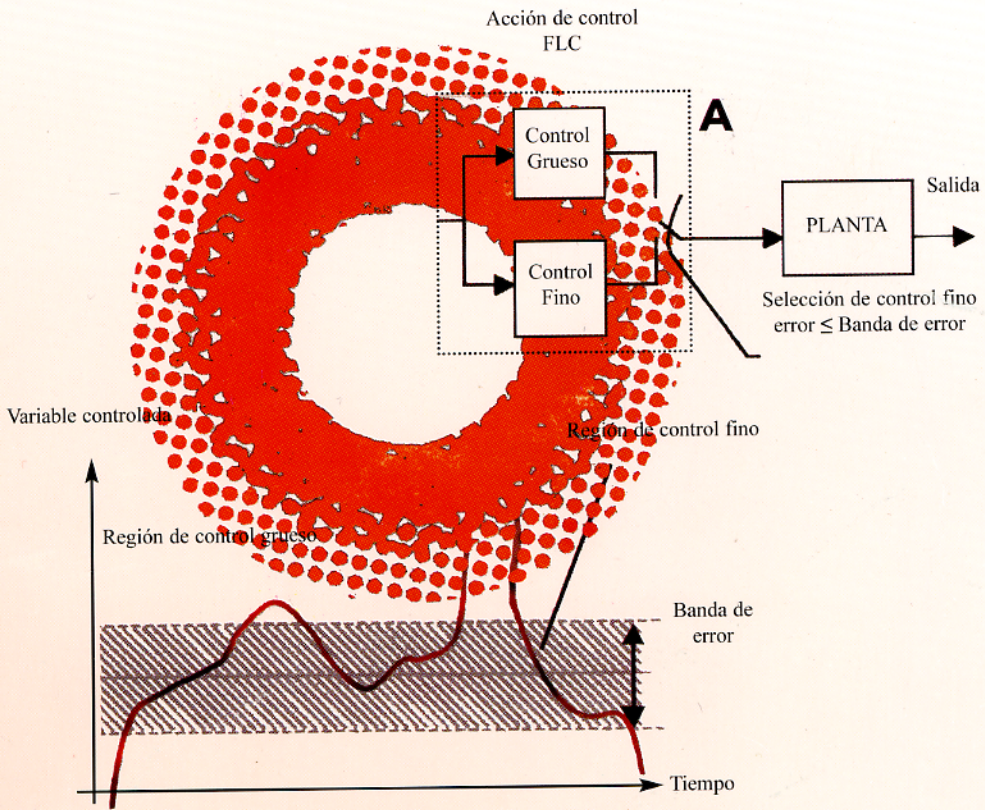


# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
Enero/Diciembre 1999 VOLUMEN 9 Nos. 1 y 2



# INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica  
Volumen 9, Enero/Diciembre 1999 Números 1 y 2

## DIRECTOR

Rodolfo Herrera J.

## CONSEJO EDITORIAL

Víctor Hugo Chacón P.

Ismael Mazón G.

Domingo Riggioni C.

## CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica  
Apartado Postal 75  
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

## CANJES

Universidad de Costa Rica  
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información  
Unidad de Selección y Aquisiciones-CANJE  
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

### Suscripción anual:

Costa Rica: ₡ 1 000,00

Otros países: US \$ 30,00

### Número suelto:

Costa Rica: ₡ 750,00

Otros países: \$ 20,00



# DEDUCCIÓN DE LA RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL

Rodolfo Herrera J.<sup>1</sup>

## Resumen

En este artículo se presenta la deducción de una expresión general para la rigidez de un sistema estructural genérico o marco prototipo constituido por pilares (columnas, muros) y acoples (vigas, dinteles) y nudos, considerando el efecto de la deformación por flexión y cortante de los componentes, tanto en el rango elástico como en el inelástico. Las expresiones para la rigidez y flexibilidad son útiles para calcular el alabeo relativo entre niveles del sistema estructural y determinar su respuesta bajo carga sísmica o lateral, especialmente mediante modelos discreto-continuos o continuos.

## Summary

In this paper the deduction is made of a general expression for a stiffness of a generic structural system or prototype frame of pilars (columns, walls) and acoples (beams, lintels) and joints, considering the effect of the deformation by flexion and shear of the components, in the elastic and inelastic range. The expressions for the stiffness and flexibility are useful for the calculate the flexion relative between levels of the structural system and for determine response by seismic or lateral forces, specially for the use of discrete-continuos and continuos models.

## 1. MODELO DEL SISTEMA ESTRUCTURAL

Para el análisis se supondrá un sistema estructural cuyo modelo es el de un marco constituido por  $c$  pilares (columnas, muros) y  $c-1$  acoples (dinteles, vigas) entre ellos (figura No. 1). Este marco genérico puede transformarse en un marco prototipo considerando que los nudos entre los acoples y pilares son rígidos, es decir, suponiendo que tanto el acople como el pilar tienen una parte flexible y otra rígida como se muestra en las figura No. 1 y 2.

Las fuerzas laterales sobre un marco producen un estado de desplazamientos combinación: (i) de la flexión del sistema, fundamentalmente condicionada por la rigidez de los pilares, que hace que el pórtico se desplace en conjunto como un voladizo (curva deformada cóncava hacia la posición de origen) como se muestra en la curvas No. 1 y 3 de la figura No. 3; (ii) del alabeo lineal o deformación relativa entre dos niveles inmediatos, que se manifiesta debido a las deformaciones que experimentan cada uno de los elementos constitutivos del

pórtico (pilares y acoples), en virtud de sus respectivas flexibilidades, que se muestra en las curvas No. 2 de la figura No. 3; (iii) de la deformación longitudinal de los pilares función de su rigidez axial (no se muestra).

Si la rigidez de los pilares es considerablemente mayor que la de los acoples (o vigas), la deformación lateral relativa identificada como alabeo lineal, deja de prevalecer sin desaparecer por completo, para dar paso a la deformación por flexión característica de las ménsulas.

En este artículo interesa únicamente el alabeo relativo determinado por los ángulos de rotación en el nudo, producidos por las deformaciones de los elementos que concurren en él (acoples y pilares), es decir, no se considera a las deformaciones descritas como (i) y (ii) anteriormente. En la figura No. 3 se muestran los elementos mecánicos o estado de fuerzas solicitando el nudo o los extremos de los elementos. En la figura No. 5 se muestra el estado de desplazamiento del sistema cuando los elementos se deforman por flexión, cortante.

