

USO DE INTEGRACIÓN SEGÚN GAUSS PARA CALCULAR LA FOTOSÍNTESIS EN MODELOS DE SIMULACIÓN DE CRECIMIENTO DE CULTIVOS¹

DONATUS M. JANSEN²

Resumen

Tres modelos dinámicos y explicativos para calcular la fotosíntesis de cultivos son comparados. Los modelos difieren en la forma de integrar numéricamente la fotosíntesis sobre el tiempo y el dosel: el modelo de Euler usa pasos pequeños y fijos, y los modelos de Goudriaan y adaptado lo hacen con el método de Gauss, seleccionando puntos claves en el intervalo de integración del tiempo y del dosel. El modelo adaptado incluye el efecto del cambio de la temperatura diurna en la fotosíntesis y tiene flexible el número de puntos para la evaluación en el tiempo, cuando el modelo de Goudriaan asume que el efecto de la temperatura es constante y usa tres puntos de evaluación en el tiempo. El comportamiento de los modelos de Goudriaan y adaptado es relacionado al del modelo de Euler por dos condiciones climatológicas (tropical y templado), tres tipos de distribución de la radiación en el día: simétrico, simétrico con picos e intensidad de radiación en la mañana dos veces más grande que en la tarde. Los resultados del modelo adaptado en general tiene una relación ligeramente mejor al modelo de Euler comparado con el modelo de Goudriaan, sugiriendo que el uso de este modelo, con cinco puntos de evaluación en el tiempo, da buenos resultados.

Palabras clave: sistema, modelo dinámico explicativo, integración numérica.

1 Introducción

Las técnicas de análisis de sistemas y de simulación han sido usados por ingenieros técnicos desde ya hace muchos años. Sus logros, con esta forma de reducir la complejidad del mundo real para facilitar el estudio de procesos particulares, han estimulado a biólogos y agrónomos a aplicar técnicas similares en sus investigaciones. Palabras clave en este modo de investigación son: sistemas, modelos y simulación. Un sistema es una parte limitada de la realidad que contiene elementos interrelacionados. Un modelo es una representación

¹Conferencia invitada al IX Simposio *Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias*, celebrado en Turrialba del 15 al 17 de febrero de 1995.

²UNIVERSIDAD DE WAGENINGEN, HOLANDA – CATIE – PROGRAMA ZONA ATLÁNTICA, APTO. 224–7210, GUÁPILES, COSTA RICA

simplificada de un sistema. Simulación se puede definir como el arte de construir modelos matemáticos y el estudio de sus comportamientos en referencia al comportamiento de los sistemas representados por estos modelos (Rabbinge & De Wit, 1989).

Para cualquier sistema se pueden distinguir factores exógenos, o sea, factores que influyen en el comportamiento del sistema sin ser influidos significativamente por éste, y factores endógenos, los que influyen tanto como están siendo influidos por el comportamiento del sistema. El estudio de los procesos, para los cuales los elementos del sistema son interrelacionados, determina cuales factores son exógenos o endógenos. Si el objetivo de un estudio es conocer el crecimiento de un cultivo en el campo, se puede decir que el clima influye en el comportamiento del sistema, pero que no es influido por éste. Al contrario, si el interés es conocer el comportamiento de la vegetación en un continente entero, es claro que el clima sí es influido por cambios en esta vegetación, y que hay que incluir los procesos de interacción entre vegetación y clima en un modelo de simulación para este sistema. En muchos casos se puede decir que un sistema tiene una jerarquía, o sea que el sistema consiste de sub-sistemas, los cuales a su vez consisten de sub-sub-sistemas, etcétera. En el caso del cultivo en el campo se puede reconocer los sub-sistemas de la fotosíntesis, de la conversión de productos de fotosíntesis en materiales estructurales, del desarrollo fisiológico, etcétera. La fotosíntesis se puede subdividir en los sub-sub-sistemas de absorción de luz y en la conversión de energía solar en energía química.

Existen modelos **descriptivos** y modelos **explicativos**. Los primeros describen el comportamiento del sistema en términos de procesos que actúan al mismo nivel que el sistema entero. Un ejemplo es la descripción del crecimiento de un cultivo por medio de una ecuación de regresión de la biomasa contra el tiempo. Esta ecuación no explica el porqué del crecimiento, y para cualquier cambio en las condiciones de crecimiento se deben construir otros modelos, por ejemplo para el crecimiento del mismo cultivo en otros años. Los modelos explicativos describen los procesos de interrelación en al menos un nivel bajo el nivel del sistema entero, o sea en términos de sub-sistemas o niveles aún más bajos en la jerarquía (ver por ejemplo Penning De Vries et al., 1989). Explicando el comportamiento del sistema entero por la interacción de los sub-sistemas, un modelo explicativo se puede utilizar para simular el comportamiento del sistema bajo condiciones diferentes, sin que sea necesario cambiar el modelo.

