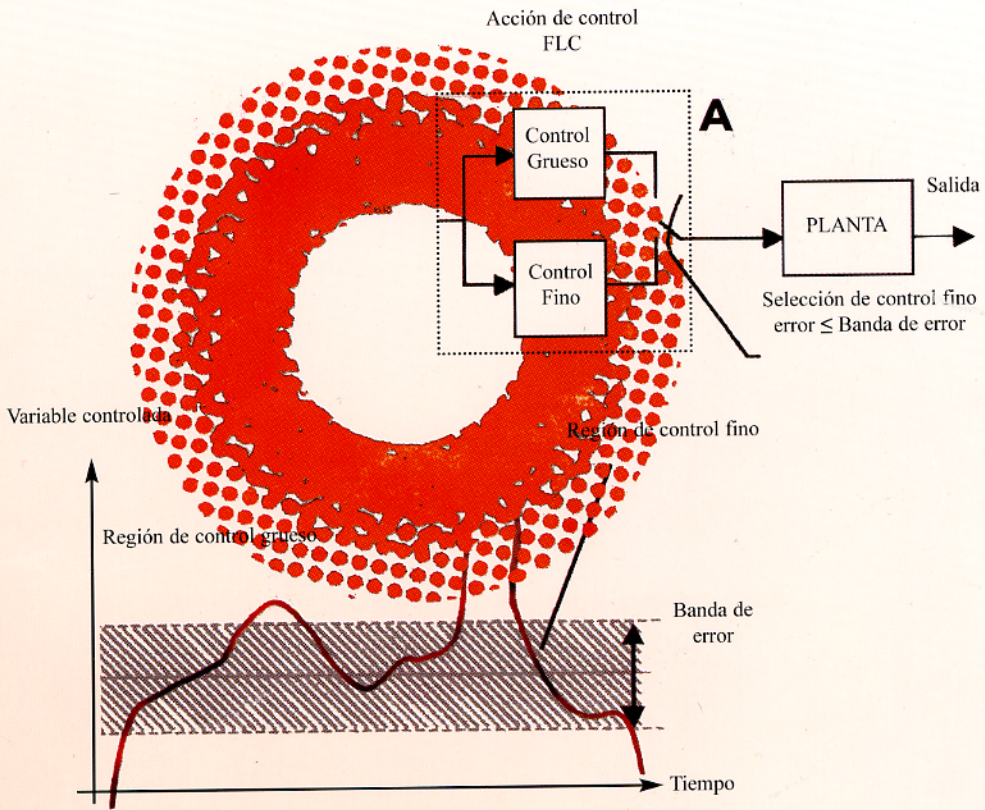


Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
Enero/Diciembre 1999 VOLUMEN 9 Nos. 1 y 2



INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica
Volumen 9, Enero/Diciembre 1999 Números 1 y 2

DIRECTOR

Rodolfo Herrera J.

CONSEJO EDITORIAL

Víctor Hugo Chacón P.

Ismael Mazón G.

Domingo Riggioni C.

CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica
Apartado Postal 75
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

CANJES

Universidad de Costa Rica
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información
Unidad de Selección y Aquisiciones-CANJE
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

Suscripción anual:

Costa Rica: ₡ 1 000,00

Otros países: US \$ 30,00

Número suelto:

Costa Rica: ₡ 750,00

Otros países: \$ 20,00



POLINOMIOS CONCENTRADOS DOBLEMENTE ORTOGONALES EN EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES DE FASE LINEAL

Jorge A. Romero C.¹

Resumen

Los polinomios concentrados doblemente ortogonales, sintetizados a partir de la maximización de la energía en un intervalo pero en detrimento de la energía en otro, se utilizan en la aproximación por mínimos cuadrados de la magnitud de filtros de respuesta finita al impulso de fase lineal. Junto con la técnica de la descomposición de valor singular, se emplean para calcular los coeficientes de la respuesta al impulso, los cuales definen tales filtros. Varios ejemplos ilustran lo aplicable del método propuesto; tal aplicabilidad se da tanto directamente (sin interferencia de la aproximación por mínimos cuadrados) como mediante tal aproximación.

Summary

The doubly orthogonal concentrated polynomials, obtained after maximizing an energy ratio in an interval at the expense of the energy in another, are used in the least-squares approximation of the magnitude function of finite impulse response digital filters with linear phase. Along with singular value decomposition, these polynomials are used to calculate the impulse response coefficients which characterize the filters. Several examples show their applicability. They can be applied both directly (without using a least-squares approximation) as well as by using the approximation.

Descriptors: Polinomios; funciones ortogonales; optimización; tratamiento y detección de señales.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de filtros digitales de fase lineal

El diseño de filtros digitales es un tema recurrente dentro de la literatura técnica. La búsqueda de algoritmos y enfoques que garanticen un diseño óptimo bajo un criterio determinado, constituye un esfuerzo común dentro de la investigación en esta área.

Los filtros digitales se clasifican en dos tipos, los filtros de respuesta finita al impulso (que denominaremos FIR de acuerdo con sus siglas en inglés) y los filtros de respuesta infinita al impulso (IIR). Si se compararan ambos tipos de filtros para efectos de uso, lo usual es hacerlo sobre la base del número de multiplicaciones por muestra, requerido en el método estándar de realización para cada tipo

de filtro. Siguiendo tal criterio, para el diseño de filtros pasabajo con características de rizado casi uniforme, los filtros elípticos IIR se construyen más eficientemente que los filtros FIR de fase lineal equivalentes. Al agregársele a las especificaciones de diseño el requerimiento adicional del retardo de grupo constante en la banda de paso, los filtros FIR de fase lineal presentan una construcción más eficiente que los filtros IIR elípticos con retardo de grupo ecualizado [1].

La comparación sobre la base del número de multiplicaciones por muestra se justifica puesto que, desde los puntos de vista de programación y de construcción, tal número es una excelente medida de la complejidad del diseño así como es también el factor determinante de la razón máxima de procesamiento del sistema. Sin embargo, hay

¹ Prof. de la Esc. de Ing. Eléctrica, U.C.R. Proyecto No. 731-97-309, Vicerrectoría de Investigación, UCR.

otros métodos para comparar los dos tipos de filtros, en particular, cuando se consideran los diversos efectos debidos a la longitud de palabra finita que ocurren en un diseño práctico.

Entre tales efectos se tiene el ruido de redondeo, tanto el correlacionado como el no correlacionado y la sensibilidad a la cuantificación de los coeficientes. Para la construcción de un filtro FIR en forma directa, el ruido de redondeo máximo se reduce acumulando sumas parciales en un registro de longitud extendida y luego redondeando el resultado final. Para los filtros IIR construidos en cascada en aritmética de punto fijo, el ruido de redondeo está relacionado con el problema del ámbito dinámico; la varianza del ruido no correlacionado de redondeo puede entonces minimizarse usando las técnicas del apareamiento de polos y ceros y el ordenamiento de las secciones del filtro [2]. El ruido correlacionado de redondeo puede eliminarse tanto usando esquemas apropiados de cuantificación en determinadas estructuras como incorporando mecanismos de saturación adecuados en dispositivos aritméticos [3].

