

SOBRE LA CONVEXIDAD DE LA FUNCION DE PRESIN EN EL PROBLEMA DE LA FILTRACION NO LINEAL

VLADIMIR N. GREBENEV*

Received: November 5, 1997

Abstract

Se hace la demostración de la convexidad de la función de presión v para el flujo de un gas ideal isotrpico, fundamentada en el teorema sobre ceros de la solución de la ecuación parabólica (1).

Palabras clave: mecnicia de fluidos, turbulencia, ecuacin parablica.

Abstract

We prove the convexity of the pressure function v for the isotropic ideal gaz flow, based on the theorem about the zeros of the solution of the parabolic equation (1).

Keywords: fluid mechanics, turbulence, parabolic equation.

AMS Subject Classification: 76F99, 76N15

1. Prefacio

En [2],[3] se demostró que si $v(x, t)$ es convexa, como funcin hacia los reales positivos, en el momento inicial $t = 0$ y $(x, t) \in \text{suppv}$, entonces $v(x, t)$ conserva la forma convexa hacia los positivos respecto a la variable x . La demostración se fundamentó en la separación de

$$v_t = (m - 1)vv_{xx} + v_x^2, \quad m > 1,$$

en dos ecuaciones

$$v_t = (m - 1)vv_{xx}, \quad v_t = v_x^2.$$

*Laboratory of Computational Hydrodynamics, Institute of Computational Technologies, Siberian Division of Russian Academy of Sciences (SDRAS), Ac. Lavrentjev Ave. 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Phone +(383-2) 34.35.70, Fax: +(383-2) 34.13.42; e-mail: vova@lchd.ict.nsc.ru; Grant RFFI No. 970100768

Benilan & Vázquez demostraron en [3], que

$$v_{xx} \leq -\frac{C}{1 + (m+1)Ct}, \quad C \geq 0, \quad (x, t) \in P_T$$

cuando $v_{xx}(x, 0) \leq -C$ para todo $x \in \text{supp}v(x, 0)$; P_T representa el conjunto donde la solución v es positiva. También es conocida la estimación

$$v_{xx} \geq -\frac{1}{(m+1)t} \quad \text{en } D'.$$

La demostración directa de la convexidad de la función v a través del principio del máximo para $p = v_{xx}$ que satisface la ecuación

$$p_t = (m-1)vp_{xx} + 2mv_x p_x + (m+1)p^2, \quad (x, t) \in P_T$$

no da la estimación necesaria, ya que a priori no es conocido el signo de p en las fronteras libres de P_T . Para superar este obstáculo, en [3] se estudiaron dos problemas de Cauchy para las ecuaciones

$$v_t = (m-1)vv_{xx}, \quad v_t = v_x^2.$$

Para la ecuación de tipo difusivo $v_t = (m-1)v_{xx}$, “la desigualdad de convexidad” se obtiene como consecuencia de que las fronteras libres de su soporte son estacionarias; al mismo tiempo, la ecuación $v_t = v_x^2$ conserva la forma convexa del perfil de la solución, si para $t = 0$ tiene esta forma. Entonces, el resultado buscado surge de la aplicación adecuada de la fórmula de Trotter-Kato. Nosotros daremos otra demostración de este hecho, que no toma en cuenta la singularidad específica de la ecuación no lineal de la filtración $u_t = (u^m)_{xx}$, $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ la cual consiste en la separación del operador $A = (u^m)_{xx}$ en un operador difusivo y un operador del tipo Hamilton-Jacobi, con la aplicación posterior de los resultados de la teoría de semigrupos.

Recordemos algunos hechos que tratan acerca de la suavidad de la solución suave del problema de Cauchy para la ecuación no lineal de la filtración, también el teorema sobre los ceros de la solución de la ecuación parabólica, conocido como Teorema de Scharfman y las consecuencias del Teorema.