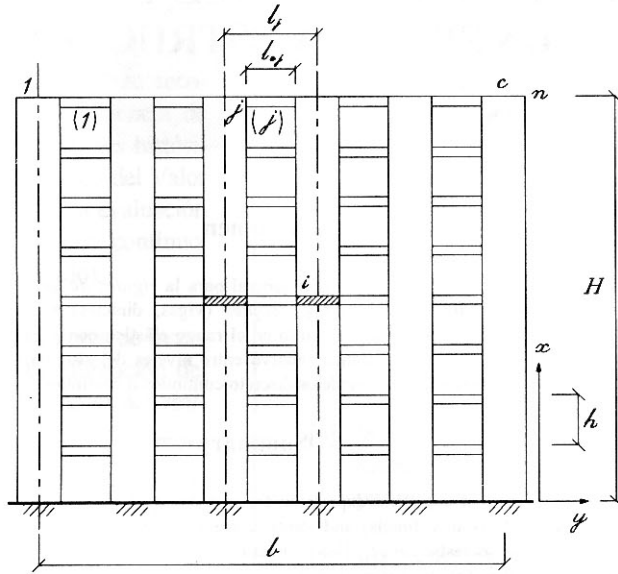


Figura No. 1. Sistema estructural pilar-acople

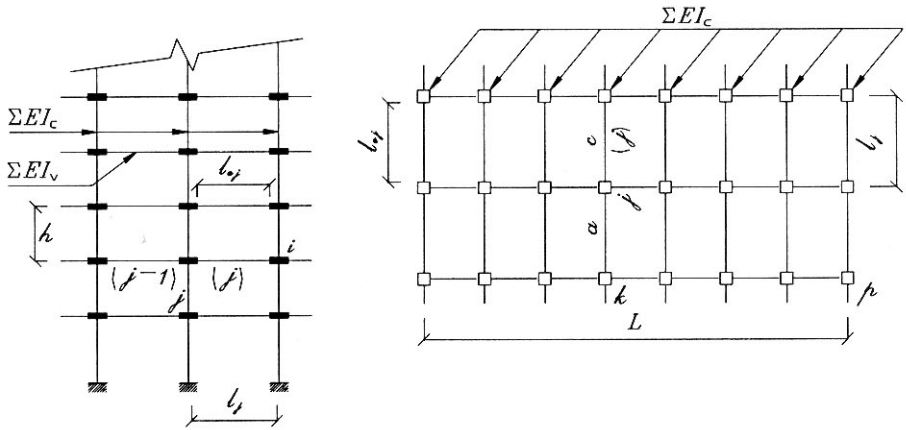


Figura No. 2. Marco genérico rígido-flexible

**2. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DEL MODELO**

Sean  $l_j$  y  $l_{0j}$  la luz entre los ejes centroidales de los pilares y la luz neta del elemento de acople respectivamente. Sean para el pilar  $j$ ,  $h = h_j$  la altura de entrepiso

constante y  $h_{0j}$  la altura neta (figura No. 1 y 2). Además  $v_j, w_j, u_{j-1}$  se interpretan de la figura No. 4 en la que se señalan los puntos de inflexión en los acoples y pilares; en éstos últimos se supondrán en la mitad de la altura.



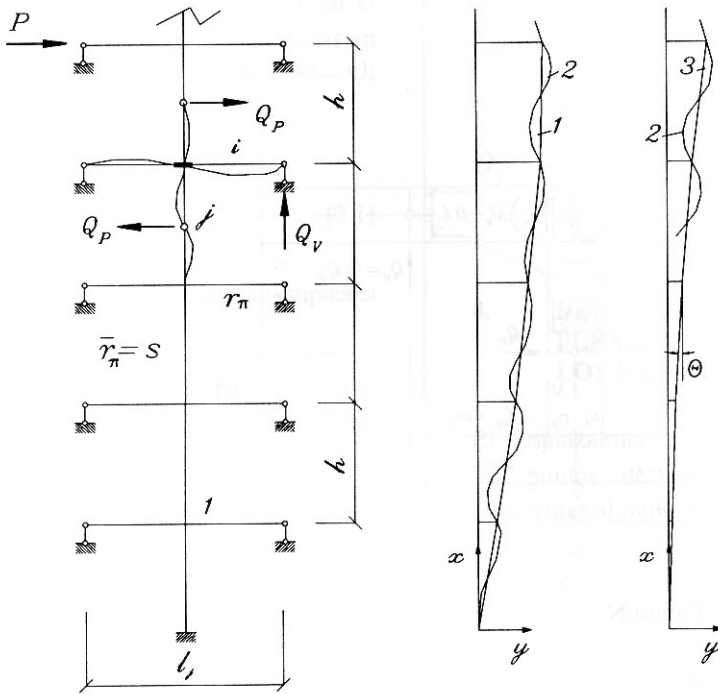


Figura No. 3. Marco prototipo

Para simplificar se supondrá que el nudo  $j$  tiene las dimensiones siguientes:  $\mu_j l_j$ ,  $\bar{\mu}_j h$ ,  $t$ , donde  $t$  es el ancho transversal de la sección del nudo,  $\mu_j, \bar{\mu}_j$  son coeficientes adimensionales tales que se puede asumir dimensiones promedio en función de la luz  $l_j$ , es decir que para el acople:  $c_I = c_D = \mu_j l_j / 2 = \mu_j l_{j-1} / 2$ , y para el pilar:  $\bar{c}_I = \bar{c}_D = \bar{\mu}_j h / 2$  para cada nivel  $i$ . Las longitudes en las direcciones horizontal y vertical, se obtienen tomando la mitad de mayor ancho que llegue al nudo. El volumen del nudo  $j$  en el nivel  $i$ , será:  $V_j = u_j l_j v_j h t$ .

Para los acoples se tienen las siguientes relaciones (figura No. 4):

$$\begin{aligned}
 l_j &= l_{0j} + 2c_D; & l_{j-1} &= l_{0j-1} + 2c_I; \\
 l_{0j} - v_j + c_D &= w_j; & v_{j-1} + c_I &= u_{j-1}; \\
 d_j &= u_{j-1} + w_j, \text{ y} \\
 l_{0j} &= (1 - \mu_j) l_j = \kappa_{0j} l_j
 \end{aligned}$$

donde  $\kappa_{0j} = 1 - \mu_j$ , si  $\gamma_j = l_j / l_{0j}$ , resulta:  $\gamma_j = 1 / \kappa_{0j}$ .

Sean  $\bar{A} = \mu A$ ,  $I$  respectivamente, el área efectiva de la sección transversal y el momento de inercia de cualquier componente;  $\mu$ : factor de forma para considerar la distribución del cortante en la sección (6/5 para el concreto). Sean  $B_j = EI_j$  la flexorrigidez,  $r_{0j} = EI_j / l_{0j}$  y  $r_j = EI_j / l_j$ , la rigidez lineal efectiva de los elementos de

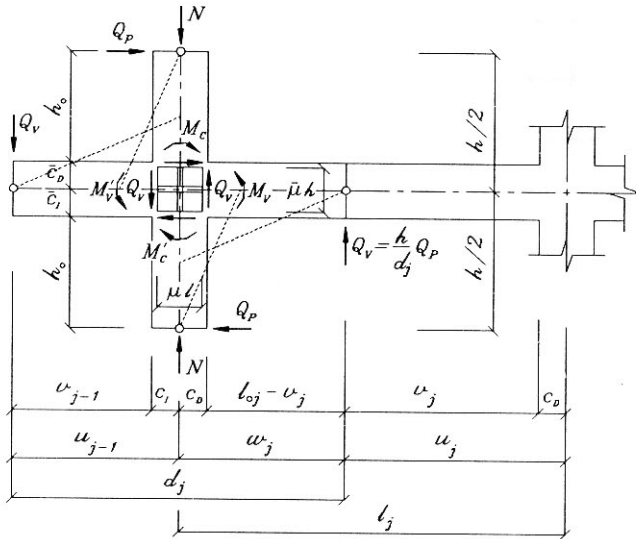


Figura No. 4. Nudo genérico y elementos mecánicos

acople y la rigidez lineal del elemento de acople rígido-flexible, respectivamente.

Por tanto se puede escribir:  $r_{0j} = EI_j / \kappa_{0j} l_j = r_j / \kappa_{0j} = r_j \gamma_j$ , para la "rigidez modificada" para la viga de acople. Es decir, en el caso en que  $\gamma_j \Rightarrow 1$ , la rigidez de la viga  $r_{0j} \Rightarrow r_j$ , que es la usual para un marco considerando la luz centro a centro de columnas. Además resultan las relaciones siguientes:  $r_{0j} = Ek_{0j}$  y  $r_j = Ek_j$ , donde:

$$k_j = I_j / l_j \text{ y } k_{0j} = I_j / l_{0j},$$

$$k_{0j} = I_j l_j / l_{0j} l_j = (I_j / l_j) \gamma_j =$$

$$k_{0j} = k_j \gamma_j = k_j / \kappa_{0j}$$

Para los pilares se tienen las siguientes relaciones (figura No. 4):

$$h = h_{j,i} = h_{0j,i} + \mu_{j,i} h;$$

$$h_{0j,i} = (1 - \mu_{j,i}) h = \bar{\kappa}_{0,i} h;$$

$$\bar{\gamma}_{j,i} = h / h_{0j,i} = 1 / \bar{\kappa}_{0,i}$$

Sean  $\bar{B}_j = E\bar{I}_j$  la flexo-rigidez de la columna;  $\bar{r}_{0j} = E\bar{I}_j / h_{0j}$  y  $\bar{r}_j = E\bar{I}_j / h$  la rigidez lineal efectiva de los pilares y la rigidez lineal del pilar rígido-flexible, respectivamente.

