Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(2): 87–95 (1995)

ALGUNOS ASPECTOS DE MORFISMOS K-FINITOS EN TOPOS ELEMENTALES

Osvaldo Acuña[1]

Resumen

En este artículo se estudian condiciones para que un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en un topos E sea K–finito. Se construyen algunos contraejemplos.

Abstract

In this paper we study conditions under which morphims $f\colon X \longrightarrow Y$ are K–finite in a topos E. We construct some counterexamples.

1 Introducción

En el presente artículo probamos que un morfismo $f\colon Y \longrightarrow X$ de un topos elemental E es K–finito si Y es un objeto K–finito y X es decidible. Se dan contraejemplos mostrando que las hipótesis, tanto de K–finito para Y como decidible para X, son necesarias. En el proceso de encontrar uno de los contraejemplos se prueba un interesante teorema que dice: si $Y \subseteq X \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} Z$ es un coproducto fibrado de la inclusión de un subobjeto Y en X, entonces $\pi = [\pi_1, \pi_2]\colon X + X \longrightarrow Z$ es K–finito si y sólo si Y tiene complemento en X. También se caracterizan los monomorfismos K–finitos en E.

El lector no familiarizado con la teoría de los topos, puede pensar que un topos E es una categoría generalizada de conjuntos donde, subconjuntos de conjuntos dados no poseen necesariamente complementos. Un excelente libro sobre el tema es, por ejemplo, el libro de P. T. Johnstone [3].

Como en conjuntos, todo topos E posee un lenguaje en el que podemos hacer afirmaciones sobre morfismos y objetos de E; más aún, podemos probar teoremas y dar definiciones sobre ellos en E. Esta lógica asociada a un topos es de carácter intuicionístico; en particular el axioma del tercero excluido no es necesariamente válido.

Cuando usemos el lenguaje del topos E, pondremos el símbolo "$\models$" al frente de nuestras deducciones y definiciones.

[1] Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

2 Desarrollo

Definición 1 Una categoría E es llamada un topos elemental si:

(i) E tiene todos los límites finitos. (Esto es equivalente a decir que E tenga productos fibrados y objeto terminal 1).

(ii) E es cartesianamente cerrada, es decir para cada objeto X de E tenemos un functor exponencial $(-)^X: E \longrightarrow E$, el cual es adjunto derecho del functor $(-) \times X: E \longrightarrow E$.

(iii) E tiene un clasificador de subobjetos, es decir un objeto Ω y un morfismo $t: 1 \longrightarrow \Omega$ (llamado verdad) tal que para cada monomorfismo $\sigma: Y \longrightarrow X$ en E, existe un único morfismo $\chi_\sigma: X \longrightarrow \Omega$ (la función clasificadora o característica de σ) tal que:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi_\sigma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, 1 es el objeto terminal de E.

Observación Si E es un topos y X un objeto de E, sea E/X la categoría cuyos objetos son los morfismos $h: Y \longrightarrow X$ y cuyos morfismos son los triángulos conmutativos de la forma:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & Y' \arrow[dl, "h'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Entonces E/X es un topos también.

Nota

(a) Si $\sigma: Y \longrightarrow X$ es un monomorfismo en E y $\chi_\sigma: X \longrightarrow \Omega$ es la función característica de σ. Entonces como $1 \times X \simeq X$, podemos suponer que $\chi_\sigma: 1 \times X \longrightarrow \Omega$. Por lo tanto, por la propiedad (ii) de la definición de un topos, $\chi_\sigma: 1 \times X \longrightarrow \Omega$ corresponde a un único morfismo $1 \longrightarrow \Omega^X$, el cual denotamos por $\ulcorner \sigma \urcorner$ o simplemente $\ulcorner Y \urcorner$ cuando no hay ambigüedad.

(b) Denotemos por ϕ el objeto inicial de E, es claro que para todo X objeto de E existe un único morfismo $\phi \longrightarrow X$, el cual es monomorfismo.

(c) Sea $X_\triangle: X \times X \longrightarrow \Omega$ la función característica de la diagonal $\triangle: X \longrightarrow X \times X$. $\chi_\triangle$ corresponde a un único morfismo $X \longrightarrow \Omega^X$, que denotamos por $\{\cdot\}_X: X \longrightarrow \Omega^X$.

Definición 2 Sea E un topos.

