Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
Enero/Junio 1996 VOLUMEN 6 Nº 1

INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica
Volumen 6, Enero/Junio 1996 Número 1

CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica
Apartado Postal 75
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

CANJES

Universidad de Costa Rica
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información
Unidad de Selección y Aquisiciones-CANJE
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica

Suscripción anual:
Costa Rica: ¢ 1 000,00
Otros países: US $ 25,00

Número suelto:
Costa Rica: ¢ 750,00
Otros países: $ 15,00

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica.

Revisión Filológica: *Lorena Rodríguez*

Diseño Gráfico, Diagramación y Control de Calidad:
Unidad de Diseño Gráfico de Revistas
Oficina de Publicaciones

Impreso en la Oficina de Publicaciones
de la Universidad de Costa Rica

Revista
620.005
I-46i Ingeniería / Universidad de Costa Rica. ——
Vol. I, no. 1 (ene./jun. 1991)— . —— San José, C. R. : Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1991— (Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica)
v. : il

Semestral.

1. Ingeniería - Publicaciones periódicas.

CCC/BUCR—250

Ingeniería 6(1): 49-67, 1996. San José, Costa Rica

APLICACION DEL METODO DE REPRESENTACION DE GAUSS A LA CARTA GEOGRAFICA DE COSTA RICA

Luis González G.[1]

PREAMBULO

Este artículo corresponde a un trabajo inédito hecho en 1945 por el ingeniero y profesor Luis González G. (1905-1962) para el Instituto Geográfico Nacional (IGN) como parte de su labor al servicio del programa para el desarrollo de sistemas de cálculo y del sistema de proyección cartográfica nacional, siendo que la mayoría de sus trabajos se dieron por perdidos [M. Chaverri, 1994]. Recientemente en un reordenamiento en el Instituto apareció el trabajo que se publica en este número de la revista. El original está escrito a mano en un cuaderno de pasta dura y le fué facilitado al Ing. Chaverri por el señor Ing. Fernando M. Rudín exdirector del Instituto.

Habiéndose publicado un artículo sobre el papel del profesor González en el desarrollo de las matemáticas en Costa Rica [Herrera R., 1993], la Dirección de la revista ha considerado conveniente, dado su interés histórico, la publicación de este trabajo de investigación inédito y que además pensamos podría ser útil.

1. INTRODUCCION

Martín Chaverri R.[2]
Rodolfo Herrera J.[3]

El profesor L. González estuvo vinculado con la *topografía* y la geodesia en el país en el período del 34 al 50, posiblemente debido a que era el único ingeniero con capacidades matemáticas suficientes para afrontar cierto tipo y nivel de cálculos y problemas. El laboró para el IGN como jefe de las secciones de Topografía y de Cálculo y Estadística [Herrera, 1993]. Durante ése período realizó muchos trabajos interesantes y útiles sobre errores de observación y compensación de triangulaciones y nivelaciones en topografía, así como en el campo de la *geodesia,* un ejemplo de los cuales es el que aquí se publica. En ésa época se necesitaba dedicar mucho tiempo al cálculo numérico, labor que el profesor González realizó con "paciencia benedictina" como solía decir, lo cual se evidencia en las 78 páginas de tablas realizadas como complemento útil del trabajo teórico aquí publicado, las que no se han editado por razones obvias de espacio y porque hoy día su programación para una computadora sería lo razonable.

En la década del 50 trabajando en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Costa Rica parte de sus trabajos y experiencia en estos campos quedó plasmada en una obra inédita que denominó: Teoría de los Errores de Observación (1953-59), habiendo también dictado un curso en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Costa Rica en 1953 bajo el nombre de Teoría de los Errores y Método de Cuadrados

1 Ing. Prof. Univ. de Costa Rica (1941-1962)
2 Ing. Profesor jubilado de la Esc. Topografía Fac. Ing., Univ. de Costa Rica.
3 Ing. Dr. Prof. Emérito, Fac. Ing., Univ. de Costa Rica, Director Rev. Ingeniería.

Mínimos [Herrera, p. 54-55, 1993], todo lo cual evidencia el amplio conocimiento que llegó a tener en estas disciplinas.

La forma de presentación que usó el profesor González en este trabajo es muy didáctica, repitiéndose las fórmulas usadas en las derivaciones y casi siempre desarrollándolas completamente. Es evidente que se tenía un propósito doble, por un lado el objetivo básico del trabajo y por otro dar las bases para entender las tablas al final del trabajo, que era lo útil para el cálculo geodésico. Es interesante observar que en este artículo de fecha 1945, se reflejan ya las características didácticas del profesor González que siempre cultivó y que posteriormente llegarían a alcanzar un nivel especial durante su carrera como profesor e investigador.

Es de notar que en ésa época no se dictaban cursos sobre análisis en este nivel de matemáticas y que la información disponible para los ingenieros era muy poca. El autor indica como referencia para los lectores dos libros uno de *cálculo avanzado* para el estudio de la variable compleja y otro de geodesia, ambos en idioma inglés. El profesor González si tenía otras fuentes de consulta en el idioma francés en el que había estudiado, como se puede observar en las referencias que aparecen en *Luis González y la Matemática en Costa Rica* [Herrera, 93]. Posiblemente y hasta donde sabemos, este es el primer trabajo de aplicación del análisis de variable compleja en el país, todo lo cual lo hace interesante desde un punto de vista histórico.

Es necesario observar la originalidad de la investigación realizada, pues en ella se obtienen fórmulas mucho menos complicadas para su cálculo que las que se usaban siguiendo los trabajos de Tardí, además de que se particularizan al caso del territorio costarricense, lo cual como señala el autor, simplifica enormemente el cómputo.

El trabajo se publica solo con algunas correcciones y pequeñas modificaciones de forma que no cambian en nada el estilo de la presentación, como por ejemplo la agregación de numeración en las fórmulas.

Es aceptado que la representación de la "superficie esferoidal" de la Tierra en un mapa sobre papel requiere de un "sistema de proyección", es decir, de un método sistemático para dibujar los meridianos y paralelos de la Tierra sobre una superficie plana. Hay infinidad de tales sistemas siendo las superficies los más usadas las del plano, el cono y del cilindro.

Para el uso de la práctica topográfica los tipos de "proyección" más significativas y útiles son las "proyecciones conformes". Por medio de ellas es posible representar de manera correcta formas topográficas muy pequeñas. Las más usadas son las *Mercator Transversa (Gauss-Kruger)* y la *Cónica Conforme de Lambert.*

Para la facilidad de los levantamientos topográficos y las mediciones sobre el plano horizontal de proyección se superpone una retícula de coordenadas x,y con la cual se describe la transposición de meridianos y paralelos desde el globo a la superficie plana. Sin embargo, pocos sistemas actualmente son derivados por proyección y la mayoría han sido formulados matemáticamente obteniéndose su representación analítica.

