REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2014 **21**(1) : 1–10
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433

OBJETOS K-FINITOS Y DECIDIBILIDAD

K-FINITE OBJECTS AND DECIDABILITY

OSVALDO ACUÑA ORTEGA*

Received: 06/Aug/2013; Revised: 25/Oct/2013;
Accepted: 30/Oct/2013

*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Abstract

We study the k-finite and decidable objects in an elementary topos. We prove some results concerning k-finite and decidable objects.

Keywords: Topoi, k-finite objects, decidability.

Resumen

Se estudian los conceptos de objetos k-finitos y el concepto de objeto decidible en un topos elemental. Se prueban algunos resultados sobre objetos k-finitos y objetos decidibles.

Palabras clave: Topos, objetos k-finitos, decidibilidad.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

En este trabajo se establecen algunos resultados sobre los conceptos de objetos K-finitos y objetos decidibles en un topos elemental arbitrario. También se considera que un objeto es finito en un topos elemental si es a la vez k-finito y decidible, y se demuestra que este concepto resulta adecuado para definir el concepto de finitud en un topos elemental. De esta forma extendemos los resultados estudiados en [3] y [4]. La teoría que fundamenta estos estudios se puede consultar en [1], [2] y [5].

2 Resultado Principal

Sea ε un topos elemental y $X \in |\varepsilon|$, se dice que X es k-finito si $\ulcorner X \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $k(X)$, donde $k(X)$ es el subobjeto más pequeño de Ω^X cerrado bajo uniones binarias que contiene a $\{\}_X : X \to \Omega^X$ y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$. Observe que $\ulcorner X \urcorner : 1 \to \Omega^X$ corresponde a flecha $id_X : X \to X, \{\}_X : X \to \Omega^X$ corresponde a $\Delta_X : X \to X \times X$ tal que $pr_i \circ \Delta_X = id_X$ y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ corresponde a la flecha $\phi \to X$ donde ϕ es el objeto vacío de ε.

Teorema 1 *Sea $X \in |\varepsilon|, X$ es k-finito si y solo si $2^X \subseteq k(X)$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Como X está completamentado en $X, \ulcorner X \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de 2^X y entonces se factoriza a través de $k(X)$.
($\Rightarrow$) Antes de probar esta parte repasemos algunas definiciones . Defina $2^{(-)} : \Omega^X \to \Omega^{\Omega^X}$ por $\models 2^x = \{\overline{y} \epsilon \Omega^X / \exists_{y \epsilon \Omega^X} (y \cup \overline{y} = x \wedge y \cap \overline{y} = \emptyset)\}$ donde

$\cup, \cap$ son la unión y la intersección binaria de la algebra de Heyting Ω^X. Define $k : \Omega^X \to \Omega^{k(X)} \to \Omega^{\Omega^X}$ como $\models k(X) = \{y \in k(X)/y \subseteq x\}$. Como la noción de k-finitos es absoluta, k(X) representa el conjunto de subconjuntos finitos de x, donde x es una variable de tipo Ω^X.

Defina el objeto Q_X como $\{x \in \Omega^X/2^x \subseteq k(X)\} \to \Omega^x$. Si probamos que $k(X) \subseteq Q_X$ entonces tenemos que $2^{\ulcorner X \urcorner} \subseteq k(\ulcorner X \urcorner)$ y entonces $2^X \subseteq k(X)$.

(i) $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de Q_X.
Claramente $\models 2^{\ulcorner \phi \urcorner} = \{\phi\}$, como ϕ es k-finito,

$$\ulcorner \phi \urcorner \in k(\ulcorner X \urcorner), \phi \subseteq \ulcorner \phi \urcorner$$

por lo tanto $\ulcorner \phi \urcorner \in Q_X$.