Es muy conocido que el problema de Cauchy para la ecuación no lineal de la filtración en la clase de funciones no negativas con condiciones iniciales continuas con soporte compacto tiene una solución débilmente continua, la cual es suave (C^∞ -diferenciable) en el conjunto donde la solución v es positiva. Para cada $t > 0$, $v(\cdot, t)$ tiene un soporte compacto y existen funciones $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ tales que $\{x \in \mathbb{R}/v(x, t) > 0\} = (\zeta_1(t), \zeta_2(t))$. Las funciones ζ_i son localmente Lipschitz y cuando t crece (fronteras libres) $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ no decrecen. Existen números $t_i^* \geq 0$, tales que $\zeta_i(t)$ es constante para $t \leq t_i^*$, llamados tiempos de la localización metaestable de la solución, tales que $\zeta_i(t)$ es constante para $t \leq t_i^*$. Aronson & Vázquez mostraron en [4] que ζ_i son funciones suaves en $(t_i^*; T)$ y $v \in C^\infty(P_T^*)$, donde

$$P_T^* = \overline{P_T} \cap \{t \geq \max(t_1^*, t_2^*)\}, \quad \overline{P_T} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ / \zeta_1(t) \leq x \leq \zeta_2(t), 0 < t \leq T\}.$$

De [5] se deduce que ζ_i y v son funciones analíticas respecto a la variable t para $t > t_i^*$ y $t > \max(t_1^*, t_2^*)$, respectivamente. También es válida la fórmula

$$\zeta_i'(t) = -v_x(\zeta_i(t), t).$$

Utilizaremos la siguiente versión del Teorema de Sturm para la ecuación parabólica

$$w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} a, a^{-1}, a_t, a_x \text{ y } a_{xx} &\in L_\infty, \\ b, b_t \text{ y } b_x &\in L_\infty, \\ c &\in L_\infty \end{aligned}$$

Teorema 1 ([1]) *Para cada $t \in (0; T]$, el conjunto de los ceros de la función $w(\cdot, t)$, $Z_t = \{x \in \mathbb{R} / w(x, t) = 0\}$ es discreto.*

El Teorema 1 también es aplicable para las soluciones de la ecuación (1) en subregiones acotadas. Si w es una solución acotada del primer problema de frontera en el rectángulo $[0, 1] \times [0, T]$, entonces se requiere la condición $w \neq 0$ en las “fronteras laterales” de la región.

Si $f(x)$ es una función suave que se anula en algún punto x_0 de \mathbb{R} , entonces x_0 recibe el nombre de *cero simple*, siempre que $f'(x_0) \neq 0$. El *orden de un cero* se determina como el menor número natural k tal que $f^{(k)}(x_0) \neq 0$; si todas las derivadas de la función f son iguales a cero en el punto x_0 , entonces se dice que f tiene un *cero de orden infinito*.

El *número de ceros* $z(f)$ de $f(x)$ en el intervalo (a, b) se define como la suma de ordenes de todos los ceros de f en (a, b) .

En la demostración del Teorema 1 se probó lo siguiente: si w tiene un cero de multiplicidad k en un punto (x_0, t_0) entonces $w(\cdot, t)$ en la cercanía del cero multiplicativo para $t > t_0$ tiene a lo sumo un cero simple y exactamente k ceros simples para $t < t_0$. Notemos que para $t > 0$, el número $z(w(\cdot, t))$ es finito y el conjunto de “tiempos” t para los cuales $w(\cdot, t)$ tiene ceros multiplicativos es “discreto”.

Como consecuencia de lo anterior y del teorema de la función implícita para la función suave w en la vecindad $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, se obtiene que la estructura $\bigcup_{t < t_0} Z_t$ “cerca” del cero (x_0, t_0) de multiplicidad k se describe por las curvas suaves $\beta_i(t)$, $1 \leq i \leq k$, $t \leq t_0$ que salen del punto (x_0, t_0) .

Nuestro enfoque para probar la convexidad, hacia los positivos, del perfil de la solución v se fundamenta en la siguiente observación: en la frontera libre ζ_i es válida la fórmula

$$\frac{d}{dt}v_x(\zeta_i(t), t) = mv_x v_{xx}(\zeta_i(t), t),$$

entonces, suponiendo que v_{xx} cambia de signo en P_T , obtenemos que los valores de $v_x(x, 0)$ “se trasladan” a lo largo de las líneas de nivel de la derivada de v_x , que pasan por los puntos donde $v_{xx} = 0$ y que determinan en la recta $\{t = 0\}$ y en la frontera libre correspondiente ζ_i .