Para resolver el problema de cuantificación de los coeficientes, se suele escoger longitudes de palabra diferentes para los valores de los coeficientes y los valores de la señal [3]. La longitud de palabra de los coeficientes se escoge para satisfacer especificaciones de respuesta en frecuencia, en tanto que la longitud de palabra de la señal se escoge para satisfacer una razón de señal a ruido determinada.

Desde un punto de vista cuantitativo, es más fácil comparar los dos tipos de filtro utilizando como medida el número de multiplicaciones por muestra. Considerando además que los filtros (ya sea continuos o digitales) de fase lineal, son preferidos a los filtros con fase arbitraria debido a su retardo de grupo constante, no es de extrañar que los filtros digitales con fase lineal hayan recibido tanta atención en la literatura.

De los dos tipos de filtro considerados, los filtros FIR son los que de una forma más simple pueden manipularse para obtener una fase lineal, permitiendo así que el diseño se concentre en la característica de magnitud que el filtro va a poseer [2-4]. El principal obstáculo que enfrentan los filtros IIR para que sean compelidos a poseer fase lineal es el hecho de que, para un filtro discreto causal, lineal e invariante con el tiempo de fase mínima, tanto su fase como su magnitud se relacionan por una transformada de Hilbert [5], lo que implica que al especificar independientemente las características de fase de las de magnitud, la relación mencionada se vería afectada con toda probabilidad [6].

Aparte de ser fácilmente compelidos a tener exactamente fase lineal, los filtros FIR no presentan problemas de estabilidad. Se han empleado diferentes técnicas para diseñarlos y pueden clasificarse en: (1) método de ventanas, (2) muestreo en frecuencia y (3) diseños de rizado uniforme [7].

Una ventana es una función de peso limitada en el tiempo utilizada para controlar la convergencia de una serie de Fourier mediante la modificación de los respectivos coeficientes. Un filtro FIR que aproxime una determinada respuesta en frecuencia necesita del truncamiento de la serie de Fourier, lo que da origen al fenómeno de Gibbs [8]. El efecto de este fenómeno se aminora multiplicando la ventana por los coeficientes de la serie truncada. El diseño por ventanas es una técnica bien establecida [9,10].

El segundo método para aproximar un filtro con especificaciones de respuesta en frecuencia dadas es mediante el muestreo de la respuesta deseada en N puntos, donde N es el número de muestras en la respuesta al impulso del filtro. El muestreo puede ser uniforme o no uniforme. Para las bandas de transición, deben escogerse cuidadosamente los valores de la respuesta en frecuencia para optimizar el diseño del filtro [11-16].

La tercera técnica para diseñar filtros FIR involucra la solución de un sistema de ecuaciones no lineales para generar un filtro con un error de aproximación de rizado uniforme. Las cantidades desconocidas son tanto los coeficientes de la respuesta al impulso como el conjunto de frecuencias donde ocurren los valores extremos del error de aproximación. Las ecuaciones no lineales se escriben como restricciones sobre tales valores extremos y sobre las derivadas. Técnicas estándares de optimización no lineal se usan luego para resolver las ecuaciones [17-22].

Una técnica reciente basada en la mezcla de los dos métodos anteriores consiste en utilizar polinomios ciclotómicos para formar un prefiltro sin multiplicadores, para luego adicionarle un ecualizador. Se propone una estrategia para escoger los polinomios adecuados para satisfacer especificaciones del filtro, en tanto que el ecualizador se puede diseñar de dos formas: un ecualizador basado en muestras espaciadas uniformemente construido, óptimamente, mediante un algoritmo modificado de Parks-McClellan [21], o un ecualizador basado en muestras

espaciadas irregularmente, construido empleando métodos de selección de subconjuntos de funciones base complejas. Esta técnica reduce el número de adiciones y multiplicaciones requeridas a costa de agregar un pequeño porcentaje de retardos adicionales. Reduce también la sensibilidad a la cuantificación de los coeficientes como al ruido de redondeo [23]. Se ha propuesto asimismo usar un tipo especial de programación lineal para el diseño basado en polinomios ciclotómicos [24].

En este artículo se propone usar el método de muestreo uniforme en frecuencia para diseñar filtros FIR de fase lineal utilizando polinomios concentrados doblemente ortogonales. Se propone usar estos polinomios tanto directamente como por medio de la solución a un problema de aproximación de mínimos cuadrados.

Polinomios concentrados doblemente ortogonales

Los polinomios concentrados doblemente ortogonales $f^{(n)}(x)$ son polinomios de orden n surgidos al maximizar la razón

$$R(f) = \frac{\int_{I_a} |f(x)|^2 dx}{\int_{I_b} |f(x)|^2 dx} \quad (1)$$

donde:

I_a, I_b son intervalos de la recta numérica. $R(f)$ puede interpretarse como una razón de energía. Al polinomio $f_0^{(n)}(x)$ que maximiza tal razón se le puede ver como el polinomio con la energía más concentrada en el intervalo I_a a expensas de su energía en I_b .

El problema de maximizar $R(f)$ es equivalente al de encontrar el autovalor más grande $\lambda_0^{(n)}$ al que corresponde la autofunción $f_0^{(n)}(x)$ dentro de un problema de autovalores. Las

autofunciones restantes, polinomios de orden n , igualmente integran junto con $f_0^{(n)}(x)$, un conjunto de funciones $f_j^{(n)}(x)$, $j = 0, \dots, n$ ortogonales simultáneamente sobre I_a e I_b [25]. Un problema similar fue resuelto involucrando en la solución un conjunto completo de funciones ortogonales de banda limitada tanto sobre un intervalo finito como sobre toda la recta numérica [26].

Sea $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ una base para el espacio F_n de polinomios de orden n . Cada polinomio en F_n se describe como:

$$f(x) = \sum_k f_k \phi_k(x) \quad (2)$$

Por lo que se le puede representar vectorialmente como $f = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T$. Con esta última notación, $R(f)$ puede escribirse como:

$$R(f) = \frac{f^T A f}{f^T B f} \quad (3)$$

f^T es la transpuesta de f , A y B son matrices $(n+1) \times (n+1)$ con elementos descritos por:

$$\int \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

que son integrales evaluadas sobre I_a e I_b , respectivamente. Para maximizar $R(f)$ se resuelve la ecuación matricial de autovalores

$$A f = \lambda B f \quad (4)$$

El mayor autovalor λ que satisface la ecuación anterior da la razón máxima para $R(f)$, $\lambda_0^{(n)}$.

Las coordenadas f_k del autovector correspondiente son los coeficientes del polinomio en la ecuación 2 que hace $R(f) = \lambda_0^{(n)}$, $f_0^{(n)}(x)$.