Otra distinción es entre modelos **dinámicos** y modelos **estáticos**, basada en si simulan el comportamiento del sistema en el curso del tiempo o no. Los modelos dinámicos y explicativos son generalmente escritos mediante el método de la *variable de estado*, asumiendo que a cualquier momento se puede caracterizar el estado del sistema por los valores de algunas variables, y que cambios en estas variables pueden ser descritos por ecuaciones matemáticas. Así, se reconocen tres tipos de variables en modelos dinámicos: de estado, de flujo y de fuerza. Las variables de estado en general son cantidades, como biomasa, número de animales, cantidad de nitrógeno en el suelo, etcétera. Variables de fuerza caracterizan el ambiente en los límites del sistema: lluvia, temperatura del aire encima del cultivo, o inmigración de animales desde lugares que no forman parte del sistema. Las variables de flujo representan la interacción entre los variables de estado, por ejemplo el flujo de carbohidratos desde la reserva en la mata hasta la materia estructural de la mata. En términos matemáticos, estos modelos ejecutan una integración de las variables de flujo en

el tiempo, siendo generalmente en forma numérica por la complejidad de las interacciones entre variables en el sistema:

$$E_{i,t+\Delta t} = E_{i,t} + R_{i,t} \times \Delta t \quad (1)$$

$$R_{i,t} = f(F_{1,t} \dots F_{k,t}, E_{1,t} \dots E_{j,t}) \quad (2)$$

en donde: $E_{i,t}$ = variable de estado i en tiempo t ; $R_{i,t}$ = variable de flujo i en tiempo t ; $F_{i,t}$ = variable de fuerza i en tiempo t ; Δt = intervalo de tiempo en la integración.

Hay varias técnicas para integrar numéricamente: las de Euler, Runge-Kutta, Simpson, el trapezoidal, etcétera. Cuando los flujos (R) son relativamente grandes, o cuando ellos o las variables de fuerza cambian rápidamente, el Δt debe ser (muy) pequeño para minimizar errores en el resultado (E). Procesar modelos grandes entonces tiende a ser muy costoso en términos de tiempo, especialmente si el período total de integración es largo. El famoso matemático Gauss describió una técnica para limitar el número de evaluaciones. En vez de calcular R_i y E_i en todos los pasos $t + \Delta t$, se escogen algunos puntos clave para hacerlo, y, por medio de una ponderación adecuada al $R_{i,t}$, se logra obtener un resultado suficientemente exacto, al menos en situaciones en donde $R_{i,t}$ no es muy influido por el $E_{i,t}$, o sea si no existe mucho ‘feedback’.

En modelos dinámicos y descriptivos para simular el crecimiento de cultivos, el cálculo de fotosíntesis es de suma importancia, ya que la fotosíntesis transforma energía radiante en energía química, produciendo simples estructuras químicas que forman la base para el crecimiento. La tasa de fotosíntesis por unidad de área de hoja, depende fuertemente de la intensidad de radiación que llega a esta hoja. Es claro que, en general, la intensidad de radiación depende del tiempo en el día, siendo la radiación más intensa en horas más cercanas al mediodía comparada con horas más tempranas o más tardes. Pero la intensidad de radiación que llegue a una hoja específica, depende también de la cantidad de hojas entre esta hoja y la fuente de la radiación, causando intensidades de radiación más bajas en áreas más profundas en el dosel. Esta distribución de radiación en el dosel es un proceso complicado (Goudriaan, 1977; Spitters et al., 1986), y por eso, el cálculo de la fotosíntesis diaria necesariamente es descrito en forma numérica. Así resultaron modelos complejos que calculan la fotosíntesis con pasos pequeños en el tiempo, y por cada uno de estos pasos, con pasos pequeños en el dosel. Esto resulta en una larga duración de ejecución de estos modelos para el cálculo del crecimiento de un cultivo durante un ciclo completo (De Wit et al., 1978). Para minimizar la duración del cálculo sin perder mucho de la exactitud, Goudriaan & Van Laar (1978) desarrollaron un modelo más rápido, pero con una descripción de fotosíntesis inescrutible y semi-empírica, limitando las posibilidades de adaptar el modelo y sus parámetros a condiciones diferentes (por ejemplo para simular el crecimiento tanto de un cultivo como sus malezas). El potencial del método de Gauss para la integración de la fotosíntesis tanto en el tiempo como en el dosel fue descrito por Goudriaan (1986), y un modelo muy evidente y adaptable usando este método para el cálculo de la fotosíntesis diaria de un dosel fue usado entre otros por Spitters (1986), Spitters et al. (1989) y Penning De Vries et al. (1989). En este modelo (aquí llamado el *modelo de Goudriaan*), el efecto de la temperatura es descrito en una forma rudimentaria: se asume que solamente el promedio de la temperatura diurna afecta la capacidad fotosintética. Esta parece ser una falla en

estos modelos, porque en general la temperatura del aire fluctúa en el día, posiblemente causando otra tasa de fotosíntesis en la mañana que en la tarde, aún cuando la radiación esté igual. Aquí se pretende investigar el comportamiento de un modelo que incorpora el efecto de la temperatura (*modelo adaptado*) para ver si éste calcula mejor la fotosíntesis. La base de comparación es formada por los resultados de un modelo de integración según Euler ('modelo de Euler'), con pasos pequeños en el tiempo y en el dosel.

2 Materiales y métodos

2.1 Integración numérica según Gauss

En el método de integración según Gauss, puntos clave son elegidos en el intervalo de integración. En cada uno de estos puntos, se evalúa la función que debe ser integrada. El resultado para cada punto es multiplicado por un factor de ponderación, y la suma de estos resultados ponderados es el resultado total de la integración. Hay varias formas de elegir los puntos y sus ponderaciones, y aquí se ha seleccionado el método de Gauss-Legendre descrito por Press et al. (1986, capítulo 4.5). En este método, la ponderación es más fuerte para los puntos más cercanos al centro del intervalo de integración.