El sistema desarrollado por el profesor González corresponde al *Gauss-Kruger.* No habiéndose en ése tiempo definido todavía la red geodésica de control, los resultados del trabajo no se emplearon de inmediato. Ya a finales de 1945 los técnicos del Servicio Geodésico Interamericano suministraron el equipo necesario y los conocimientos técnicos para el establecimiento de la red geodésica nacional y con ello las tablas y los cálculos para el uso de la Proyección Cónica Conforme de Lambert, que fue la que se adoptó para constituir el mapa básico del territorio nacional, la cual es la que produce menores distorsiones para regiones extendidas en el sentido este-oeste.

Posiblemente el sistema original *(Gauss-Kruger)* desarrollado por el profesor González hubiera servido más eficientemente, sin embargo no se pudo aplicar por la falta de experiencia y de conocimientos. Este sistema produce menos distorsiones para regiones con dirección norte-sur.

En una visión retrospectiva resulta inexplicable por qué el Servicio Geodésico Interamericano no usó el sistema Lambert en Panamá, país adecuado para el mismo por su extensión en la dirección este-oeste. En nuestro país se hizo necesario el uso de dos conos secantes conocidos como Proyección Costa Rica Norte y Costa Rica Sur.

Una ventaja de la "proyección" usada en nuestros mapas básicos (1:50 000; 1:10 000 y otros) es la correspondencia entre ellos y los levantamientos catastrales, de modo que los levantamientos de agrimensura podían referenciarse con relación a estos sobre el mapa topográfico. Por otra parte, la separación entre paralelos normales, donde el cono es secante al esferoide, es muy corta: 1 04', constituyendo una desventaja ya que el factor de escala es muy reducido: 0.99996 en el meridiano central, disminuyendo hacia los paralelos normales. El problema que se presenta, por haber dos sistemas en el país, se reduce por cuanto la división entre CR Norte y CR Sur pasa por una zona de poco desarrollo.

En el tiempo transcurrido desde que se iniciaron los mapas del Instituto Geográfico Nacional a la fecha ha avanzado la tecnología y hoy se pueden realizar mediciones de mucho mayor precisión aprovechando el sistema de satélites a 20.000 kilómetros de altura que se llama Global Positioning System (GPS). Esto ha permitido determinar las dimensiones, la forma y las propiedades de la Tierra con mayor exactitud, por lo que el Catastro al emprender sus nuevos trabajos, ha decidido emplear el nuevo elipsoide conocido como WGS 84 y el sistema de Proyección Mercartor Transversa de 3 grados de ancho considerando el meridiano central al 84 W de Greenwich. Esto tiene la ventaja de que se puede usar un solo sistema para todo el pais, lo que es aceptable siempre y cuando los mapas topográficos del IGN usen el mismo sistema.

La adopción de un sistema único de proyección para el catastro y el mapa topográfico básico del IGN, es de importancia por el sistema adoptado de referenciar los levantamientos de agrimensura individuales a dicho mapa básico.

Siendo cada vez más necesario relacionar los levantamientos topográficos importantes como carreteras, plantas hidroeléctricas, etc. con el mapa topográfico y el sistema de control geodésico, si se usaran diferentes sistemas en estos mapas y los de catastro, sería muy difícil emplearlos en las capas de los mapas digitales de un sistema de información geográfico (SIG), el sistema de mapeo del futuro.

Dada la forma real del "globo terráqueo" y la irregularidad de su superficie natural se usa como modelo a un *esferoide* conformado por el nivel medio del mar proyectado bajo los continentes. A esta figura hipotética se le llama *geoide.* Debido a la irregular distribución de las masas terrestres el geoide no es una simple superficie matemática, por lo cual no es una superficie de referencia adecuada para la figura geométrica de la Tierra (por ejemplo, hay deformaciones producidas por efecto de la variable acción de la gravedad en las montañas y masas minerales de gran densidad), es por eso que para el cálculo geodésico se usa una figura regular promedio llamada el *elipsoide.* Damos a continuación como referencia comparativa las dimensiones principales del *elipsoide internacional* (Adoptado por la Asociación Internacional de Geodesia en la Asamblea General de Madrid de 1924) que fué el que usó LG en su trabajo, el *elipsoide de Clarke* de 1866, que con el *datum* o punto de partida en Ocotepeque en la frontera entre Honduras y Guatemala, es el que ha estado usando el IGN y el nuevo elipsoide WGS 84 de uso general en la actualidad.

	Elipsoide internacional	Elipsoide de Clarke	WGS 84
semieje ecuatorial (m)	6378388.0	6378206.40	6378137.00
achatamiento (f)	1/297	1/294978...	1/298257...

En el trabajo original, como se anotó anteriormente, se obtuvieron tablas para facilitar los cálculos, las cuales no se publican puesto que ya no son útiles.

APLICACION DEL MÉTODO DE REPRESENTACION DE GAUSS A LA CARTA GEOGRAFICA DE COSTA RICA

El método de representación de Gauss, llamado también método de Mercartor Tansverso, consiste esencialmente en lo siguiente:

Se elige convenientemente un meridiano, de tal manera que los puntos de longitud extrema del territorio que se desea representar, queden sensiblemente a igual distancia angular del meridiano elegido, esto es, que las longitudes de dichos puntos contadas a partir del meridiano elegido sean sensiblemente iguales. Este meridiano central se toma como directriz de una superficie cilíndrica cuyas generatrices son perpendiculares al plano del meridiano y sobre esta superficie cilíndrica se efectúa la representación del territorio.

Decimos representación y no proyección pues efectivamente no se trata aquí de una proyección en el sentido que esta palabra tiene corrientemente en geometría, sino de una representación pues si bien es cierto que obedece a leyes matemáticas perfectamente determinadas, estas son muy diferentes y desde luego más complicadas que las de una simple proyección.

Una vez elegida la superficie sobre la cual debe efectuarse la representación, nos quedan por determinar las características de la misma, es decir, las leyes según las cuales hemos de hacer corresponder a cada punto del territorio un punto único y bien determinado sobre la carta. Fácilmente se concibe que esto puede hacerse teóricamente de una infinidad de maneras, pero son pocas las que tengan un valor práctico positivo.

Entre los sistemas de representación existentes, los llamados CONFORMES son los universalmente preferidos, gracias a ciertos propiedades muy notables que poseen.