Una base conveniente que puede usarse para calcular los polinomios $f^{(n)}(x)$ es $\phi_i(x) = x^i$. Si $I_a = [a_1, a_2]$, $I_b = [b_1, b_2]$, puede demostrarse que las entradas de las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ están dadas por:

$$a_{ij} = \frac{a_2^{i+j+1} - a_1^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad b_{ij} = \frac{b_2^{i+j+1} - b_1^{i+j+1}}{i+j+1}$$

Cualquier otra base puede utilizarse para realizar el cálculo de los polinomios que maximizan $R(f)$. La naturaleza de tales polinomios depende de si I_a o I_b son disjuntos o no. Si lo son, se habla de un problema exterior. Si $I_a \subset I_b$, se habla de un problema interior [25].

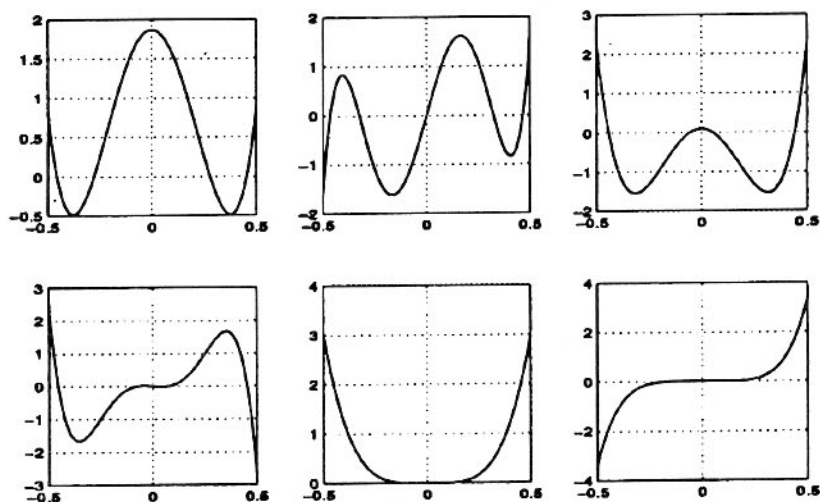


Figura No. 1 Polinomios concentrados doblemente ortogonales para un problema simétrico interior, con $n = 5$. Los polinomios están normalizados al valor de la integral del cuadro de la función sobre I_b .

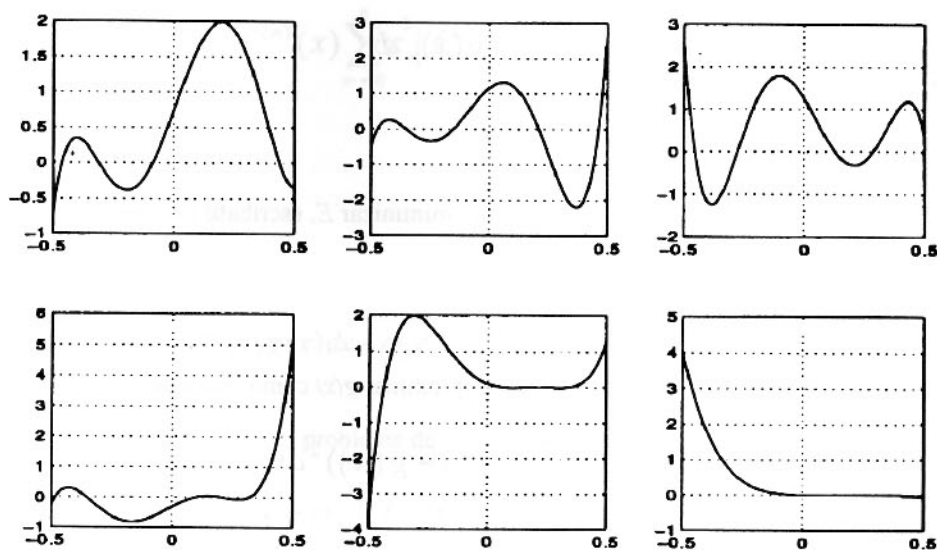


Figura No. 2 Polinomios concentrados doblemente ortogonales para un problema asimétrico interior, con $n = 5$. Los polinomios están normalizados al valor de la integral del cuadrado de la función sobre I_b .

Ejemplo No. 1 Para el caso definido por $I_b = [-0.5, 0.5]$, $I_a = [-0.1, 0.1]$ y $n = 5$, se muestra en la Figura No. 1 los seis polinomios $f^{(n)}(x)$ que maximizan la razón de energía estudiada. Esto corresponde a un problema interior.

Ejemplo No. 2 Un problema interior asimétrico se ilustra con $I_b = [-0.5, 0.5]$, $I_a = [0.05, 0.35]$ y $n = 5$. La Figura No. 2 muestra los resultados obtenidos empleando la base propuesta en el texto.

2. APROXIMACIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS USANDO POLINOMIOS CONCENTRADOS DOBLEMENTE ORTOGONALES

La doble ortogonalidad característica de los polinomios $f^{(n)}(x)$ es útil en ciertos problemas de aproximación por mínimos cuadrados.

Las dos ecuaciones de ortogonalidad para los polinomios $f^{(n)}(x)$ son:

$$\int_{I_b} f_j^{(n)}(x) f_k^{(n)}(x) dx = \delta_{jk} \quad (5)$$

$$\int_{I_a} f_j^{(n)}(x) f_k^{(n)}(x) dx = \lambda_j^{(n)} \delta_{jk} \quad (6)$$

Para $j, k = 0, 1, \dots, n$ y para $n = 0, 1, 2, \dots$. Supóngase que se busca un polinomio de grado n , $f(x)$, para aproximar una función dada $g(x)$ y que el error de aproximación se define como:

$$E = \omega_a \int_{I_a} |f(x) - g(x)|^2 dx + \omega_b \int_{I_b} |f(x) - g(x)|^2 dx \quad (7)$$

donde:

las constantes ω_a y ω_b son pesos positivos reales. Para minimizar E , escribese $f(x)$ como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n c_j f_j^{(n)}(x) \quad (8)$$

Considerando la solución $f(x)$ así como la función a aproximar $g(x)$ como entidades reales, se tiene

$$E = \omega_a \int_{I_a} (f(x) - g(x))^2 dx + \omega_b \int_{I_b} (f(x) - g(x))^2 dx \quad (9)$$

Derivando con respecto a c_j e igualando a cero

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0 = \omega_a \int_{I_a} 2[f(x) - g(x)] \frac{\partial f(x)}{\partial c_j} dx + \omega_b \int_{I_b} 2[f(x) - g(x)] \frac{\partial f(x)}{\partial c_j} dx$$

Nótese que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{j=0}^n c_j f_j^{(n)}(x) = f_j^{(n)}(x)$$

Sustituyendo en la penúltima ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_j} &= \omega_a \int_{I_a} 2f_j^{(n)}(x)[f(x) - g(x)] dx + \omega_b \int_{I_b} 2f_j^{(n)}(x)[f(x) - g(x)] dx \\ 0 &= \omega_a \int_{I_a} 2f_j^{(n)}(x) f(x) dx - \omega_a \int_{I_a} 2f_j^{(n)}(x) g(x) dx \\ &\quad + \omega_b \int_{I_b} 2f_j^{(n)}(x) f(x) dx - \omega_b \int_{I_b} 2f_j^{(n)}(x) g(x) dx \end{aligned}$$

