Inter Sedes. Vol. 1. (1-2000) 11-20.

POLINOMIOS INTERPOLANTES EN $\mathbb{R}^n$

Vernor Arguedas Troyo
Roberto Mata Montero

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza la forma de los polinomios interpolantes del tipo Hermite, en $\mathbb{R}^n$ y se hace la presentación de algunas propiedades de los polinomios interpolantes en $\mathbb{R}^n$, en general. El objetivo de este trabajo es aplicar estos métodos a ecuaciones diferenciales. Se estudia el caso especial de las funciones polinomiales en que f es de la forma:

$$f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ con:}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \text{ para:}$$

$$f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ y particiones:}$$

$$P_1 = \left\{ x_0 = a < x_1 < \cdots < x_p = b \right\}$$

$$P_2 = \left\{ y_0 = c < y_1 < \cdots < y_{p'} = d \right\}$$

ABSTRACT:

In this paper we study Hermite's interpolation polynomials in $\mathbb{R}^n$. We mention some general properties of general interpolation polynomial in $\mathbb{R}^n$.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS:

Definición

Una función φ : [a,b] x [c,d]$\to \mathbb{R}^n$, dada por:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_l \end{pmatrix}$$

se llama una función polinomial si y sólo si φ_i : [a,b] x [c,d] $\to \mathbb{R}^n$ es una función polinomial; es decir, si existen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \ldots, l$ y $j = 0, 1, \ldots, m$, tales que:

$$\varphi(x_i, y_j) = \sum_{i=0}^{l} a_{ij} x^i y^j$$

En general, podemos definir:

$$\varphi : \prod_{i=1}^{l} [a_i, b_i] \to \mathrm{R}^n, \text{ dada por:}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_l \end{pmatrix}$$

como una función polinomial de l variables, tal que:

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{l} a_{n_1}{}^{(i)} \cdots a_{n_p}{}^{(i)} x_1{}^{n_i} \cdots x_n{}^{n_i}$$

con $l \in \mathbb{N}$.

Nos interesa trabajar con las funciones polinomiales $\varphi(x,y)$ que separen variables, es decir, sean iguales al producto de un polinomio en x por un polinomio en y; esto es: $\varphi(x,y)=p(x)\bullet q(y)$.

Para las funciones polinomiales existen las derivadas parciales de f, para cada f_i, donde:

Definición:

$$\text{Sea } f: \prod_{i=1}^{l} [a_i, b_i] \rightarrow \mathrm{R}^n, \text{ con } a_i \leq b_i$$

$$f \in C^p \text{ si existe } \frac{\partial^{[j]} f_i}{\partial^{j1} x_1 \cdots \partial^{jl} x_i}, \text{ con } j \in \mathrm{N}^l, \ \forall\, i = 1, \cdots, l \text{ y}$$

$$[j] = j_1 + j_2 + \cdots + j_l; \qquad j = \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_l \end{pmatrix}; \text{ con } [j] \leq p$$

2. ANÁLISIS PARA $l = 2$:

Vamos a estudiar el caso de $l = 2$, es decir f: $[a,b]$ x $[c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:

$$f = \sum a_i \varphi_i \otimes \alpha_i, \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \text{ y:}$$

$$\varphi_i : [\mathrm{a,b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\alpha_i : [\mathrm{c,d}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

para $i = 1, p$; donde $\otimes$ significa multiplicación componente a componente, es decir:

$$f(x,y) = \sum ai \begin{pmatrix} \varphi_{1,i} \bullet \alpha_{1,i}{}^{(y)} \\ \vdots \\ \varphi_{n,i} \bullet \alpha_{n,i}{}^{(y)} \end{pmatrix}$$

Sea $A = \{ f$: $[a,b]$ x $[c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que f se expresa como suma finita de producto de polinomios$\}$. Entonces: $f_1 \pm f_2 \in A$ y $f_1 \otimes f_2 \in A$.

Por el teorema de Stone-Weierstrass, A es denso en C([a,b] x [c,d], $\mathbb{R}^n$). Sin problema, se obtiene el mismo resultado en $C\left[\prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i], \mathrm{R}^n\right]$, donde:

$$\begin{aligned} f(x,y) \otimes g(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bullet \varphi_i(x) \otimes \alpha_i(y) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \bullet \phi_j(x) \otimes \psi_j(y) \right) \\ &= \sum a_i \bullet b_j \bullet \left(\varphi_i(x) \bullet \phi_j(x) \right) \otimes \left(\alpha_i(y) \bullet \psi_j(y) \right) \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, p$ y $j = 1, \ldots, m$.