El análisis de la función $\frac{d}{dt}v_x(\zeta_i(t), t)$ muestra, que $\frac{d}{dt}v_x(\zeta_i(t), t) \leq 0$ en un cierto intervalo (aquí se utiliza la desigualdad $v_{xx}(x, 0) < 0$), lo que da la posibilidad de determinar el signo de $v_{xx}(\zeta_i(t), t)$ y, consecuentemente llegar a la contradicción con el supuesto sobre alternabilidad del signo de v_{xx} . Al construir la línea de nivel nos basamos en el teorema de Sturm.

2. Demostración de la convexidad del perfil de la función de la presión

Consideremos en $S_t = \mathbb{R} \times (0, T]$ el problema de Cauchy para la ecuación de la filtración de un gas ideal isotrópico en un medio poroso

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad m > 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Introduciendo la función de la presión $v = \frac{m}{(m-1)u^{m-1}}$ esta ecuación se puede escribir como

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2. \quad (2)$$

Se asume que la función continua positiva

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad (3)$$

es par y convexa en el soporte compacto $[-1, 1]$. Como la ecuación (2) es invariante cuando se hace el cambio de variable $x \rightarrow -x$, entonces la solución débil v de los problemas (2) y (3) satisface la igualdad $v(x, t) = v(-x, t)$ para todo $(x, t) \in S_T$. Las suposiciones para v_0 dan a entender que

$$P_T = \{(x, t) \in S_T / \zeta_1(t) < x < \zeta_2(t), 0 < t \leq T\}, \zeta_1 = -\zeta_2$$

y $\zeta_2(t)$ es monótona creciente. Consecuentemente, $\zeta_2(t) \in C^\infty(0, T]$ y $v \in C^\infty(\overline{P_T})$. Además, $\zeta_2(t)$ y $v(\zeta_2(t) \cos \xi, t)$, $\xi \in [0, \pi]$ son funciones analíticas en variable $0 < t \leq T$.

Relacionemos con la función $v(x, t)$ a la aplicación suave: $(\tau, t) \rightarrow \rho(\tau, t)$ de $[0, 1] \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2$ sobre \mathbb{R}^2 , tal que $\rho(\tau, t)$ es el gráfico de la función $v(x, t)$ en el plano \mathbb{R}^2 para $x \in (\zeta_1(t), \zeta_2(t))$ y cada t fijo en el intervalo $[0, T]$. Como consecuencia del principio del máximo y C^∞ -regularidad de la función de la presión v , la aplicación ρ tiene las siguientes propiedades:

- a) $\rho(\tau, t)$ es una curva *acotada gráficamente semejante* para cada t fijo en el intervalo $[0, T]$ con los puntos “inicial” y “terminal” que pertenecen a $(\zeta_1(t), 0)$ y $(\zeta_2(t), 0)$;
- b) la huella $\rho(\cdot, t)$ pertenece al semiplano $\mathbb{R}^2 \cap \{y \geq 0\}$ y $\rho(\cdot, t)$ es monótona creciente (respectivamente decreciente) en el intervalo $(\zeta_1(t), 0)$ (resp. en $(\zeta_2(t), 0)$);
- c) $\rho(\cdot, t)$ tiene forma convexa hacia las positivas en las cercanías del “pico” para cada $t \in [0, T]$.

d) $\|\rho(\cdot, t_2) - \rho(\cdot, t_1)\|_{C^\infty(0,1)} \rightarrow 0$ cuando $t_2 \rightarrow t_1$.

Consideremos la familia de curvas $\rho(\tau, t)$ en el plano \mathbb{R}^2 considerando a t como un parámetro. En virtud de la simetría de $\rho(\cdot, t)$, slo consideraremos la rama creciente de la curva $\rho(\cdot, t), t \in [0, T]$, denotndola por $\rho^+(\cdot, t)$.

