDOF.

En términos de la función  $F(y)$  para la oscilación del suelo, sustituyendo la función [2.6] resulta:

$$\bar{\beta}_{ij} = \frac{1}{k_s g} \max_t \omega_{ij} \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \int_0^L F(y) V_j(y) \times dy \right| \quad [7.12]$$

$$\bar{\beta}_{ij} = \int_0^L F(y) V_j(y) dy \times \frac{1}{k_s g} \max_t \omega_{ij} \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \right| \quad [7.13]$$

Las anteriores son expresiones análogas al caso del modelo plano. Obsérvese que éste coeficiente es dependiente de la configuración modal de la losa, es decir, del efecto espacial producido por la deformación de la losa. También debido al hecho de que se ha considerado que la excitación sísmica o la función para la aceleración en la base no es uniforme en el sentido longitudinal de la estructura, es

dependiente de la coordenada  $y$ . Luego se puede escribir:

$$\bar{\beta}_{ij} = \int_0^L F(y) V_j(y) dy \times \beta_{ij} \quad [7.14]$$

donde



$$\beta_{ij} = \frac{1}{k_s g} \max_t \omega_{ij} \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_{ij}(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \operatorname{sen}[\omega_{ij}(t-\tau)] d\tau \right| = \frac{1}{k_s g} \omega_{ij} S_v = \frac{1}{k_s} \frac{S_a^c}{g} \quad [7.15]$$

es el *coeficiente dinámico* análogo al correspondiente a un SDOF, pero a diferencia del modelo plano, en este caso depende de las propiedades dinámico-estructurales que incluyen

la losa, como la frecuencia  $\omega_{ij}$  compuesta de la losa y los elementos verticales de apoyo. De la [7.9] la expresión para la *fuerza sísmica máxima* en cada nivel, (toma la forma siguiente:

$$s_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) \tilde{\tau}(y) k_c \beta_{ij} q_k = \eta_i(x_k) \tilde{\tau}(y) \frac{S_a^c}{g} q_k = \eta_i(x_k) \tilde{\tau}_j(y) \times m_k S_a^c \quad [7.16]$$

y también

$$s_{ij}(x_k, y) = [\eta_i(x_k) \tilde{\tau}(y) m_k] k_s g \beta_{ij} = [\eta_i(x_k) \tilde{\tau}(y) m_k] \times S_a^c = m_{ke} \times S_a^c \quad [7.17]$$

donde:

$$m_{ke} = [\eta_i(x_k) \tilde{\tau}(y) m_k] \quad [7.18]$$

es la *masa reducida* o *equivalente* para un modelo de *oscilador espacial equivalente* (OE). Obsérvese que en este caso la masa es distribuida en el sentido longitudinal.

Para un sistema estructural en el que se consideran los efectos de la deformación espacial de la losa y para una distribución no uniforme en sentido longitudinal de las aceleraciones sísmicas (dependientes de la coordenada longitudinal), la función fuerza sísmica máxima en cada nivel es análoga en forma al caso plano, salvo que corregidas por la función forma espacial [6.11].

Se ha demostrado que el análisis del sistema estructural se puede realizar mediante un

espectro de respuesta modificado, ya que se puede afirmar lo siguiente:

*El modelo espacial de un edificio de varios niveles puede sustituirse por un "oscilador espacial" (OE) con una masa equivalente, obtenida del sistema espacial por factores de corrección de forma vertical y longitudinal y cuyos espectros de pseudo-desplazamiento o velocidad son análogos a los del MSDOF, salvo que dependen de la frecuencia y del amortiguamiento espacial, y de la frecuencia de oscilación del suelo del sistema estructural. Los factores de corrección o de forma dependen de las propiedades dinámicas del sistema estructural y de las propiedades del dinámicas del suelo, incluyendo la velocidad de propagación de la onda sísmica.*