Definición:

Dada la función f: [a,b] x [c,d] $\rightarrow \mathbb{R}^n$, y las particiones:

$$J=\{a=x_o<x_1<x_2<\ldots<x_{l-1}<x_l=b\}\subset[a,b]$$
$$M=\{c=y_o<y_1<y_2<\ldots<y_{m-1}<y_m=d\}\subset[c,d]$$

entonces, $K = J$ x M es una partición de $[a,b]$ x $[c,d]$, donde:

$K = \{(x_i, y_j)\,;\, i = 0, \ldots, l; j = 0, \ldots, m\}$ tiene $(lm + l + m + 1)$ elementos.

Definición:

Llamamos polinomio de Lagrange de f con respecto a la partición K, a:

$$P(x,y)=\sum \varphi_i(x)\bullet\beta_j(y)\bullet f(x_i,y_j)$$

con $i = 0, \ldots, l$ y $j = 0, \ldots, m$,

$$\varphi_i\colon [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } \beta_j\colon [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$$

en donde:

$$\varphi_{\mathrm{i}}(x)=\frac{(x-x_0)\ldots\left(\widehat{x-x_i}\right)\ldots(x-x_l)}{(x_i-x_0)\ldots\left(\widehat{x_i-x_i}\right)\ldots(x_i-x_l)}$$
$$\beta_{\mathrm{j}}(y)=\frac{(y-y_0)\ldots\left(\widehat{y-y_j}\right)\ldots(y-y_m)}{(y_j-y_0)\ldots\left(\widehat{y_j-y_j}\right)\ldots(y_j-y_m)}$$

Notemos que:

$$f_{\varphi i\beta j}\colon[a,b] \text{ x } [c,d]\rightarrow\mathbb{R}^n$$
$$(x,y)\rightarrow\varphi_i(x)\bullet\beta_j(y)\bullet f(x_i,y_j)$$

es una función polinomial y

$$P=\sum f_{\varphi i\beta j} \text{ es una función polinomial.}$$

P interpola a f en K pues $P(x_i, y_j)=f(x_i, y_j)$.

Este tipo de algoritmo presenta el problema de ser muy demandante en los recursos de memoria de la máquina.

Nota:

La definición de polinomio de Lagrange de f con respecto a la partición K es muy restrictiva. No todo polinomio interpolante de f es de Lagrange.

El siguiente resultado es un teorema cuyo valor es teórico ya que no tiene interés desde un punto de vista numérico.

Teorema:

Dada la función f: $[a,b]$ x $[c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

y las particiones: $J = \{a = x_o < x_1 < \ldots < x_l = b\}$ y $M = \{c = y_o < y_1 < \ldots < y_m = d\}$. Si P_1 y P_2 son dos polinomios interpolantes en el sentido de Lagrange de f sobre $K = J$ x M, entonces $P_1 = P_2$.

Demostración:

Sean P_1 y P_2, polinomios interpolantes tal que:

$$P_1(x,y) = \sum \varphi_i(x) \bullet \beta_j(y) \bullet f(x_i, y_j)$$
$$P_2(x,y) = \sum \varphi_i(x) \bullet \psi_j(y) \bullet f(x_i, y_j)$$

con $P_1(x_i,y_i)=f(x_i,y_j)$ y $P_2(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)$, para:

$i = 0, \ldots, l$ y $j = 0, \ldots, m$. Como:

$P_1(x, y_k)$ es el polinomio interpolante, en el sentido de Lagrange, de $f(x, y_k)$ sobre J.
$P_2(x, y_k)$ es el polinomio interpolante, en el sentido de Lagrange, de $f(x, y_k)$ sobre J.

Entonces:

$$P_1(x, y_k) = P_2(x, y_k) \text{ para } k = 0, \ldots, m$$

En igual forma:

$$P_1(x_j, y) = P_2(x_j, y) \text{ para } j = 0, \ldots, l$$

Concluyendo que:

$$P_1 = P_2$$

Los polinomios en mención son únicos en el sentido de la construción de Lagrange, pero pueden haber otros polinomios que no son de Lagrange y que también interpolan, esto debido al teorema de la función implícita.