2.2 Los modelos

Todos los modelos discutidos en esta presentación tienen la misma estructura (Figura 1), y solamente difieren en la forma de integración y en la forma de estimar los parámetros de fotosíntesis. Los pasos consecutivos (la numeración siguiendo la presentada en la Figura 1) en los modelos son:

A. **Seleccionar el día:** para esta presentación, los modelos son evaluados para todos los días en el año 1986, con datos climatológicos de los estaciones de Los Diamantes (Guápiles, Costa Rica, con latitud $10^{\circ}N2'$) y Wageningen (Holanda, con latitud $52^{\circ}N0'$).

1. Por cada día, se leen los datos de **temperatura máxima** ($T_{x,d}$), **temperatura mínima** ($T_{n,d}$) y de la **radiación total** ($R_{T,d}$). Aunque en los modelos se usa la distribución diurna de la radiación, y, en algunos casos, de la temperatura, son muy pocas las estaciones climatológicas que tienen este tipo de observaciones. Para facilitar el uso de los modelos en escala más amplia, es necesario que se puedan usar los datos disponibles.
2. **Seleccionar el tiempo en el día:** se debe calcular e integrar la fotosíntesis para el período en que hay radiación visible, o sea, de sol a sol. La duración de cada día (D_d) en el año es calculada dependiendo de la latitud del lugar (Goudriaan, 1977). Las horas de salida ($S_{s,d}$) y de puesta ($S_{p,d}$) de sol en cada día (d) se pueden definir en horas solares como:

$$S_{s,d} = 12 - 0.5 \times D_d \quad (3)$$

$$S_{p,d} = 12 + 0.5 \times D_d \quad (4)$$

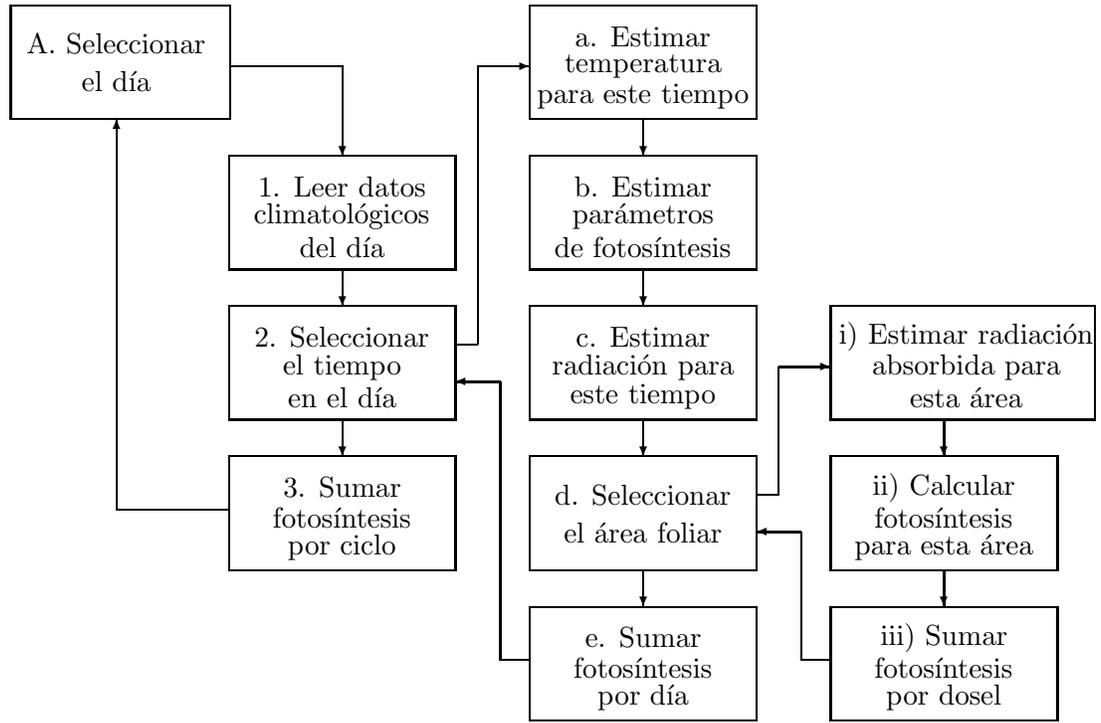


Figura 1: Estructura de los modelos.

En el modelo de Euler, la integración en el período entre $S_{s,d}$ y $S_{p,d}$ es hecha con pasos fijos de 0.05 horas, resultando en 240 puntos (i) para evaluar el modelo, si D_d es 12 horas.

En los modelos que usan el método de Gauss, los puntos en el tiempo para calcular la fotosíntesis son calculados con:

$$t_i = 12 + 0.5 \times D_d \times d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

En el modelo de Goudriaan, con $n = 3$, se asume que el curso de la radiación es simétrico en el día, y que el efecto de la temperatura en los parámetros de la fotosíntesis es constante durante el día. Por ésto, los tres puntos de evaluación están todos ubicados en el intervalo de mediodía hasta S_p . Los valores de d_i se calculan con:

$$d_i = 0.5 + p_i \times (0.15)^{1/2} \quad p_i = -1, 0, 1. \quad (6)$$

En el modelo adaptado, no se asume nada *a priori* sobre el curso en el tiempo de la temperatura. Por ésto, se deben elegir puntos antes y después del mediodía. Si hay cambios grandes en la radiación y/o en la temperatura durante el día, el uso de tres puntos no necesariamente es suficiente para calcular correctamente la fotosíntesis.

