Inter Sedes. Vol. III. (5-2002) 07-14.

INTERPOLACIÓN DOBLE DE HERMITE Y SU APLICACIÓN A MÉTODOS RUNGE-KUTTA

Vernor Arguedas Troyo
Roberto Mata Montero

RESUMEN

En este artículo se presenta un método numérico para resolver el problema de valor inicial:

$$y'(x) = f(x,y(x)),$$
$$\text{con } y(a)\in \mathbb{R}^n,$$
$$\text{para } f: [a,b]\text{x } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

haciendo uso de un método de extrapolación para:

$$\begin{cases} y(x_i) \\ y'(x_i) \end{cases}$$

y se muestra un ejemplo obtenido con la ayuda de Mathematica.

Además, se presenta el método de interpolación doble de Hermite, para métodos de Runge-Kutta.

ABSTRACT

In this paper we introduce a numerical method to solve the initial value equation:

$$y'(x) = f(x,y(x)),$$
$$\text{con } y(a)\in \mathbb{R}^n,$$
$$\text{para } f: [a,b]\text{x } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

by using an extrapolation procedure for:

$$\begin{cases} y(x_i) \\ y'(x_i) \end{cases}$$

We show one example with the help of the Mathematica program.

Further we present a double Hermite numerical method for Runge-Kutta methods.

Introducción

Estudiaremos métodos de interpolación de Runge-Kutta y su relación con algunos tipos de polinomios interpolantes. Dentro de esta temática, analizaremos el proceso de interpolación por polinomios de Hermite, sobre la base de métodos de Runge-Kutta.

Conceptos

Recordemos que un método de Runge-Kutta explícito, de un paso, de p niveles, se define formalmente de la siguiente manera [1,2,6,12]:

$$\eta(x+h)=\eta(x)+h\sum_{j=1}^{n}\gamma_j K_j$$

con:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= 0\\
K_1(x,y,h) &:= f(x,y)\\
K_2(x,y,h) &:= f(x+\alpha_2 h, y+h\beta_{21}K_1)\\
&\vdots\\
K_p(x,y,h) &:= f(x+\alpha_p h, y+h\sum_{l=1}^{p-1}\beta_{pl}K_l)
\end{aligned}$$

en donde:

(α_j), $j=2,\cdots,p$; (β_{pk}); (γ_k) son las constantes del método y f es una función polinomial dada.

Esto se puede representar mediante un esquema paramétrico, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\alpha_p & \beta_{p1} & \beta_{p2} & \beta_{p3} & \cdots & \beta_{pp}\\
\hline
\alpha_{p+1} & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_p
\end{array}$$

con. $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

El mismo método, en forma, implícita, admite la siguiente representación:

$$\eta(x+h)=\eta(x)+h\sum_{j=1}^{p}\gamma_j K_j$$

con:

$$\begin{aligned}
K_1(x,y,h) &:= f(x,y)\\
K_2(x,y,h) &:= f(x+\alpha_2 h, y+h(\beta_{21}K_1+\beta_{22}K_2))\\
&\vdots\\
K_p(x,y,h) &:= f(x+\alpha_p h, y+h(\sum_{j=1}^{p}\beta_{jp}K_j))
\end{aligned}$$

en donde:

$(\alpha_j), j=2,...,p:(\beta_{pk});(\gamma_k)$ son constantes dadas del método, es decir se autollama y requiere por lo tanto resolver un sistema.