Haciendo uso de las ecuaciones de ortogonalidad,

$$\int_{I_a} f_j^{(n)}(x) f(x) dx = \int_{I_a} f_j^{(n)}(x) \sum_{m=0}^n c_m f_m^{(n)}(x) dx$$

$$= c_j \lambda_j^{(n)} \quad \text{si } j = m$$

$$= 0 \quad \text{si } j \neq m$$

$$\int_{I_b} f_j^{(n)}(x) f(x) dx = \int_{I_b} f_j^{(n)}(x) \sum_{m=0}^n c_m f_m^{(n)}(x) dx$$

$$= c_j \quad \text{si } j = m$$

$$= 0 \quad \text{si } j \neq m$$

Finalmente,

$$0 = \omega_a c_j \lambda_j^{(n)} - \omega_a \int_{I_a} f_j^{(n)}(x) g(x) dx + \omega_b c_j - \omega_b \int_{I_b} f_j^{(n)}(x) g(x) dx$$

Los valores de c_j que resuelven el problema de aproximación por mínimos cuadrados son entonces,

$$c_j = \frac{\omega_a \int_{I_a} f_j^{(n)}(x) g(x) dx + \omega_b \int_{I_b} f_j^{(n)}(x) g(x) dx}{\omega_a \lambda_j^{(n)} + \omega_b} \tag{10}$$

con $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Esta ecuación permite el diseño de filtros digitales como se indica en la próxima sección.

3. APLICACIONES EN EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

La respuesta en frecuencia de un filtro digital se define por

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^M h(n) e^{-j\omega n T} \equiv H(\omega)$$

$h(n)$ es la respuesta al impulso, T el periodo de muestreo y ω la frecuencia en radianes por segundo. Para el diseño de un filtro digital de fase lineal, la respuesta en frecuencia se hace simétrica o antisimétrica alrededor de un punto medio y en cada caso, M puede ser impar o par [3]. Para un diseño simétrico con M par,

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) e^{-j\omega n T} + h\left(\frac{M}{2}\right) e^{-j\frac{M}{2}\omega T} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M h(n) e^{-j\omega n T} \tag{11}$$

lo que después de alguna álgebra y usando simetría, cambia a [4]

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{M}{2} T} \left\{ h\left(\frac{M}{2}\right) + 2 \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}-1} h(i) \cos\left[\left(\frac{M}{2} - 1 - i\right)\omega T\right] \right\} \tag{12}$$

Para un diseño simétrico con M impar [4]

$$H(\omega) = 2e^{-j\omega\frac{M}{2}T} \sum_{i=0}^{\frac{M-1}{2}} h(i) \cos\left[\left(\frac{M-2i}{2}\right)\omega T\right] \quad (13)$$

Las dos ecuaciones anteriores tienen la forma

$$H(\omega) = A(\omega) e^{-j\omega\frac{M}{2}T} \quad (14)$$

donde:

$A(\omega)$ es una función real de la variable ω y queda expresada en términos de la respuesta al impulso $h(n)$. La ecuación 14 indica claramente que se puede aproximar $A(\omega)$ mediante una expansión polinomial semejante a la dada en la ecuación 8. Si tal es el caso, se tratará de una aproximación de mínimos cuadrados.

Aplicación directa de los polinomios $f_j^{(n)}(x)$ al diseño de filtros digitales

Por aplicación directa se entenderá el empleo de uno de los miembros $f_j^{(n)}(x)$, para algún n y algún j , en el diseño de un filtro digital. Para ello, se establece la siguiente ecuación

$$f_j^{(n)}(\omega) = h\left(\frac{M}{2}\right) + 2 \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}-1} h(i) \cos\left[\left(\frac{M}{2} - i\right)\omega T\right] \quad (15)$$

En total, hay $M/2 + 1$ incógnitas. Extendiendo la ecuación a L frecuencias $\{\omega\}$, se establece un sistema sobredeterminado de ecuaciones que se puede resolver usando la descomposición de valor singular (SVD), que proporciona una solución $h(n)$, óptima bajo el criterio de mínimos cuadrados lineales. Los coeficientes del filtro, es decir, los valores del vector $h(n)$, tendrán norma mínima en el sentido euclideo [27,28].

El número L de frecuencias debe ser mayor o igual que $M/2 + 1$. El sistema de ecuaciones mencionado en el párrafo anterior se escribe como $B\mathbf{h} = \mathbf{d}$, donde \mathbf{h} es el vector de coeficientes del filtro, \mathbf{d} es el vector de valores resultante al evaluar el polinomio en las frecuencias $\{\omega\}$ y B es la matriz originada al evaluar la función coseno en la ecuación 15. B tiene entradas de la forma

$$2 \cos\left[\left(\frac{M}{2} - i\right)\omega_j T\right]$$

donde:

$j = 1, \dots, L$ e $i = 0, \dots, M/2 - 1$. Una de las columnas o filas de B (dependiendo del ordenamiento escogido) estará constituida por solamente unos. La solución del sistema se obtiene en términos de los vectores singulares derechos \underline{v} y los valores singulares $\{\sigma_i\}$ provenientes de la descomposición de valor singular de B :

$$\underline{h} = \sum_{i=1}^W \frac{1}{\sigma_i^2} \underline{v}_i \underline{v}_i^T B^T \underline{d} \quad (16)$$

donde:

W es el rango de B , definido como el número de columnas linealmente independientes de la matriz. En nuestro caso, la solución es consistente porque W iguala el número de elementos de \underline{h} .

Ejemplo No. 3 Las figuras No. 3, 4 y 5 muestran ejemplos de filtros paso bajo, paso alto y pasabanda, respectivamente, diseñados de acuerdo con el procedimiento indicado. Para variar parámetros de frecuencia de corte, banda de paso y de rechazo, atenuación y otros que son usuales en la teoría de filtros, se modifica el orden n de los polinomios $f^{(n)}(x)$ junto con los intervalos de ortogonalidad I_a e I_b . El orden incide directamente sobre la atenuación, en tanto que la especificación de los intervalos lo hace sobre los parámetros de frecuencia de corte y las bandas de paso y de rechazo.