Veamos en pocas palabras, en qué consiste la representación conforme?.

Sean λ la longitud y φ la latitud de un punto cualquiera del territorio que se desea representar: φ = latitud; λ = longitud. Sean *(x,y)* las coordenadas del punto que, sobre la carta, corresponde al punto (λ, φ) del territorio. Sean

$$x = x(\lambda, \varphi)$$
$$y = y(\lambda, \varphi)$$

las funciones que nos dan a conocer cuando conocemos.

Se dice que la representación conforme es conforme cuando los ángulos son conservados. Es decir, que si dos alineamientos se cortan sobre el territorio bajo un cierto ángulo θ, los alineamientos correspondientes se cortarán sobre la carta bajo el mismo ángulo. Síguese de aquí que si dos sistemas de curvas constituyen sobre el territorio familias de trayectorias ortogonales (como por ejemplo, los paralelos y los meridianos) los sistemas de curvas correspondientes constituirán también, sobre la carta, familias de trayectorias ortogonales. Si bien la forma que afectan estas curvas será por lo general muy diferentes a la de las correspondientes sobre el territorio. Fácilmente se comprende que, para que todo esto sea posible, es necesario que las funciones satisfagan a ciertas condiciones analíticas especiales.

Otra propiedad importante de las representaciones conformes es la siguiente. Se sabe que una superficie tal que como la de la Tierra no es desarrollable, esto es, que no puede hacerse coincidir exactamente en toda su extensión con una superficie plana o cilíndrica sin que se produzcan rasgaduras, o bien, en el caso presente deformaciones más o menos apreciables.

Síguese de aquí que la distancia entre dos puntos del territorio, quedará representada sobre la carta por otra distancia que, en general, no le es igual. Esto es lo que se llama la deformación lineal, la cual depende de la posición y de la orientación del segmento considerado.

Ahora bien: la segunda propiedad importante de la representación conforme es que en ella las deformaciones lineales dependen exclusivamente de la posición y no de la orientación de los segmentos considerados. Las dos propiedades que hemos hablado pueden resumirse así:

(i) deformaciones angulares nulas
(ii) deformaciones lineales independientes de la orientación

Pero se puede demostrar fácilmente que estas dos propiedades no son independientes entre si, de tal manera que si una de ellas se realiza, la otra se realizará también automáticamente; dicho en otras palabras, las condiciones analíticas de ambas propiedades son idénticas.

Así pues podemos limitarnos a investigar la condición analítica para que se realice una cualquiera de las dos propiedades y luego hacer ver que la condición encontrada trae como consecuencia de realización de la otra.

Investiguemos pues la condición analítica de la segunda propiedad que es la más fácil de encontrar. Sea A un punto correspondiente de la carta de coordenadas. Tomemos a partir del punto A una longitud infinitesimal ds y sea $d\sigma$ el elemento de longitud correspondiente sobre la carta. La segunda condición puede expresarse así:

$$d\sigma = kds$$

expresión en la cual k es el coeficiente de la deformación y lo que se desea es que k sea una función exclusiva de las coordenadas del punto A y no de la orientación del segmento. Tendremos:

$$ds^2 = (N\cos\varphi d\lambda)^2 + (Rd\varphi)^2$$

En esta expresión N es la gran normal que pasa por el punto A; R es el radio de la curvatura del meridiano en el punto A; φ es la latitud del punto A, d λ y $d\varphi$ son las incrementos infinitesimales de λ y φ que corresponden a la trayectoria ds. Escribamos

$$ds^2 = (N\cos\varphi)^2 \left[d\lambda^2 + \left(\frac{Rd\varphi}{N\cos\varphi} \right)^2 \right]$$

Para la facilidad en los cálculos introduzcamos una nueva variable L definida por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{Rd\varphi}{N\cos\varphi} = dL$$

Esta variable lleva el nombre de variable de Mercartor, se observará que es una función exclusiva de φ. Tendremos:

$$ds^2 = (N\cos\varphi)^2 + \left[d\lambda^2 + dL^2 \right]$$

Se dice que las variables λ y L son simétricas. Introduciendo la variable de Mercartor, las funciones (1) se escriben:

$$x = x(\lambda, L)$$
$$y = y(\lambda, L)$$

Tendremos

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

pero

$$dx = \frac{\partial \sigma}{\partial x} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial L} dL$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial L} dL$$

$$d\sigma^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2\right] dL^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial L}\right] dL d\lambda$$

Por otra parte deseamos tener:

$$d\sigma = k ds$$

$$d\sigma^2 = k^2 ds^2 = k^2 N^2 \cos\varphi^2 (d\lambda^2 + dL^2)$$

Para poder identificar esta dos expresiones es indispensable que:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial L} = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2$$

lo cual exige que

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial L}$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{\partial y}{\partial L}$$

estas son las condiciones analíticas de la representación conforme. Tendremos

$$k^2 N^2 \cos^2\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2$$

de donde

$$k = \frac{1}{N\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Se observará que la k es efectivamente una función exclusiva de las coordenadas del punto A. Ahora nos queda por demostrar que si estas dos condiciones analíticas se verifican, los ángulos son conservados.

En efecto, sean dos alineamientos infinitesimales da y db que sobre el territorio se cortan en un punto A bajo un ángulo θ. Introduciendo la noción de producto escalar de dos vectores, tendremos:

$$d\bar{a} \cdot db = da \cdot db \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{d\bar{a} \cdot db}{da \cdot db}$$

Sean los elementos que sobre la carta corresponden a da y db. Sea A' su punto de intersección y sea θ' el ángulo que forman; tendremos:

$$\cos\theta' = \frac{d\bar{a} \cdot d\bar{b}'}{da' \cdot db'}$$

Sea k el coeficiente de la deformación lineal que corresponde al punto A. Tendremos, en virtud de la propiedad anterior:

$$da' = kda$$
$$db' = kdb$$

Deseamos demostrar que $\theta = \theta'$ o bien $\cos\theta = \cos\theta'$ o bien

$$\frac{\overline{da'} \cdot \overline{db'}}{da' \cdot db'} = \frac{\overline{da} \cdot \overline{db}}{da \cdot db}$$

$$\frac{\overline{da} \cdot \overline{db}}{da \cdot db} \quad \frac{\overline{da'} \cdot \overline{db'}}{k^2 da \cdot db}$$

$$\overline{da'} \cdot \overline{db'} = k^2 \overline{da} \cdot \overline{db}$$

$$\overline{da} = N\cos\varphi d\lambda_1 \overline{1}_\lambda + Rd\varphi_1 \overline{1}_\varphi$$
$$\overline{db} = N\cos\varphi d\lambda_2 \overline{1}_\lambda + Rd\varphi_2 \overline{1}_\varphi$$

$$\overline{da'} \cdot \overline{db'} = N^2\cos^2\varphi d\lambda_1 d\lambda_2 + R^2 d\varphi_1 d\varphi_2 = N^2\cos^2\varphi\left(d\lambda_1 d\lambda_2 + dL_1 d_2\right)$$

$$\overline{da'} = da_x\overline{1}_x + da_y\overline{1}_y = dx_1\overline{1}_x + dy_1\overline{1}_y$$
$$\overline{db'} = db_x\overline{1}_x + db_y\overline{1}_y = dx_2\overline{1}_x + dy_2\overline{1}_y$$

$$\overline{da'} \cdot \overline{db'} = da_x db_x + da_y db_y = dx_1 dx_x + dy_1 dy_2$$