Una rutina en Matemathica 4 que resuelve el problema anterior es el siguiente:

BeginPackage ["Runge-Kutta"] Rksimple::usage = "RKsimple[{e1,e2,...}, {y1,y2,...}, {a1,a2,. integra numéricamente las funciones ei como funciones de los *yi*, con valores iniciales *ai*. El procedimiento integra en pasos del tamaño *dt*, de 0 a *t1*

```
Begin["'Private'"]
RKStep[f_,y_,y0_,dt_] :=
Block[{k1, k2, k3, k4},
k1 = dt N[ f /. Thread[ y -¿ y0] ];
k2 = dt N[ f /. Thread[ y -¿ y0 + k1/2] ];
k3 = dt N[ f /. Thread[ y -¿ y0 + k2/2] ];
k4 = dt N[ f /. Thread[ y -¿ y0 + k3] ];
y0 + (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)/6
]
RKsimple[f_List, y_List. y0_List, {t1_, dt_}] :=
NestList[ RKStep[f, y, #, N[dt]&, N[y0], Round[N[t1/dt]]
Length[f]==Length[y]==Length[y0]

RKsimple[f_list, y_list, y0_list, {t_, t0_, t1_, dt_}] :=
Block[{res},
res = RungeKutta[ Append[1,f], Append[t,y], Append
                                          t0, y0
, {t1-t0,dt}];
]
Length[f] == Length[y] == Length[y0]
End [ ]
EndPackage[ ]
```

Además:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Se llama una función polinomial, si:

$$f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;,\; i = 1, \cdots, n$$

es una función polinomial. Definimos el grado de f=sup grado $| f_i |$, con $i = 1, \cdots, n$

La interpolación doble de Hermite fj, con respecto a

$$\{x_0 < x_1 < \cdots < x_p\}$$

con X ε $[a,b]$, es un polinomio Pj de grado a lo sumo (2p + 1) y con Pj tal que:

$$\begin{aligned} P_j(x_i) &= f_j(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, p \\ P_j'(x_i) &= f_j'(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, p \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} P : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es el polinomio doble de Hermite de f, y satisface:

$$\begin{aligned} P(x_i) &= f(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, n \\ P'(x_i) &= f'(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, n \end{aligned}$$

Observemos que el grado de P es a lo sumo (2p + 1).

Llamamos polinomio mónico doble interpolante, a un polinomio

$$\begin{aligned} P : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} p_j(x_i) &= y_j(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, p \\ p_j'(x_i) &= y_j'(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, p \end{aligned}$$

tal que:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, n \\ p'(x_1) &= f'(x_i) \;,\; i = 0, 1, \cdots, n \end{aligned}$$

es de grado mínimo.

Interpolación doble

Mediante interpolación doble, el polinomio de Hermite en una variable, es de la forma:

$$H(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$$

En el caso de n variables:

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) \\ \vdots \\ H_n(t) \end{pmatrix}$$

y en donde los coeficientes tienen la solución única:

$$\begin{aligned} \alpha_{3i} &= \frac{y_i'(a) + y_i'(b)}{(a-b)^2} - 2 \cdot \frac{y_i(a) - y_i(b)}{(a-b)^3} \\ \alpha_{2i} &= \frac{y_i'(a)}{(a-b)} - \frac{y_i(a) - y_i(b)}{(a-b)^2} - (2a+b) \cdot \alpha_{3i} \\ \alpha_{1i} &= y_i'(a) - a \cdot \frac{y_i'(a) - y_i'(b)}{(a-b)} + 3ab \cdot \alpha_{3i} \\ \alpha_{0i} &= y_i(a) - a \cdot y_i'(a) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{y_i'(a) - y_i'(b)}{(a-b)} - \frac{-a^3 + 3a^2 b}{2} \cdot \alpha_{3i} \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} y_i(x) &= y_i(a) + (x-a) y_i'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot y_i^{(2)}(\xi_{1i}) \\ y_i(x) &= y_i(b) + (x-b) y_i'(b) + \frac{(x-b)^2}{2!} \cdot y_i^{(2)}(\xi_{2i}) \end{aligned}$$

con

$$\xi_{1i}, \xi_{2i} \in]a,b[, \text{ para } i = 1, \cdots, n$$

Luego:

$$\begin{aligned} y_i(x) = {} & \frac{y_i(a) + y_i(b)}{2} + \frac{(x-a) \cdot y_i'(a) + (x-b) \cdot y_i'(b)}{2} + \\ & \frac{(x-a)^2}{4} \cdot y_i^{(2)}(\xi_{1i}) + \frac{(x-b)^2}{4} \cdot y_i^{(2)}(\xi_{2i}) \end{aligned}$$

con i = 1,..., n.