Supongamos que la segunda derivada v_{xx} cambia de signo y t^* es un cierto punto del intervalo $(0, T)$ tal que, al asociarla con el perfil $v(x, t^*)$, la curva $\rho^+(\tau, t^*)$ no es convexa en el momento $t = t^*$. De la misma forma podemos considerar que $v_{xx}(\zeta_1(t), t) > 0$ en el intervalo $(\hat{t}, \check{t}) \subset (0, T]$ y $v_{xx}(\zeta_1(t), t) < 0$ cuando $t < \hat{t}$. La existencia de tal intervalo adyacente a $(0, \hat{t})$ surge de la suposición sobre el signo de v_{xx} , la fórmula

$$\frac{d}{dt}v_x(\zeta_1(t), t) = mv_x v_{xx}(\zeta_1(t), t)$$

y de que la función $\zeta_1 = \zeta_1(t)$ es analítica. Sea $t^* \in (\hat{t}, \check{t})$, escojamos el punto q^* sobre $\rho^+(\tau, t^*)$ de manera que la curvatura $K(\tau, t^*)$ de la curva $\rho^+(\tau, t^*)$ en este punto sea igual a cero y $K(\tau, t^*) > 0$ cuando $\tau < \tau^*$.

Denotamos por \vec{T}_{q^*} el vector tangente de la curva $\rho^+(\tau, t^*)$ en el punto q^* y θ^* es el ángulo de inclinación entre la tangente en el plano $\{x, y\}$ que pasa por el punto q^* y el eje x . De acuerdo con las fórmulas

$$\nu = \cos \theta^*(x - x_0) + \sen \theta^*(y - y_0), \quad \eta = -\sen \theta^*(x - x_0) + \cos \theta^*(y - y_0),$$

donde (x_0, y_0) son coordenadas del punto q^* en el plano $\{x, y\}$, nos trasladamos hacia una base ortonormal $\{\nu, \eta\}$ y por Q denotaremos la transformación ortogonal dada. Recordemos el bien conocido hecho de que la curvatura de la curva es invariante cuando se hace la transformación ortogonal de las coordenadas. Sea γ la curva en el plano $\{\nu, \eta\}$ definida por

$$\gamma(\cdot, t) = Q\rho^+(\cdot, t), \quad t \in [0, T].$$

De las propiedades para ρ^+ , precisamente sobre la alternabilidad del signo de la derivada v_x en $P_T \cap \{x < 0\}$, surge que $\gamma(\cdot, t)$ es una curva gráficamente semejante para todo valor fijo de $t \in [0, T]$. Representemos, a través de $e(\nu, t)$, la función asociada con la familia de curvas $\gamma(\cdot, t)$. Más exactamente, la huella $\gamma(\cdot, t)$ para cada $t \in [0, T]$ fijo, es el gráfico de la función $\eta = e(\nu, t)$. Investiguemos los ceros de la función $e(\nu, t)$, para esto escribiremos la ecuación para v en las coordenadas $\{\nu, \eta\}$. El cálculo directo nos muestra que $e(\nu, t)$ satisface

$$e_t = \alpha(\nu, t, \theta^*, e)e_{\nu\nu} + \beta(\theta^*, e_\nu)e_\nu + \chi(\theta^*), \quad \alpha \geq 0 \tag{4}$$

donde, α, β, χ pueden ser fácilmente calculadas y $\chi(\theta^*) = \sen^2 \theta^* / \cos \theta^*$. Consideremos la función $\omega(\nu, t) = e(\nu, t) - \chi(\theta^*)(t - t^*)$. Es fácil ver que ω satisface la ecuación del mismo tipo de (1). Observemos que la función $\omega(\nu, t)$ tiene, por lo menos, un cero de multiplicidad tres en el punto q_0^* con coordenadas $(0, 0)$ en el plano $\{\nu, \eta\}$. Sin pérdida de generalidad, como se verá abajo, podemos pensar, que el punto q_0^* con las propiedades arriba anotadas, es único para la función $\omega(\nu, t)$, cuando $t = t^*$. Nos interesan los ceros

de ω en las curvas s_i , $i = 1, 2$, donde s_i representan las fronteras “laterales” de la región $P_T \cap \{x < 0\}$ considerada en el plano $\{\nu, t\}$, o sea

$$\begin{aligned} s_1(t) &= (\zeta_1(t) - x_0) \cos \theta^* - v(x_0, t^*) \operatorname{sen} \theta^*, \\ s_2(t) &= -x_0 \cos \theta^* + (v(0, t^*) - v(x_0, t^*)) \operatorname{sen} \theta^*. \end{aligned}$$

La región limitada por arriba por la recta $t = T$, por abajo por la recta $t = 0$ y por los laterales por s_1 y s_2 , la denotaremos por G_T . No es difícil probar utilizando las propiedades de la función v , que $w(s_2(t), t)$ es monótona decreciente con respecto a t .