Por tanto se puede escribir:  $\bar{r}_{0j} = E\bar{I}_j / \bar{\kappa}_{0j} h = \bar{r}_j / \bar{\kappa}_{0j} = \bar{r}_j \bar{\gamma}_j$ .

Además resultan las relaciones siguientes:  $\bar{r}_{0j} = E\bar{k}_{0j}$  y  $\bar{r}_j = E\bar{k}_j$ , donde  $\bar{k}_j = \bar{I}_j / h$  y  $\bar{k}_{0j} = \bar{I}_j / h_0$ ,  $\bar{k}_{0j} = \bar{k}_j \bar{\gamma}_j = \bar{k}_j / \bar{\kappa}_{0j}$ . Estos mismos parámetros se pueden definir para el nivel adyacente inferior  $i - 1$ .

Se define el siguiente coeficiente característico por flexión-cortante de un elemento:  $\beta = 6EI / G\bar{A}l^2$ ; si la relación entre la luz y el peralte del elemento mayor que 6, se puede despreciar la deformación por cortante, de modo que  $\beta = 0$ .

Sean  $Q_P$  y  $Q_v$  las fuerzas cortantes en el pilar y el acople respectivamente, aplicadas en los puntos de inflexión (figura No. 4); entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} Q_v d_j &= Q_P h, \\ Q_u &= Q_v/h = Q_P/d_j \end{aligned} \quad [2.1]$$

donde  $Q_u$  es una fuerza cortante supuesta distribuida en altura (figura No. 4).

### 3. DEDUCCIÓN DE LA FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS DE ACOPLE

Se analizará el pilar  $j$ , con los tramos de acople adyacentes y en el nivel  $i$ . El desplazamiento vertical del punto de inflexión de los acoples  $j, j-1$  resulta:

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{3B_j} (Q_v); \\ \delta'' &= \frac{(v_{j-1})^3}{3B_{j-1}} (Q_v), \end{aligned}$$

y entonces el desplazamiento relativo  $\delta_j^{(v)}$  entre los puntos de inflexión de los acoples, resulta:

$$\begin{aligned} \delta_j^{(v)} &= \delta' + \delta'' \\ \delta_j^{(v)} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] Q_v \end{aligned} \quad [3.1]$$

El ángulo de rotación correspondiente será aproximadamente (figura No. 5):

$$\theta_j = \theta' + \theta'' = (\delta' + \delta'')/d_j$$

$$\begin{aligned} \theta_j &= \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] \frac{Q_v}{d_j} = \\ \theta_j &= \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] \frac{Q_P h}{d_j^2} \end{aligned} \quad [3.2]$$

### 4. DEDUCCIÓN DE LA FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ DE LOS PILARES

El desplazamiento horizontal relativo  $\delta_H$  de los puntos de inflexión de los acoples adyacentes al nudo  $j$  del nivel  $i$ , será

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_H &= \bar{\delta}' + \bar{\delta}'' : \\ \bar{\delta}_H &= \left[ \frac{(h_{0,i}/2)^3}{3\bar{B}_{j,i}} + \frac{(h_{0,i-1}/2)^3}{3\bar{B}_{j,i-1}} \right] Q_P = \\ \bar{\delta}_H &= \left[ \frac{h_{0,i}^3}{24\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{24\bar{B}_{j,i-1}} \right] Q_P \end{aligned} \quad [4.1]$$

El ángulo de rotación correspondiente será:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j^i &= \bar{\delta}_j^{(v)}/d_j \\ \bar{\theta}_j^i &= \left[ \frac{h_{0,i}^3}{24\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{24\bar{B}_{j,i-1}} \right] \frac{Q_P}{h} \end{aligned} \quad [4.2]$$

donde  $\bar{\delta}_j^{(v)}$  es el desplazamiento vertical relativo entre los puntos de inflexión de los acoples debido a la deformación de los pilares; se obtiene la siguiente expresión para el ángulo (en la figura No. 5 se indica con  $\theta_j^i = \theta_c$ ); por tanto resulta:

$$\bar{\theta}_j^i = \left[ \frac{h_{0,i}^3}{24(\bar{B}_{j,i}/h)} + \frac{h_{0,i-1}^3}{24(\bar{B}_{j,i-1}/h)} \right] \frac{Q_P h}{h^3} =$$

$$\bar{\theta}_j^i = \frac{h}{24} \left[ \frac{1}{\bar{\gamma}_i^3 \bar{r}_{j,i}} + \frac{1}{\bar{\gamma}_{i-1}^3 \bar{r}_{j,i-1}} \right] Q_P \quad [4.3]$$

### 5. DEDUCCIÓN DE LA FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ DEL MARCO RÍGIDO-FLEXIBLE (PILAR-ACOPLE)

Considerando los dos efectos simultáneos debidos al alabeo del acople y del pilar, el desplazamiento total de los puntos de inflexión de los acoples, de las [3.1] y [4.1]:  $\delta_j = \delta_j^{(v)} + \delta_j^{(c)}$  (en la figura No. 5 se indica  $\delta_j = \delta_f$ ); por tanto se obtiene la fórmula general siguiente:

$$\delta_j = \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}^{(v)}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j^{(v)}} \right] \frac{h}{d_j} Q_P +$$

$$+ \left[ \frac{h_{0,i}^3}{24\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{24\bar{B}_{j,i-1}} \right] \frac{d_j}{h} Q_P \quad [5.1]$$

Ahora  $\theta_j = \delta_j / d_j$ , resulta:

$$C_{\pi j} = d_j \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] \frac{h}{d_j} + \frac{1}{24} \left[ \frac{h_{0,i}^3}{\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{\bar{B}_{j,i-1}} \right] \frac{d_j}{h} \right\}^{-1} \quad [5.4]$$

de donde se tiene la expresión general entre la fuerza cortante horizontal y el ángulo de giro común del sistema, sea:

$$Q_P = C_{\pi j} \theta_j \quad [5.5]$$

Si se suponen luces y alturas y flexo-rigideces iguales, es decir:  $d_j = l_j$ ,  $h_{0i} = h_{0,i-1} = h_0$  y  $B_j = B_{j-1} = B_v$ ,  $\bar{B}_{j,i} = \bar{B}_{j,i-1} = \bar{B}_C$ , y

$$\theta_j = \frac{1}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] \frac{h}{d_j^2} Q_P +$$

$$+ \left[ \frac{h_{0,i}^3}{24\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{24\bar{B}_{j,i-1}} \right] \frac{1}{h} Q_P \quad [5.2]$$

El coeficiente de flexibilidad del marco rígido-flexible  $j$ , se define como sigue:

$$s_j = \theta_j / Q_u = \theta_j / (Q_P / d_j)$$

$$s_j = \frac{h}{3} \left[ \frac{(v_{j-1})^3}{B_{j-1}} + \frac{(l_{0j} - v_j)^3}{B_j} \right] +$$

$$+ \frac{1}{24} \left[ \frac{h_{0,i}^3}{\bar{B}_{j,i}} + \frac{h_{0,i-1}^3}{\bar{B}_{j,i-1}} \right] \frac{d_j}{h} \quad [5.3]$$