La fuerza sísmica total o cortante en el nivel  $k$ , se puede obtener de la [7.9] integrando la expresión en toda la longitud del edificio, a saber:

$$S_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) k_s q_k \int_0^L \bar{\beta}_{ij} \bar{\tau}(y) dy \quad [7.19]$$

y introduciendo la función  $F(y)$  de la [7.14], resulta:

$$S_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) k_s q_k \int_0^L \int_0^L F(y) V_j(y) \bar{\tau}(y) \beta_{ij} dy = \eta_i(x_k) \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times k_s q_k \beta_{ij} \quad [7.20]$$

y el cortante en la base en el modo  $ij$  es la suma de todas las fuerzas de cada nivel, o la función:

$$Q_{ij}(x_1, y) = \sum_{k=1}^n \eta_i(x_k) \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times k_s q_k \beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \eta_i(x_k) \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times m_k S_a^* \quad [7.21]$$

otra forma:

$$Q_{ij} = \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times \frac{\left( \sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k) \right)^2}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)} S_a^* = \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times \frac{\bar{L}^2(m)}{M^*(m)} S_a^* \quad [7.22]$$

$$Q_{ij} = \int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times \frac{\bar{L}^2(q)}{M^*(q)} \times \frac{S_a^*}{g}$$

[7.23]

Así la masa modal efectiva para el sistema equivalente OE es análoga a la del MSDOF :

$\bar{L}^2/M^*$ , salvo por el término que contiene al coeficiente modal espacial, es decir,

$\int_0^L \tilde{\tau}(y) dy \times (\bar{L}^2/M^*)$  se puede interpretar como la masa total respondiendo a la acción sísmica en cada modo (ver [7.18]).

## 8. Casos particulares.

Cuando no se considera la variación espacial del movimiento oscilatorio del suelo la magnitud de  $y/c$  se puede despreciar, entonces:

$\ddot{v}_0(x, y, t) = \ddot{v}_0(t) F(y) = \ddot{v}_0(t)$ . Como  $F(y) = 1$ , el coeficiente espacial  $\tilde{\tau}$  de la [6.11] se transforma en el siguiente:

$$\tau_j(y) = \frac{V_j(y) \int_0^L V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [8.1]$$

Entonces el desplazamiento relativo máximo resulta de la [6.4]:

$$\tilde{v}_{\max}(x_k, y, t) = \eta_i(x_k) \tau_j(y) \times \frac{S_v^c}{\omega_{ij}} = \eta_i(x_k) \tau_j(y) \times S_d^c \quad [8.2]$$

La fuerza sísmica máxima en cada nivel para este caso particular será:

$$s_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) \tau_j(y) k_s \beta_{ij} q_k = \eta_i(x_k) \tau_j(y) \frac{S_a^c}{g} q_k \quad [8.3]$$

Cuando no se considera la variación espacial del movimiento oscilatorio del suelo, el modelo espacial de un edificio de varios niveles puede sustituirse por un oscilador espacial (OE) con una masa equivalente, obtenida del sistema espacial por factores de corrección de forma vertical y longitudinal y cuyos espectros de pseudo-desplazamiento o velocidad son análogos a los del SDOF, salvo que la frecuencia y el amortiguamiento corresponden al sistema espacial (losa y componente verticales). Los

factores de corrección o de forma solamente dependen de la propiedades dinámicas del sistema estructural.

La condición particular en la que no se considerara la deformación de la losa y si una distribución de aceleraciones variable en el sentido longitudinal, no es realista.