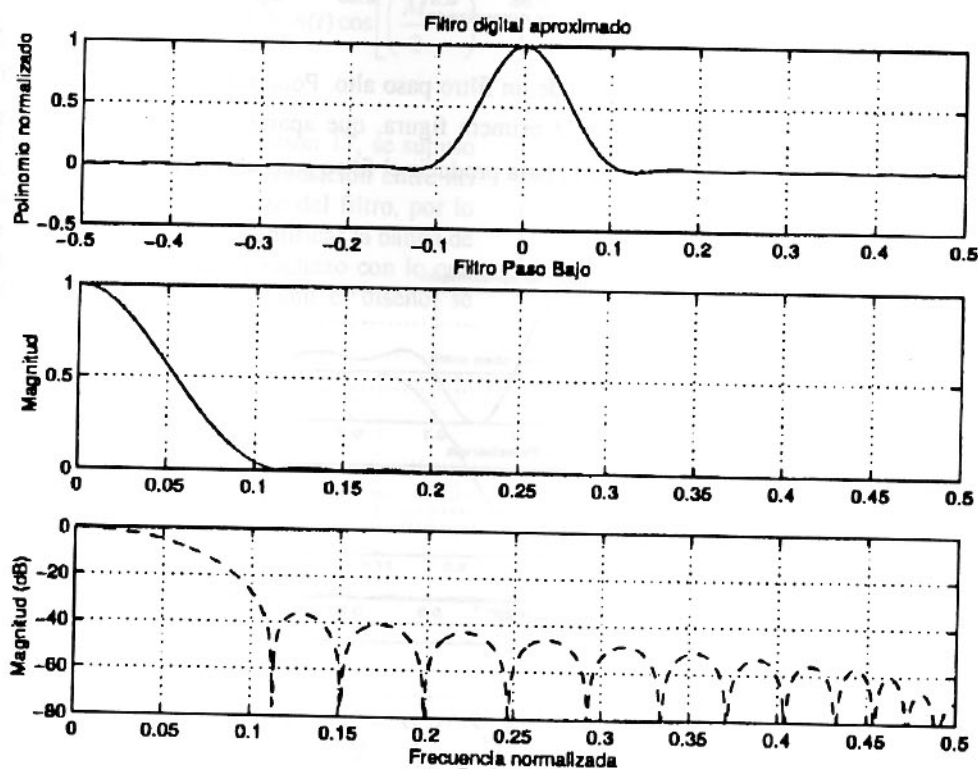


Figura No. 3. Aplicación directa en el diseño de un filtro paso bajo. Poniendo $n = 40$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce el polinomio de la primera figura, que aparece normalizado a su valor máximo. Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro paso bajo mostrado.

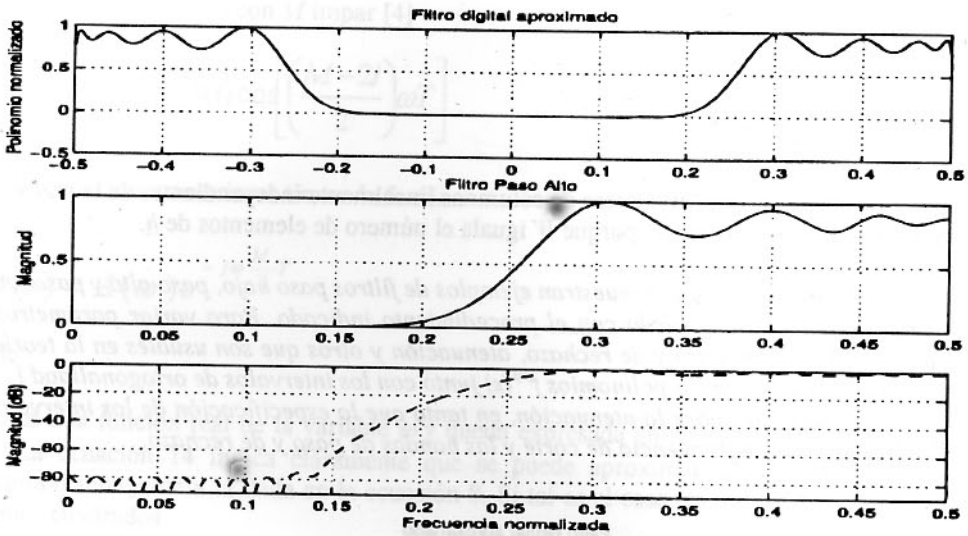


Figura No. 4. Aplicación directa en el diseño de un filtro paso alto. Poniendo $n = 30$, $I_a = [-0.1, 0.1]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce el polinomio de la primera figura, que aparece normalizado a su valor máximo. Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro paso alto mostrado.

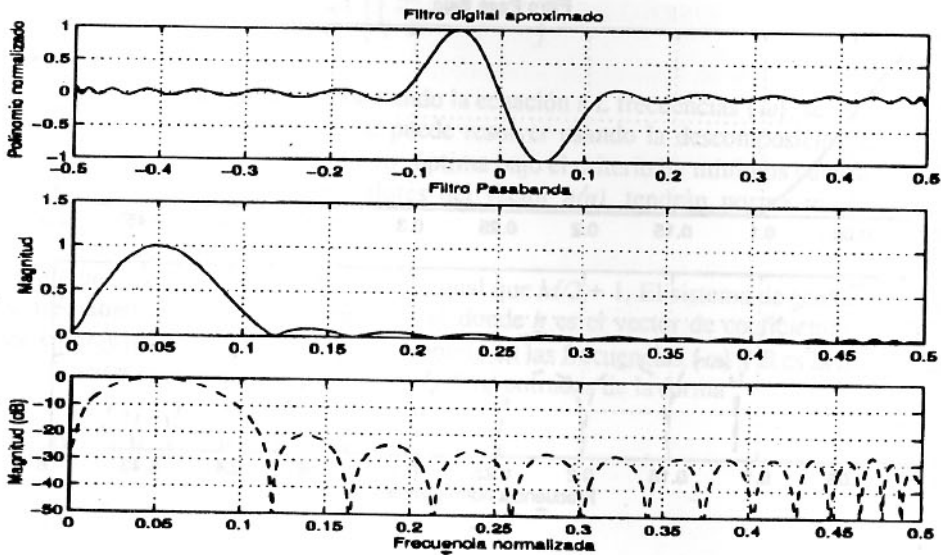


Figura No. 5. Aplicación directa en el diseño de un filtro pasabanda. Poniendo $n = 60$, $I_a = [-0.1, 0.1]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce el polinomio de la primera figura, que aparece normalizado a su valor máximo. Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro pasabanda mostrado.

Combinación del criterio de mínimos cuadrados y polinomios $f^{(n)}(x)$ para el diseño de filtros digitales

Suponiendo que $I_a = [a_1, a_2]$, $I_b = [b_1, b_2]$ y que I_a está contenido dentro de I_b (problema interior), la solución al problema de mínimos cuadrados se escribe como:

$$c_j = \frac{1}{\omega_a \lambda_j^{(n)} + \omega_b} \left\{ (\omega_a + \omega_b) \int_{a_1}^{a_2} f_j^{(n)}(x) g(x) dx + \omega_b \left[\int_{b_1}^{a_1} f_j^{(n)}(x) g(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} f_j^{(n)}(x) g(x) dx \right] \right\} \tag{17}$$

La anterior ecuación se aplica en el diseño de un filtro digital estableciendo la igualdad

$$\sum_{j=0}^n c_j f_j^{(n)}(\omega) = h \left(\frac{M}{2} \right) + 2 \sum_{i=0}^{\frac{M}{2}-1} h(i) \cos \left[\left(\frac{M}{2} - i \right) \omega T \right] \tag{18}$$

En la derivación de la ecuación 17, se supuso que no hay una región de transición entre las bandas de paso y de rechazo del filtro, por lo que fácilmente se puede identificar la banda de paso con I_a y la banda de rechazo con lo que resta de I_b . Para proceder con el diseño, se

sigue el procedimiento esbozado en la sección anterior. Dentro de la banda de rechazo, $g(x)$ toma un valor pequeño, en tanto que para la banda de paso, $g(x) = 1$.

