Inter Sedes. Vol. VIII. (14-2007) 27-32. ISSN: 1409-4746

Ecuaciones de Gauss y Peterson-Codazzi

Olman Trejos *

2 de marzo de 2008

Resumen

Se muestra, que las ecuaciones clásicas de Gauss y Peterson-Codazzi, válidas para las superficies de clase C^3, conserva su forma y para las superficies clase C^2, si se utiliza el concepto de diferencial externo generalizado. En términos de derivadas generalizadas, según Sobolev, este resultado fue obtenido por Bakelman.

Abstract

One is, that the classic equations of Gaussian and Peterson-Codazzi, valid for the class surfaces C^3, conserves its form and for the surfaces class C^2, if the generalized external differential concept is used. In generalized derived terms of, according to Sobolev, result was obtained by Bakelman.

Palabras claves: Diferencial externo generalizado, fórmula Gauss, región regular.
Keywords: Generalized external differential, formula Gaussian,

1. Diferencial externo generalizado.

Para obtener las ecuaciones de Gauss y de Peterson-Codazzi para las superficies clase C^2, se hace necesario el concepto de diferencial generalizado externo introducido por De Ram [1]. En el presente punto se define este concepto y se establecen algunas de sus propiedades.

Sea X una C^∞-variedad bidimensional, suave, de Hausdorff, que satisface el segundo axioma de conteo. Para el número entero $r \geq 0$ representemos con $C^r(X, \mathbb{R})$ el espacio lineal de funciones reales clase C^r en X, $C_0^r(X, \mathbb{R})$ el espacio de funciones finitas clase C^r, $\mathcal{E}^r(X, T^*(X))$ el espacio de las formas diferenciales lineales clase C^r en X, y $\mathcal{E}^r(X, \bigwedge^2 T^*(X))$ el espacio de las 2-formas externas clase C^r en X.

Sea U un entorno coordenado con clausura compacta en la variedad X. La 2-forma $\Omega \in \mathcal{E}^0(U, \bigwedge^2 T^*(U))$ se llama *diferencial externo generalizado* de la forma continua $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ en U, si para cada función $\varphi \in C_0^1(U, \mathbb{R})$ se cumple la igualdad

$$\iint_U \varphi \Omega = \iint_U \omega \wedge d\varphi.$$

Si $\omega \in \mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, entonces el diferencial generalizado externo coincide con el diferencial ordinario externo $d\omega$. Por tal motivo, en adelante el diferencial generalizado externo lo designaremos con el símbolo $d\omega$. El diferencial generalizado externo

*Sede Regional del Pacífico, Universidad de Costa Rica, Puntarenas.

continuo (si es que existe) se define con la forma ω unívocamente y tiene carácter local en el sentido que para todo entorno $U_1 \subset U$ el diferencial generalizado externo, definido en el entorno U_1, coincide en U_1 con el diferencial generalizado externo, definido en el entorno U. Por tal razón, al hablar sobre el diferencial generalizado externo, no señalaremos el entorno en el cual él se define. Fácilmente se puede mostrar que el segundo diferencial generalizado externo $dd\omega = 0$.

Abajo utilizaremos las siguientes dos propiedades del diferencial generalizado externo.

Lema 1 *Si la forma $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ posee diferencial generalizado externo, entonces para toda función $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ la forma $\psi\omega$ posee diferencial generalizado externo y se cumple la siguiente igualdad*

$$d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega + \psi d\omega.$$

La **Demostración** de este lema se localiza en [2] y aquí se omite.

En la siguiente propiedadllamaremos *región regular* al conjunto conexo con el interior no vacío y con la frontera ya sea vacía o compuesta de un número finito de arcos regulares clase C^∞.