Entonces, el modelo es evaluado para un rango de puntos (n), variando entre 3 y 10. Los valores de d_i usados se encuentran en la Tabla 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	-0.3873	0	0.3873							
4	-0.4306	-0.1700	0.1700	0.4306						
5	-0.4531	-0.2692	0	0.2692	0.4531					
6	-0.4662	-0.3306	-0.1193	0.1193	0.3306	0.4662				
7	-0.4746	-0.3708	-0.2029	0	0.2029	0.3708	0.4746			
8	-0.4801	-0.3393	-0.2628	-0.0917	0.0917	0.2628	0.3983	0.4801		
9	-0.4841	-0.4180	-0.3067	-0.1621	0	0.1621	0.3067	0.4180	0.4841	
10	-0.4870	-0.4325	-0.3397	-0.2167	-0.0744	0.0744	0.2167	0.3397	0.4325	0.4870

Tabla 1: Valores de d_i en la ecuación 7, dependiendo del número de puntos de evaluación para la integración según Gauss, calculados según Press et al. (1986, capítulo 4.5).

- a. **Estimar temperatura por cada tiempo en el día:** en el modelo de Goudriaan, se asume que es suficiente usar el promedio de la temperatura diurna, lo cual se puede estimar como (Spitters et al., 1989):

$$T_{i,d} = T_{x,d} - 0.25 \times (T_{x,d} - T_{n,d}) \quad (7)$$

En los modelos de Euler y adaptado, se estiman la temperatura en relación con el tiempo en el día (Figura 2), asumiendo que $T_{n,d}$ ocurre a la hora de la salida del sol ($t_{s,d}$), $T_{x,d}$ a las 13 ($t_{x,d}$), y la temperatura mínima del siguiente día a $t_{s,d} + 24(t_{s,d+1})$: si $t_{i,d} \leq t_{x,d}$:

$$T_{i,d} = T_{n,d} + (T_{x,d} - T_{n,d}) \times \text{sen}(0.5 \times \pi \times (t_{i,d} - t_{s,d}) / (t_{x,d} - t_{s,d})) \quad (8)$$

si $t_{i,d} > t_{x,d}$:

$$T_{i,d} = T_{x,d} + (T_{s,d+1} - T_{x,d}) \times \text{sen}(0.5 \times \pi \times (t_{i,d} - t_{x,d}) / (t_{s,d+1} - t_{x,d})) \quad (9)$$

- b. **Estimar parámetros de fotosíntesis:** la tasa de fotosíntesis bruta por área de hoja en relación con la radiación y la temperatura se puede describir con (Spitters, 1986):

$$F_{i,d} = F_{x,i,d} \times (1 - \exp(-\varepsilon_{i,d} \times R_{a,i,d} / F_{x,i,d})) \quad (10)$$

$$F_{x,i,d} = F_x \times f_1(T_{i,d}) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{i,d} = \varepsilon_x \times f_2(T_{i,d}) \quad (12)$$

con F = fotosíntesis bruta ($kg CO_2 ha^{-1} hora^{-1}$); ε = eficiencia de uso de radiación ($kg CO_2 ha^{-1} hora^{-1} (Jm^{-2}s^{-1})^{-1}$); R_a = radiación visible absorbida por la hoja ($Jm^{-2}s^{-1}$); T = Temperatura ($^{\circ}C$); i,d = tiempo i en día d ; x = máximo por cultivo.

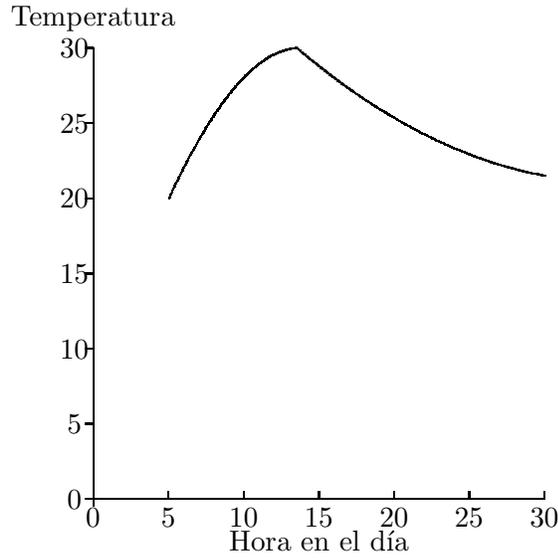


Figura 2: Estimación del curso de la temperatura ($^{\circ}\text{C}$) en el día, con $T_{n,d} = 20$ a $t_{n,d} = 5:00$ a.m.; $T_{x,d} = 30$ a $t_{x,d} = 13:00$ p.m.; $T_{n,d+1} = 22$ a $t_{n,d+1} = 5:00$ a.m. del próximo día

Las funciones f_1 y (parcialmente) f_2 difieren por cultivo, y por la historia del cultivo (si creció en condiciones frías o calientes). Para este estudio, se asumen las siguientes relaciones:

$$F_{x,i,d} = F_x \times (\alpha \times (T_{i,d})^3 + \beta \times (T_{i,d})^2 + \chi \times (T_{i,d}) + \delta) \text{ y } F_{x,i,d} \geq 0. \quad (13)$$

$$\varepsilon_{i,d} = \varepsilon_x \times (1 - 1/(1 + \exp(-\gamma \times (T_{i,d} - \tau)))) \text{ y } \varepsilon_{i,d} \geq 0. \quad (14)$$