Aquí para mayor comodidad hemos hecho: $da_x = dx_1, db_x = dx_2, da_y = dy_1, db_y = dy_2$

Habiendo pues elegido la superficie sobre la cual vamos a efectuar la representación y habiéndonos impuesto la condición de que ésta ha de ser conforme, el problema queda completamente determinado y ahora nos queda la tarea de investigar la forma de las funciones:

$$x = x(\lambda, L)$$
$$y = y(\lambda, L)$$

teniendo presente que estas funciones han de satisfacer las relaciones:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial L}$$
$$\frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{\partial y}{\partial L}$$

así como también las particularidades especiales inherentes al sistema de representación elegido.

El problema de hallar la forma de estas funciones encuentra su solución en la teoría de las funciones de variable compleja. Para un estudio detallado de esta teoría puede consultarse por ejemplo el libro titulado Advanced Calculus del profesor Woods del Instituto Tecnológico de Massachussets.

En esta teoría se demuestra que si dos funciones x y y de dos variables independientes λ y L satisfacen a las relaciones anteriores:

entonces la función compleja es una función exacta de la variable compleja, es decir, que se tiene:

$$x+iy=f(L+i\lambda)$$

Nosotros podemos tomar el asunto al revés. Partir de la relación $x+iy=f(L+i\lambda)$ y demostrar que si esta relación se verifica se tiene necesariamente:

$$\frac{\partial x}{\partial L}+i\frac{\partial y}{\partial L}=f'(z)\frac{dz}{dL}$$

En efecto, sea

$$x+iy=f(L+i\lambda)$$

hagamos, $L + i\,\lambda = z$, luego $x + iy = f(z)$. Derivemos parcialmente con respecto a L y λ:

$$\frac{\partial x}{\partial L}+i\frac{\partial y}{\partial L}=f'(z)\frac{dz}{dL}$$

pero $\frac{dz}{dL}=1$, luego

$$\frac{\partial x}{\partial L}+\frac{\partial y}{\partial L}=f'(z)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \lambda}=f'(z)\frac{dz}{d\lambda}$$

pero $\frac{dz}{dL}=i$, luego

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}+i\frac{\partial y}{\partial \lambda}=f'(z)i=i\left(\frac{\partial x}{\partial L}+i\frac{\partial y}{\partial L}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}+i\frac{\partial y}{\partial \lambda}=i\frac{\partial x}{\partial L}-\frac{\partial y}{\partial L}$$

Igualando las partes reales entre si y separadamente las partes imaginarias, tendremos:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial x}{\partial L}=\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

relaciones que son equivalentes a

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\frac{\partial y}{\partial L}\quad y\quad \frac{\partial x}{\partial L}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Tenemos pues la relación importante:

$$x+iy=f(L+i\lambda)$$

Pero esta relación queda satisfecha por una función absolutamente cualquiera de $L + i\lambda$ y nosotros debemos encontrar entre todas, una que satisfaga las condiciones de la representación. Evidentemente, si $\varphi = 0$, $\lambda = 0$, $L = 0$, $x = 0$, $y = 0$ siempre y cuando se tome como origen de coordenadas el punto donde el meridiano central corta el ecuador y que convengamos en contar las longitudes a partir del meridiano central y la latitudes a partir del ecuador.

Ahora bien: consideremos sobre el territorio un punto cualquiera A de coordenadas y viajemos desde el origen hasta llegar al punto A, pero de la manera siguiente: partiendo del origen, subamos por el meridiano central hasta alcanzar la latitud φ, a la cual corresponderá cierto valor L. Durante este viaje $\lambda = 0$ y $y = 0$. Solamente x habrá variado. No estará por demás llamar la atención acerca de que en este estudio la x representa las distancias tomadas en la dirección N-S mientras que las y las distancias tomadas en al dirección E-W. Notemos que en el sistema de representación que hemos adoptado el meridiano central va a quedar representado sobre la carta en su verdadera magnitud, de tal manera que a el punto del meridiano central cuya latitud sea φ corresponderá sobre la carta, un punto de abscisa x_o que no es otra que la distancia (sobre el territorio) desde el ecuador hasta el punto considerado.

Ahora continuemos nuestro viaje pero esta vez sobre el paralelo del punto A de tal manera que solo λ varíe, pero permanezca constante y por consiguiente L también. Al variar λ variarán simultáneamente x y y.

Vamos a suponer que la variación de λ sea lo suficientemente pequeña para poder efectuar un desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor, notando desde luego que en este desarrollo la variable es λ y que L permance constante.

En la teoría de las funciones de variable compleja se demuestra la legitimidad del desarrollo en serie de tales funciones. Tendremos pues:

$$x+iy=f(L+i\lambda)=f(l)+i\frac{\partial f}{\partial L}+i_2\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}+i^3\frac{\lambda^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial L^3}+i^4\frac{\lambda^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial L^4}+\ldots$$

notando que resulta $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. resulta

$$x+iy=f(l)+i\frac{\partial f}{\partial L}-\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}-i\frac{\lambda^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial L^3}+\frac{\lambda^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial L^4}+i\frac{\lambda^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial L^5}-\frac{\lambda^6}{6!}\frac{\partial^6 f}{\partial L^6}+\cdots$$

Igualando entre si las partes reales y las partes imaginarias tendremos:

$$x=f(l)-\frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}+\frac{\lambda^4\partial^4 f}{4!\partial L^4}+\frac{\lambda^6\partial^6 f}{6!\partial L^6}$$

$$y=\lambda\frac{\partial f}{\partial L}-\frac{\lambda^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial L^3}+\frac{\lambda^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial L^5}$$

El problema que se representa ahora es el de calcular los valores de las derivadas sucesivas teniendo en cuenta las condiciones propias de la representación adoptada.