De acuerdo a [14], obtenemos que el caso de tres puntos:

$$\begin{aligned} y_i(x) - H_i(x) \mid &\leq \frac{(x-x_1)^2 \cdot (x-x_2)^2 \cdot M_i}{4!}, \text{ con } M_i = sup \mid y_i^{(4)}(x) \mid, x \in [x_1, x_2] \\ &\leq \frac{(x_2 - x_1)^4 \cdot M_i}{2^4 \cdot 4!} \\ y_i'(x) - H_i'(x) \mid &\leq \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x_2-x_1)\cdot M_i}{2} \\ &\leq \frac{(x_2-x_1)^3 \cdot M_i}{2} \text{ para } i = 1, \cdot, n \\ &= O(h^2) \; ; \; h = x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\| y(x) - H(x) \| \leq \frac{(x_2 - x_1)^4 \cdot M}{2^4 \cdot 4!}, \text{ con } M = sup\{M_i, i = 1, \cdots, n\}$$

es decir:

$$\| y_i'(x) - H'(x) \| \leq (x_2 - x_1)^3 \cdot M$$

Interpolación doble spline de grado tres

En la construcción del polinomio de interpolación de Hermite para métodos de Runge-Kutta, haremos lo siguiente:

Para la función f: [a,b] x $\Re \rightarrow \Re$ y g' dado, donde g'(x) = f(x,g(x)), vamos a proceder de la siguiente manera: un h > 0, h variable, decimos que se acepta si con el se cumple una condición del tipo Runge-Kutta-Fehlberg o similar.

Ahora, si un h > 0 se acepta, entonces en el intervalo [a, a + h] consideremos el problema g'(x) = f(x,g(x)), con g(a + h) aceptado como valor correcto.

Luego, en el método de interpolación, para los intervalos

$$[a, a+h_1], [a+h_1, a+h_1+h_2], \cdots [a+h_1+h_2+\cdots+h_{n-1}, a+h_1+h_2+\cdots+h_n]$$

se van asumiendo como correctos, los valores

$$y(a), y'(a), y'(a+h_1), y'(a+h_1+h_2), \cdots, y'(a+h_1+h_2+\cdots h_n)$$

Para el caso de una variable, hacemos la siguiente construcción del polinomio de Hermite.

Sea

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con **f** ε $\mathbf{C}^2$ dada y **f** Lipschiana.

$y'(x) = f(x, y(x))$, con **y(a)** dado.

El primer polinomio de Hermite, $H_{h1}(x)$, se calcula en [a, a + h_1] y satisface que:

$$\begin{aligned} H_{h_1}(a) &= y(a) \\ H'_{h_1}(a) &= y'(a) \\ H_{h_1}(a+h_1) &= y(a+h_1) \\ H'_{h_1}(a+h_1) &= y'(a+h_1) \end{aligned}$$

Para el segundo polinomio de Hermite, $H_{h2}(x)$, se calcula en [a + h_1, a + h_1+ h_2] y satisface que:

$$\begin{aligned} H_{h_2}(a+h_1) &= y(a+h_1) \\ H'_{h_2}(a+h_1) &= y'(a+h_1) \\ H_{h_2}(a+h_1+h_2) &= y(a+h_1+h_2) \\ H'_{h_2}(a+h_1+h_2) &= y'(a+h_1+h_2) \end{aligned}$$

Y así sucesivamente, hasta el polinomio de Hermite, $H_{hn}(x)$.

Dados dos puntos, estamos aproximando la solución por una función polinomial spline de grado tres, que en muchos casos aproxima de manera adecuada. Ahora, ¿qué pasaría en $\Re^N$?