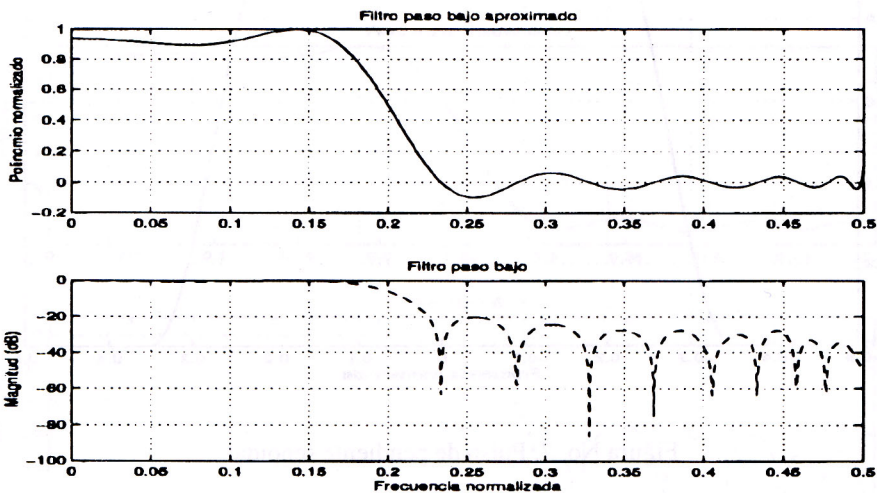


Figura No. 6. Diseño de un filtro paso bajo. Poniendo $n = 31$, $I_a = [-0.2, 0.2]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce la aproximación por mínimos cuadrados a una plantilla de un filtro paso bajo ideal (con región de transición nula entre las bandas de paso y de rechazo). Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro paso bajo mostrado.

Ejemplo No. 4 En la Figura No. 6 se presenta un diseño de filtro paso bajo donde la región de transición entre bandas es nula, es decir, se aproxima un filtro paso bajo ideal. Para la banda de rechazo, $g(x) = 0.001$.

Para mejorar la respuesta de magnitud del diseño anterior, la región de transición debe suponerse no nula para efectos de disminuir el rizado de aproximación; es aconsejable que se defina entonces una función continua que realice una transición suave entre bandas [29,30]. A modo de ejemplo, considérese el pulso de pendiente senoidal mostrado en la Figura No. 7, de uso en telecomunicaciones para eliminar la interferencia entre símbolos [31]. La transición del valor 1 al valor 0 del pulso se realiza por medio de la función

$$g_t(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_x} \right) \right] \quad (19)$$

donde $\Delta\omega = \omega - \omega_c$, con ω_x la mitad del valor de la longitud de la región de transición y ω_c el valor central de tal región.

Si la región de transición no es nula, hay dos casos a considerar: (1) la banda de paso conforma el intervalo de ortogonalidad I_a y (2) tanto la banda de paso y la región de transición conforman tal intervalo.

Para el primer caso anterior, el cálculo de los coeficientes c_j se modifica como:

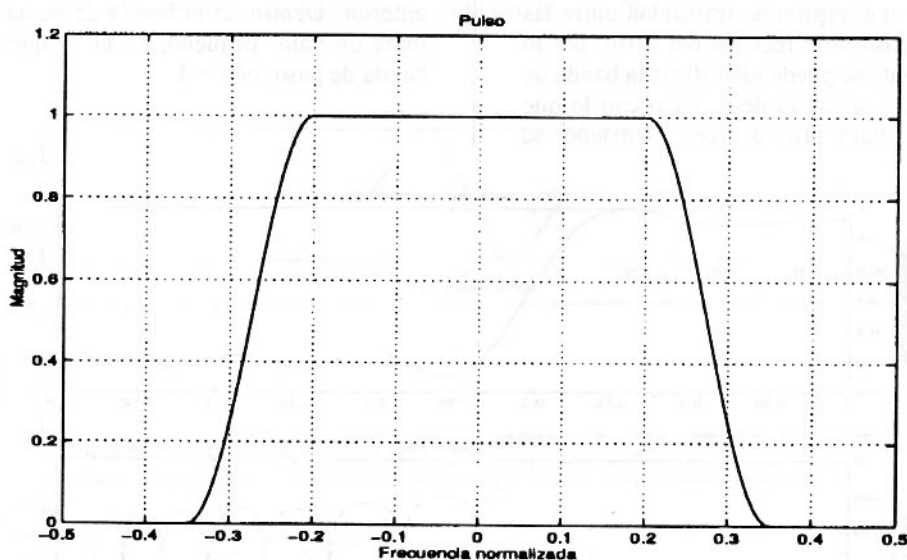


Figura No. 7. Pulso de pendiente senoidal.

$$c_j = \frac{1}{\omega_a \lambda_j^{(n)} + \omega_b} \left\{ (\omega_a + \omega_b) \int_{a_1}^{a_2} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx + \omega_b \left[\int_{b_1}^{c_1} f_j^{(n)}(x) g_2(x) dx + \int_{c_1}^{a_1} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx + \int_{a_2}^{c_2} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx + \int_{c_2}^{b_2} f_j^{(n)}(x) g_2(x) dx \right] \right\} \quad (20)$$

Los intervalos $[c_1, a_1]$ y $[a_2, c_2]$ forman la región de transición en la que se define una función $g_t(x)$, que define la transición del valor 1 al valor 0 del pulso con pendiente senoidal mostrado en la Figura N° 7. $g_1(x)$ vale 1 en tanto que $g_2(x)$ será un número cercano a 0.

Ejemplo No. 5. En la Figura No. 8 se muestra un filtro paso bajo diseñado con los parámetros siguientes: $\omega_b = 1$, $\omega_a = 0.001$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 0.00001$, $I_a = [-0.2, 0.2]$, $I_b =$

$[-0.5, 0.5]$, $c_2 = 0.3153$ y $c_1 = -0.3153$. El orden de los polinomios utilizados es $n = 30$, un orden menor que los del ejemplo inmediato anterior.