En primer lugar vemos que cuando $\lambda = 0$, $y = 0$, $x = x_o$, luego, $f(L) = x_o$. Esto quiere decir que el valor numérico de la función $f(L)$ no es otro que la longitud del arco de meridiano desde el ecuador hasta el punto de latitud φ. El valor de este arco no es una función exclusiva de φ que puede ser calculada para todos los valores de φ. Calculemos ahora las derivadas sucesivas. En lo que sigue emplearemos la notación df/dL en lugar de $\partial f/\partial L$, pues no hay lugar a confusión. Tendremos:

$$f(L)=x_0;\quad \frac{df}{dL}=\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL}=\frac{dx_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL};\ \text{(derivada de una función de función)}$$

La expresión $\frac{dx_0}{d\varphi}$ no es otra cosa sino la definición misma del radio de curvatura de una curva plana. En nuestro caso esa curva es la elipse meridiana y el valor de $\frac{dx_0}{d\varphi}$ es el radio de curvatura del meridiano en el punto de latitud φ. Este radio de curvatura es también una función exclusiva de φ. Para calcular el valor de $\frac{dx_0}{d\varphi}$ recordemos que:

$$\frac{df}{dL} = N\cos\varphi \frac{Rd\varphi}{N\cos} = dL$$

de donde

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{N\cos\varphi}{R}$$

Finalmente:

$$\frac{df}{dL} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL} = R\frac{N\cos\varphi}{R} = N\cos\varphi$$

$$\frac{df}{dL} = N\cos\varphi$$

Recordemos de paso que $N\cos\varphi$ es el radio del paralelo que corresponde a la latitud φ, el c su vez es una función exclusiva de φ. Para continuar el cálculo de las derivadas sucesivas, debe recordar las fórmulas que nos dan la gran normal N y el radio de curvatura del meridiano R en fur de la latitud φ:

$$N = \frac{a}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

en estas fórmulas a representa el semieje mayor de la elipse meridiana y e representa la excentricidad

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

No daremos aquí las demostraciones de esta fórmulas por no alargar demasiado la exposición, el lector podrá hallarlas en cualquier tratado de Geodesia (ver por ejemplo la Geodesia de Hosmer, 168 y siguientes).

Sustituyendo en la primera derivada la N por su valor en función de φ, tenemos:

$$\frac{df}{dL} = \frac{a\cos\varphi}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2} = \frac{d^2f}{dld\varphi}\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2} = \frac{1}{(1-e^2sen^2\varphi)}\left[-(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}asen\varphi + a\cos\varphi\frac{1}{2}(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}2e^2sen\varphi\cos\varphi\right]\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2} = \frac{1}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\left[-(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}asen\varphi + ae^2sen\varphi\cos^2\varphi\right]\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2}=\frac{asen\varphi}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}(-1+e^2sen^2\varphi+e^2\cos^2\varphi)\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2}=\frac{-sen\varphi}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}a\left(1-e^2\right)\frac{d\varphi}{dL}$$

Pero:

$$\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=R$$

Luego

$$\frac{d^2f}{dL^2}= -Rsen\varphi\frac{d\varphi}{dL}=-Rsen\varphi\frac{N\cos\varphi}{R}$$

$$\frac{d^2f}{dL^2}=-Nsen\varphi\cos\varphi$$

A partir de aquí podríamos continuar el cálculo de la tercera derivada en la misma forma que hemos procedido para calcular la segunda, es decir, sustituyendo la N por su valor en función de φ y aplicando la regla de la derivada de una función de función. Este es en suma el camino más lógico que se impone a nuestra consideración. Sin embargo por poco que progresemos en esta senda, hallaremos una complicación rápidamente creciente, hasta el punto de convertir nuestros cálculos en un verdadero laberinto.

Pero lo más grave del asunto es que los resultados finales de nuestro cálculo participarán de esta enorme complicación, presentándose en la forma de sumas inacabables de términos que contienen potencias muy elevadas de las funciones trigonométricas de φ.

Ahora bien como este estudio no es un mero juego del espíritu, no es mera especulación, sino que está destinado a servir de base al cálculo numérico de las coordenadas cartográficas, se comprende con facilidad el enorme interés que presenta el hecho de hallar los resultados finales en la forma más sencilla posible.

Así pues para poder sacar un partido práctico de los resultados obtenidos por esta vía, nos veremos obligados, siguiendo el ejemplo de Tardí, a abandonar unos cuantos términos en los resultados a partir de la cuarta derivada (inclusiva). Más adelante analizaremos en detalle por medio de ejemplos numéricos, las consecuencias de esta manera de proceder y tendremos ocasión de palpar sus nefastos resultados.

Habiendo puesto en claro todas estas cosas, continuemos ahora el cálculo de las derivadas sucesivas de la siguiente manera. Tenemos:

$$\frac{d^2f}{dL^2}=-N\,sen\varphi\cos\varphi$$

pero notemos que $N\cos\varphi=\dfrac{df}{dL}$. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{d^2f}{dL^2}=-sen\varphi\frac{df}{dL}$$

Esta sencilla transformación es la *clave de enormes simplificaciones* ulteriores. Para simplificar un poco la escritura hagamos $sen\varphi=z$:

$$\frac{d^2 f}{dL^2} = -\frac{df}{dL} z$$

A partir de aquí formemos las derivadas sucesivas aplicando la regla de la derivada de un producto. Tendremos después de simplificar términos semejantes en cada una de las derivadas, con r el radio del paralelo:

$$f(x) = x_0$$

$$\frac{df}{dL} = N\cos\varphi = r$$

$$\frac{d^2 f}{dL^2} = -Nsen\varphi\cos\varphi = -\frac{df}{dL} z$$

$$\frac{d^3 f}{dL^3} = -\left(\frac{d^2 f}{dL^2} z + \frac{df}{dL}\frac{dz}{dL} \right)$$

$$\frac{d^4 f}{dL^4} = -\left(\frac{d^3 f}{dL^3} z + 2\frac{d^2 f}{dL^2}\frac{dz}{dL} + \frac{df}{dL}\frac{d^2 z}{dL^2} \right)$$

$$\frac{d^5 f}{dL^5} = -\left(\frac{d^4 f}{dL^4} z + 3\frac{d^3 f}{dL^3}\frac{dz}{dL} + 3\frac{d^2 f}{dL^2}\frac{d^2 z}{dL^2} + \frac{df}{dL}\frac{d^3 z}{dL^3} \right)$$

$$\frac{d^6 f}{dL^6} = -\left(\frac{d^5 f}{dL^5} z + 4\frac{d^4 f}{dL^4}\frac{dz}{dL} + 6\frac{d^3 f}{dL^3}\frac{d^2 z}{dL^2} + 4\frac{d^2 f}{dL^2}\frac{d^3 z}{dL^3} + \frac{df}{dL}\frac{d^4 z}{dL^4} \right)$$