Como  $\theta_j = (Q_P / d_j) \bar{s}_j$ , la rigidez cortante para este marco (el tramo y pilar  $j$  del nivel  $i$ ), tendrá la expresión general siguiente:

$$C_{\pi j} = d_j / s_j$$

además  $\gamma_j = \gamma_{j-1} = \gamma_j$  y  $\bar{\gamma}_{j,i} = \bar{\gamma}_{j,i-1} = \bar{\gamma}_j$ , resultan de [5.3] las siguientes expresiones:

$$s_j = \frac{hl_j}{12r_j \gamma_j^3} + \frac{hl_j}{12r_j \gamma_j^3} = \frac{hl_j}{12r_{\pi j}} + \frac{hl_j}{12\bar{r}_{\pi j}} =$$

$$s_j = l_j \frac{h}{12} \left[ \frac{1}{r_{\pi j}} + \frac{1}{\bar{r}_{\pi j}} \right] = l_j / C_{\pi j} \quad [5.7]$$



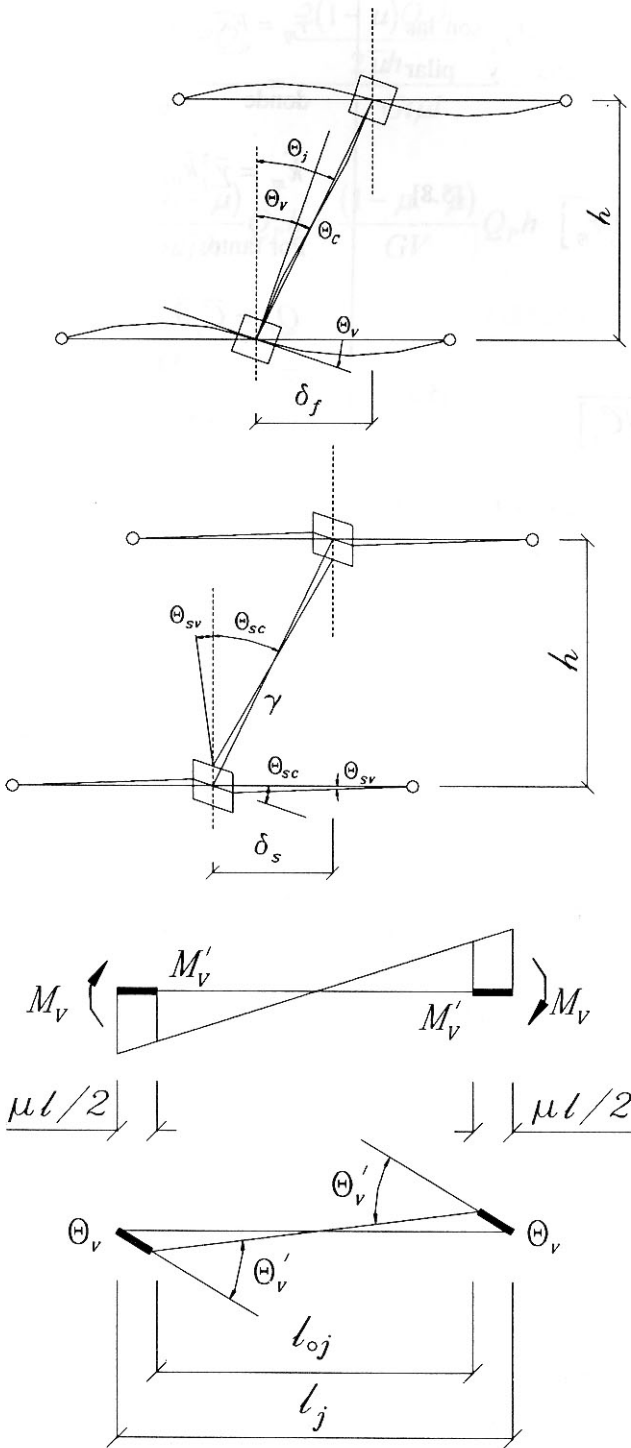


Figura No. 5. Desplazamiento de elementos en  $j$

donde  $r_{\pi j} = \gamma_j^3 r_j$  y  $\bar{r}_{\pi j} = \bar{\gamma}_j^3 \bar{r}_j$  son las rigideces lineales del acople y pilar respectivamente. Entonces:

$$C_{\pi j} = \frac{l_j}{s_j} = \frac{12}{h} \frac{1}{\left[1/r_{\pi j} + 1/\bar{r}_{\pi j}\right]} \quad [5.8]$$

o también

$$C_{\pi j} = \frac{d_j}{s_j} = \frac{1}{\left[1/C_j + 1/\bar{C}_j\right]} \quad [5.9]$$

En esta expresión:  $C_j = 12r_{\pi j}/h$  es la rigidez cortante del sistema debida a los acoples y  $r_{\pi j} = r_j \gamma_j^3 = E\kappa_{0j} \gamma_j^3 k_{0j}$  es la rigidez lineal del acople. Además se puede escribir:

$$\begin{aligned} r_{\pi j} &= \gamma_j^3 r_j = \gamma_j^3 \kappa_{0j} r_{0j} = \\ r_{\pi j} &= E\kappa_{0j} (\gamma_j^3 k_{0j}) = E\kappa_{0j} k_{\pi j} \end{aligned} \quad [5.10]$$

donde

$$k_{\pi j} = \gamma_j^3 k_{0j} \quad [5.11]$$

Así se pueden escribir las expresiones siguientes para el acople en el nudo  $j$ :

$$\begin{aligned} Q_P &= C_j \theta_j; \\ \theta_j &= \frac{M_v}{6E\kappa_{0j} \gamma_j^3 k_{0j}} \end{aligned} \quad [5.12]$$

Análogamente para los pilares, en la expresión [5.9]  $\bar{C}_j = 12\bar{r}_{\pi j}/h$  es la rigidez cortante del sistema debida a los pilares. Además se puede escribir:

$$\bar{r}_{\pi j} = \bar{\gamma}_j^3 \bar{r}_j = \bar{\gamma}_j^3 \bar{\kappa}_{0,j} \bar{r}_{0j} =$$

$$\bar{r}_{\pi j} = E\bar{\kappa}_{0,j} (\bar{\gamma}_j^3 \bar{k}_{0j}) = E\bar{\kappa}_{0,j} \bar{k}_e \quad [5.13]$$

donde

$$\bar{k}_{\pi j} = \bar{\gamma}_j^3 \bar{k}_{0j} \quad [5.14]$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} Q_P &= \bar{C}_j \bar{\theta}_j; \\ \bar{\theta} &= \frac{M_c}{6E\bar{\kappa}_{0j} \bar{\gamma}_j^3 \bar{k}_{0j}} \end{aligned} \quad [5.15]$$

En el caso particular de un sistema estructural tipo *marco viga-columna* resulta de inmediato poniendo  $\gamma_j = \bar{\gamma}_j = 1$ , entonces  $r_{\pi j} = r_j$  y  $\bar{r}_{\pi j} = \bar{r}_j$ .

## 6. DEDUCCIÓN DE LA RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD DEBIDO A LA DEFORMACIÓN POR CORTANTE DEL NUDO.