En el segundo caso mencionado, cuando la región de transición y la banda de paso integran el primer intervalo de ortogonalidad I_a y siguiendo la notación utilizada, se tiene que $I_a = [c_1, c_2]$. Los coeficientes c_j se calculan ahora como:

$$c_j = \frac{1}{\omega_a \lambda_j^{(n)} + \omega_b} \left\{ (\omega_a + \omega_b) \left[\int_{c_1}^{a_1} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx + \int_{a_2}^{c_2} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx + \int_{a_2}^{c_2} f_j^{(n)}(x) g_1(x) dx \right] + \omega_b \left[\int_{b_1}^{c_1} f_j^{(n)}(x) g_2(x) dx + \int_{c_2}^{b_2} f_j^{(n)}(x) g_2(x) dx \right] \right\} \quad (21)$$

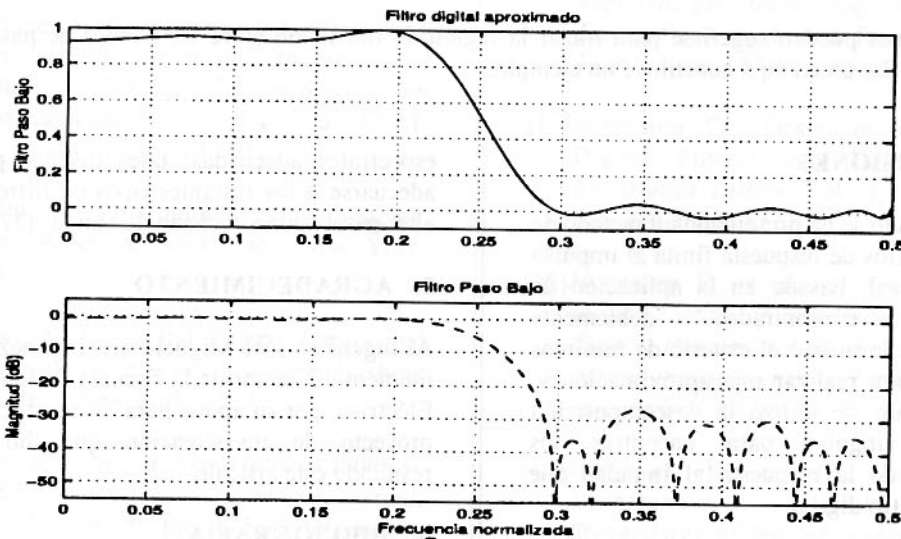


Figura No. 8. Diseño de filtro paso bajo, con la banda de paso cubriendo el intervalo I_a de ortogonalidad, en tanto que la región de transición y la banda de rechazo conforman la parte restante del intervalo I_b .

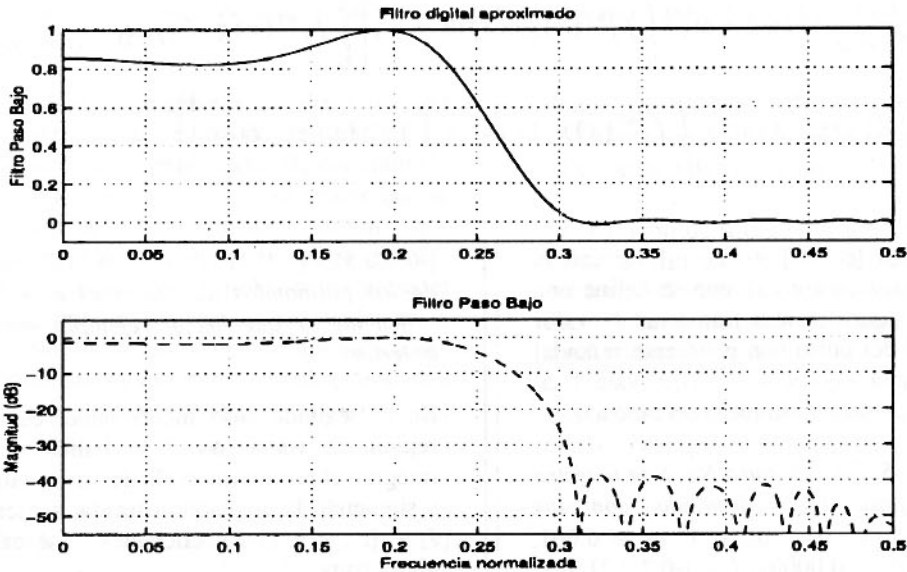


Figura No. 9. Diseño de filtro paso bajo, con la banda de paso y la región de transición constituyendo el intervalo I_a de ortogonalidad, en tanto que la banda de rechazo conforma la parte restante del intervalo I_b .

Ejemplo N° 6 En la Figura No. 9 se muestra un filtro paso bajo diseñado con los parámetros siguientes: $\omega_b = 1$, $\omega_a = 0.001$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 0.00001$, $I_a = [-0.3153, 0.3153]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, $a_1 = -0.2$ y $a_2 = 0.2$. El orden de los polinomios utilizados es $n = 30$.

Otras funciones pueden sugerirse para trazar la región de transición entre las bandas de paso y de rechazo [30]. La usada aquí constituye un ejemplo.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un método de diseño de filtros de respuesta finita al impulso con fase lineal, basado en la aplicación de polinomios concentrados doblemente ortogonales. Se utilizó el criterio de mínimos cuadrados para realizar una aproximación y, posteriormente, se utilizó la descomposición de valor singular para encontrar los coeficientes de la respuesta al impulso que definen el filtro digital.

Aunque los ejemplos presentados corresponden a diseños para un filtro paso bajo en su mayoría, mediante las transformaciones

espectrales adecuadas, tales diseños pueden adecuarse a los restantes tipos de filtro (paso alto, pasabanda y rechazo de banda) [32].

5. AGRADECIMIENTO

Al ingeniero José Miguel Páez Jiménez, en su momento Director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, por su apoyo para la inscripción del proyecto de investigación que dio como resultado este artículo.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Rabiner, L. R., et. al., *Some Comparisons between FIR and IIR Digital Filters*, Bell

- System Technical Journal*, vol. 53, pp. 305-331, febrero 1974.
- [2] Jackson, L. B. Digital Filters and Signal Processing. Tercera edición. Kluwer Academic Publishers: Boston, 1996.
- [3] Antoniou, A. Digital Filters: Analysis, Design and Applications. Segunda edición. McGraw-Hill, Inc.: New York, 1993.
- [4] Romero, J., *Signal Processing Based on Irregular Sampling: Reconstruction, Compression, and Signal Transformation*. Tesis de doctorado. Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computación, Concordia University, Montréal, Québec, Canadá, junio 1996.
- [5] Papoulis, A. The Fourier Integral and Its Applications. McGraw-Hill Publishing Company: New York, 1987.
- [6] Zadeh, L. A. et. al. Linear System Theory. McGraw-Hill Book Company, Inc.: New York, 1963.
- [7] Rabiner, L. R., *Techniques for Designing Finite-Duration Impulse-Response Digital Filters*, *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-19, pp. 188-195, abril 1971.
- [8] Lathi, B. P. Communication Systems. John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1968.
- [9] Bose, N. K. Digital Filters: Theory and Applications. Elsevier Science Publishing Co., Inc.: New York, 1985.
- [10] Adams, J. W., *A New Optimal Window*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 8, pp. 1753-1769, agosto 1991.
- [11] Rabiner, L. R., et. al., *An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters*, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-18, pp. 83-106, junio 1970.
- [12] Herrmann, O., *On the Approximation Problem in Nonrecursive Digital Filter Design*, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-18, pp. 411-413, mayo 1971.
- [13] Algazi, V. R. et. al., *On the Frequency Weighted Least-Square Design of Finite Duration Filters*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-22, no. 12, pp. 943-953, diciembre 1975.
- [14] Bozic, S. M. et. al., *FIR design by non-uniform sampling in frequency domain*, *International Journal of Electronics*, vol. 65, no. 4, pp. 815-821, 1988.
- [15] Summers, B. et. al., *FIR Digital Filter Design Using Non-Equispaced Frequency Sampling*, *Electronics Letters*, vol. 25, no. 5, pp. 338-339, marzo 1989.
- [16] Kim, J. T., et. al., *Design of Nonuniformly Spaced Linear-Phase FIR Filters Using Mixed Integer Linear Programming*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 1, pp. 123-126, enero 1996.
- [17] Herrmann, O., "Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase", *Electronics Letters*, vol. 6, no. 11, pp. 328-329, mayo 1970.
- [18] Hofstetter, E., et. al., *A New Technique for the Design of Non-Recursive Digital Filters*, *Proceedings of the 5th. Annual Princeton Conference on Information and Science Systems*, pp. 64-72, 1971.
- [19] Hofstetter, E., et. al., *On Optimum Nonrecursive Digital Filters*, *Proceedings of the 9th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, pp. 789-798, 1971.
- [20] Holt, A. G. J., et. al. *The use of orthogonal polynomials in the design of*