Para la función

$$w(s_1(t), t) = -(\zeta_1(t) - x_0) \operatorname{sen} \theta^* - v(x_0, t^*) \cos \theta^* - (t - t^*) \frac{(\operatorname{sen}^2 \theta^*)}{\cos \theta^*}$$

es válido lo siguiente: ella crece en el segmento $[0, \hat{t}]$ y decrece en $[\hat{t}, t^*]$. La demostración surge del análisis de la derivada

$$\frac{d}{dt} w(s_1(t), t) = \operatorname{sen} \theta^* (-\zeta_1'(t) - \tan \theta^*) \equiv \operatorname{sen} \theta^* (v_x(\zeta_1(t), t) - v_x(x_0, t^*)),$$

de la fórmula $\frac{d}{dt} v_x(\zeta_1(t), t) = m v_x v_{xx}(\zeta_1(t), t)$ la cual se obtuvo utilizando la diferenciación de la ecuación (1) respecto a t y del resultado obtenido del principio del máximo para la derivada v_x , el cual dice que el valor máximo de v_x en $\overline{P_T} \cap \{t \leq t^*\} \cup \{t = 0\}$ se logra en el punto con coordenadas $(\zeta_1(0), 0)$.

Consideremos la función $w(\nu, 0)$. Es fácil verificar que $w(\nu, 0)$ tiene a lo sumo dos ceros simples. Estudiaremos el caso cuando $w(\nu, 0)$ tiene exactamente dos ceros simples. Esto se refiere, tomando en cuenta la convexidad de $w(\nu, 0)$, a que $w(\nu, 0) \leq 0$ “cerca” de $\zeta_1(0)$ y $\zeta_2(0)$. Entonces $w(s_1(t), t)$, tomando en cuenta lo arriba dicho, se iguala a cero en el único punto $t_1 \in [0, t^*]$ (ya que $w(s_1(t^*), t^*) > 0$, y $w(s_2(t), t) < 0$ cuando $t > 0$).

Pasamos a la investigación detallada de las líneas de nivel cero para w en $G_T \cap \{t \leq t^*\}$ basándonos en los resultados del teorema 1. Del teorema y comentarios que de él surgen, concluimos que existen, por lo menos, tres líneas de nivel $\sigma_i^{(0)}(t)$, $i = 1, 2, 3$ en G_T con $\sigma_i^{(0)}(t^*) = 0$, las cuales están definidas para todos los valores de t de $(t_k, t^*]$, $t_k \in (0, t^*)$, $t_k > t_1$. Notemos que $\lim_{t \rightarrow t_k} \sigma_i(t)$ existe, o sea el conjunto de ceros para w no puede ser “zigzagueante”. Para convencerse de esto puede usarse el teorema 1 y entonces el análisis dependerá del comportamiento de w en las fronteras “laterales” de $G_T \cap \{t \leq t^*\}$. Es útil presentar la demostración fundamentada únicamente en que la función v es analítica, y por lo tanto, en que la función w es analítica con respecto a la variable t .

Es válido el desarrollo siguiente: $w(\nu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\nu)(t - t_k)^n$, con los coeficientes $c_n(\nu) = \frac{1}{n!} (\frac{\partial}{\partial t})^n w(\nu, t_k)$, que se igualan a cero en algún intervalo I_i , sobre la recta $t = t_k$, asumiendo el comportamiento “zigzagueante” de la línea de nivel $\sigma_i^{(0)}(t)$.

Lo último significa que

$$\alpha w_{\nu\nu} + \beta w_{\nu}^2 = 0$$

en I_i , o sea $w_t = 0$ para $\nu \in I_i$. Por inducción, utilizando la fórmula de Leibniz obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1}w = \sum_{s \leq n} \binom{n}{s} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-s} w_{\nu\nu} + \beta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n w_{\nu}^2 = 0$$

en I_i , para $n = 0, 1, 2, \dots$. Llegamos a la contradicción con la estructura del conjunto de los ceros para la función w .