La Tabla 2 demuestra los parámetros usados por las evaluaciones bajo las condiciones de Los Diamantes (trópico) y Wageningen (templado), resultando en las curvas de F_x y ε contra la temperatura de Figura 3. Así, bajo las mismas temperaturas, la fotosíntesis de un cultivo en Los Diamantes responde significativamente diferente a la radiación en comparación con un cultivo en Wageningen (Figura 4).

clima	α	β	χ	δ	γ	τ	F_x	ε_x
tropical	-6.89E-5	2.31E-3	7.13E-2	-1.37	0.185	32.23	40	0.5
templado	-6.96E-5	2.84E-4	9.60E-2	-0.49	0.185	32.23	40	0.5

Tabla 2: Parámetros usados en el cálculo del efecto de la temperatura en la fotosíntesis (basado en datos de Penning de Vries et al., 1989).

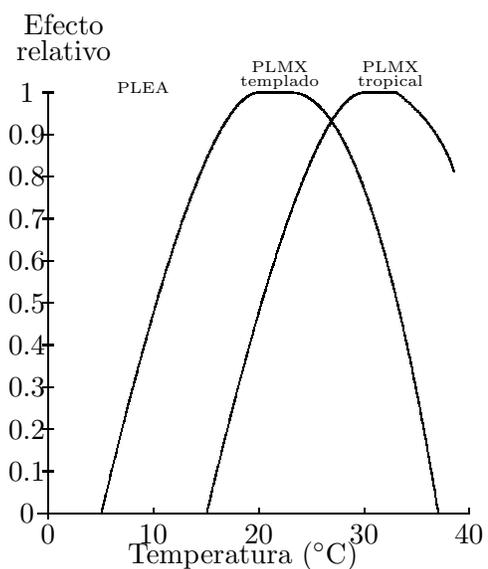


Figura 3: Efectivo relativo de la temperatura en los parámetros PLMX y PLEA en la ecuación $PHOT = PLMX \times (1 - \exp(-PLEA \times RAD/PLMX))$.

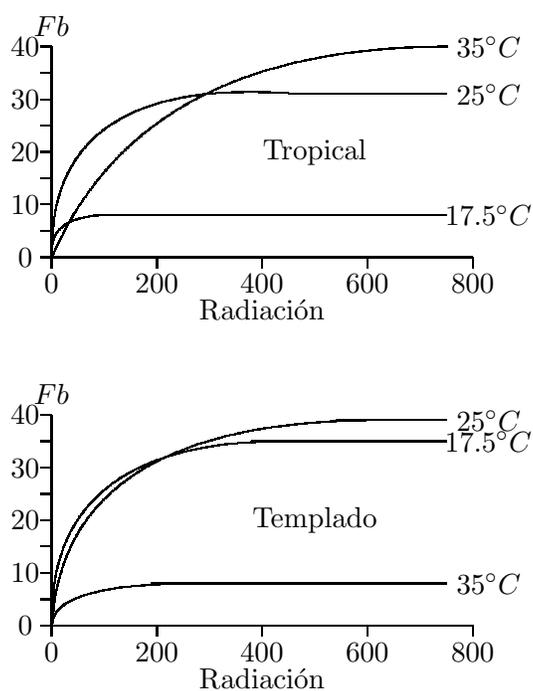


Figura 4: Relación entre la fotosíntesis bruta ($F_b; kgCO_2ha^{-1}hora^{-1}$) y radiación visible ($Jm^{-2}s^{-1}$), para varias temperaturas.

- c. **Estimar la radiación por cada tiempo en el día:** por tener solamente el total de la radiación por día, no se conoce el curso de la radiación durante el día. En los modelos de Gauss y adaptado, se asume que la distribución de la radiación es simétrica en el día, siguiendo el curso de la radiación que llega a la cima de la atmósfera (calculada según Spitters et al., 1986). Así se asume, en efecto, que la transmisión relativa en la atmósfera es constante durante el día. Se sabe que esta hipótesis no es correcta, y que frecuentemente la radiación fluctúa. Esta fluctuación puede resultar en una distribución asimétrica de la radiación en el día, como es el caso de cuando en las mañanas hay sol y en la tardes lluvia (lo cual ocurre en muchos climas tropicales húmedos). También puede ser que haya fluctuaciones más rápidas, sin que necesariamente la distribución en el día sea asimétrica. Para investigar el efecto que esta fluctuación tiene en el cálculo de la fotosíntesis, el modelo de Euler es evaluado para las siguientes situaciones, para todos los días en el año (Figura 5): con la misma distribución de la radiación que en los modelos de Gauss y adaptado (o sea ‘simétrico’); con la radiación en la mañana dos veces más que la radiación en la tarde (conservando el total de la radiación diurna; o sea ‘mañana/tarde’); y con la radiación con un paso de integración a 25% de la calculada en la Simétrica mientras en el paso siguiente se suman los 75% que quedan (o sea ‘Picos’). La radiación entrando al dosel es separada en radiación directa (R_{dr}) y radiación difusa (R_{df}), según el método descrito por Spitters et al. (1986).
- d. **Seleccionar el área foliar:** en esta presentación el área foliar total (L_t) es fijada en $5m^2$ de hoja por m^2 de suelo. En el modelo de Euler, el dosel es compartido en partes L_j , con pasos (dL) de $0.1m^2m^{-2}$, contando desde la cima del dosel, llegando así a 50 puntos de evaluación de la fotosíntesis para cada tiempo t_i . En los modelos de Gauss y adaptado, tres puntos en el dosel son elegidos, con L_1 lo más cerca de la cima del dosel:

$$L_j = (0.5 + p_j \times (0.15)^{1/2}) \times L_t \quad p_j = -1, 0, 1 \quad (15)$$