La regularidad de estos desarrollos ayuda grandemente a evitar errores de cálculo. Se notará que los coeficientes son los mismos que los de las potencias de un binomio. Sustituyendo en cada derivada los valores de las derivadas anteriores tendremos:

$$f(x) = x_0$$

$$\frac{df}{dL} = r$$

$$\frac{d^2 f}{dL^2} = -rz$$

$$\frac{d^3 f}{dL^3} = r\left(z^2 - \frac{dz}{dL} \right)$$

$$\frac{d^4 f}{dL^4} = -r\left(z^3 - 3z\frac{dz}{dL} + \frac{d^2 z}{dL^2} \right)$$

$$\frac{d^5 f}{dL^5} = r\left(z^4 - 6z^2\frac{dz}{dL} + 3\left(\frac{dz}{dL}\right)^2 + 4z\frac{d^2 z}{dL^2} - \frac{d^3 z}{dL^3} \right)$$

$$\frac{d^6 f}{dL^6} = -r\left(z^5 - 10z^3\frac{dz}{dL} + 15z\left(\frac{dz}{dL}\right)^2 + 10\left(z^2 - \frac{dz}{dL}\right)\frac{d^2 z}{dL^2} - 5z\frac{d^3 z}{dL^3} + \frac{d^4 z}{dL^4} \right)$$

El trabajo efectuado hasta ahora en el cálculo de las derivadas no puede haber sido más sencillo. Y de ahora en adelante el asunto se circuncribe a calcular dz/dL, ..., d^4z/dL^4. Es decir, solo cuatro derivadas en lugar de seis; se evitan pues dos derivadas y precisamente las más laboriosas.

Tendremos:

$$z = sen\varphi$$

$$\frac{dz}{dL} = \frac{dz}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL} = \cos\varphi \frac{N\cos\varphi}{R} = \frac{N}{R}\cos^2\varphi$$

$$\frac{dz}{dL} = \frac{N}{R}\cos^2\varphi$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = \frac{d^2z}{dLd\varphi}\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{N}{R} = \frac{\left(1-e^2sen^2\varphi\right)}{\left(1-e^2\right)}$$

$$\frac{N}{R} = \frac{\left(1-e^2sen^2\varphi + e^2 - e^2\right)}{\left(1-e^2\right)} = \frac{\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\right)} + \frac{e^2\left(1-sen^2\varphi\right)}{\left(1-e^2\right)} = 1 + k\cos^2\varphi$$

expresión en que:

$$k = \frac{e^2}{\left(1-e^2\right)}$$

$$\frac{dz}{dL} = \frac{N}{R}\cos^2\varphi = \cos^2\varphi + k\cos^4\varphi$$

$$\frac{d^2z}{dLd\varphi} = -2\cos\varphi sen\varphi - 4k\cos^3\varphi sen\varphi = -2sen\varphi\cos\varphi(1+2k\cos^2\varphi)$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = \frac{d^2z}{dLd\varphi}\frac{d\varphi}{dL} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\frac{N}{R}(1+2k\cos^2\varphi)$$

No estará por demás llamar la atención acerca del hecho de que antes de abordar el cálculo de la tercera derivada es *fundamental* hacer desaparecer el término en *k*, restituyendo la expresión N/R a como haya lugar, pues de lo contrario no escaparemos a la complicación de que se habló anteriormente. Esta *clave fundamental* parece habérsele escapado a la sagacidad de Tardí, quien continuó sus cálculos conservando el término en *k*, y de ahí la complicación de sus resultados. Ya sea que no acató o que no logró restituir N/R, el hecho es que sus fórmulas están todas en función de *k* y son muy complicadas.

Transformemos pues:

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\frac{N}{R}(1+2k\cos^2\varphi)$$

$$\frac{N}{R} = 1 + k\cos^2\varphi$$

$$\frac{N}{R} - 1 = k\cos^2\varphi$$

$$\left(\frac{N}{R} - 1\right) = 2k\cos^2\varphi$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\frac{N}{R}\left(\frac{2N}{R} - 1\right)$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\left[\frac{N}{R} - 2\left(\frac{N}{R}\right)^2\right]$$

Esta expresión podría escribirse:

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\left[\frac{N}{R}\cos^2\varphi - \frac{2}{\cos^2\varphi}\left(\frac{N}{R}\cos^2\varphi\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\left[\frac{dz}{dL} - \frac{2}{\cos^2\varphi}\left(\frac{dz}{dL}\right)^2\right]$$

y a partir de aquí podemos calcular las derivadas siguientes por el mismo proceso usado aneriormente, pero es todavía más rápido y sencillo proceder de la manera siguiente. En la expresión:

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\left[\frac{N}{R} - 2\left(\frac{N}{R}\right)^2\right]$$ hagamos para mayor facilidad $N/_R = a$,

tendremos:

$$\frac{d^2z}{dL^2} = -2sen\varphi\cos^2\varphi\left[a - 2a^2\right]$$

$$a = 1 + k\cos^2\varphi$$

$$\frac{da}{dL} = \frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{da}{d\varphi} = -2k\cos\varphi sen\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dL} = \frac{N\cos\varphi}{R} = a\cos\varphi$$

$$\frac{da}{dL} = \frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dL} = -2ka\cos^2\varphi sen\varphi$$

Pero

$$k = \frac{(a-1)}{\cos^2\varphi},$$

luego

$$\frac{da}{dL} = -2(a-1)asen\varphi$$

$$\frac{da}{dL} = -2(a-a^2)asen\varphi$$

$$\frac{da}{dL} = a\cos\varphi$$

$$\frac{d^2z}{dL^2} = 2sen\varphi\cos^2\varphi(a-2a^2)$$

$$\frac{d^3z}{dL^3} = 2sen\varphi\cos^2\varphi(1-4a)\frac{da}{dL} + 2(a-2a^2)(\cos^3\varphi - 2sen^2\varphi\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dL}$$

$$\frac{d^3z}{dL^3} = 4sen^2\varphi\cos^2\varphi(1-4a)(a-a^2) + 2(a^2-2a^3)(\cos^4\varphi - 2sen^2\varphi\cos^2\varphi)$$

$$\frac{d^3z}{dL^3} = \cos^4\varphi(2a^2-4a^3) + sen^2\varphi\cos^2\varphi(4a-24a^2+24a^3)$$

$$\frac{d^4z}{dL^4} = -4\cos^4\varphi sen\varphi(2a^3-4a^4) + 2\cos^4\varphi sen\varphi(4a-12a^2)(a-a^2) +$$
$$+(-2sen^3\varphi\cos^2\varphi + 2\cos^4\varphi sen\varphi)(4a^2-24a^3+24a^4) + 2sen^2\varphi\cos^2\varphi(4-48a+72a^2)(a-a^2)$$

$$\frac{d^4z}{dL^4} = \cos^4\varphi sen\varphi(16a^2-88a^3+88a^4) + sen^2\varphi\cos^2\varphi(8a-112a^2+288a^3-192a^4)$$