(ii) $\{\}_X : X \to \Omega^X$ se factoriza a través de Q_X.
Sabemos que

$$\models 2^{\{x\}} = \{\overline{y} \in \Omega^X/\exists_y(y \cup \overline{y} = \{x\} \wedge y \cap \overline{y} = \phi)\}.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
&\models y \cap \overline{y} = \phi \wedge y \cup \overline{y} = \{x\} \\
&\quad \Rightarrow \quad (x \in y \vee x \in \overline{y}) \vee (y \subseteq \{x\} \wedge \overline{y} \subseteq \{x\}) \wedge y \cap \overline{y} = \phi \\
&\quad \Rightarrow \quad (\{x\} \subseteq y \vee \{x\} \subseteq \overline{y}) \wedge (y \subseteq \{x\} \wedge \overline{y} \subseteq \{x\}) \wedge y \cap \overline{y} = \phi \\
&\quad \Rightarrow \quad (y = \{x\} \wedge \overline{y} \subseteq \{x\} \wedge \overline{y} \cap \{x\} = \phi) \vee \\
&\qquad\quad\;\; (\overline{y} = \{x\} \wedge y \subseteq \{x\} \wedge y \cap \{x\} = \phi) \\
&\quad \Rightarrow \quad (\{x\} = y \wedge \overline{y} = \phi) \vee (\{x\} = \overline{y} \wedge y = \phi) \\
&\quad \Rightarrow \quad \{x\} = y \vee y = \phi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\models \exists_{\overline{y}}(y \cup \overline{y} = \{x\} \wedge y \cap \overline{y} = \phi) \Leftrightarrow \{x\} = y \vee y = \phi,$$

el recíproco es trivial y entonces

$$\models 2^{\{x\}} = \{y \in \Omega^X/y = \{x\} \vee y = \phi\}$$

pero

$$\models \{y \in \Omega^X/y = \{x\} \vee y = \phi\} \subseteq k(\{x\})$$

y

$$\models 2^{\{x\}} \subseteq k(\{x\}).$$

Por lo tanto $\{\}_X$ se factoriza a través de Q_X.

(iii) Q_X es cerrado bajo uniones binarias.

$\vDash x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \wedge y \in 2^{x \cup \overline{x}}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ \exists_z (y \cup z = x \cup \overline{x} \wedge y \cap z = \phi) \wedge x \in Q_x \wedge \overline{x} \in Q_X \\
&\Rightarrow \ \exists_z (x \subseteq y \cup z \wedge y \cap z = \phi \wedge \overline{x} \subseteq y \cup z) \wedge \\
&\qquad x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \wedge y = (y \cap \overline{x}) \cup (y \cap x) \\
&\Rightarrow \ \exists_z (x = (y \cap x) \cup (x \cap z) \wedge y \cap z = \phi \wedge \overline{x} = (y \cap \overline{x}) \cup (z \cap \overline{x})) \wedge \\
&\qquad x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\Rightarrow \ \exists_z (x = (y \cap x) \cup (z \cap x) \wedge (y \cap x) \cap (z \cap x) = \phi) \wedge x \in Q_X \wedge \\
&\qquad y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\qquad \wedge \exists_z (\overline{x} = (y \cap \overline{x}) \cup (z \cap \overline{x}) \wedge (y \cap \overline{x}) \cap (z \cap \overline{x})) = \phi \wedge \overline{x} \in Q_X \\
&\Rightarrow \ y \cap x \in 2^x \wedge y \cap \overline{x} \in 2^{\overline{x}} \wedge x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \wedge \\
&\qquad y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\Rightarrow \ y \cap x \in 2^x \wedge y \cap \overline{x} \in 2^{\overline{x}} \wedge 2^x \in k(X) \wedge 2^{\overline{x}} \in k(\overline{x}) \wedge \\
&\qquad y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\Rightarrow \ y \cap x \in k(X) \wedge y \cap \overline{x} \in k(\overline{x}) \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\Rightarrow \ y \cap x \in k(X) \wedge y \cap \overline{x} \in k(X) \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \overline{x}) \\
&\Rightarrow \ y \in k(X) \wedge y \subseteq x \cup \overline{x} \\
&\Rightarrow \ y \in k(x \cup \overline{x}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vDash x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \wedge y \in 2^{x \cup \overline{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \overline{x})$$

si y solo si

$$\vDash x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \Rightarrow (y \in 2^{x \cup \overline{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \overline{x}))$$

y esto implica

$$\vDash x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \Rightarrow \forall y (y \in 2^{x \cup \overline{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \overline{x})).$$