Sea  $\gamma = \tau/G$  el ángulo por deformación cortante (figura No. 5 y 8). No se denotarán en los términos de las expresiones siguientes los índices correspondientes al nudo por simplicidad. En el nudo  $j$  del nivel  $i$  se cumple con la expresión siguiente:

$$\tau = \frac{\frac{2M'_v}{\bar{\mu}h} - Q_P}{t\mu l} = \frac{\frac{2M'_c}{\mu l} - Q_v}{t\bar{\mu}h} \quad [6.1]$$

El cortante en el acople y en el pilar son tales que:  $Q_v = Q_P (h/l)$ . El ángulo cortante en el acople será  $\gamma = Q_v/G\bar{A}_v$  y entonces:

$$\gamma_v = \frac{\frac{2M'_v}{\bar{\mu}h} - Q_P}{Gt\mu l} = \frac{\frac{2(1-\mu)M_v}{\bar{\mu}h} - Q_P}{Gt\mu l} = \frac{\frac{2(1-\mu)Q_P h}{2\bar{\mu}h} - Q_P}{Gt\mu l}$$

$$\gamma_v = \frac{\frac{(1-\mu)Q_P h}{\bar{\mu}h} - Q_P}{Gt\mu l} = \frac{(1-\mu-\bar{\mu})}{Gt\mu\bar{\mu}h} Q_P h = \frac{(1-\mu-\bar{\mu})}{GV} Q_P h \quad [6.2]$$

Por otra parte:

$$\theta_s = (1-\mu-\bar{\mu})\gamma \quad [6.3]$$

y resulta (figura No. 5):

$$\theta_{v,s} = \frac{(1-\mu-\bar{\mu})^2}{GV} Q_P h \quad [6.4]$$

Lo mismo se obtiene para el pilar, a saber:

$$\gamma_c = \frac{\frac{2M'_c}{\mu l} - Q_P}{Gt\bar{\mu}h} = \frac{\frac{2(1-\bar{\mu})M_c}{\mu l} - \frac{Q_P h}{l}}{Gt\bar{\mu}h} = \frac{(1-\bar{\mu})Q_P h - Q_P h\mu}{Gt\bar{\mu}h\mu l}$$

$$\gamma_c = \frac{(1-\mu-\bar{\mu})}{GV} Q_P h$$

de donde:

$$\theta_{c,s} = \frac{(1-\mu-\bar{\mu})^2}{GV} Q_P h \quad [6.5]$$

Ambas expresiones válidas para cualquier nudo  $j$  en el nivel  $i$ , se pueden transformar de la manera siguiente:

$$\theta_{v,s} = \left[ \frac{(1-\mu-\bar{\mu})^2 12E\kappa_0}{GV} \right] \frac{Q_P h}{12E\kappa_0} = [H] \frac{Q_P h}{12E\kappa_0} \quad [6.6]$$

$$\theta_{c,s} = \left[ \frac{(1-\mu-\bar{\mu})^2 12E\bar{\kappa}_0}{GV} \right] \frac{Q_P h}{12E\bar{\kappa}_0} = [\bar{H}] \frac{Q_P h}{12E\bar{\kappa}_0}$$

donde:

$$[H] = \left[ \frac{(1 - \mu - \bar{\mu})^2 12E\kappa_0}{GV} \right]; \quad [\bar{H}] = \left[ \frac{(1 - \mu - \bar{\mu})^2 12E\bar{\kappa}_0}{GV} \right] \quad [6.7]$$

y con la aproximación de  $\kappa_0 = \bar{\kappa}_0$ ,  $H = \bar{H}$ .

## 7. RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD CONSIDERANDO EL EFECTO DE LAS DEFORMACIONES POR CORTANTE EN LOS ELEMENTOS.

Se considerará ahora el efecto de la deformación por cortante en los componentes acoples y pilares. En el nudo  $j$  del nivel  $i$  el ángulo producido en el extremo del componente por esta deformación será:

$$\theta_{sj} = \frac{Q_v}{G\bar{A}_j} = \frac{Q_p h}{G\bar{A}_j l_{0j}} = (Q_p h) \frac{\kappa_{0j}}{G\bar{A}_j l_j} = (Q_p h/2) \frac{2\kappa_{0j}}{G\bar{A}_j l_j} = \frac{M'_v}{K_s} = \frac{M'_v}{(1 - \mu_j) G\bar{A}_j l_j} = \frac{M'_v}{G\bar{A}_j l_j} \quad [7.1]$$

donde  $K_s$  es la rigidez cortante de la sección:  $K_s = G\bar{A}_j l_j / 2\kappa_{0j}$ . El ángulo total debido a la deformación por flexión y el cortante del acople es  $\theta_{vj} = \theta_{fj} + \theta_{sj}$ :

$$\theta_{vj} = \left[ \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} + \frac{2\kappa_0}{G\bar{A}_{vj} l_j} \right] \frac{Q_p h}{2} = \left[ \frac{1}{12E\gamma_j^3 k_j} + \frac{\kappa_0}{G\bar{A}_{vj} l_j} \right] Q_p h \quad [7.2]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_s} &= \frac{2\kappa_{0j}}{G\bar{A}_{vj} l_j} = \frac{\kappa_{0j}^3}{6Ek_j} \left[ 2 \frac{6Ek_j}{G\bar{A}_{vj} \kappa_{0j}^2 l_j} \right] = \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} \left[ 2 \frac{6Ek_j}{G\bar{A}_{vj} \kappa_{0j}^2 l_j} \right] = \\ &= \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} \left[ 2 \frac{6Ek_j}{G\bar{A}_{vj} (1 - \mu_j)^2 l_j} \right] = \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} 2\beta_j \end{aligned} \quad [7.3]$$

donde se define para el acople:

$$\beta_j = \frac{6Ek_j}{G\bar{A}_{vj} \kappa_{0j}^2 l_j} = \frac{6EI_j}{G\bar{A}_{vj} (1 - \mu_j)^2 l_j^2} \quad [7.4]$$

Entonces se puede escribir:

$$\theta_{vj} = \left[ \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} + \frac{2\kappa_0}{GA_{vj} I_j} \right] M_v = \left[ \frac{1}{6E\gamma_j^3 k_j} + \frac{2\beta_j}{6E\gamma_j^3 k_j} \right] M_v \quad [7.5]$$

$$\theta_{vj} = \frac{1+2\beta_j}{6E\gamma_j^3 k_j} M_v = \left[ \frac{1}{6Ek_j \chi_{vj}} \right] \frac{Q_P h}{2} = \left[ \frac{1}{6E\kappa_0 k_{0j} \chi_{vj}} \right] \frac{Q_P h}{2} \quad [7.6]$$

$$\theta_{vj} = \left[ \frac{1}{k_{\pi j}} \right] \frac{Q_P h}{12E\kappa_{0j}} \quad [7.7]$$

donde:

$$\frac{1}{\chi_v} = (1-\mu)^3 (1+2\beta) = \frac{1}{\gamma_j^3} (1+2\beta) \quad [7.8]$$

$$k_{\pi j} = \chi_{vj} k_{0j} \quad [7.9]$$

Si  $\beta_v = 0$ ,  $\chi_{vj} = \gamma_j^3$ ,  $k_{\pi j} = \gamma_j^3 k_{0j}$ .

De [7.7], [7.8] y [7.9] resultan las expresiones:

$$Q_P = \frac{12}{h} E\kappa_{0j} k_{\pi j} \theta_{vj} = \frac{12}{h} Ek_j \chi_{vj} \theta_{vj} = \frac{12}{h} r_{\pi j} \theta_{vj} = C_{\pi j} \theta_{vj} \quad [7.10]$$

$$\theta_{vj} = \frac{Q_P h}{12r_{\pi j}} = \frac{M_v}{6r_j \chi_{vj}} = \frac{M_v}{6Ek_{0j} \chi_{vj}} \quad [7.11]$$