En $\Re^N$, tenemos que:

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

con

$$g'(x) = f(x, g(x))$$

y g(a) = g_a dado.

Aplicaremos la interpolación en n variables, para $\Re^N$ siempre con la norma ll ll_∞; esto quiere decir que vamos a buscar:

$$H : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

spline interpolante, en el siguiente sentido:

$$H(a) = g(a) \qquad H'(a) = g'(a)$$
$$H(b) = g(b) \qquad H'(b) = g'(b)$$

con:

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

Definición:

Dada la función *y*: I → $\Re$, con I - [a,b] y **f** ε C^2, con *y*(a), y(b), *y*´(a), *y*´(b) conocidos, entonces:

$$H : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

es una función interpolante si:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix}$$

donde:

$$H_{(x_i,x_i+h)} : [x_i, x_{i+h}] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

con:

$$\begin{aligned} H_{(x_i,x_i+h)}(x_i) &= y(x_i) \\ H'_{(x_i,x_i+h)}(x_i) &= y'(x_i) \end{aligned}$$

y cada H^i es un polinomio de Hermite doble, de grados a lo sumo tres.

Nota

Al hablar de interpolación sobre un intervalo en $\Re^N$, se tiene presente la siguiente definición:

$$H : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

es polinomial es polinomial ⇔ H_i, donde:

$$H(x) = \alpha_0 + x\alpha_1 + x^2\alpha_2 + x^3\alpha_3$$

Los son las condiciones para los g_i, donde α_i ε $\Re^N$. Es decir:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} {\alpha_i}^1 \\ \vdots \\ {\alpha_i}^N \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} {\alpha_0}^1 + & x{\alpha_1}^1 + & x^2{\alpha_2}^1 + & x^3{\alpha_3}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\alpha_0}^N + & x{\alpha_1}^N + & x^2{\alpha_2}^N + & x^3{\alpha_3}^N \end{pmatrix}$$

En [8] se demuestra que:

Teorema de Kansy

Dado el problema del valor inicial:

y' = f(x,y(x)),

$a \le x \le b$ **, con** $y(a) \in \mathbb{R}^n$**, dado,**

para $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

Sea P(x) el polinomio de grado mínimo, el cual interpola la solución local μ: [a,b] → $\Re^n$, de acuerdo a:

$$\begin{aligned} P(\xi_k) &= \mu(\xi_k)\ ,\ k = 0,1,\cdots,p-1 \\ P'(\xi_k) &= \mu'(\xi_k)\ ,\ k = 0,1,\cdots,p-1 \end{aligned}$$

con:

$$\xi_k = x_{n,j(k)}\ ,\ k = 1,\cdots,p-1$$

Sea H >0, tal que μ ε $C^{2p-2}[x_n, x_n + H]$, entonces, ∀ h >0, con $h \le$ H:

$$0 \le k \le (2p-2)\ ,\ \text{y}\ x_n \le x \le x_n + h \le x_n + H$$

se cumple que:

$$\| \mu^{(k)}(x) - P^{(k)}(x) \| \le max \| \mu^{(2p-2)} \| \frac{h^{(2p-2-k)}}{(2p-2-k)}$$

sobre [x_n, $x_n + h$], con h medida del paso variable.

Del teorema de Kansy anterior y con las mismas hipótesis, obtenemos la siguiente variación:

Teorema:

Dado el problema de valor inicial:

$$y' = f(x,y(x)) \text{ , con } f \text{ Lipschitz,}$$

$$a \leq x \leq b \text{ , con } y(a) \in \mathbb{R}^n$$

dado, para

Si $\mu \in C^{2p-2}[x_n, x_n + H]$, entonces, para: $0 \leq k \leq (2p-2)$ y $x_n \leq x \leq x_n + h \leq x_n + H$, se tiene que:

$$P^{(k)}(x) - \mu^{(k)}(x) = o(h^{p+1-k})$$

sobre $[x_n, x_n +]$, con $p > 3$.