Sustituyendo estos resultados en el cuadro de la página 60 (quince en el original manuscrito), tendremos como el valor de las derivadas sucesivas:

$$f(l) = x_0$$

$$\frac{df}{dL} = N\cos\varphi$$

$$\frac{d^2f}{dL^2} = -N\cos\varphi sen\varphi$$

$$\frac{d^3f}{dL^3} = N\cos^3\varphi\left(tg^2\varphi - \frac{N}{R}\right)$$

$$\frac{d^4f}{dL^4} = N\cos^3\varphi\, sen\varphi\left(\frac{N}{R} + \frac{4N^2}{R^2} - tg^2\varphi\right)$$

$$\frac{d^5f}{dL^5} = N\cos^3\varphi\, sen^2\varphi\left[tg^2\varphi + \cot^2\varphi\left(\frac{N^2}{R^2} + \frac{4N^3}{R^3}\right) - \left(\frac{2N}{R} - \frac{8N^2}{R^2} + \frac{24N^3}{R^3}\right)\right]$$

$$\frac{d^6f}{dL^6} = -N\cos^3\varphi\, sen^3\varphi\left[tg^2\varphi + \cot^2\varphi\left(\frac{N^2}{R^2} - \frac{28N^3}{R^3} + \frac{88N^4}{R^4}\right) - \left(\frac{2N}{R} + \frac{32N^2}{R^2} - \frac{168N^3}{R^3} + \frac{192N^4}{R^4}\right)\right]$$

El cómputo numérico de estas expresiones es mucho más sencillo de lo que pudiera parecer a primera vista, en efecto, existen tablas especiales que dan los valores de N y R para todos los valores de de minuto en minuto. Además el cociente $N/_R$ varía con suma lentitud al variar φ de manera que puede mantenerse constante, lo mismo que sus diferentes potencias dentro de límites de variación de φ bastantes amplios.

Por otra parte, las series que nos dan los valores de x y y convergen con enorme rapidez. Luego veremos que en el caso de Costa Rica no necesitamos conservar más que hasta la cuarta derivada, lo cual simplifica enormemente el asunto.

La expresión de las derivadas que encuentra Tardí es la siguiente:

$$f(l) = x_0$$

$$\frac{df}{dL} = N\cos\varphi$$

$$\frac{d^2 f}{dL^2} = -N\cos\varphi sen\varphi$$

$$\frac{d^3 f}{dL^3} = N\cos^3\varphi(1 + E^2\cos^2\varphi - tg^2\varphi)$$

$$\frac{d^4 f}{dL^4} = N\cos^4\varphi\ \ tg\varphi(5 + 9E^2\cos^2\varphi + 4E^4\cos^4\varphi - tg^2\varphi)$$

$$\frac{d^5 f}{dL^5} = N\cos^5\varphi\left[5 - 18tg^2\varphi + tg^4\varphi + E^2\cos^2\varphi(14 - 58tg^2\varphi)\right]$$

$$\frac{d^6 f}{dL^6} = {}'\,N\cos^6\varphi\ \ tg\varphi(61 - 58tg^2\varphi + tg^4\varphi)$$

En las expresiones de la 5ª y 6ª derivadas se han omitido muchos términos en E^2 y E^4 y que son precisamente los que complican el asunto. La cantidad que aquí se representa por E^2 es la misma que antes llamamos k o sea $e^2/_{1-e^2}$.

En la república de Colombia se han usado las fórmulas de Tardí pero conservando solamente hasta la 5ª derivada y suprimiendo en la 4ª y 5ª derivadas todos los términos en E^2 y en E^4.

Se puede observar que si en las fórmulas de Tardí se suprimen todos los términos que contienen las diversas potencias de E se obtiene exactamente el mismo resultado que haciendo $N/_R = 1$ en las fórmulas de la pág. 63; es decir, que la aproximación hecha en Colombia equivale a suponer $N = R$.

Ahora trataremos de ver hasta qué derivada es necesario conservar en el caso de Costa Rica. Las fórmulas que dan los valores de x y y serán:

$$x = x_0 + \lambda^2\frac{N}{2}\cos\varphi sen\varphi + \lambda^4\frac{N}{24}\cos^2\varphi\ \ sen\varphi(A - tg^2\varphi\ ...,etc.$$

$$y = \lambda N\cos\varphi + \lambda^2\frac{N}{6}\cos^3\varphi\left(\frac{N}{R} - tg^2\varphi\right) + \lambda^5\frac{N}{120}\cos^2\varphi\ \ sen^2\varphi(tg^2\varphi + 8\cot^2\varphi) - c$$

siendo

$$A = \frac{N}{R} + \frac{4N^2}{R^2},$$

$$B = \frac{N^2}{R^2} + \frac{4N^3}{R^3}$$

$$c = \frac{2N}{R} - \frac{8N^2}{R^2} + \frac{24N^3}{R^3}$$

Los valores extremos de φ son 8° y 11° y el valor extremo de es de λ es de 2°. Calculemos los valores de los términos que contienen la 4ª y 5ª derivadas. La cuarta derivada puede escribirse así:

$$\frac{\lambda^4 N sen2\varphi}{48}(A\cos^2\varphi - sen^2\varphi) = \frac{\lambda^4 N}{48} sen2\varphi\left[(A+1)\cos^2\varphi - 1\right]$$

El mayor valor de esta expresión tiene lugar para λ = 2° y φ = 11°:

$$\lambda^4 = 0.0000014847$$
$$N = 6.379.169$$
$$sen2\varphi = 0,37461$$
$$\left(1+\frac{N}{R}+4\frac{N^2}{R^2}\right)\cos^2\varphi - 1 = 4.8390$$
$$\frac{\lambda^4 N}{48} sen2\varphi\left[\left(1+\frac{N}{R}+4\frac{N^2}{R^2}\right)\cos^2\varphi - 1\right] = 0,357 metros$$