Análogamente para el pilar se tiene:

$$\bar{\theta}_{cj} = \frac{1+2\bar{\beta}_j}{6E\bar{\gamma}_j^3 \bar{k}_j} M_v = \left[ \frac{1}{6E\bar{k}_j \bar{\chi}_{cj}} \right] \frac{Q_P h}{2} = \left[ \frac{1}{6E\bar{\kappa}_{0j} \bar{k}_{0j} \bar{\chi}_{cj}} \right] \frac{Q_P h}{2} =$$

$$\bar{\theta}_{cj} = \left[ \frac{1}{\bar{k}_{\pi j}} \right] \frac{Q_P h}{12E\bar{\kappa}_{0j}} \quad [7.12]$$

donde:



$$\bar{\beta}_j = \frac{6E\bar{k}_j}{G\bar{A}_{cj}\bar{\kappa}_{0j}^2 h} = \frac{6E\bar{I}_j}{G\bar{A}_{cj}(1-\bar{\mu}_j)^2 h^2} \quad [7.13]$$

$$\bar{\chi}_{cj} = 1/(1-\bar{\mu}_j)^3 (1+2\bar{\beta}_j) = \bar{\gamma}_j^3/(1+2\bar{\beta}_j) \quad [7.14]$$

$$\bar{k}_{\pi j} = \bar{\chi}_{cj}\bar{k}_{0j} \quad [7.15]$$

De [7.12], [7.13] y [7.14] resultan las expresiones:

$$Q_P = \frac{12}{h} E\bar{\kappa}_{0j}\bar{k}_{\pi j}\bar{\theta}_{cj} = \frac{12}{h} E\bar{k}_j\bar{\chi}_{cj}\bar{\theta}_{cj} = \frac{12}{h}\bar{r}_{\pi}\bar{\theta}_{cj} = \bar{C}_{\pi j}\bar{\theta}_{cj} \quad [7.16]$$

$$\bar{r}_{\pi j} \doteq E\bar{\kappa}_{0j}\bar{k}_{\pi j} = E\bar{k}_j\bar{\chi}_{cj} \quad [7.17]$$

## 8. RIGIDEZ CONSIDERANDO LA FLEXIÓN Y EL CORTANTE DE LOS ELEMENTOS

De las [7.17] y [7.10] el ángulo  $\theta$  producido en el nudo  $j$  del nivel  $i$  por las deformaciones por flexión y cortante de los elementos que llegan al nudo, y quitando los índices por simplicidad, tiene la expresión siguiente:

$$\theta = \theta_v + \theta_c$$

$$\theta = \left[ \frac{1}{\kappa_0 k_\pi} + \frac{1}{\bar{\kappa}_0 \bar{k}_\pi} \right] \frac{Q_P h}{12E} \quad [8.1]$$

Agregando el ángulo [6.6] producido por la deformación por cortante del nudo, resulta:

$$\theta = \theta_v + \theta_c + \theta_s$$

$$\theta = \left[ \frac{1}{k_e} + \frac{1}{\bar{k}_e} + [H] \right] \frac{Q_P h}{12E\kappa_0} \quad [8.2]$$

cuando se ha considerado, para simplificar que  $\kappa_0 \cong \bar{\kappa}_0$ , lo cual es una aproximación válida. De aquí se obtiene una expresión para la rigidez  $C_\pi$ :

$$Q_P = \frac{12E\kappa_0}{h} \frac{1}{\left[ \frac{1}{k_e} + \frac{1}{\bar{k}_e} + [H] \right]} \theta =$$

$$Q_P = C_\pi \theta \quad [8.3]$$

## 9. RIGIDEZ DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDO-FLEXIBLES

Las expresiones anteriormente obtenidas son válidas para cualquier nudo de un marco rígido flexible y están dadas para el nudo  $j$ , es decir, para el acople y pilar  $j$  en el nivel  $i$ . Para considerar un marco de varias luces y niveles, es necesario realizar las sumatorias de las rigideces de elementos en cada nudo. Así para un sistema estructural de marcos rígido-flexibles de varias luces iguales, resulta la siguiente expresión para la rigidez cortante:

$$C_\pi = \frac{12}{h} \frac{1}{1/r_\pi + 1/\bar{r}_\pi} \quad [9.1]$$

donde  $r_\pi = \sum_{j=1}^a \chi_{vj} r_j$ ,  $\bar{r}_\pi = \sum_{j=1}^c \bar{\chi}_{cj} \bar{r}_j$ , con  $a = c - 1$ ,  $c$  igual al número de acoples y pilares respectivamente (figura No. 1 y 2).

La rigidez del sistema estructural en el nivel  $i$  se puede expresar como sigue:

$$C_{\pi} = \frac{12}{h} E \frac{1}{1/\kappa_0 k_{\pi} + 1/\bar{\kappa}_0 \bar{k}_{\pi}} \quad [9.2]$$

Si  $\gamma_j \cong \bar{\gamma}_j$ ,  $\kappa_0 \cong \bar{\kappa}_0$ ,  $\chi_v = \bar{\chi}_c = \chi$ , resulta:

$$C_{\pi} = \frac{12}{h} E \kappa_0 \frac{1}{1/k_{\pi} + 1/\bar{k}_{\pi}} \quad [9.3]$$

El sistema estructural se puede representar con un objeto modelo como el mostrado en la figura No. 2, el cual es el resultado de la condensación de todos los elementos verticales (pilares) y horizontales (acoples) iguales, en un solo marco de rigidez global constante por piso, tal que  $Q_P = C_{\pi} \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de rotación común de todos los pilares en el nivel  $i$ .

**10. RIGIDEZ DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL DE MARCOS, FLEXIBLES (VIGA-COLUMNA)**

Para un sistema estructural tipo *pórtico flexible*, o marcos viga-columna, es un caso particular en que  $\gamma_j = 1$  y  $\chi_v = \bar{\chi}_c = \chi = 1$  pues no es necesario considerar el efecto de la deformación por cortante. Además si se supone que las rigideces lineales de las vigas y columnas son constantes en todo lo alto del edificio y la altura de entrepiso es constante, el sistema se puede representar por un objeto modelo como el mostrado en la figura No. 2 el cual es el resultado de la condensación de todos los elementos verticales (pilares) y horizontales (acoples) iguales en uno solo. Donde:

$$r = r_{\pi} = \sum_{j=1}^a r_j \quad s = \bar{r}_{\pi} = \sum_{j=1}^c \bar{r}_j \quad [10.1]$$

$$C'_P = \frac{12}{h} \frac{1}{1/r + 1/s} \quad [10.2]$$

$$Q_P = C_P \theta = C_P y' \quad [10.3]$$

donde  $y'$  es la pendiente de la curva de desplazamientos o deformada del sistema. La expresión para el coeficiente de fluencia en este caso es:

$$\bar{s} = \frac{hl}{12} [1/r + 1/s] = l/C_P \quad [10.4]$$

$C_P$  es la *rigidez cortante* de un "sistemas de marcos", donde  $r$  es la *suma de las rigideces lineales de las vigas* (suponiendo sección constante, luces en promedio iguales) y  $s$  es *suma de las rigideces lineales de las columnas* del sistema de marcos en el nivel  $i$ ,  $l$  es la luz de la viga  $j$  del modelo. Si  $\Delta$  es el desplazamiento entre niveles,  $\theta$  el ángulo, resulta:  $\tan \theta = \theta = \bar{s}/b = \Delta/h = 1/C_P$ ,  $\bar{s} = l\theta = l(\Delta/h)$ .

$$1/C_P = \frac{l}{h} \Delta = \frac{hl}{12} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) \quad \text{ó} \quad \Delta = \frac{h}{C_P} = \frac{h^2}{12} (s^{-1} + r^{-1}) \quad [10.5]$$

La magnitud  $\Delta$  se denomina el *alabeo lineal o desplazamiento relativo* entre dos niveles inmediatos, cuando una fuerza unitaria es aplicada sobre un piso por encima de aquel en el que se calcula el alabeo (figura No. 6) El *ángulo de giro del alabeo* es  $\theta \cong \tan \theta = \Delta/h$ . Como este se obtiene para una carga unitaria, el ángulo deberá alcanzar un valor unitario cuando la carga que origina el desplazamiento relativo entre dos pisos inmediatos alcanza cierto valor  $C_P$ , es decir,  $Q_P = 1 = C_P (\Delta/h)$ . De este modo se define

la rigidez al cortante como "la fuerza requerida para producir un ángulo de giro por alabeo igual a la unidad", cuya expresión es la [10.3].