La fuerza sísmica total en cada nivel, resulta:

$$S_{ij}(x_k, y) = \eta_i(x_k) \int_0^L \tau_j(y) dy \times k_s \beta_{ij} q_k = \eta_i(x_k) \int_0^L \tau_j(y) dy \times \frac{S_a^c}{g} q_k \quad [8.4]$$

Donde:

$$\int_0^L \tau_j(y) dy = \frac{\left[ \int_0^L V_j(y) dy \right]^2}{\int_0^L V_j^2(y) dy} \quad [8.5]$$

Si además de que la excitación sísmica se suponga puntual, no se considera la deformación de la losa o con  $V_j(y) = \text{constante}$  (losa rígida, traslación), entonces  $\tau_j(y) = 1$ , por tanto el desplazamiento relativo no depende de la coordenada longitudinal, obteniéndose las ecuaciones usuales para un SDOF, con la definición anterior para los desplazamientos espectrales. De la [8.2] resulta el *desplazamiento relativo máximo* en el modo  $i$  :

$$\tilde{v}_{\text{máx}}(x_k, t) = \eta_i(x_k) \times \frac{S_v}{\omega_i} = \eta_i(x_k) \times S_d \quad [8.6]$$

$$\beta_i = \frac{1}{k_s g} \max_t \omega_i \left| \int_0^t e^{-\varepsilon_j(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \text{sen}[\omega_i(t-\tau)] d\tau \right| = \frac{1}{k_s g} \omega_i S_v = \frac{1}{k_s g} S_a \quad [8.9]$$

es el *coeficiente dinámico* análogo al del oscilador lineal (SDOF). En efecto, el  $\beta_i$  (del tipo de una función espectral) de Korchinski [Korchinski, 1954] de las normas rusas Ch-57;60 [ERR, 63] de la [8.9] es igual al *factor de amplificación dinámica* del CSCR [CSCR, 1986]:

$$FAD = \frac{1}{a_{\text{máx}}} S_a = \beta_i \quad [8.10]$$

donde:

$$S_v = \max_t \int_0^t e^{-\varepsilon_j(t-\tau)} \ddot{v}_0(\tau) \text{sen}[\omega_i(t-\tau)] d\tau \quad [8.7]$$

es la *seudo-velocidad espectral* de un SDOF, pues no hay deformaciones transversales a lo largo de la longitud de la losa.

La *fuerza sísmica* en cada nivel  $k$  en este caso se expresa en este caso como sigue:

$$s_i(x_k) = \eta_i(x_k) \frac{S_a}{g} q_k = \eta_i(x_k) k_s \beta_i q_k \quad [8.8]$$

donde  $S_a = \omega_{ij} S_v = \omega_{ij}^2 S_d$ , es la *seudo-aceleración espectral* para un SDOF, cuando:

Este es el proceder de muchas normas [UBC, CSCR, etc.] para calcular la "amenaza sísmica" es anclarse a la *aceleración máxima probable* que varía con la zona sísmica. Así en este caso se podría decir que la acción sísmica se ha descompuesto en el producto de un término *sísmico* y otro *estructural*, como se muestra sustituyendo en [8.8]:

$$s_i(x_k) = [k_s] \times [\eta_i(x_k) \beta_i] q_k \quad [8.11]$$

Para la fuerza total en cada nivel se obtiene la expresión para el modelo plano usual, pues entonces  $\int_0^L \tau_j(y) dy = L$  y siendo  $W_k = q_k L$  la carga total en el nivel  $k$ , resulta:

$$S_i(x_k) = \eta_i(x_k) L \times \frac{S_a}{g} q_k = \eta_i(x_k) \frac{S_a}{g} W_k \quad [8.12]$$

El cortante en la base en el modo 1 (en el caso particular estudiado), toma la forma usual de las normas sísmicas:

$$Q_{i=1}(x_1) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k \eta_1(x_k) S_{a1} = \frac{\left( \sum_{k=1}^n m_k X_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n m_k X_k^2} S_{a1} = \left[ \frac{\bar{L}^2}{M^*} g \times \frac{S_a}{g} \right]_1$$

[8.13]

### 9. ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES

Para efectos de estudiar la diferencia entre el modelo plano y el espacial de una estructura se puede considerar por simplicidad el caso en que la aceleración es puntual. De las expresiones para el coeficiente dinámico [7.15] y las fuerzas sísmicas [8.3] y [8.4] se concluye que la magnitud de la carga sísmica para esquemas espaciales depende de los coeficientes:  $\beta(T)$  y  $\int \tau(y) dy$ , y por medio de los cuales se puede determinar la influencia de la longitud sobre el comportamiento.