Lema 2 *Si la forma $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ posee diferencial generalizado externo en X, entonces para toda región regular D con clausura compacta y con la frontera ∂D en X es válida la fórmula de Stokes*

$$\iint\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega.$$

Demostración. En el espacio $\mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ se tiene la topología con respecto a la cual el espacio $\mathcal{E}^1(X, T^*(X))$ es siempre denso en $\mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ (ver [1], § 9). Consideremos la sucesión de las formas (ω_n) de $\mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, convergente a la forma $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$ en la topología del espacio $\mathcal{E}^0(X, T^*(X))$. Para toda función $\varphi \in C_0^1(D, \mathbb{R})$ se cumple la identidad $\iint\limits_D d(\varphi\omega_n) = 0$. Abriendo el diferencial del producto, obtenemos

$$\iint\limits_D \varphi d\omega_n = \iint\limits_D \omega_n \wedge d\varphi. \qquad (1)$$

Como ω posee el diferencial generalizado externo, entonces

$$\iint\limits_D \omega \wedge d\varphi = \iint\limits_D \varphi d\omega.$$

Yendo a (1) y calculando el límite cuando $n \to \infty$, tomando en cuenta la última igualdad, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_D \varphi d\omega_n = \iint\limits_D \varphi d\omega.$$

A fuerza de la arbitrariedad de φ, concluimos, que $d\omega_n \to d\omega$ cuando $n \to \infty$.

Como $\omega_n \in \mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, entonces tiene lugar la fórmula de Stokes:

$$\iint\limits_{D} d\omega_n = \int\limits_{\partial D} \omega_n.$$

Calculando en esta fórmula el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la igualdad exigida. El lema queda demostrado.

2. Ecuaciones de Gauss y de Peterson-Codazzi para superficies regulares clase C^2.

Sea D una región regular en la variedad bidimensional X, y $\mathbf{r}\colon X \to E^3$ una C^1-aplicación de la variedad X en el espacio euclidiano tridimensional E^3. Fijando en E^3 un sistema coordenado rectangular cartesiano $0x^1x^2x^3$ con direccionales $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, para cada punto $x \in D$ la imagen $\mathbf{r}(x)$ la consideraremos como el radio-vector del punto correspondiente en E^3. Supongamos que la restricción de la aplicación $\mathbf{r}$ en la región D es una inmersión. En tal caso la imagen $S = \mathbf{r}(D)$ la llamaremos *superficie regular*.

A través de ds^2 representemos la métrica en D, inducida por la inmersión $\mathbf{r}$. En algún entorno de cada punto en D existe un C^1-correper local $\tau = (\tau^1, \tau^2)$, $\tau^1, \tau^2 \in \mathcal{E}^1(X, T^*(X))$, en el cual la métrica ds^2 tiene forma normal: $ds^2 = \tau^1 \otimes \tau^1 + \tau^2 \otimes \tau^2$. Por el correper τ unívocamente se definen las 1-formas $\phi_2^1 = -\phi_1^2$ con las igualdades

$$d\tau^1 = \tau^2 \wedge \phi_2^1, \quad d\tau^2 = \tau^1 \wedge \phi_1^2, \tag{2}$$

llamadas formas de conexión del correper τ. A través $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ representaremos el reper local, dual al correper τ. Suponiendo $\mathbf{e}_1 = \xi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}_2 = \xi_2(\mathbf{r})$, vamos tener un C^1-reper $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en la fibra tangente de la superficie S. Por tanto, es válida la igualdad

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\tau^1 + \mathbf{e}_2\tau^2. \tag{3}$$

Sea $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ el campo de las normales unitarias de la superficie S (aquí el signo $\times$ representa el producto vectorial en E^3). Desarrollando los diferenciales $d\mathbf{e}_1$, $d\mathbf{e}_2$, $d\mathbf{n}$ con los vectores del reper $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ conduce hacia las fórmulas de Gauss:

$$d\mathbf{e}_1 = \phi_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1\mathbf{n}, \quad d\mathbf{e}_2 = \phi_2^1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{n} \tag{4}$$

y la fórmula de Veyngarten

$$d\mathbf{n} = -\omega_1\mathbf{e}_1 - \omega_2\mathbf{e}_2, \tag{5}$$

donde ω_1, ω_2 son 1-formas continuas, llamadas *formas de inmersión*.