Para λ = 2° y φ = 8° tenemos:

$$\lambda^4 = 0.0000014847$$
$$N = 6.378.803$$
$$sen2\varphi = 0,27564$$
$$\left(1+\frac{N}{R}+4\frac{N^2}{R^2}\right)\cos^2\varphi - 1 = 4.9420$$
$$\frac{\lambda^4 N}{48} sen2\varphi\left[\left(1+\frac{N}{R}+4\frac{N^2}{R^2}\right)\cos^2\varphi\right] = 0,268$$

Cálculo del término que contiene la 5a. derivada. Este término podría escribirse así:

$$\frac{\lambda^5 N}{480} sen2\varphi\cos\varphi(tg^2\varphi + B\cot^2\varphi + c)$$

$$\lambda^5 = 0.000000051826$$
$$N = 6.379.169$$
$$sen2\varphi = 0,14033$$
$$\cos\varphi = 0,98163$$
$$tg^2\varphi + B\cot^2\varphi - c = 116,434$$
$$\frac{\lambda^5 N}{480} sen^2 2\varphi\cos\varphi\left[tg^2\varphi + B\cot^2\varphi - c\right] = 0,011 \text{ metros}$$

En el caso de Costa Rica, debido a la pequeñez del territorio, muy bien pueden despreciarse los términos que contienen la cuarta y la quinta derivadas y escribir:

$$x = x_0 + \lambda^2\frac{Nsen2\varphi}{4}$$

$$y = \lambda N\cos\varphi\left[1+\lambda^2\frac{\left(1+\frac{N}{R}\right)\cos^2\varphi - 1}{6}\right]$$

Sin embargo, si se desea conservar el término que contiene la derivada se pueden escribir las fórmulas así:

$$x = x_0 + \lambda^2 A(1+\lambda^2 B)$$

$$y = \lambda c(1+\lambda^2 D)$$

$$A = \frac{Nsen2\varphi}{4}$$

$$B = \frac{1}{12}\left[\left(1+\frac{N}{R}+\frac{4N^2}{R^2}\right)\cos^2\varphi - 1\right]$$

$$C = N\cos\varphi$$

$$D = \frac{1}{6}\left[\left(1+\frac{N}{R}\right)\cos^2\varphi - 1\right]$$

En el caso de Costa Rica $\lambda^2 B$ es despreciable. El término x_0 representa la longitud del arco de meridiano desde el ecuador hasta la latitud φ pero no hay ningún inconveniente en tomarla desde un paralelo más cercano. Hemos elegido el paralelo de latitud 8°. Además a la *y* puede agregarse una constante arbitraria para que todas resulten positivas.

Siendo así que ningún punto del territorio se encuentra a mayor distancia que 220.538 metros del meridiano central, podemos escoger esa constante arbitraria igual a 222.000 metros y colocar el eje de las x sobre la carta a una distancia de 222 kilómetros hacia la DERECHA del meridiano central, de manera que todo el plano quedará colocado a la IZQUIERDA del eje de las *x* y hacia el Norte del eje de las y. La curva del paralelo 8ª será tangente al eje de las *y*, en el punto donde dicho paralelo es cortado por el meridiano central.

Se toma el eje de las x a la derecha del plano y no hacia la izquierda, como es costumbre en otro género de aplicaciones, con el fin de que quede en concordancia el sentido creciente de las longitudes sobre la carta, con el sentido creciente sobre el territorio.

Con estas convenciones, las fórmulas finales serán:

$$x = x_0 + \lambda^2 A(1+\lambda^2 B)$$

$$y = \lambda c(1+\lambda^2 D) + 222.000$$

Las cantidades x_0, *A, B, c, D* dependen exclusivamente de la latitud y sus valores se dan en las tablas siguientes. Los valores de λ entran en las fórmulas expresados en radianes y deben contarse a partir del meridiano central. Serán interpretados como positivos hacia la izquierda y como negativos hacia la derecha de dicho meridiano. En las tablas siguientes se dan también los valores de λ y de λ^2 expresados en radianes, que corresponden a los diversos ángulos desde 0° hasta 2°. Las tablas se explican por sí solas, y su manejo no presentan ninguna dificultad. Como meridiano Central puede tomarse sin ningún inconveniente el de la ciudad de San José.

Cálculo del valor de k.

$$k = \frac{1}{N\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 2\lambda A\left(1+2\lambda^2 B\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda} = c\left(1+3\lambda^2 D\right)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = 4\lambda^2 A^2\left(1+4\lambda^2 B+4\lambda^4 B^2\right)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = c^2\left(1+6\lambda^2 D+9\lambda^4 D^2\right)$$

$$k=\frac{1}{N\cos\varphi}\sqrt{4A^2\left(\lambda^2+4\lambda^4 B+4\lambda^6 B^2\right)+c^2\left(1+6\lambda^2 D+9\lambda^4 D^2\right)}$$

Los términos en λ^4 y λ^6 pueden ser despreciados por ser de un orden ínfimo de pequeñez. Además

$$c^2 = N^2\cos^2\varphi$$

$$A^2 = \frac{1}{4}N^2\cos^2\varphi sen^2\varphi$$

$$k=\sqrt{\lambda^2 sen^2\varphi+1+6\lambda^2 D}=\sqrt{1+\lambda^2\left(sen^2\varphi+6D\right)}$$

Por ser $\lambda^2(sen^2\varphi + 6D)$ muy pequeño con respecto a la unidad podemos escribir sin error sensible:

$$k=\sqrt{1+\lambda^2\left(sen^2\varphi+6D\right)}=1+\frac{\lambda^2}{2}\frac{N\cos^2\varphi}{R}=1+\frac{\lambda^2 N^2\cos^2\varphi}{2RN}$$

$$k=1+\frac{l^2}{2\rho^2}$$

l = largo del paralelo del punto considerado contado a partir del meridiano central.

ρ = radio de curvatura medio de la Tierra en el punto considerado.

Estudio realizado por Luis González en 1945.

BIBLIOGRAFIA

Chaverri R. Martin. *El Surgimiento del Instituto Geográfico: una nota histórica.* Rev. Ingeniería 4 (2):107-112 1994, Edit. Universidad de Costa Rica.

Herrera J. Rodolfo. *Luis González y la Matemática en Costa Rica.* Rev. Ingeniería 3(1): 51-71 1993, Edit. Universidad de Costa Rica.

González G. Luis. *Aplicación del método de representación de Gauss a la carta geográfica de Costa Rica.* Artículo inédito, manuscrito en cuaderno de pasta dura, 24 pgs., 66 pgs. de tablas, San José Costa Rica, 1945.