El coeficiente  $\tau_j(y)$  determina la ley de distribución de la carga sísmica por unidad de longitud del edificio y es función de  $V_j(y)$ , la cual que depende de la frecuencia de oscilación del sistema estructural y de las condiciones de los apoyos verticales o de frontera, que en cada caso son distintas. No se estudiará en este artículo la determinación de esta función, sin embargo se pueden encontrar dos casos límites

de comportamiento para los que la función  $V_j(y)$  es conocida.

En efecto, el primero de estos corresponde a la losa sin deformación en su plano, o sea absolutamente rígida. Para estructuras constituidas por un sistema de marcos verticales y sin diafragmas y con rigidez infinita en el plano de la losa (esquema de cálculo plano) la carga sísmica por unidad de longitud del edificio no varía, pues  $V_j(y) = \text{constante}$  y entonces  $\tau_j(y) = \text{constante} = 1$  o también:

$$\int_0^L \tau_j(y) dy = 1.0L$$

En el segundo caso, cuando la deformación de la losa es grande, ésta corresponde a una forma de la línea elástica de la losa para vibración libre aproximadamente sinusoidal. En efecto, el cálculo muestra que para edificios construídos con un conjunto de losas o losetas y con luces mayores a 60 m, la carga sísmica cambia con la luz prácticamente con una ley sinusoidal, es decir,  $\tau_j(y) = b \text{sen}(j\pi y/L)$ . Así se tiene:

$$\int_0^L \tau_j(y) dy = \int_0^L \frac{V_j(y) \int_0^L V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} dy = \int_0^L \frac{\text{sen} \frac{j\pi y}{L} \int_0^L \text{sen} \frac{j\pi y}{L} dy}{\int_0^L \text{sen}^2 \frac{j\pi y}{L} dy} dy = 1.27 \frac{L}{\pi} \cdot 2 = 0.81L$$

En consecuencia la magnitud de  $\int_0^L \tau_j(y) dy$  varía entre los límites de  $0.81L$  y  $1.0L$ .

Si  $\int_0^L \tau_j(y) dy \approx \kappa_j L$ , donde el coeficiente  $\kappa_j$  (menor que 1) es la pendiente (tangente del ángulo) de la función lineal  $\kappa_j L$ , la magnitud de este coeficiente corresponde a un ángulo no mayor que  $45^\circ$ . La integral de  $\tau_j(y)$  aumenta con  $L$  y la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas (parámetro de la longitud) depende del tipo de monolitividad de la losa.

Se observa que la magnitud  $\kappa_j$ , para todas las losas, decrece con el aumento de la luz del edificio aproximándose al valor límite de 0.81, el cual se da cuando el diafragma alcanza la rigidez absoluta en relación a la losa. Es decir, la ley de variación del coeficiente  $\kappa_j$  con  $L$  oscila entre las funciones  $\kappa_j = 1$  y  $\kappa_j = 0.81$ , disminuyendo en general con el incremento de la longitud. Esto permite determinar y caracterizar a las curvas de la función que representa la variación con la luz  $L$ , de la carga sísmica en el nivel de piso.

La magnitud de los coeficientes:  $\beta(T)$  y  $\int_0^L \tau_j(y) dy$ , disminuye con la luz y crece con ella respectivamente. En el caso del coeficiente dinámico, de la [7.15] se puede observar que disminuye en magnitud con la frecuencia (o con el crecimiento del periodo), es decir, con el incremento de la luz del edificio. En efecto, la frecuencia del sistema disminuye con el

incremento de la longitud, con la disminución de la rigidez de la losa (sea rígida o flexible) y de sus apoyos. El cálculo permite demostrar que la magnitud de  $\beta(T)$ , correspondiente al esquema espacial de análisis, es hasta dos a tres veces menor que el calculado con el modelo o esquema plano.