Por lo tanto

$$\vDash x \in Q_X \wedge \overline{x} \in Q_X \Rightarrow x \cup \overline{x} \in Q_X.$$

Entonces Q_X es cerrado bajo uniones binarias, y entonces (i),(ii), (iii) implican $k(X) \subseteq Q_X$, como X es k-finito se tiene que $\ulcorner X \urcorner \in k(X)$ lo que implica que $\ulcorner X \urcorner \in Q_X$ y entonces $2^X \subseteq k(X)$, probándose el teorema. ■

Corolario 2 *Si X' es un subobjeto complementado de un objeto k-finito X, entontes X' es k-finito.*

Demostración. $\ulcorner X \urcorner$ se factoriza a través de 2^X y $2^X \subseteq k(X)$. ■

3 Consecuencias

Proposición 3 *Para $X \in |E|$, el álgebra booleana 2^X actúa en $k(X)$ a través de la restricción de $\cap$ en $k(X) \times 2^X$.*

Demostración. Queremos probar que $k(X) \times 2^X \rightarrowtail \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\cap} \Omega^X$ se factoriza a través de $k(X)$:

$$
\begin{aligned}
&\models r \in k(X) \wedge y \in 2^X \\
&\quad \Rightarrow \quad \exists_y (z \cup y = X \wedge z \cap y = \phi) \wedge r \in k(X) \\
&\quad \Rightarrow \quad \exists_y (r = (r \cap z) \cup (r \cap y)) \wedge (r \cap z) \cap (r \cap y) = \phi) \wedge r \in k(X) \\
&\quad \Rightarrow \quad r \cap y \in 2^r \wedge r \in k(X) \\
&\quad \Rightarrow \quad r \cap y \in 2^r \wedge 2^r \subseteq k(r), \text{ como } k(X) \subseteq Q_X, \\
&\quad \Rightarrow \quad r \cap y \in k(r) \\
&\quad \Rightarrow \quad r \cap y \in k(X).
\end{aligned}
$$

Sea $k^+(X)$ el más pequeño subobjeto de Ω^X cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X$. Observe que $k^+(X) \subseteq k(X)$, denote esta inclusión por (i). ■

Proposición 4 *Para cualquier $X \in |E|, (i, \phi) : k^+(X) + 1 \to k(X)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Para $X \in |E|$ denote $w_X : X \to 1$ el único morfismo existente que va de X a 1. Defina P como el producto fibrado siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^X \arrow[r, "\exists_{\omega_X}"] & \Omega \\
P \arrow[u] \arrow[r, "\omega_P"'] & 1 \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}
$$

P contiene a $\{\cdot\}_X$ dado que es una transformación natural, entonces $\{\cdot\} \circ \exists_{\omega_X} = \omega_X \circ t$,

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^X \arrow[r, "\exists_{\omega_X}"] & \Omega \\
P \times P \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u, "t"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Como $t \vee t = t$ y $\exists_{\omega_X}$ preserva uniones binarias P es cerrado bajo uniones binarias. Por definición de $k^+(X)$, $k^+(X) \subseteq P$ ya que P es un monoide que contiene a $\{\cdot\}$. Claramente $\ulcorner\phi\urcorner \cap P = \phi$ por lo tanto $k^+(X) \cap \phi = \phi$ y entonces $(i, \phi) : k^+(X)+1 \to k(X)$ es mónica y entonces $k^+(X)+1 \subseteq k(X)$.

Por otro lado $k^+(X) + 1$ es cerrado bajo uniones binarias:

$$
\begin{aligned}
&\models (x \in k^+(X) \vee x = \phi) \wedge (y \in k^+(X) \vee y = \phi) \\
&\quad \Rightarrow \quad x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = x \vee x \cup y = y \vee x \cup y = \phi \\
&\quad \Rightarrow \quad x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = \phi \\
&\quad \Rightarrow \quad x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = \phi.
\end{aligned}
$$