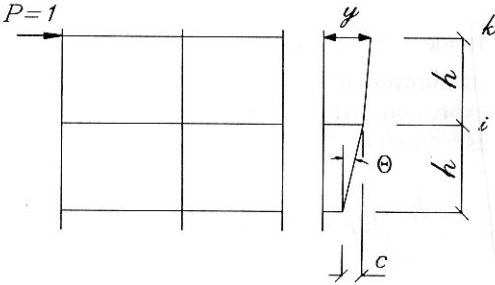


Figura No. 6. Desplazamiento relativo

**11. RIGIDEZ GLOBAL Y RELACIÓN DE RIGIDECES A FLEXIÓN ENTRE ELEMENTOS.**

Sea  $\rho = r_\pi / \bar{r}_\pi$  la relación entre las rigideces totales de los elementos (pilar/acople) de un sistema marco rígido-flexible, donde  $r_\pi$  y  $\bar{r}_\pi$  son la suma en un nivel, de las rigideces lineales de los pilares y acoples respectivamente. La variación de este parámetro permite determinar el tipo de estructura, sea marco viga-columna, muros acoplados o muros con aberturas. En la figura No. 7 se muestran distintos casos de sistemas estructurales. En general, suponiendo rigideces aproximadamente constantes en la altura (estructura regular), la razón de las rigideces lineales a flexión acople-pilar tiene la expresión:

$$\rho = \frac{r_\pi}{\bar{r}_\pi} = \frac{(c-1)\gamma^3 r}{c\bar{r}\bar{\gamma}^3} = \left(1 - \frac{1}{c}\right) \frac{r}{\bar{r}} \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^3 \quad [11.1]$$

donde, para rigideces iguales de los elementos en un nivel, se tiene:

$$r_\pi = \sum_{j=1}^c \gamma_j^3 r_j = c\gamma^3 r \quad [11.2]$$

y para marcos viga-columna  $\gamma_j = \bar{\gamma}_j = 1$ .

Obsérvese que el límite de la razón entre la suma de las rigideces de marco, cuando el número de pilares  $c$  crece, se aproxima o tiende, o es igual a la razón constante entre las rigideces del acople y pilar. La magnitud de  $\rho$  varía en la práctica normalmente en el intervalo (0,1) determinando cada tipo de estructura (figura No. 7); si  $\rho < 0.2$  se modela como un muro acoplado y si  $\rho > 0.2$  como un marco. Cuando  $r_\pi$  crece para un  $\bar{r}_\pi$  constante el sistema se convierte en un solo muro. En estructuras aperticadas o tipo marco, los peraltes de los pilares o columnas son aproximadamente del mismo orden que el de las vigas.

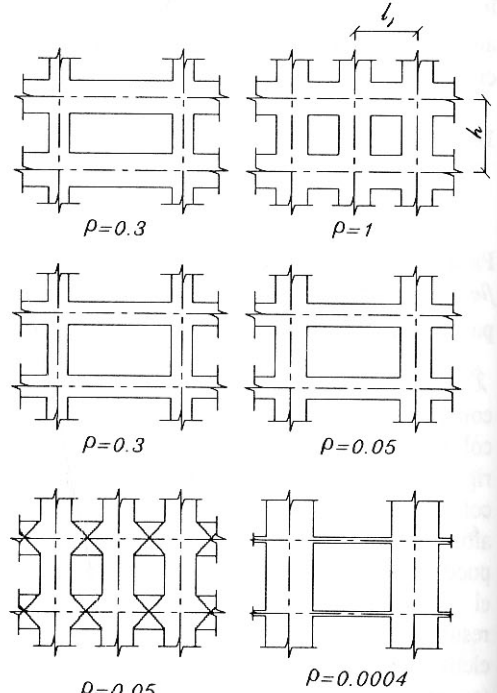


Figura No. 7. Estructura tipo marco

**12. EXTENSIÓN AL RANGO INELÁSTICO DE LAS FÓRMULAS PARA LA RIGIDEZ EN EL RANGO ELÁSTICO**

Las fórmulas obtenidas son válidas en el rango elástico del comportamiento de los elementos, es decir, cuando  $M_v \leq M_{vy}$  o  $M_c \leq M_{cy}$  (figura No. 8). En el rango inelástico la rigidez de las componentes que llegan al nudo (acoples y pilares) disminuyen respecto a su magnitud en el rango elástico. Se supondrán leyes constitutivas de comportamiento bilineales para los elementos (pilar, acople, nudo). Es decir, la relación "fuerza-desplazamiento" (momento-ángulo y esfuerzo cortante-ángulo de cortante), donde la fuerza corresponde a la demanda del sismo, se puede suponer descrita con una respuesta lineal con rigidez constante (figura No. 8) desde A (componente descargada) al punto de fluencia efectivo B, luego una respuesta lineal con rigidez reducida hasta la ordenada C (hay una respuesta con la resistencia reducida a E y pérdida final de resistencia). El punto de ordenada C corresponde a la resistencia última del componente o elemento. Los valores de las rigideces a flexión y cortante  $B = EI$  y  $G\bar{A}$  respectivamente de las componentes, deben ser los valores de la rigideces efectivas iniciales, es decir, reducidas por coeficientes según el tipo de elemento. Las relaciones (momento o cortante)/(ángulo), o rigidez del elemento en el estado último en flexión y cortante respectivamente, son las siguientes:

$$\alpha_u(6Ek) = M_u / \theta_{vu};$$

$$\bar{\alpha}_u G = \tau_u / \gamma_u \quad [12.1]$$

donde  $\alpha_u$  y  $\bar{\alpha}_u$  son coeficientes de disminución de la rigidez inicial (elástica) a flexión y cortante respectivamente, calculados a partir de la función bilineal.

Se pueden obtener entonces, para el intervalo inelástico de la función constitutiva bilineal:  $M_{cy} \leq M_c \leq M_{cu}$ , las siguientes

expresiones para los elementos del nudo: acople, pilar y nudo.

(a) Para el acople se tienen las siguientes relaciones entre los momentos en el centro del nudo y en el extremo flexible de los acoples:

$$M_{vU} = M'_{vU} / (1 - \mu);$$

$$M_{vy} = M'_{vy} / (1 - \mu) \quad [12.2]$$

La expresión general para el ángulo de rotación del nudo por el acople es:

$$\theta_v = \frac{M_v}{\alpha_v 6E\kappa_0 k_\pi} [\theta_{v0}] \quad [12.3]$$

De la figura No. 8 se puede deducir que  $\alpha_v$  y  $\theta_{v0}$  cumplen con las expresiones siguientes:

$$\alpha_v = \frac{1 - \frac{M_{vy}}{M_{vU}}}{1 - \alpha_{vU} \frac{M_{vy}}{M_{vU}}} \alpha_{vU}$$

$$\theta_{v0} = \frac{1 - \alpha_v}{\alpha_v} \frac{M_{vU}}{6E\kappa_0 k_\pi} \quad [12.4]$$

Cuando  $M_v = Q_p h / 2$ , la [12.3] resulta:

$$\theta_v = \frac{Q_p h}{[\alpha_v] 12E\kappa_0 k_\pi} - [\theta_{v0}] \quad [12.5]$$

Las fórmulas [12.4] son válidas para  $M_v \leq M_{vU}$ , con  $[\alpha_v] = 1$ ,  $[\theta_{v0}] = 0$  y para  $M_v \geq M_{vU}$ , con  $[\alpha_v] = \alpha_v$ ,  $[\theta_{v0}] = \theta_{v0}$ .