La aplicación sucesiva de este procedimiento con el teorema 1 permite, tomando en cuenta que el conjunto de los “tiempos” t es discreto, donde $w(\cdot, t)$ tiene ceros multiplicativos, obtener la existencia del intervalo máximo $[t_1, t^*]$ para la prolongación de $\sigma_i^{(0)}$.

Nos interesa el problema sobre la prolongación de $\sigma_i^{(0)}$ a través de $t = t_1$. Para esto consideremos el entorno cerrado del punto (ν_i, t_1) (donde $\nu_i = \lim_{t \rightarrow t_1} \sigma_i^{(0)}(t)$) del tipo $N_i = [\nu_i - \varepsilon_i, \nu_i + \varepsilon_i] \times [t_1 - \delta_i, t_1 + \delta_i]$ con ε_i, δ_i pequeños tales que $w(\nu_i \pm \varepsilon_i, t) \neq 0$ para todo $t \in [t_1 - \delta_i, t_1 + \delta_i]$. La existencia de tal entorno se garantiza, por lo menos, para dos líneas de nivel, ya que una de las curvas $\sigma_i^{(0)}$ puede “salir” en la frontera s_1 en el punto $t = t_1$. Entonces aplicando el teorema 1 a w en N_i obtenemos la prolongación de $\sigma_i^{(0)}$ a través de la recta $t = t_1$. Esto implica que los ceros de la función w para $t < t_1$, quedan agotados por dos líneas de nivel. En el caso contrario obtenemos una contradicción con el número de ceros de w cuando $t = 0$. De este modo, el orden del cero multiplicativo para w es igual a tres y $w_{\nu} \neq 0$ a lo largo de las curvas $\sigma_i^{(0)}$ (ver Figura 1). Así pues, volviendo atrás hacia v , obtenemos que para v_{xx} el cero es regular, o sea $(p_x, p_t) \neq 0$ en el conjunto $p^{-1}(\{0\}) \cap P_T \cap \{t \leq t^*\}$.

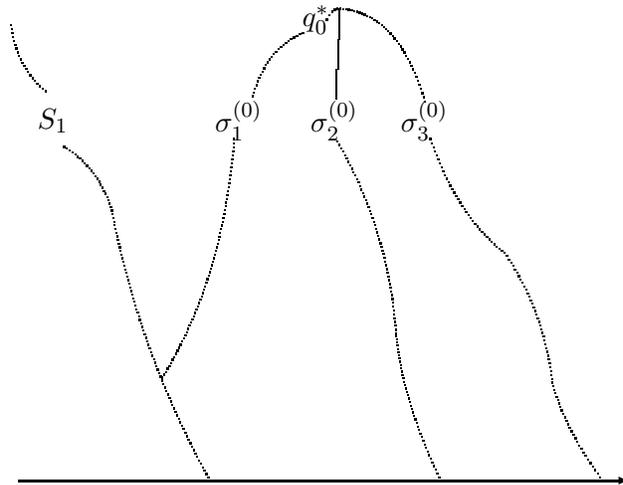


Figura 1

Consideremos las curvas equipotenciales (curvas de nivel) para v_{xx} y v_x . De lo arriba dicho y del teorema sobre la función implícita, surge que existe una curva suave de la

forma $\lambda = \lambda(t)$ en $P_T \cap \{x < 0\}$, que pasa por el punto q^* a lo largo del cual $v_{xx} \equiv 0$ y $\partial\{(\lambda(t), t)\} \notin (\{t = 0\} \cup \{x = 0\})$. De (2) y de que $v_{xxx}(\lambda(t), t) \neq 0$ obtenemos $v_{xt}(\lambda(t), t) \neq 0$, o sea el conjunto $\{(\lambda(t), t)\}$ es regular para v_x .

Sea (x_λ, t_λ) un punto cualquiera del conjunto $\{(\lambda(t), t)\}$ y $v_x(x_\lambda, t_\lambda) = a_\lambda$. Entonces existe un entorno $N_\delta = (x_\lambda - \delta, x_\lambda + \delta) \times (t_\lambda - \delta, t_\lambda + \delta)$ en P_T y una función $\rho_\lambda(x) \in C^\infty(x_\lambda - \delta, x_\lambda + \delta)$ tal que ρ_λ cubre un conjunto del tipo $\{(x, t) \in P_T | v_x = a_\lambda\}$ en N_δ . Con relación a ρ_λ es conocido lo siguiente: ρ_λ alcanza un máximo relativo en el punto (x_λ, t_λ) , $v_{xx}(x, \rho_\lambda(x))$ tiene signos algebraicos diferentes en los intervalos $x_\lambda - \delta < x < x_\lambda$ y $x_\lambda < x < x_\lambda + \delta$. La demostración de esta afirmación se lleva a cabo igual que en el Lema 5.1 [6].