(a) Si X es un objeto de E, denotemos por $K(X)$ el subobjeto más pequeño de Ω^X que satisface las siguientes propiedades:

  (i) $\{\cdot\}_X : X \longrightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X)$ o equivalentemente $\models x \in X \Longrightarrow \{\cdot\}_X(x) = \{x\}_X \in K(X)$.

  (ii) $\ulcorner\phi\urcorner : 1 \longrightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X)$ o simplemente $\models \ulcorner\phi\urcorner \in K(X)$.

  (iii) $\models a, b \in K(X) \Longrightarrow a \cup b \in K(X)$, es decir $K(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

(b) X objeto de E se dice ser K–finito si $\ulcorner X\urcorner : 1 \longrightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X)$ o equivalentemente $\models \ulcorner X\urcorner \in K(X)$.

(c) Un morfismo $f : Y \longrightarrow X$ se dice ser K–finito si f es un objeto K–finito de E/X.

(d) Un objeto X de E es decidible si la diagonal $\triangle : X \longrightarrow X \times X$ tiene complemento en $X \times X$ o equivalentemente

$$\models x, y \in X \Longrightarrow x = y \vee x \neq y.$$

Nota Como en la parte (a) de la definición anterior podemos definir $K^+(X)$ como al subobjeto más pequeño de Ω^X que satisface únicamente (i) y (iii) de la parte (a) de la definición 2.

Es conocido (proposición 6.3 de [2]) que

$$1 \underset{\ulcorner\phi\urcorner}{\rightarrowtail} K(X) \leftarrowtail K^+(X)$$

es un diagrama de coproducto, $K^+(X)$ es claramente un subobjeto de $K(X)$.

Proposición 1 Sean $f : Y \longrightarrow X$ un morfismo de un topos E, Y objeto K–finito y X objeto decidible de E. Entonces f es un morfismo K–finito de E.

Prueba Considere el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^X \arrow[r, "f^{-1}"] & \Omega^Y & \\
X \arrow[ur, "\{\cdot\}_X"] \arrow[r] & 2^X \arrow[u] \arrow[r] & 2^Y \arrow[u] \arrow[r] & K(Y) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

El triángulo a la izquierda conmuta porque es X decidible (proposición 3.3. de [1]), el triángulo a la derecha conmuta, ya que Y es K–finito (proposición 3.1 de [1]) y el rectángulo central conmuta por propiedades básicas de f^{-1}. Por lo tanto $f^{-1} \circ \{\cdot\}$ se factoriza a través de $K(Y)$ y por el Teorema 3.28 de [1], f es K–finito. □

Proposición 2 Sea $i\colon X' \rightarrowtail X$ es un monomorfismo en un topos E. Entonces i es un morfismo K–finito si y sólo si $i\colon X' \rightarrowtail X$ como subobjeto de X tiene complemento.

Prueba
($\Longleftarrow$) Si $i\colon X' \rightarrowtail X$ tiene complemento $j\colon Y' \rightarrowtail X$ entonces en el topos E/X, 1_X (objeto terminal de E/X) es la suma directa de i con j, como 1_X es K–finito, la proposición 3.3 de [1] garantiza que i es K–finito en E/X, es decir $i\colon X' \longrightarrow X$ es un morfismo K–finito.
($\Longrightarrow$) Sea $i\colon X' \longrightarrow X$ monomorfismo K–finito. Considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "\{\cdot\}_{X'}"'] \arrow[d, "i"'] & & K^+(X') \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\{\cdot\}_X"'] & \Omega^X \arrow[r, "i^{-1}"'] & K(X') \\
Y' \arrow[u, "j"] \arrow[rr] & & 1 \arrow[u, "\ulcorner\emptyset\urcorner"']
\end{tikzcd}$$

j está definido en el producto fibrado del rectángulo inferior. Como i es K–finito $i^{-1} \circ \{\cdot\}_X$ se factoriza a través de $K(X')$. El rectángulo superior es claramente conmutativo, más aún es un producto fibrado, ya que si el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & & K^+(X') \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\{\cdot\}_X"'] & \Omega^X \arrow[r, "i^{-1}"'] & K(X')
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces

$$\models \forall_{z\in Z}\ h_2(z) = i_1^{-1}(\{h_1(z)\}) = \{y \in X'/i(y) = h_1(z)\}.$$

Como $\models \forall_{z\in Z}\ h_2(z) \neq^{\ulcorner} \phi^{\urcorner}$ e i es un monomorfismo, tenemos que existe un único morfismo $t\colon Z \longrightarrow X'$ tal que:

$$\models\ \forall_{z\in Z}\ (h_2(z) = \{t(z)\}_{X'}\ \wedge\ i(t(z)) = h_1(z)).$$

Por lo tanto $h_2 = \{\cdot\}_{X'} \circ t$ y $i \circ t = h_1$.