Teorema 1 *Las formas de conexión y de inmersión definidas por C^2-inmersión $\mathbf{r}\colon D \to E^3$, en cada punto de D poseen diferencial generalizado externo continuo que satisfacen las ecuaciones de Gauss:*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = K\tau^1 \wedge \tau^2 \tag{6}$$

y de Peterson-Codazzi:

$$d\omega_1 = \phi_1^2 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \phi_2^1 \wedge \omega_1, \tag{7}$$

donde K es una función continua, definida por el desarrollo

$$d\phi_2^1 = K\tau^1 \wedge \tau^2. \tag{8}$$

Demostración. Fijemos un punto arbitrario $x \in D$ y representemos a través de U un entorno coordenado en la variedad X, que contiene a este punto, con clausura compacta y localizada en D. Supongamos que en U esta definido el correper local $\tau = (\tau^1, \tau^2)$, en el cual la métrica ds^2, inducida por la inmersión $\mathbf{r}$ tiene aspecto normal. Sea φ una función arbitraria del $C_0^1(U, \mathbb{R})$ Como el $dd\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, entonces, a fuerza del lema 1, se cumple la igualdad $d(\varphi d\mathbf{e}_i) = d\varphi \wedge d\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2$. En vista de que la integral del diferencial externo de la forma con soporte compacto es igual a cero, entonces de aquí surge, que

$$\iint\limits_U d\varphi \wedge d\mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

En virtud de las fórmulas de Gauss (4), tenemos

$$\iint\limits_U d\varphi \wedge (\phi_2^1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \iint\limits_U d\varphi \wedge (\phi_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1\mathbf{n}) = \mathbf{0}.$$

Introduciendo los campos $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{n}$ bajo el signo del diferencial, podemos escribir

$$\iint\limits_U \big(d(\varphi\mathbf{e}_1) \wedge \phi_2^1 + d(\varphi\mathbf{n}) \wedge \omega_2 - \varphi d\mathbf{e}_1 \wedge \phi_2^1 - \varphi d\mathbf{n} \wedge \omega_2\big) = \mathbf{0},$$

$$\iint\limits_U \big(d(\varphi\mathbf{e}_2) \wedge \phi_1^2 + d(\varphi\mathbf{n}) \wedge \omega_1 - \varphi d\mathbf{e}_2 \wedge \phi_1^2 - \varphi d\mathbf{n} \wedge \omega_1\big) = \mathbf{0}.$$

De las fórmulas de Gauss y Veyngarten (5), las últimas dos igualdades toman la siguiente forma

$$\begin{gathered}\iint\limits_U \big(d(\varphi\mathbf{e}_1) \wedge \phi_2^1 + d(\varphi\mathbf{n}) \wedge \omega_2 - \varphi\mathbf{n}\omega_1 \wedge \phi_2^1 + \varphi\mathbf{e}_1\omega_1 \wedge \omega_2\big) = \mathbf{0},\\ \iint\limits_U (d(\varphi\mathbf{e}_2) \wedge \phi_1^2 + d(\varphi\mathbf{n}) \wedge \omega_1 - \varphi\mathbf{n}\omega_2 \wedge \phi_1^2 + \varphi\mathbf{e}_2\omega_2 \wedge \omega_1) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{9}$$

Supongamos, que el desarrollo de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ por la base ortonormal $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ en E^3 tiene la siguiente forma $\mathbf{e}_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} e_1^\alpha \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{e}_2 = \sum_{\alpha=1}^{3} e_2^\alpha \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{3} n^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Multiplicando las igualdades (9) escalarmente por $\mathbf{a}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad$ vamos tener