Ejemplo:

El siguiente es un ejemplo de dos polinomios interpolantes diferentes, para los mismos puntos.

Sea $f(x,y) := 2x^2 + y^2$

El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = 1\}$ define una elipse.

Los puntos $P = (0,1), Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\mathrm{R} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

pertenecen a la elipse, los cuales, se muestra que no son colineales.

Obtenemos los vectores direccionales, perpendiculares a las rectas determinadas por P y Q, P y R, respectivamente, con los que determinamos:

$$\text{el radio } r = \frac{\sqrt{\frac{153}{2} - 51\sqrt{2}}}{8 - 4\sqrt{2}} \text{ y el centro } \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{8}\right)$$

del círculo que contiene a P, Q y R, el cual tiene ecuación dada por:

$$\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(-\frac{1}{8} + y\right)^2 = \frac{\frac{153}{2} - 51\sqrt{2}}{\left(8 - 4\sqrt{2}\right)^2}$$

es decir:

$$-\frac{3}{4} + \frac{x}{2\sqrt{2}} + x^2 - \frac{y}{4} + y^2 = 0$$

Comentario:

Decimos que f separa variables si $f(x,y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$; esto es, si:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \text{ entonces } f = \alpha \otimes \beta = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

Teorema:

Sea f: $[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^n$, con $f \in C^p$, tal que f separa variables.

Sean $K = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_k\} \subset [a,b]$ y $M = \{y_0 < y_1 < \ldots < y_k\} \subset [c,d]$ dos particiones.

Sean:

$\alpha(x) = \Sigma a_i(x) \bullet \alpha(x_i)$ el polinomio de Lagrange de α sobre K,

$\beta(y) = \Sigma b_j(y) \bullet \beta(y_j)$ el polinomio de Lagrange de β sobre M.

con:

$$a_i(x) = \frac{(x - x_1)\ldots\left(\widehat{x - x_i}\right)\ldots(x - x_k)}{(x_i - x_0)\ldots\left(\widehat{x - x_i}\right)\ldots(x_i - x_k)}$$

$$b_j(y) = \frac{(y - y_1)\ldots\left(\widehat{y - y_j}\right)\ldots(y - y_k)}{(y_j - y_0)\ldots\left(\widehat{y - y_j}\right)\ldots(y_j - y_k)}$$

entonces:

$\alpha(x) \otimes \beta(y)$ es un polinomio que interpola a f, y el polinomio de Lagrange de f sobre $K \otimes M$ es de la forma:

$$\Sigma a_i(x) \bullet b_j(y) \bullet \alpha(x_i) \otimes \beta(y_j)$$

Demostración:

$$\text{Como } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a(x) \otimes b(y), \text{ entonces:}$$

el polinomio interpolante de Lagrange de f sobre $K \otimes M$ es igual a:

$$\begin{aligned}\sum a_i(x) \bullet b_j(y) \bullet f(x_i, y_j) &= \sum a_i(x) \bullet b_j(y) \bullet f(x_i, y_j)\\ &= \sum a_i(x) \bullet b_j(y) \bullet \alpha(x_i) \otimes \beta(y_j)\end{aligned}$$

3. GENERALIZACIÓN:

Obtenemos la siguiente definición para polinomios de interpolación por producto tensorial.

Definición:

Dada la función:

$$f{:}[a_1,\ b_1] \text{ x } [a_2,\ b_2] \text{ x} \ldots \text{ x } [a_l,\ b_l] \to \mathbb{R}^n$$

con:

$$\begin{cases} P_i{:}\left\{x_0^{(i)} = a_i < x_1^{(i)} < \ldots < x_{ki}^{(i)} = b_i\right\} \\ \qquad i = 1,\ldots,l \\ \qquad P = \prod_{i=l}^{l} P_i \end{cases}$$

para:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

entonces, si:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}$$

$$P_i(y) = \sum_{i=l}^{n} f_i \begin{pmatrix} x_{i1}(1) \\ \vdots \\ x_{il}(l) \end{pmatrix} \bullet \frac{(y_1 - x_1^{(1)})(y_1 - x_2^{(1)})\cdots\widehat{(y_1 - x_{i1}^{(1)})}\cdots(y_1 - x_{k1}^{(1)})}{(x_{i1}^{(1)} - x_1^{(1)})(x_{i1}^{(1)} - x_2^{(1)})\cdots\widehat{(x_{i1}^{(1)} - x_{i1}^{(1)})}\cdots(x_{i1}^{(1)} - x_{k1}^{(1)})}$$