- non-recursive linear phase digital filters*, *International Journal of Electronics*, vol. 38, no. 3, pp. 385-392, 1975.
- [21] Rabiner, L. R., et. al., *FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation*, *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, pp. 595-610, abril 1975.
- [22] Tufts, D. W., *Comments on FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation*, *Proceedings of the IEEE*, pp. 1618-1619, noviembre 1975.
- [23] Hartnett, R. J. et. al., *On the Use of Cyclotomic Polynomial Prefilters for Efficient FIR Filter Design*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 5, mayo 1993.
- [24] Oh, W. J., et. al., "Design of Efficient FIR Filters with Cyclotomic Polynomial Prefilters Using Mixed Integer Linear Programming", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 8, pp. 239-241, agosto 1996.
- [25] Gilbert, E. N., et. al., "Doubly Orthogonal Concentrated Polynomials", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 4, no. 2, pp. 290-319, abril 1977.
- [26] Slepian, D. et. al., "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty-I", *Bell System Technical Journal*, vol. 40, pp. 43-63, enero 1961.
- [27] Haykin, S. Adaptive Filter Theory. Segunda edición. Prentice-Hall, Inc.: Englewood Cliffs, 1991.
- [28] Dowling, E. M., et. al., "The Equivalence of the Total Least Squares and Minimum Norm Methods", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 8, agosto 1991.
- [29] Gopinath, R. A., "Thoughts on Least Squared-Error Optimal Windows", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 984-987, abril 1996.
- [30] Burrus, C. S., et. al., "Least Squared Error FIR Filter Design with Transition Bands", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1327-1340, junio 1992.
- [31] Schwartz, M. Information Transmission, Modulation and Noise. Tercera edición. McGraw-Hill Book Company: New York, 1980.
- [32] Constantinides, A. G., "Spectral Transformations for Digital Filters", *Proceedings of the Institute of Electronics Engineers*, vol. 117, pp. 1585-1590, agosto 1970.

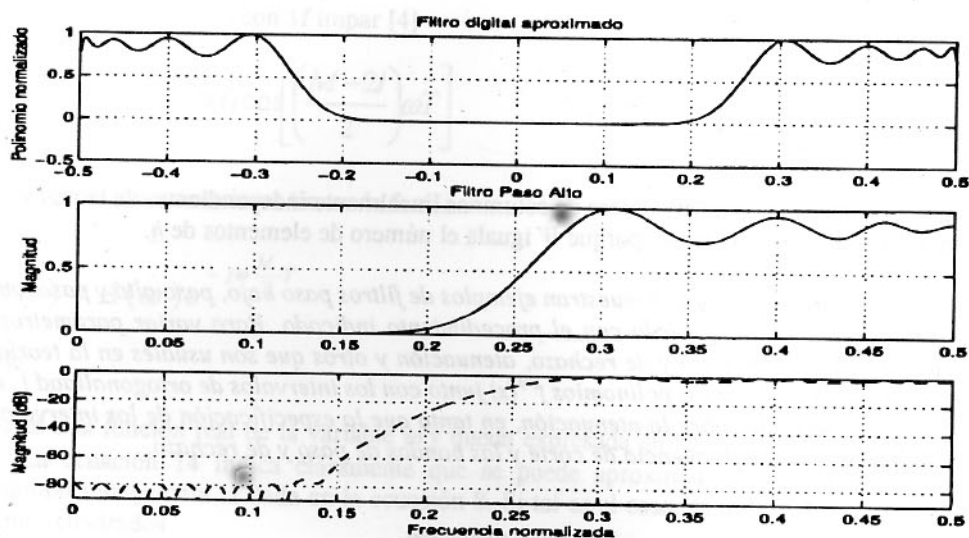


Figura No. 4. Aplicación directa en el diseño de un filtro paso alto. Poniendo $n = 30$, $I_a = [-0.1, 0.1]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce el polinomio de la primera figura, que aparece normalizado a su valor máximo. Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro paso alto mostrado.

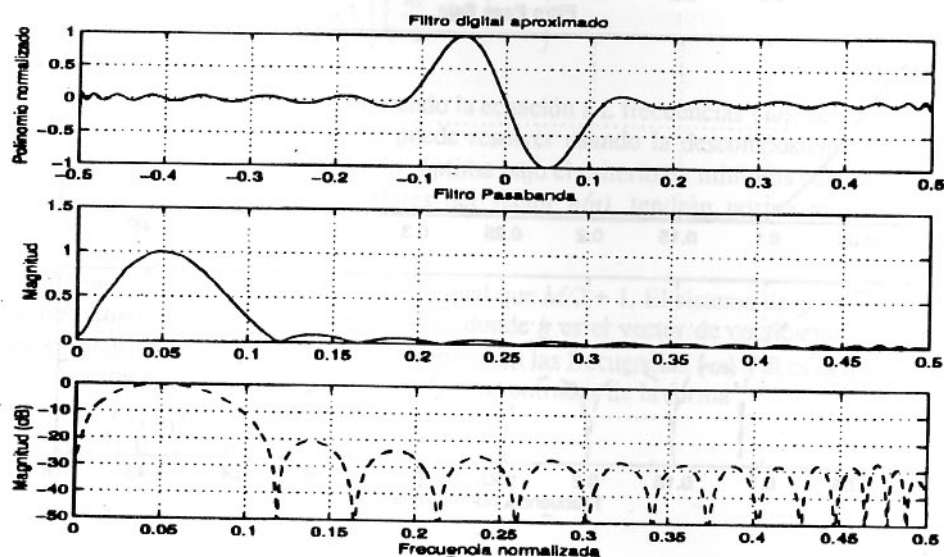


Figura No. 5. Aplicación directa en el diseño de un filtro pasabanda. Poniendo $n = 60$, $I_a = [-0.1, 0.1]$, $I_b = [-0.5, 0.5]$, se produce el polinomio de la primera figura, que aparece normalizado a su valor máximo. Luego se calcula los valores de $h(n)$, para producir el filtro pasabanda mostrado.