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_U \big(d(\varphi e_1^\alpha)\wedge\phi_2^1 + d(\varphi n^\alpha)\wedge\omega_2 - \varphi n^\alpha\omega_1\wedge\phi_2^1 + \varphi e_1^\alpha\omega_1\wedge\omega_2\big) = 0,\\
&\iint\limits_U (d(\varphi e_2^\alpha)\wedge\phi_1^2 + d(\varphi n^\alpha)\wedge\omega_1 - \varphi n^\alpha\omega_2\wedge\phi_1^2 + \varphi e_2^\alpha\omega_2\wedge\omega_1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Para cada índice fijado $\alpha = 1,2,3$ supongamos que en la primera de estas igualdades $\varphi = e_1^\alpha\psi$, donde ψ es una función arbitraria del $C_0^1(U,\mathbb{R})$. Obtenemos tres identidades del siguiente tipo

$$\iint\limits_U \big(d\left(\psi(e_1^\alpha)^2\right)\wedge\phi_2^1 + d\left(\psi e_1^\alpha n^\alpha\right)\wedge\omega_2 - \psi e_1^\alpha n^\alpha\omega_1\wedge\phi_2^1 + \psi(e_1^\alpha)^2\omega_1\wedge\omega_2\big) = 0.$$

Sumando por $\alpha = 1,2,3$, teniendo en cuenta que $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}(e_1^\alpha)^2 = 1$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} e_1^\alpha n^\alpha = 0$, llegamos a la identidad:

$$\iint\limits_U (d\psi\wedge\phi_2^1 + \psi\omega_1\wedge\omega_2) = 0.$$

Según la definición del diferencial generalizado externo, esto significa, que la forma ϕ_2^1 posee diferencial generalizado externo, y se cumple la igualdad

$$d\phi_2^1 = \omega_1\wedge\omega_2. \tag{11}$$

De la continuidad de la parte derecha surge la continuidad de la 2-forma $d\phi_2^1$. Descomponiendo esta forma por la base $\tau^1\wedge\tau^2$ del espacio $\bigwedge^2 T_x^*(X)$, de la (11), obtenemos la ecuación (6).

Si en las igualdades (10) suponer a $\varphi = n^\alpha\psi$, entonces con un análisis análogo se establece, que las formas ω_1 y ω_2 poseen diferencial generalizado externo, y para ellas son válidas las igualdades (7). El teorema queda demostrado.

La función escalar continua K, definida con la descomposición (8), se llama curvatura de Gauss de la superficie $S = \mathbf{r}(D)$.

La derivación externa de la igualdad (3) con la ayuda de la (2) y (4) da que

$$\omega_1\wedge\tau^1 + \omega_2\wedge\tau^2 = 0. \tag{12}$$

Expresemos la descomposición de las formas de inmersión por el correper τ en el modo $\omega_i = b_{i1}\tau^1 + b_{i2}\tau^2, \quad i = 1,2$. De la (12) surge que $b_{12} = b_{21}$. La forma simétrica bilineal $II = \sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij}\tau^i\otimes\tau^j$ se llama segunda forma fundamental de la superficie S. De la (8) y la (11) para la curvatura de Gauss tenemos que $K = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$. De aquí surge que la curvatura de Gauss no varía, si del correper τ^1, τ^2 pasamos a un nuevo correper con la ayuda de la matriz ortogonal de cambio. De la (8) surge, que la curvatura de Gauss unívocamente se define con la métrica ds^2.

Referencias

[1] *De Ram G.* Variedades diferenciables. Moscú. 1956. 250 p.

[2] *Markov P. E.* Sobre la inmersión de las métricas, las cuales están casi inmersas // Ucr. geom. sbornik. 1992. N 35. P. 49– 67.

[3] *Bakelman I. Y.* Geometria diferencial de superficies suaves regulares // Uspeji matem. nauk. 1956. T. 11, N 2(68). P. 67– 124.