- i. **Estimar radiación absorbida por área foliar L_j :** la distribución de radiación en el dosel es determinada por la intensidad de radiación llegando a la cima del dosel y los coeficientes de extinción para radiación directa y difusa. Estos coeficientes dependen parcialmente de la estructura del dosel, por ejemplo de la distribución de los ángulos de las hojas (Goudriaan, 1977). Para tomar en cuenta estos aspectos, el dosel se debe diferenciar en el área bajo la sombra y el área expuesta a la radiación directa, calculando la absorción de radiación para estos grupos como (Spitters, 1986):

$$R_{s,a,j,i,d} = R_{df,a,j,i,d} + (R_{dr,a,j,i,d} - R_{dr,dr,a,j,i,d}) \quad (16)$$

$$R_{e,a,j,i,d} = R_{s,a,j,i,d} + (1 - \sigma) \times k_b \times R_{dr,0,i,d} \quad (17)$$

$$R_{df,a,j,i,d} = (1 - \rho) \times R_{df,0,i,d} \times k_{df} \times \exp(-k_{df} \times L_j) \quad (18)$$

$$R_{dr,a,j,i,d} = (1 - \rho) \times R_{dr,0,i,d} \times (1 - \sigma)^{1/2} \times k_b \times \exp(-(1 - \sigma)^{1/2} \times k_b \times L_j) \quad (19)$$

$$R_{dr,dr,a,j,i,d} = (1 - \sigma) \times R_{dr,0,i,d} \times k_b \times \exp(-(1 - \sigma)^{1/2} \times k_b \times L_j) \quad (20)$$

Figura 5: Radiación visible potencial durante el día comparada con la actual en los tres tipos de distribución: simétrica sin picos, simétrica con picos, y radiación en la mañana dos veces más grande que en la tarde (para 1/1/1986 en los Diamantes).

en donde: R =intensidad de radiación visible ($Jm^{-2}s^{-1}$); k = coeficiente de extinción; σ = coeficiente de diseminación; ρ = coeficiente de reflexión; L =área foliar ($m^{-2}m^{-2}$); s = para hojas bajo sombra; e = para hojas expuestas a radiación directa; a = absorbida; dr = directa; df = difusa; b = para hojas 'negras'; 0 = a la cima del dosel; j = para paso j en la integración por área foliar; i = para paso i en la integración por el tiempo; d = para día d

- ii. **Calcular la fotosíntesis por área:** siguiendo Spitters (1986), se calcula la fotosíntesis de hojas que solamente reciben radiación difusa (o sea, hojas bajo sombra) con:

$$F_{s,j,i,d} = F_{x,i,d} \times (1 - \exp(-\varepsilon_{i,d} \times R_{s,a,j,i,d}/F_{x,i,d})) \quad (21)$$

Para hojas expuestas a la radiación directa el cálculo es más complejo porque debe tomar en cuenta el efecto de la distribución del ángulo de inclinación de las hojas y el ángulo de la radiación directa:

$$F_{e,j,i,d} = F_{x,i,d} \times [1 - (F_{x,i,d} - F_{s,j,i,d}) \times \frac{1 - \exp(-\varepsilon_{i,d} \times R_{l,dr,a,j,i,d}/F_{x,i,d})}{\varepsilon_{i,d} \times R_{l,dr,a,j,i,d}}] \quad (22)$$

con

$$R_{l,dr,a,j,i,d} = (1 - \sigma) \times R_{dr,0,i,d} / \text{sen}(\beta_{i,d}) \tag{23}$$

en donde: β = elevación solar.

La fotosíntesis total por unidad de área foliar se calcula como el promedio ponderado de la fotosíntesis de los dos tipos de hojas:

$$F_{j,i,d} = f_{e,j} \times F_{e,j,i,d} + (1 - f_{e,j}) \times F_{s,j,i,d} \tag{24}$$

tomando en cuenta la proporción de hojas expuestas a radiación directa:

$$f_{e,j} = \exp(-k_b \times L_j) \tag{25}$$

- iii. **Sumar fotosíntesis por dosel:** en el modelo de Euler, la integración de la fotosíntesis sobre el dosel es simplemente la suma de todos los $F_{j,i,d}$ multiplicada por el paso de integración (dL_j):

$$F_{i,d} = \sum F_{j,i,d} \times dL_j \tag{26}$$

En los modelos de Goudriaan y adaptado, hay que calcular un factor de ponderación para cada paso de integración (W_j en la Tabla 3):

$$F_{i,d} = L_t \times \sum F_{j,i,d} \times W_j \quad j = 1, 2, 3 \tag{27}$$

n	<i>i ó j</i>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.2778	0.4444	0.2778							
4	0.1739	0.3261	0.3261	0.1739						
5	0.1185	0.2393	0.2844	0.2393	0.1185					
6	0.0857	0.1804	0.2340	0.2340	0.1804	0.0857				
7	0.0647	0.1399	0.1909	0.2090	0.1909	0.1399	0.06474			
8	0.0506	0.1112	0.1569	0.1813	0.1813	0.1569	0.1112	0.0506		
9	0.0406	0.0932	0.1303	0.1562	0.1651	0.1562	0.1303	0.0932	0.0406	
10	0.0333	0.0747	0.1095	0.1346	0.1478	0.1478	0.1346	0.1095	0.0747	0.0333

Tabla 3: Factores de ponderación para la integración Gauss (W para cada i o j en ecuaciones 27 y 29), en dependencia del número de puntos de evaluación (n), calculado según Press et al. (1986, capítulo 4.5).