(b) Para el pilar se tienen las siguientes relaciones entre los momentos en el centro

del nudo y en el extremo flexible de los acoples :

$$\begin{aligned} M_{cy} &= M'_{cy} / (1 - \mu) \\ M_{cU} &= M'_{cU} / (1 - \mu) \end{aligned} \quad [12.6]$$

La expresión general para el ángulo de rotación del nudo por el acople es:

$$\theta_c = \frac{Q_p h}{[\alpha_c] 12 E \bar{\kappa}_0 \bar{k}_\pi} - \theta_{c0} \quad [12.7]$$

donde del gráfico se puede deducir que  $\alpha_c$  y  $\theta_{c0}$  cumplen con las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{1 - \frac{M_{cy}}{M_{cU}}}{1 - \alpha_{cU} \frac{M_{cy}}{M_{cU}}} \alpha_{cU}; \\ \theta_{c0} &= \frac{1 - \alpha_c}{\alpha_c} \frac{M_{cU}}{6 E \bar{\kappa}_0 \bar{k}_\pi} \end{aligned} \quad [12.8]$$

Las fórmulas [12.8] son válidas para  $M_c \leq M_{cy}$ , con  $[\alpha_c] = 1$ ,  $[\theta_{c0}] = 0$  y para  $M_c \geq M_{cy}$ , con  $[\alpha_c] = \alpha_c$ ,  $[\theta_{c0}] = \theta_{c0}$ .

(c) Para el nudo se tienen las siguientes relaciones:

$$\gamma = \frac{\tau}{[\bar{\alpha}] G} - [\gamma_0] = \frac{(1 - \mu - \bar{\mu}) Q_p h}{[\bar{\alpha}] G V} - [\gamma_0] \quad [12.9]$$

$$\begin{aligned} \tau &\leq \tau_T; \quad [\bar{\alpha}] = 1; \quad [\gamma_0] = 0 \\ \tau &\geq \tau_T; \quad [\bar{\alpha}] = \bar{\alpha}; \quad [\gamma_0] = \gamma_0 \\ V &= t \mu \bar{\mu} h \end{aligned}$$

Del gráfico (figura No.8) se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1 - \frac{\tau_y}{\tau_U}}{1 - \bar{\alpha}_U \frac{\tau_y}{\tau_U}} \bar{\alpha}_U; \\ \gamma_0 &= \frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \frac{\tau_y}{G} \end{aligned} \quad [12.10]$$

(d) Expresión general para la rotación del nudo  $j$  en el nivel  $i$ .

De las [8.3] y las anteriores se puede deducir ahora una expresión general para  $\theta$  en el nivel  $i$ , en cualquier intervalo del comportamiento de los elementos, a saber:

$$\theta = \frac{\delta}{h} = \left[ \frac{1}{[\alpha_v] k_{ve}} + \frac{1}{[\alpha_c] \bar{k}_{ce}} + \frac{H}{[\bar{\alpha}]} \right] \frac{Q_p h}{12 E \kappa_0} - \psi \quad \psi = \{ [\theta_{v0}] + [\theta_{c0}] + (1 - \mu - \bar{\mu}) [\gamma_0] \} \quad [12.11]$$

$$\theta = \frac{\delta}{h} = \left[ \frac{1}{[\alpha_v] r_\pi} + \frac{1}{[\alpha_c] \bar{r}_\pi} + \frac{H}{[\bar{\alpha}] E \kappa_0} \right] \frac{Q_p h}{12} - \psi \quad [12.12]$$

$$H = (1 - \mu - \bar{\mu})^2 (12 E \kappa_0 / G V) \quad [12.13]$$



Se obtiene así una expresión general para la rigidez en el nudo  $j$  nivel  $i$  del marco rígido flexible  $C_\pi$ , tal que  $Q_P = C_\pi \theta$ .

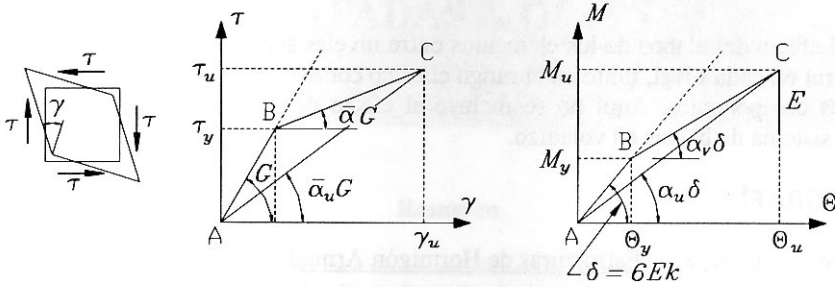


Figura No. 8. Leyes constitutivas de elemento

Para un marco se deben considerar a la totalidad de los  $j = 1, \dots, c$  nudos rígido-flexibles ( $c$  pilares y  $a = c - 1$  acoples) que lo componen en cada nivel y los  $k = 1, \dots, p$  marcos del sistema estructural en una dirección, es decir, realizar la sumatoria de las correspondientes rigideces de los elementos para cada nudo y "marco" componiendo el sistema estructural en una dirección. Ello es lo mismo que condensar todas los componentes marco en una dirección en uno solo (figura No. 2 y 3).

$$\theta_i = \left[ \frac{1}{\sum_{j,k=1}^{a,p} (\kappa_0 [\alpha_v] k_\pi)_{j,k}} + \frac{1}{\sum_{j,k=1}^{c,p} (\kappa_0 [\alpha_c] \bar{k}_\pi)_{j,k}} + \Omega \right] \frac{Q_P h}{12E} - \Theta_0 \quad [12.14]$$

donde:

$$\Omega = \sum_{j,k=1}^{a,p} \left( \frac{H}{\kappa_0 [\bar{\alpha}]} \right)_{j,k}$$

$$\Theta_0 = \sum_{j,k=1}^{c,p} \{ [\theta_{v0}] + [\theta_{c0}] + (1 - \mu - \bar{\mu}) [\gamma_0] \}_{j,k} \quad [12.15]$$

$$H_j = (1 - \mu_j - \bar{\mu}_j)^2 (12E \kappa_{0j} / GV_j) \quad [12.16]$$

$$Q_P = \frac{12E}{h} \left[ \frac{1}{\sum_{j,k=1}^{a,p} (\kappa_0 [\alpha_v] k_\pi)_{j,k}} + \frac{1}{\sum_{j,k=1}^{c,p} (\kappa_0 [\alpha_c] \bar{k}_\pi)_{j,k}} + \Omega \right]^{-1} \vartheta$$

$$\vartheta = \{ \theta_i - \Theta_0 \} \quad [12.17]$$

donde  $Q_p$  es la fuerza cortante en el nivel  $i$  del edificio. Por tanto resulta:

$$Q_p = C_\pi \{ \theta_i - \Theta_0 \} \quad [12.18]$$

que considera el efecto del alabeo de los elementos entre niveles sobre el desplazamiento relativo del sistema estructural en cada nivel, tanto en el rango elástico como en el inelástico de la ley constitutiva de los elementos componentes. Aquí no se incluye el efecto de la flexión del sistema de muros o columnas como sistema de barras en voladizo.

### 13. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Baykov, V.W., Sigalov, E.E. Estructuras de Hormigón Armado, edit. Mir, Moscú, 1980.
- [2]. Boroschek, K. Ruben. *Método para el Análisis Preliminar de Edificios Altos*. Tesis de Grado, Esc. Ing. Civi., UCR, 1984.
- [3]. Fernández, A. Ricardo. *Comentarios acerca del método de Sigalov y Baykov*. Ingeniería Estructural, Vol. IX, No. 1, Cuba, 1986.
- [4]. Herrera, Rodolfo *Análisis de la Estructura Marco-Pared*. Rev. Asociación Centroamericana del Cemento y Concreto, Vol VII, No. 1, 1974.
- [5]. Polyakova, S. V., et al. *Estado de la teoría sobre la sollicitación y la resistencia sísmica (en ruso)*, edit. Stroiizdat, Moscú, 1973.
- [6]. Tarcika, F. *Contrastación de un Método Preliminar para Edificios Altos*. Tesis de Grado. Esc. Ing. Civil, UCR, 1979.

---

<sup>1</sup> Ing. Dr. Prof. Emérito., Univ. de Costa Rica  
e-mail: rodolfoh@racsa.co.cr