Por otro lado como $K^+(X) \rightarrowtail K(X) \xleftarrow{\ulcorner\phi\urcorner} 1$ es un diagrama de coproducto, por universalidad de los productos fibrados debemos tener que el diagrama $Y' \overset{j}{\rightarrowtail} X \xleftarrow{i} X'$ es también un coproducto y entonces $i\colon X' \longrightarrow X$ tiene complemento. $\square$

Nota Si Z es un espacio topológico T_o no discreto y E es el topos de los haces sobre Z, sabemos por el corolario 1.4 de [4] que existe un monomorfismo $i\colon X' \longrightarrow 1$ que no tiene complemento y por el resultado anterior i no es un morfismo K–finito. Es conocido que 1 es decidible en todo topos, luego X' no puede ser K–finito por la proposición 1. Por lo tanto la hipótesis de K–finito para el dominio de f no puede ser removida de la proposición 1.

Proposición 3 Sean $h\colon X \longrightarrow Y$ y $k\colon Y \longrightarrow Z$ dos morfismos K–finitos en un topos E. Entonces $k \circ h\colon X \longrightarrow Z$ es un morfismo K–finito.

Prueba Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & (e) & (f) & \Omega^X \\
Z \arrow[r, "\{\cdot\}_Z"] \arrow[dddrr, "j"'] & \Omega^Z \arrow[r, "k^{-1}"] \arrow[urrrr, "(k\circ h)^{-1}"] & \Omega^Y \arrow[r, "\exists_{\{\cdot\}_Y}"] \arrow[urrr, "h^{-1}"'] \arrow[ddrr, "\exists_i"] & \Omega^{\Omega^Y} \arrow[r, "\exists_{h^{-1}}"] & \Omega^{\Omega^X} \arrow[ur, "U"'] & (d) \\
 & & & (c) & & K(X) \arrow[uu] \\
 & (a) & & (b) & \Omega^{K(X)} \arrow[uu, tail] & \\
 & & K(Y) \arrow[uuu] \arrow[rr] & & KK(X) \arrow[u, tail] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Como k, h son morfismos K–finitos existen morfismos i, j únicos tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\{\cdot\}_Z"] \arrow[drr, "j"'] & \Omega^Z \arrow[r, "k^{-1}"] & \Omega^Y \\
 & & K(Y) \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\{\cdot\}_Y"] \arrow[drr, "i"'] & \Omega^Y \arrow[r, "h^{-1}"] & \Omega^X \\
 & & K(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

En particular los diagramas (a) y (c) conmutan. El diagrama (b) conmuta ya que imágenes de un objeto K–finito son K–finitas. (d) conmuta ya que la unión de familias K–finitas de objetos K–finitos es K–finita. (e) conmuta por functorialidad de la imagen inversa. Para probar la conmutatividad del diagrama (f), considere las siguientes implicaciones para $Y' \subseteq Y$, variable de tipo Ω^Y:

$$\begin{aligned}
\models U \circ \exists h^{-1} \circ \exists(\{\cdot\}_Y)(Y') &= U \circ \exists(h^{-1} \circ \{\cdot\}_Y)(Y') \\
&= U(\{h^{-1}(\{a\})/a \in Y'\}) \\
&= \{x \in X/\exists_{a\in Y}\ x \in h^{-1}(\{a\}_Y) \wedge a \in Y'\} \\
&= \{x \in X/\exists_{a\in Y}\ h(x) = a \wedge a \in Y'\} \\
&= \{x \in X/h(x) \in Y'\} \\
&= h^{-1}(Y').
\end{aligned}$$

Por lo tanto $U \circ \exists h^{-1} \circ \exists_{\{\cdot\}_Y} = h^{-1}$, es decir el diagrama (f) conmuta. Concluimos entonces que $(k \circ h)^{-1} \circ \{\cdot\}_Z$ se factoriza a través de $K(X)$, entonces $k \circ h\colon X \longrightarrow Z$ es un morfismo K–finito. $\square$

Definición 3 Sea X un objeto en un topos E e $i\colon X' \rightarrowtail X$ un monomorfismo. Considere el siguiente coproducto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_2"] \\
X \arrow[r, "\pi_1"'] & Q
\end{tikzcd}
$$

Sea $\pi = [\pi_1, \pi_2]\colon X + X \longrightarrow Q$.