$k^+(X) + 1$ contiene $\{\cdot\}_X$ y ϕ, por lo tanto $k(X) = k^+(X) + 1$. ■

Teorema 5 *Para cualquier objeto $X \in |E|$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El subobjeto diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$ tiene complemento.*
2. $\models \forall x, y \in X \times X \Rightarrow x = y \vee \neg(x = y)$.
3. *La flecha de clasificadora X_{Δ_X} se factoriza a través de $(t, f) : 2 \to \Omega$.*
4. *La flecha $\{\cdot\}_X : X \to \Omega_X$ se factoria a través de 2^X.*
5. $k(X) \subseteq 2^X$.
6. *El gráfico $\Gamma_f : Y \to Y \times X$ para cada $f : Y \to X$ es un subobjeto complementado de $Y \times X$.*
7. *Gráfico : $X^Y \to \Omega^{Y\times X}$ se factoriza a través de $(t, f)^Y : 2^Y \to \Omega^{Y\times X}$ para todo Y.*

Demostración.

- $(1) \Rightarrow (2)$ Como $[\![x = y]\!] = \Delta_X$ y el complemento de Δ_X es $\neg\Delta_X$.
- Para ver que $(2) \Rightarrow (1)$, observe que $[\![x = y]\!] \cup [\![\neg(x = y)]\!] = X \times X$, pero $[\![x = y]\!] \cap [\![\neg(x = y)]\!] = \phi$, entonces Δ_X es complementado.
- $(1) \Leftrightarrow (3)$ $(t, f) : 2 \to \Omega$ clasifica subobjetos complemetados.
- $(3) \Leftrightarrow (4)$ X_{Δ_X} se factoriza a través de 2 y por lo tanto su adjunto exponencial $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de $(t, t)^X : 2^X \to \Omega^X$ y reciprocamente.
- $(4) \Rightarrow (5)$ 2^X es un subretículo de Ω^X y entonces $0 \to 1$ está complementado y entonces $\ulcorner\phi\urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $(t, f)^X : 2^X \to \Omega^X$ y por $(4)\{\cdot\}_X$ está contenido en 2^X y así $k(X) \subseteq 2^X$.

- $(5) \Rightarrow (4)$ Si $k(X) \subseteq 2^X$ entonces $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X.
- $(6) \Rightarrow (1)$ El gráfico de $id_X : X \to X$ es la diagonal de X.
- $(1) \Rightarrow (6)$ El gráfico de cualquier flecha $f : Y \to X$ está definida por el siguiente producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \Gamma_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_X} \\ X \times Y & \xrightarrow[X \times f]{} & X \times X \end{array}$$

Como Δ_X está completamentado en $X \times X$, también Γ_f está complementado en $X \times Y$.

- Antes de probar $(7) \Leftrightarrow (4)$, probaremos la siguiente situación general: si X, Y son objetos arbitrarios de $|E|$ entonces

$$\begin{array}{ccc} X^Y & \xrightarrow{\textit{Graf}} & \Omega^{Y \times X} \\ {\scriptstyle \{\cdot\}_X^Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ (\Omega^X)^Y & \xrightarrow[id]{} & (\Omega^X)^Y \end{array}$$

commuta, donde φ es dado por $\vDash \varphi(g) = \{(y, x)/x \in g(y)\}$:

$$\begin{aligned} \vDash (\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y)(f)(y) &= \varphi(\{f\}_X(y)) \\ &= \varphi(\{f(y)\}_X) \\ &= \{(y, x)/x \in \{f(y)\}_X\} \\ &= \{(y, x)/x = f(y)\}. \end{aligned}$$

Entonces $\vDash (\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y)(f) = \textit{Graf}(f)$ y entonces $\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y = \textit{Graf}$.

- $(7) \Rightarrow (4)$ *Graf* : $X^1 \to \Omega^{1 \times X}$ se factoriza a través $2^X \to \Omega^X$, entonces $\{\cdot\}_X^1 = \{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X.
- $(4) \Rightarrow (7)$ $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X entonces $\{\cdot\}_X^Y$ se factoriza a través $2^{Y \times X}$, como $\textit{Graf} = \varphi \circ \{\cdot\}_X^Y$ entonces *Graf* se factoriza a través de $2^{Y \times X}$. ■

Decimos que X es decidible si satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

Corolario 6 *Si E es un topos elemental con el objeto de los números naturales $\mathbb{N}$ entonces*

(i) $K(\mathbb{N}) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

(ii) $\forall p$, $p : 1 \to \mathbb{N}$ $[p]$ *tiene complemento.*

(iii) $K[p] \subseteq 2^{[p]}$.