- e. Sumar fotosíntesis por día: en el modelo de Euler, se suman los valores de $F_{i,d}$ por todos los i , tomando en cuenta el paso de integración en el tiempo (dt_i):

$$F_d = \sum F_{i,d} \times dt_i \quad i = 1, \dots, m \tag{28}$$

En los modelos de Goudriaan y adaptado, de nuevo se calcula un factor de ponderación para cada paso de integración (W_i en la Tabla 3):

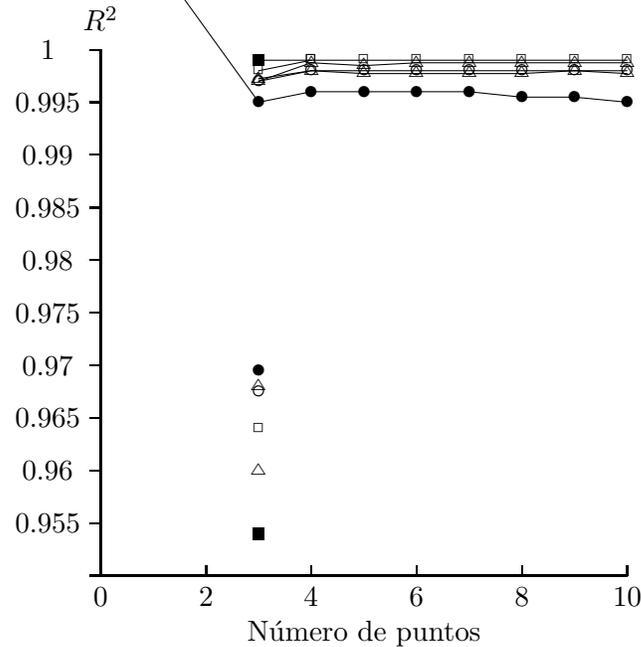
$$F_d = D_d \times \sum F_{i,d} \times W_i \quad i = 1, \dots, n \tag{29}$$

3. **Sumar la fotosíntesis por ciclo:** cuando la fotosíntesis total de un día (F_d) es calculada, se suma este sobre el ciclo total del cultivo para obtener la fotosíntesis total:

$$F = \sum F_d \quad (30)$$

3 Resultados

El comportamiento del modelo adaptado se relaciona mucho con el modelo de Euler cuando la distribución de la radiación es tomada como simétrica en el día: comparando los resultados para todos los días con regresión lineal, se obtiene un R^2 mayor a 0.99, ligeramente influido por el número de puntos (Figura 6). El modelo de Goudriaan tiene una relación poco menos fuerte con el modelo de Euler, con un R^2 alrededor de 0.96. Comparado con el modelo de Euler en donde la radiación es en picos, o en la mañana dos veces más grande que en la tarde, los R^2 son un poco menores, pero todavía más alto que 0.95.



símbolos cerrados: tropical, símbolos abiertos: templado, con línea: efecto de temperatura incluido, sin línea: original de Goudriaan, cuadros: simétrico, triángulos: mañana/tarde, círculos: picos.

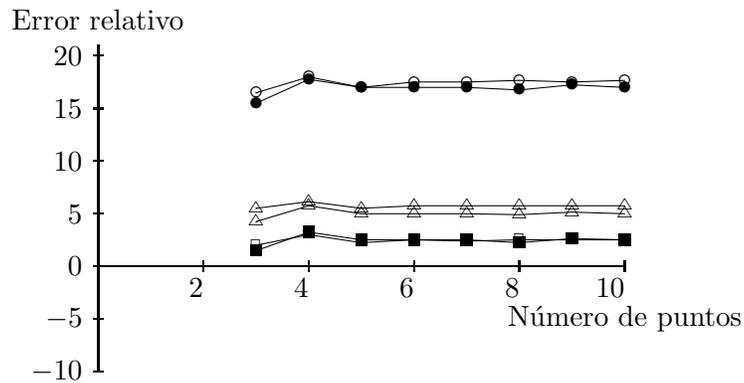
Figura 6: Similitud de integración de Gauss con la de Euler expresada en el coeficiente R^2 entre ambas, en relación con el número de puntos en la de Gauss, usando los 365 días de 1986.

Aunque los R^2 son bastante altos, esto no dice que el modelo calcula bien la fotosíntesis: puede ser que continuamente la subestime o sobreestime. Para comparar los modelos diferentes, se ha calculado el error relativo ($E_{R,m}$) para los modelos de Goudriaan y adaptado como

$$E_{R,m} = 100 \times (F_m - F_E) / F_E \tag{31}$$

en donde m = indicación para modelo de Goudriaan o adaptado; E = modelo de Euler; F = fotosíntesis total por ciclo (en este caso es para el año 1986).