Proposición 4 Para todo objeto X de un topos E e $i\colon X' \rightarrowtail X$ monomorfismo, se tiene que $\pi\colon X + X \rightarrowtail Q$ es un morfismo K–finito si y sólo si $i\colon X' \longrightarrow X$ tiene complemento.

Prueba Suponga que $\pi\colon X + X \longrightarrow Q$ es K–finito, como la inclusión $i_1\colon X \longrightarrow X + X$ es K–finito, por proposición 3, $\pi_1 = \pi \circ i_1\colon X \longrightarrow Q$ es K–finito. Como los morfismos K–finitos son estables bajo productos fibrados, entonces dado que:

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_1"] \\
X \arrow[r, "\pi_2"'] & Q
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado también, siendo π_1 K–finito, lo debe ser también $i\colon X' \longrightarrow X$ y por la proposición 2, $i\colon X' \longrightarrow X$ tiene complemento en X.

Recíprocamente, suponga que $i\colon X' \rightarrowtail X$ tiene complemento $\neg X'$ en X.

Si $X \xrightarrow{i_1} X + X \xleftarrow{i_2} X$ es un diagrama coproducto, defina $q_1', q_2'\colon X \longrightarrow \Omega^{X+X}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&\models (q_1'|\neg X')(s) = \{i_1(s)\}, \ \ \models (q_1'|X')(s) = \{i_1(s)\} \cup \{i_2(s)\} \text{ y} \\
&\models (q_2'|\neg X')(s) = \{i_2(s)\}, \ \ \models q_2'|X'(s) = \{i_1(s)\} \cup \{i_2(s)\}.
\end{aligned}
$$

Existe un único $q'\colon X + X \longrightarrow \Omega^{X+X}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "q_1'"] & \\
X + X \arrow[r, "q'"] & \Omega^{X+X} \\
X \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "q_2'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sea Q' la imagen de q', entonces las imágenes de q_1' y q_2' están contenidas en Q' y podemos suponer que el codominio de q_1', q_2', q' es Q'. Por definición de q', Q' es la unión de las imágenes Q_1' y Q_2' de q_1' y q_2' respectivamente y así tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\models \quad t \in Q' \quad &\Longrightarrow \quad t \in Q_1' \ \vee \ t \in Q_2' \\
&\Longrightarrow \quad (\exists_{s \in X}\ t = q_1'(s)) \vee (\exists_{s \in X}\ t = q_2'(s)) \\
&\Longrightarrow \quad (\exists_{s \in X}\ t = \{i_1(s)\} \ \vee \ t = \{i_1(s), i_2(s)\}) \\
&\qquad\quad \vee (\exists_{s \in X}\ t = \{i_2(s)\} \ \vee \ t = \{i_1(s), i_2(s)\}).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\models t \in Q' \Longrightarrow \exists_{s\in X}((t = \{i_1(s)\} \wedge s \in \neg X') \vee (t = \{i_2(s)\} \wedge s \in \neg X') \wedge (t = \{i_1(s), i_2(s)\} \wedge s \in X')).$$

En particular Q' es la unión disjunta de Q'_1 y la imagen de $q'_2|\neg X'$.

Probaremos a continuación que el morfismo $q' \colon X + X \longrightarrow Q'$ es K–finito. Primero probamos que:

$$\models s \in X \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \subseteq \{i_1(s)\}.$$

Considere:

$$\begin{array}{ll}
\models & t \in (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \Longrightarrow q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge \exists_{s'\in X}(t = i_1(s') \vee t = i_2(s')) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}((q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s')) \vee (q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_2(s'))) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s')) \vee (q'_2(s') = \{i_1(s)\}) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}((q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s')) \vee (\{i_2(s')\} = \{i_1(s)\} \vee \{i_1(s'), i_2(s')\} = \{i_1(s')\}) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}((q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s')) \vee (i_1(s) = i_2(s') \vee i_1(s') = i_2(s'))) \\
\Longrightarrow & (\exists_{s'\in X}(q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s'))) \vee \exists_{s'\in X}(i_1(s) = i_2(s')) \vee \exists_{s'\in X} i_1(s') = i_2(s') \\
\Longrightarrow & (\exists_{s'\in X}(q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s'))) \vee \text{ falso} \vee \text{falso} \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(q'(t) = \{i_1(s)\} \wedge t = i_1(s')) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(\{i_1(s')\} = \{i_1(s)\} \vee \{i_1(s'), i_2(s')\} = \{i_1(s)\}) \wedge t = i_1(s') \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(s' = s \vee i_1(s') = i_2(s')) \wedge t = i_1(s') \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(s' = s \wedge t = i_1(s')) \vee \text{ falso} \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(s' = s \wedge t = i_1(s')) \\
\Longrightarrow & \exists_{s'\in X}(t = i_1(s)) \\
\Longrightarrow & t = i_1(s) \\
\Longrightarrow & t \in \{i_1(s)\}.
\end{array}$$