Demostración:

Puesto que:

$$h^{2p-2-k} = h^{p+1-k} \cdot h^{p-3}$$

y h^{p-3} es positivo, entonces:

$p - 3 > 0$, con lo que $p > 3$.

Método Grigorief-Euler [9]

Desde el punto de vista numérico, al dar un método de orden p, usualmente se construye un método canónico de orden p+1 que sirva de apoyo al primero, y en donde se considera un error en x del método, al valor:

$| M_{p+1}(x) - M_p(x) | < Tol$; Tol prefijado, de las soluciones.

A manera de ejemplo, mencionemos que esto es lo que ocurre en el método de Runge-Kutta-Fehlberg [10], dado a conocer por Fehlberg en 1970 y en el cual usa el método de Runge-Kutta de orden cinco para estimar el error en el método de Runge-Kutta de orden cuatro. Una ventaja clara de este método es el que requiere seis evaluaciones de la función por paso, contra diez evaluaciones en el método de Runge-Kutta de orden cinco.

Vamos a analizar el método Grigorief-Euler en $\Re^N$.

Dado el problema de valor inicial:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$\text{con } y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ dado,}$$

$$\text{para } f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

para t [a,b], y , de manera usual, escribimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(t,x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(t,x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(t,x) \end{pmatrix}$$ para i = 1,....,n

con

$$f, \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

continuas, el método Grigorief-Euler se define como: para h>0, con:

$$h = \begin{pmatrix} h \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}$$

se aproxima primero y(a+h) por medio del método de Euler:

$$\begin{aligned} y(a+h) &= y(a) + \frac{h}{2}[f(a,y(a)) + f(a+h, y(a+h))] \\ &- \frac{h^2}{12}[\frac{\partial f}{\partial t}(a,y(a)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,y(a)) \cdot y_1'(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a,y(a)) \cdot y_n'(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial f}{\partial t}(a+h, y(a+h)) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+h, y(a+h)) \cdot y_1'(a+h) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+h, y(a+h)) \cdot y_n'(a+h) \end{pmatrix}$$

$$h \in \mathbb{R}^n, h = \begin{pmatrix} h \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}, h > 0, y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Para el método de Grigorief-Euler, ponemos:

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y(a+h) &= y(a) + hf(a, y(a)) \end{aligned}$$

Luego definimos:

$$y(a + \frac{h}{2}) = H(a + \frac{h}{2})$$

$$\eta(a+h) := H(a+h) \text{ ; con } x \leq \tfrac{h}{2}$$

η(a+x) es el método de extrapolación polinomial: y se sustituye por h en a, a + $h/2$; (a + $h/2$) es el polinomio de Hermite.

Debemos notar que, en la parte que modificamos del método Grigorief, con el algoritmo elegido de Euler, pudimos haber usado cualquiera de los métodos tradicionales conocidos, según los deseos e intenciones del usuario.

Teorema:

El método de Grigorief-Euler es de al menos orden cuatro.

Demostración:

Emplearemos ll ll$_\infty$ como norma. Sea η el método.

$$\begin{aligned} \| y(a+\frac{h}{2}) - \eta(a+\frac{h}{2}) \| &= \| y(a+h) - y(a) - \frac{h}{2}[f(a,y(a)) + f(a+h, y(a+h))] \\ &- \frac{h^2}{12}[\frac{\partial f}{\partial t}(a,y(a)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,y(a)) \cdot y'_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a,y(a)) \cdot y'_n(a) \end{pmatrix} \\ &- \frac{\partial f}{\partial t}(a+h, y(a+h)) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+h,y(a+h)) \cdot y'_1(a+h) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+h,y(a+h)) \cdot y'_n(a+h) \end{pmatrix}] - \eta\|_\infty \\ &= \| \begin{pmatrix} y_1(a+h) - y_1(a) - \frac{h}{2} \cdot A - \frac{h^2}{12} \cdot B \\ \vdots \\ y_n(a+h) - y_n(a) - \frac{h}{2} \cdot A - \frac{h^2}{12} \cdot B \end{pmatrix} \|_\infty \end{aligned}$$