$$\frac{\left(y_1 - x_1^{(2)}\right)\left(y_2 - x_2^{(2)}\right)\cdots\left(y_2 - x_{i2}^{(2)}\right)\cdots\left(y_2 - x_{k2}^{(2)}\right)}{\left(x_{i2}^{(2)} - x_1^{(2)}\right)\cdots\left(x_{i2}^{(2)} - x_{i2}^{(2)}\right)\cdots\left(x_{1i2}^{(2)} - x_{k2}^{(2)}\right)}$$

$$\frac{\cdots\left(y_l - x_1^{(l)}\right)\left(y_l - x_2^{(l)}\right)\cdots\left(y_l - x_{il}^{(l)}\right)\cdots\left(y_l - x_{kl}^{(l)}\right)}{\cdots\left(x_{il}^{(l)} - x_1^{(l)}\right)\cdots\left(x_{il}^{(l)} - x_{il}^{(l)}\right)\cdots\left(x_{il}^{(l)} - x_{kl}^{(l)}\right)}$$

Para:

$$\begin{cases} i1 = 0,\ 1,\ldots,\ k_1 \\ i2 = 0,\ 1,\ldots,\ k_2 \\ \qquad \vdots \\ il = 0,\ 1,\ldots,\ k_l \end{cases}$$

y cumple que:

$$f\begin{pmatrix} x_{i1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{il}^{(l)} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_{i1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{il}^{(l)} \end{pmatrix}$$

4. CONCLUSIONES:

Como una conjetura, creemos que el polinomio P definido anteriormente, es el polinomio tensorial interpolante de grado mínimo.

REFERENCIAS

Albrecht, Peter. A new theoretical approach to Runge-Kutta methods. (1987), SIAM Journal Numerical Analysis, vol 24, # 2.

Arguedas, Vernor. Roberto Mata. Un teorema sobre el orden de los métodos de Runge-Kutta. (1992), Serie Técnica Ciencias Matemáticas, U.C.R., vol. 3, # 1.

Burden, Richard. Douglas Faires. Análisis numérico. Editorial Iberoamérica, México, 1985.

Collatz, Lothar. *The numerical treatment of differential equations.* Springer-Verlag, Germany, 1960.

Grigorief, R. D. *Numerik gewöhnlicher differentialgleichungen 1, 2.* Stuttgart: Teubner, 1972 y 1976.

Fehlberg, E. *Klassische Runge-Kutta Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungs-probleme.* (1970), Computing, 6, 61-71.

Hairer, E., A. Iserles and J. M. Sanz-Serna. *Equilibria of Runge-Kutta methods.* (1990), Numerische Mathematik, vol. 58, p.p. 243-254.

Kansy, K. *Elementare Fehlerdarstellung für Ableitungen bei der Hermite-Interpolation.* Numerische Mathematik, 21 (1973), p.p. 350-354.

Mata, Roberto. *Algunos aspectos teóricos de los métodos Runge-Kutta.* (Tesis), U.C.R., 1990.

Press, William. Brian Flannery. Saul Teukolsky. William Vetterling. *Numerical Recipes.* USA, 1987.

Press, William. Brian Flannery. Saul Teukolsky. William Vetterling. *Numerical Recipes, example book (Fortran).* USA, 1987.

Shampine, L. F. and M. K. Gordon. *Computer solution of ordinary differential equations: the initial value problem.* (1975), W. H. Freeman, San Francisco, 318 pp. QA 372.S416.

Shampine, L. F., and H. A. Watts. *Practical solution of ordinary differential equations by Runge-Kutta methods.* (1976), Rept. SAND 76-0585, Sandía National Laboratories, Albuquerque, N. M.

Shampine, L. F. *Interpolation for Runge-Kutta methods.* (1985), SIAM Journal Numerical Analysis, vol. 22, # 5.

Stoer, Josef. Roland Burlisch. *Numerische Mathematik 1.* Quinta edición, Springer-Verlag, Germany, 1989.

Stoer, Josef. Roland Burlisch. *Numerische Mathematik 2.* Tercera edición, Springer-Verlag, Germany, 1990.

Werner, H., R. Schabach. *Praktische Mathematik II.* Springer-Verlag, Germany, 1972.