Cuando se puede asumir que la radiación es distribuida en forma simétrica en el día, el modelo adaptado tiene un error relativo alrededor de 2.5% (ligeramente influido por el número de puntos de integración; Figura 7), y el modelo entonces sobreestima ligeramente la fotosíntesis. Esto es independiente del clima: el error es más o menos igual en los climas tropical y templado. Para el trópico, el modelo de Goudriaan igualmente sobreestima la fotosíntesis, pero para el clima templado, la subestima (en un 7%). Cuando la radiación es dos veces más grande en la mañana que en la tarde, el error relativo del modelo adaptado es más grande (un 5%), mientras que para el modelo de Goudriaan disminuye, al menos para el clima templado. Cuando en todos los días la radiación es en picos, el error del modelo adaptado tanto para el clima tropical como para el clima templado es alrededor de 17.5%, igual al error del modelo de Goudriaan para el clima tropical. Para el clima templado el error del modelo de Goudriaan es un 7%.



símbolos cerrados: tropical, símbolos abiertos: templado, con línea: efecto de temperatura incluido, sin línea: original de Goudriaan.

Figura 7: Error relativo de la integración de Gauss respecto a la de Euler calculado como $100 \times \frac{S_{Gauss} - S_{Euler}}{S_{Euler}}$ con S indicando la suma de la fotosíntesis por todo el año, en relación con el número de puntos en la integración de Gauss.

4 Discusión y conclusiones

Aunque generalmente ocurren fluctuaciones en intensidad de radiación durante el día, la situación “picos”, en donde todos los días tienen fluctuaciones rápidas y grandes, no ocurrirá en realidad. El error de los modelos de Goudriaan y adaptado bajo estas condiciones se puede ver como el máximo error que puede surgir del uso de la integración de Gauss. En otras situaciones, el error por la integración de Gauss es pequeño, y el uso de esta forma de integración es preferido sobre otras formas de integración numérica que necesitan más tiempo de la computadora. El hecho que la integración Gauss tiende a sobreestimar la fotosíntesis cuando no se toma en cuenta las fluctuaciones durante el día también fue observado por Spitters (1986), quien sugirió que el uso de la hipérbola rectangular (ecuación 32) podría mejorar el comportamiento del modelo:

$$F = F_x \times (\varepsilon \times R_a / (\varepsilon \times R_a + F_x)) \quad (32)$$

Los resultados del modelo de Goudriaan son diferentes de los del modelo adaptado, porque el modelo de Goudriaan no toma en cuenta el cambio de la temperatura en el día. El efecto de esta omisión es diferente en un clima tropical comparado con un clima templado. El error del modelo adaptado es más predecible, y no difiere mucho entre condiciones tropicales y templadas. Por esto, parece mejor usar el modelo adaptado en vez del modelo de Goudriaan en modelos que intentan calcular la fotosíntesis de cultivos en climas diferentes. En el modelo adaptado, el número de puntos en la integración sobre el tiempo del día influye parcialmente en el error del modelo comparado con el modelo de integración según Euler. Con más de cinco puntos no se observa mucho mejoramiento en términos del error relativo, ni en el R^2 , y se sugiere que cinco puntos son suficientes para obtener buenos resultados.

Referencias

- [1] De Wit, C.T.; Goudriaan, J.; Van Laar, H.H.; Penning De Vries, F.W.T.; Rabbinge, R.; Van Keulen, H.; Louwerse, W.; Sibma, L. & De Jonge, C. (1978) *Simulation of assimilation, respiration and transpiration of crops*. Pudoc, Wageningen, 141 pp.
- [2] Goudriaan, J. (1977) *Crop micrometeorology: a simulation study*. Pudoc, Wageningen, 257 pp.
- [3] Goudriaan, J. (1986) “A simple and fast numerical method for the computation of daily totals of crop photosynthesis”, *Agricultural and Forest Meteorology* 38: 249-254.
- [4] Goudriaan, J. & Van Laar, H.H. (1978) “Calculation of daily totals of the gross assimilation of leaf canopies”, *Netherlands Journal of Agricultural Science* 26: 373-382.
- [5] Penning De Vries, F.W.T.; Jansen, D.M.; Ten Berge, H.F.M. & Bakema, A. (1989) *Simulation of ecophysiological processes of growth in several annual crops*. IRRI, Los Baños & Pudoc, Wageningen, 271 pp.

- [6] Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukolsky, S.A.; & Vetterling, W.T. (1986) *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 818 pp.
- [7] Rabbinge, R. & De Wit, C.T. (1989) "Systems, models and simulation". In: R. Rabbinge, S.A. Ward & H.H. Van Laar (eds.), *Simulation and systems management in crop protection*. Pudoc, Wageningen, pp. 3-15.
- [8] Spitters, C.J.T.; Toussaint, H.A.J.M. & Goudriaan, J. (1986) "Separating the diffuse and direct component of global radiation and its implications for modeling canopy photosynthesis. Part I. Components of incoming radiation", *Agricultural and Forest Meteorology* 38: 217-229.
- [9] Spitters, C.J.T. (1986) "Separating the diffuse and direct component of global radiation and its implications for modeling canopy photosynthesis. Part II. Calculation of canopy photosynthesis", *Agricultural and Forest Meteorology* 38: 231-242.
- [10] Spitters, C.J.T.; Van Keulen, H. & Van Kraalingen, D.W.G. (1989) "A simple and universal crop growth simulator: SUCROS 87". In: R. Rabbinge, S.A. Ward & H.H. Van Laar (eds.), *Simulation and systems management in crop protection*. Pudoc, Wageningen, pp. 147-181.