Esto se explica por la disminución general que se produce en la rigidez horizontal del edificio, al considerar la flexibilidad de la losa en su plano. En realidad, como se sabe, el cuadrado de la frecuencia depende de la razón entre la energía potencial y la energía cinética del sistema. La disminución en la rigidez de la losa disminuye la magnitud de la energía potencial, lo cual a su vez hace disminuir a la frecuencia de oscilación (aumenta el periodo) y entonces al coeficiente dinámico del sistema estructural.

La velocidad de cambio de estos coeficientes depende de la luz  $L$  del edificio y análogamente ello se refleja en la carga sísmica total por nivel  $S_k$  ([8.4] o [7.20]) y en el cortante en la base  $Q$  [7.21]. En el análisis aproximado de las estructuras, se supone que la luz  $L$  no influencia en casi nada la intensidad de la carga sísmica. Sin embargo se ha mostrado que la intensidad de la carga sísmica aumenta o disminuye con la luz del edificio.

Los desplazamientos relativos máximos [8.2] son proporcionales a la magnitud del coeficiente de forma  $\tau_j(y)$  e inversamente proporcionales a la frecuencia de oscilación del sistema estructural:

Los límites de variación del coeficiente se pueden determinar para los dos casos extremos.

En el caso de losa "absolutamente flexible" de la [8.1]:

$$\tau(y) = \frac{V_j(y) \int_0^L V_j(y) dy}{\int_0^L V_j^2(y) dy} = \frac{\text{sen} \frac{j\pi y}{L} \int_0^L \text{sen} \frac{j\pi y}{L} dy}{\int_0^L \text{sen}^2 \frac{j\pi y}{L} dy} = \frac{4L}{\pi^2} \text{sen} \frac{j\pi y}{L} \cong 0.41L \text{sen} \frac{j\pi y}{L}$$

y sustituyendo en la [8.2] se tiene:

$$\tilde{v}_{\text{máx}}(x_k, y, t)_f = \eta_i(x_k) \left[ 0.41L \text{sen} \frac{j\pi y}{L} \right]_{\text{máx}} \times \frac{S_v^c}{\omega_{ij}} = 0.41L \eta_i(x_k) \times \frac{S_v^c}{\omega_{ij}}$$

En el caso de losa "absolutamente rígida"  $\tau(y) = 1$  y resulta el caso usual para el SDOF modificado en sentido vertical para varios pisos:

$$\tilde{v}_{\text{máx}}(x_k, t)_r = \eta_i(x_k) \times \frac{S_v}{\omega_i}$$

El efecto de la deformación de la losa sobre el desplazamiento relativo máximo calculado según el modelo plano o un SDOF se da en un rango de 1 a  $0.41L$ .

### 10. APÉNDICE

Es conveniente recordar que el *coeficiente de amortiguamiento viscoso* depende de las pulsaciones según la ley:  $\bar{c} = h/\omega_0$ , donde el parámetro  $h$  es denominado el *coeficiente de amortiguamiento histerético* (depende de la energía disipada en un ciclo). El *factor de amortiguamiento histerético* es  $\gamma_1 = h/K$  y  $\bar{c} = K(\gamma_1/\omega_0)$ . Es decir,

$$\bar{c} = \gamma_1 m \omega'^2 / \omega_0 = m(\gamma_1 \omega'^2 / \omega_0) \quad y$$

$$\bar{c}/m = (\gamma_1 \omega'^2 / \omega_0) = 2\varepsilon \quad y$$

$\xi = \bar{c}/2m\omega' = \varepsilon/\omega'$  es el *factor de amortiguamiento crítico* o *razón de amortiguamiento viscoso*, así  $\varepsilon \approx \xi\omega'$  y