Por lo tanto $\models t \in (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \wedge s \in X \Longrightarrow t \in \{i_1(s)\}$, es decir

$$\models \; s \in X \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \subseteq \{i_1(s)\}.$$

Similarmente probamos que $\models s \in X \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_2(s)\}) \subseteq \{i_2(s)\}$. Luego tenemos que:

$$\begin{array}{l}
\models s \in X \wedge (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) = (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \cup (q')^{-1}(\{i_2(s)\}) \\
\qquad \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) \subseteq \{i_1(s)\} \cup \{i_2(s)\}.
\end{array}$$

y entonces

$$\models s \in X \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) \subseteq (\{i_1(s), i_2(s)\}.$$

Por otro lado como $q' \circ i_1 = q'_1$, tenemos

$$\begin{array}{lll}
\models \quad s \in \neg X' & \Longrightarrow & q'(i_1(s)) = q'_1(s) \wedge s \in \neg X' \\
& \Longrightarrow & q'(i_1(s)) = \{i_1(s)\} \\
& \Longrightarrow & i_1(s) \in (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) \\
& \Longrightarrow & \{i_1(s)\} \subseteq (q')^{-1}(\{i_1(s)\}).
\end{array}$$

Entonces $\models s \in \neg X' \Longrightarrow \{i_1(s)\} \subseteq (q')^{-1}(\{i_1(s)\})$.

Similarmente se prueba que $\models s \in \neg X' \Longrightarrow \{i_2(s)\} \subseteq (q')^{-1}(\{i_2(s)\})$.

Por otro lado, de la definición de q' tenemos que

$$\begin{array}{lll} \models \quad s \in X' & \Longrightarrow & (q')(i_1(s)) = \{i_1(s), i_2(s)\} \wedge q'(i_2(s)) = \{i_1(s), i_2(s)\} \\ & \Longrightarrow & i_1(s) \in (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) \wedge i_2(s) \in (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) \\ & \Longrightarrow & \{i_1(s), i_2(s)\} \subseteq (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) \end{array}$$

luego $\models s \in X' \Longrightarrow \{i_1(s), i_2(s)\} \subseteq (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\})$. Por lo tanto concluimos que

$$\models s \in X' \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s), i_2(s)\}) = \{i_1(s), i_2(s)\} \text{ y}$$

$$\models s \in \neg X' \Longrightarrow (q')^{-1}(\{i_1(s)\}) = \{i_1(s)) \wedge (q')^{-1}(\{i_2(s)\} = \{i_2(s)\}.$$

Podemos probar ahora que $q' \colon X + X \longrightarrow Q'$ es un morfismo K–finito

$$\begin{array}{lll} \models \quad t \in Q' & \Longrightarrow & \exists_{s \in X}((t = \{i_1(s)\} \wedge s \in \neg X') \vee (t = \{i_2(s)\} \wedge s \in \neg X') \\ & & \qquad \vee (t = \{i_1(s), i_2(s)\} \wedge s \in X') \\ & \Longrightarrow & \exists_{s \in X} \; ((q')^{-1}(t) = t \vee (q')^{-1}(t) = t \vee (q')^{-1}(t) = t) \wedge t \in K(X + X) \\ & \Longrightarrow & (q')^{-1}(t) = t \wedge t \in K(X + X) \\ & \Longrightarrow & (q')^{-1}(t) \in K(X + X). \end{array}$$

Luego $\models \forall_{t \in Q'}(t \in Q' \Longrightarrow (q')^{-1}(t) \in K(X + X))$, por lo tanto $q' \colon X + X \longrightarrow Q'$ es un morfismo K–finito.

Para probar que q es K–finito es suficiente demostrar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "q'_2"] \\ X \arrow[r, "q'_1"'] & Q' \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado, ya que podríamos tomar π por q' y como q' es K–finito lo sería también π.