Representamos a través de $\rho_\lambda^-, \rho_\lambda^+$, las ramas de ρ_λ correspondientes al gráfico de la función ρ_λ en los intervalos $x_\lambda - \delta < x < x_\lambda$ y $x_\lambda < x < x_\lambda + \delta$; ρ_λ^- y ρ_λ^+ , pueden ser prolongadas, como funciones de la variable t hasta las fronteras ∂P_T . Más exactamente, las curvas $\rho_\lambda^-, \rho_\lambda^+$, que “salen” del punto (x_λ, t_λ) terminan en ζ_1 y $\{t = 0\}$ respectivamente, y $v_{xx}(\rho_\lambda^\pm(t), t)$ es del mismo signo para $t < t_\lambda$. Para ρ_λ^+ , esto surge de lo siguiente: en las coordenadas $\{\nu, \eta\}$ asociadas con el punto (x_λ, t_λ) , la línea de nivel de la función w_ν , la cual se encuentra entre $\sigma_2^{(\lambda)}, \sigma_3^{(\lambda)}$, y que sale del punto q_λ^* a lo largo de la cual $w_\nu = 0$ y $w_{\nu\nu} \neq 0$ cuando $t < t^*$ corresponde a ρ_λ^+ . Esta equipotencial se puede prolongar hasta $t = 0$. Por lo que respecta a ρ_λ^- , existe una prolongación ρ_λ^- como función de la variable t en un intervalo máximo con un punto “finito” sobre ζ_1 . La demostración está en el anexo. Estas curvas se encuentran “arriba” y “abajo” de la equipotencial λ respectivamente (Fig. 2).

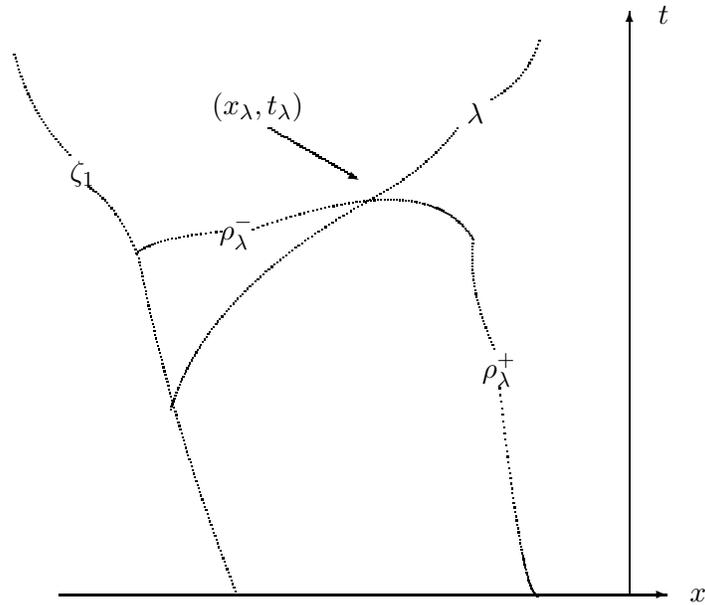


Figura 2

Entonces, cambiando (x_λ, t_λ) a lo largo de λ obtenemos las equipotenciales $\rho_{\lambda(t)}^-, \rho_{\lambda(t)}^+$ de las mismas propiedades.