$\bar{c}/m = 2\omega'\xi$ . El término  $\bar{c}$  depende de las propiedades físicas del material y de las estructurales del sistema. Resulta

$\varepsilon_{ij} = (\gamma/\omega_0)(\omega'_{ij}/2)$ . Si  $\omega'_{ij}$  es la *frecuencia amortiguada de las oscilaciones libres* entonces:

$$\omega'_{ij} = \sqrt{\omega_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^2} = \omega_{ij} \sqrt{1 - \xi_{ij}^2}. \quad \text{Estos factores son relativos a los modos principales.}$$

### 11. BIBLIOGRAFÍA

ASCE, SEAOC. *Lateral Forces of Earthquake and Wind*. Joint Comm. San Francisco, ASCE, SEAOC, Proc. ASCE vol. 77, No. 66, 1951.

Beles A. A.; Ifrim, M.D; García Yague A. *Elementos de ingeniería sísmica*. Edit. Omega, Barcelona, 1975.

Berlage H.P. *Recherches sur le debut d'une phase*. Publ. Bureau central Seismologique Inst., Serie A, 1, 73, Paris, 1924.

Clough R.W. *Dynamic of structures*. Edit. McGraw-Hill, New York, 1975.

CSCR: *Código Sísmico de Costa Rica*, 1986.

ERR: Earthquake Resistant Regulation. A World List, 1963, 1970, 1997, Intern. Ass. Earthq. Eng.

Egupov B.K. y Komandrina T.A. Cálculo de edificios bajo carga sísmica. Edit. Budielnik, Kiev, 1969.

Housner G.W. *Behavior of structures during Earthquake*. Journ. Eng. Mech. Div. ASCE, 1959.

Housner G.W. *Limit design of structures to resist earthquake*. Proc. 1<sup>st</sup> world conf. Earthquake Eng. Berkeley, California, 5-1 a 5-13, 1982.

Komandrina, T.A. *Nuevo método de cálculo de edificios bajo acción sísmica* (en lengua rusa). Dokladi AN USSR, # 7, Kiev, 1964.

Korchinski I.L. *Vibración considerando resistencia bajo acción sísmica* (en lengua rusa). Comunicación científica ZNIIPSA, # 14, M., Gostroyzdat, Moscú, 1954.

Korchinski I.L. y Poliakov S.V., et al. Fundamentos para proyectar edificios bajo acción sísmica (en lengua rusa). M. Gostroyzdat, Moscú, 1961.

Rosenblueth E. y Newmark N.M. Fundamentos de ingeniería sísmica. Edit. Diana s.a, México, 1976.

Sanikov A.A. *Vibración de la fundación de edificios con estructura de marcos* (en lengua rusa). M. "Lesnaya promishlienost", 1966.

UBC: Uniform Building Code, ICBO, 1994.

Zahra, T.F. y Hall, W.J. *Seismic Energy Absorption in Simple Structures*. Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 501, University of Illinois, Urban, Ill. July, 1982.

## 12. SIMBOLOGÍA

$a$  = distancia entre columnas en sentido longitudinal

$B$  = rigidez a flexión de la losa

$C_k^{(i)}$  = rigidez dinámica de un marco en el nivel  $k$  y el  $i$ -ésimo modo

$C_k^{*(i)}$  = rigidez dinámica de los muros en el nivel  $k$  y el  $i$ -ésimo modo

$\bar{c}$  = coeficiente de amortiguamiento

$c$  = velocidad de la onda de propagación sísmica

$E$  = módulo de elasticidad del material de la estructura

$E'$  = módulo de elasticidad corregido del material de la estructura

$F(y)$  = función sísmica dependiente de las propiedades del suelo

$f_j(t)$  = función del tiempo

$f_k$  = fuerza de inercia en el nivel  $k$

$g_i$  = factor de participación modal

$h$  = coeficiente de amortiguamiento histerético

$I_l$  = momento de inercia de la losa respecto a un eje perpendicular a su plano