Demostración.

(i) $\mathbb{N}$ es decidible.

(ii) $[p]$ es un subobjeto k-finito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ entonces $[p]$ es decidible y por lo tanto $[p] : 1 \to \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ se factoriza a través de $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

(iii) Cualquier subobjeto de un objeto decidible es decidible, $[p] \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y entonces $K[p] \subseteq 2^{[p]}$. ■

Corolario 7 *Si $X \in |E|$, X es K-finito y decidible si y solo si $K(X) = 2^X$.*

Demostración. Aplique el teorema 5 y el teorema 1. ■

Proposición 8 *Si X es decidible entonces $k(X)$ es un subanillo booleano de 2^X. Más aun $k(X)$ es un ideal.*

Demostración. $\neg_X$ se restringe a 2^X como el complemento. Defina

$$\models x - y = x \cap \neg_X(y),$$

entonces $k(X)$ es cerrado bajo $- : k(X) \times 2^X \to k(X)$. Si X es decidible entonces $k(X) \subseteq 2^X$, por lo tanto $\cap, -$ se pueden restringir a $k(X) \times k(X)$. Esto implica que $k(X)$ es cerrado bajo intercección y complemento relativo. $k(X)$ es cerrado bajo uniones binarias y tiene un elemento cero $\ulcorner\phi\urcorner : 1 \to k(X)$
Por otro lado

$$\begin{aligned} \models x - y = \ulcorner\phi\urcorner &\Leftrightarrow x \cap \neg y = \ulcorner\phi\urcorner \\ &\Leftrightarrow \ulcorner\phi\urcorner \cup (x \cap y) = x \\ &\Leftrightarrow x \subseteq y. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\models y\Delta x \equiv (y - x) \cup (x - y) = \ulcorner\phi\urcorner \Leftrightarrow x = y.$$

Por lo tanto Δ se combierte en la suma, $\cap$ en el producto de $k(X)$ y $\ulcorner\phi\urcorner$ el elemento neutro. La proposición 3 nos dice que $k(X)$ es un ideal de 2^X. ■

Proposición 9 *Si $X \in |E|$, X decidible si y solo si $k(X)$ es decidible.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por la proposición 8 sabemos que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{k(X)}"'] & 1 \arrow[d, "\ulcorner\phi\urcorner"] \\ k(X)\times k(X) \arrow[r, "\Delta"'] & k(X) \end{tikzcd}$$

donde Δ es diferencia simétrica, y como

$$k(X) = k^{+}(X) + 1,$$

entonces

$$\Delta_{k(X)} + \Delta^{-1}(k^{+}(X)) = k(X) \times k(X)$$

y así se tiene que $k(X)$ es decidible.
($\Leftarrow$) $\{\cdot\}_X : X \to k(X)$ es mónica y así todo subobjeto de $k(X)$ es decidible y entonces X es decidible. ∎

Corolario 10 *X es K-finito decidible si y solo si 2^X es k-finito decidible.*

Demostración. Por corolario 7, X es k-finito decidible si y solo si $k(X) = 2^X$, por proposición 9, 2^X es decidible y por (3) $k(X)$ es k-finito y entonces 2^X es k-finito decidible. ∎

Referencias

[1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*. Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.

[2] Acuña–Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) "Finiteness and decidability I", in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.

[3] Acuña–Ortega, O. (2011) "Una nota sobre objetos k-finitos en un topos Booleano con el objeto de los números naturales", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 239–245.

[4] Acuña–Ortega, O. (2013) "Sobre una construcción de un monoide libre con identidad sobre un topos E con el objeto de los números naturales", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **20**(1): 79–94.

[5] Kock, A.; Lecouturier, P.; Mikkelsen, Ch.J. (1975) "Some topos theoretic concepts of finiteness", in: *Model Theory and Topoi*, Lecture Notes in Mathematics 445, Springer–Verlag, New York: 209–283.