Donde:

$$A = f(a, y(a)) + f(a+h, y(a+h))$$

y:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial f}{\partial t}(a,y(a)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,y(a)) \cdot y'_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a,y(a)) \cdot y'_n(a) \end{pmatrix} \\ &- \frac{\partial f}{\partial t}(a+h, y(a+h)) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+h,y(a+h)) \cdot y'_1(a+h) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+h,y(a+h)) \cdot y'_n(a+h) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} | y_i(a+h) - \eta_i(a+h) | &= | y_i(a+h) - [y_i(a) + \frac{h}{2} f_i(a, y_i(a)) + f(a+h, y_i(a+h))] \\ &- \frac{h^2}{12}[\frac{\partial f_i}{\partial t}(a, y_i(a)) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a, y_i(a)) \cdot y'_i(a) \\ &- \frac{\partial f_i}{\partial t}(a+h, y_i(a+h)) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a+h) \cdot y'_i(a+h)] | \\ &\leq O(h^5) \end{aligned}$$

Como este método es generalizado a y preserva el orden en cualquier norma computarizable, queda demostrado el teorema.

Bibliografía

Albrecht, Peter. *A new theoretical approach to Runge-Kutta methods.* (1987), SIAM Journal Numerical Analysis, vol 24, # 2.

Arguedas, Vernor. Roberto Mata. *Un teorema sobre el orden de los métodos de Runge- Kutta.* (1992), Serie Técnica Ciencias Matemáticas, U.C.R., vol. 3, # 1.

Burden, Richard. Douglas Faires. *Análisis numérico.* Editorial Iberoamérica, México, 1985.

Collatz, Lothar. *The numerical treatment of differential equations.* Springer-Verlag, Germany, 1960.

Grigorief, R. D. *Numerik gewöhnlicher differentialgleichungen 1, 2.* Stuttgart: Teubner, 1972 y 1976.

Fehlberg, E. *Klassische Runge-Kutta Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungs-probleme.* (1970), Computing, 6, 61-71.

Hairer, E., A. *Iserles and J. M. Sanz-Serna. Equilibria of Runge-Kutta methods.* (1990), Numerische Mathematik, vol. 58, p.p. 243-254.

Kansy, K. *Elementare Fehlerdarstellung für Ableitungen bei der Hermite-Interpolation. Numerische Mathematik,* 21 (1973), p.p. 350-354.

Mata, Roberto. *Algunos aspectos teóricos de los métodos Runge-Kutta.* (Tesis), U.C.R., 1990.

Press, William. Brian Flannery. Saul Teukolsky. William Vetterling. *Numerical Recipes.* USA 1987.

Press, William. Brian Flannery. Saul Teukolsky. William Vetterling. *Numerical Recipes,* example book (Fortran). USA, 1987.

Shampine, L. F. and M. K. Gordon. *Computer solution of ordinary differential equations: the inicial value problern.* (1975), W. H. Freeman, San Francisco, 318 pp. QA 372.S416.

Shampine, L. F., and H. A. Watts. *Practical solution of ordinary differential equations by Runge-Kutta methods.* (1976), Rept. SAND 76-0585, Sandía National Laboratories, Albuquerque, N. M.

Shampine, L. F. *Interpolation for Runge-Kutta methods.* (1985), SIAM Journal Numerical Analysis, vol. 22, # 5.

Stoer, Josef. Roland Burlisch. *Numerische Mathematik 1.* Quinta edición, Springer-Verlag, Germany, 1989.

Stoer, Josef. Roland Burlisch. *Numerische Mathematik 2.* Tercera edición, Springer-Verlag, Germany, 1990.

[17] Werner, H., R. Schabach. *Praktische Mathematik 11.* Springer-Veriag, Germany, 1972.