$K^{(i)}$  = rigidez dinámica total de los marcos en el  $i$ -ésimo modo

$\bar{k}$  = coeficiente de reducción del módulo

$\hat{k}$  = vector base unitario del espacio de referencia

$k_s$  = coeficiente sísmico

$L$  = longitud del edificio

$\bar{L}$  = coeficiente de participación

$M^*$  = masa generalizada

$m_k(y)$  = función masa por unidad de longitud

$m_{ke}$  = masa equivalente

$P_j(t)$  = función del tiempo

$p$  = número de marcos

$q_k$  = carga distribuida longitudinalmente en el nivel  $k$

$Q_i$  = cortante en la base



$R(x_k, y, t)$  = fuerza restauradora elástica o/no de los marcos

$S(x_k, y, t)$  = fuerza elástica restauradora de la losa

$X_i(x_k)$  = magnitud del desplazamiento de la configuración del modo  $i$ -ésimo de los elementos verticales de apoyo

$\bar{S}_d, \bar{S}_v, \bar{S}_a$  = funciones pseudo-espectrales espaciales

$S_d^e, S_v^e, S_a^e$  = funciones pseudo-espectrales espaciales

$S_d, S_v, S_a$  = funciones pseudo-espectrales

$s_{ij}(x_k, y, t)$  = fuerza sísmica en el nivel  $k$  en el modo  $ij$

$s_{ij}(x_k, y)$  = fuerza sísmica en el nivel  $k$  en el modo  $ij$

$t, \tau$  = variable tiempo

$\bar{t}$  = parámetro temporal

$V_j(y)$  = función de forma en el sentido longitudinal

$v_0(t)$  = desplazamiento sísmico del suelo

$\bar{\tau}_j(y)$  = coeficiente de forma espacial

$\tau(y)$  = coeficiente de forma espacial

$\tilde{\tau}(y)$  = coeficiente de forma espacial

$\psi_i(\bar{t})$  = función de la excitación sísmica

$\omega'_{ij}, \omega_{ij}$  = frecuencias de oscilación de la estructura amortiguadas o no, respectivamente

$\omega_i$  = frecuencia de oscilación lineal no amortiguada

$\omega_0$  = frecuencia de oscilación del suelo

$\ddot{v}_0(t)$  = aceleración sísmica del suelo

$v$  = función desplazamiento absoluto del nivel  $k$

$v_s$  = función desplazamiento del suelo

$\tilde{v}$  = función desplazamiento relativo del nivel  $k$

$\tilde{v}_{ij}$  = función desplazamiento relativo de la losa

$\bar{v}(x_k, y, t)$  = función aceleración absoluta

$W$  = carga total del edificio

$\bar{\beta}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \beta_i, \beta'_i$  = coeficientes dinámicos

$\gamma, \gamma_1$  = factores de amortiguamiento hysterético de las losas y elementos verticales respectivamente

$\zeta_k$  = razón de rigideces de marco

$\mu_1, \mu_2$  = coeficientes caracterizando propiedades del suelo

$\varepsilon_{ij}, \varepsilon$  = coeficiente de amortiguamiento

$\eta_i(x_k); \eta$  = función de forma en el sentido vertical

$\kappa_j$  = coeficiente geométrico

$\xi_{ij}, \xi$  = factor de amortiguamiento crítico

Ing. Rodolfo Herrera J.

Profesor emérito

Universidad de Costa Rica

Apdo. 106-2050 Costa Rica

e-mail: [rodolfoh@sol.RACSA.co.cr](mailto:rodolfoh@sol.RACSA.co.cr)

*Rodolfo Herrera J.*

*Ing. Dr. prof. emérito Univ. C. Rica.*

*e.*