Considere el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f_2"] \\ X \arrow[r, "f_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

tenemos entonces que $f_1|X' = f_2|X'$. Si Q'_1 es la imagen de q'_1 y Q''_2 es la imagen de $q'_2|\neg X'$, sabemos que Q' es la unión disjunta de Q'_1 y Q''_2.

Defina $j_1\colon Q_1' \longrightarrow Z$ y $j_2\colon Q_2'' \longrightarrow Z$ tal que $\models j_k(q_k'(s)) = f_k(s)$ para $k = 1, 2$. j_1, j_2 están bien definidas ya que q_1', q_2' son monomorfismos.

Sea $j\colon Q' \longrightarrow Z$ tal que $j|Q_1' = j_1$ y $j|Q_2'' = j_2$. Queremos probar que $j \circ q_1' = f_1$ y $j \circ q_2' = f_2$:

$$\begin{array}{rcl} \models \;\; j \circ q_1'(s) & = & j(q_1'(s)) \\ & = & f_1(s), \end{array}$$

luego $j \circ q_1' = f_1$. Por otro lado

$$\begin{array}{rcl} \models \;\; s \in X' \vee s \in \neg X' & \Longrightarrow & s \in X' \vee (q_2'(s) \in Q_2'' \wedge s \in \neg X') \\ & \Longrightarrow & s \in X' \vee (j(q_2'(s)) = f_2(s)) \\ & \Longrightarrow & (f_1(s) = f_2(s) \wedge s \in X') \vee j(q_2'(s)) = f_2(s) \\ & \Longrightarrow & (f_1(s) = f_2(s) \wedge q_1'(s) = q_2'(s)) \vee j(q_2'(s)) = f_2(s)) \\ & \Longrightarrow & (j(q_1'(s)) = j(q_2'(s)) \wedge f_1(s) = f_2(s)) \vee j(q_2'(s)) = f_2(s) \\ & \Longrightarrow & (f_1(s) = j(q_1'(s)) \wedge j(q_1'(s)) = j(q_2'(s)) \wedge f_1(s) = f_2(s)) \\ & & \qquad \vee f(q_2'(s)) = f_2(s) \\ & \Longrightarrow & (f_2(s) = j(q_2'(s)) \vee (f_2(s) = f(q_2'(s)) \\ & \Longrightarrow & f_2(s) = j(q_2'(s)). \end{array}$$

Como $\models s \in X' \vee s \in \neg X'$, tenemos que $\models \forall_{s \in X}\ f_2(s) = j(q_2'(s))$ luego $j \circ q_2' = f_2$.

Debemos probar la unidad de j. Si $j' \circ q_1' = f_1$ y $j' \circ q_2' = f_2$ con $j'\colon Q \longrightarrow Z$, entonces $\models \forall_{s \in X'}\ j'(q_1'(s)) = f_1(s)$ y $j'|Q_1' = j|Q_1'$. Por otro lado $\models \forall_{s \in \neg X'}\ j(q_2'(s)) = f_2(s)$ y $j'|Q_2' = j|Q_2'$. Así tenemos $j = j'$ y entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "q_2'"] \\ X \arrow[r, "q_1'"'] & Q' \end{tikzcd}$$

satisface la propiedad universal de coproducto fibrado, concluyendo esto la prueba de la proposición 4. $\Box$

Nota Sea E el topos de hases sobre un espacio topológico Z, T_o no discreto. Sea X objeto K–finito de E y $i\colon X' \rightarrowtail X$, subobjeto de X sin complemento (ver corolario 1.4 de [4]), entonces el morfismo $\pi\colon X + X \longrightarrow Q$ correspondiente no puede ser K–finito por el teorema anterior. Sin embargo $X + X$ es K–finito, π es un epimorfismo y por proposición 1, Q no puede ser decidible. Por lo tanto la hipótesis decidible para el dominio de f de la proposición 1 no puede ser suprimida, $\pi\colon X + X \longrightarrow Q$ es un contraejemplo.

Referencias

[1] Acuña-Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, Connecticut.

[2] Acuña-Ortega, O. & Linton, F. E. J. (1979) *Finiteness and Decidability I*, in Lecture Notes in Matematics 753, Springer–Verlag, Berlin, pp. 80–100.

[3] Johnstone, P.T. (1977) *Topos Theory*, L.M.S. Mathematical Monographs, Academic Press, New York.

[4] Johnstone, P. T. & Linton, F. E. J. (1978) "Finiteness and decidability II", *Math Proc. Camb. Phil. Soc* 84: 207ss.