La construcción realizada indica que las equipotenciales de la familia $\{\rho_{\lambda(t)}^-\}$ son tales que “intersecan” la región $D_{\zeta_1, \lambda}$, limitada lateralmente por las curvas $\zeta_1 = \zeta_1(t)$ y $\lambda = \lambda(t)$, por arriba por la recta $t = t^*$, en los puntos de intersección $a_{\rho_{\lambda(t_i)}^-}$ de la familia $\{\rho_{\lambda(t_i)}^-\}$ de la frontera libre $\zeta_1 = \zeta_1(t)$ los valores de la derivada v_x son tales que $v_x(a_{\rho_{\lambda(t_i)}^-}) > v_x(a_{\rho_{\lambda(t_j)}^-})$ cuando $t_i < t_j$ ($t_i, t_j \leq t^*$), que surge de la condición $v_{xx}(x, 0) < 0$. Entonces, aplicando el teorema del valor medio obtenemos

$$v_x(a_{\rho_{\lambda(t_j)}^-}) - v_x(a_{\rho_{\lambda(t_i)}^-}) = \frac{d}{dt}v_x(\zeta_1(t_c), t_c)(t_j - t_i) \equiv mv_x v_{xx}(\zeta_1(t_c), t_c)(t_j - t_i),$$

donde la parte derecha es positiva y la parte izquierda es negativa. La contradicción obtenida significa que la suposición sobre que la segunda derivada v_{xx} es de signo variable es falsa. Entonces demostramos la convexidad de la función v_{xx} con respecto a la variable x .

3. Anexo

Demostremos que $\rho_{\lambda}^+(t)$ puede ser prolongada, como función en t hasta la línea $t = 0$. Probemos la existencia de tal prolongación para la equipotencial $\rho_{\lambda^*}^+(t)$, la cual sale del punto q^* (análogamente se demuestra para cualquier otra curva de la familia ρ_{λ}^+).

Pasamos a las coordenadas (ν, η) asociadas al punto q^* y consideremos la función w . Recordemos que en la situación considerada arriba se probó que las líneas de nivel cero de la función w están limitadas a $\sigma_i^{(0)}$, $i = 1, 2, 3$. Una de las cuales, digamos $\sigma_1^{(0)}$, “sale” en la frontera s_1 en el punto $t = t_1$, y $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_3^{(0)}$ se terminan en la recta $t = 0$ en los ceros de la función $w(\nu, 0)$. Consideremos la línea de nivel cero de la derivada w_{ν} , la cual se encuentra entre $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_3^{(0)}$. Vamos a representarla a través de ζ^* . Es fácil ver, que ella corresponde a la equipotencial $\rho_{\lambda^*}^+$. Entonces, es suficiente demostrar esta afirmación para ζ^* .

Notemos que la derivada $w_{\nu} \neq 0$ en $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_3^{(0)}$. Entonces la equipotencial ζ^* , prolongada hasta el intervalo máximo (t^{**}, t^*) , $t^{**} > 0$, no puede terminar en las curvas $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_3^{(0)}$. Además,

$$\lim_{t \rightarrow t^{**}} \zeta^*(t)$$

existe. Según el teorema 1, utilizado para la ecuación w_{ν} en la región limitada “lateralmente” por las curvas $\sigma_2^{(0)}$, $\sigma_3^{(0)}$ y por abajo por la recta $t = 0$, el número de los ceros de la función w_{ν} no crece con el tiempo. Como $w_{\nu}(\nu, 0)$ tiene un solo cero simple, obtenemos $w_{\nu\nu}(\zeta^*(t^{**}), t^{**}) \neq 0$. Entonces, el intervalo (t^{**}, t^*) no es el intervalo máximo, lo que significa que $t^{**} = 0$.

La existencia para la prolongación para ρ_{λ}^- hasta la frontera s_1 surge de lo siguiente: dentro de la región limitada “lateralmente” por las curvas s_1, λ por arriba por la recta $t = 0$, la segunda derivada $v_{xx} \neq 0$ y $\frac{d}{dt}v_x(\lambda(t), t) \neq 0$.

Finalmente, notemos que los casos cuando $w(\nu, 0)$ es monótona ($w_{\nu}(\nu, 0) > 0$ ó $w_{\nu}(\nu, 0) < 0$), y por consiguiente $w(\nu, 0)$ se iguala a cero sólomente en un punto, no se realizan. Cuando $t = 0$ siempre existe un valor de la variable ν^* tal, que $w_{\nu}(\nu^*, 0) = 0$.

Referencias

- [1] Angenent, S.B. (1988) “The zero set of a solution of a parabolic equation”, *J. Rein Angew. Math.*, **390**: 79–96.
- [2] Graveleau, J.L.; Jamet, P. (1971) “A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations”, *SIAM J. Appl. Math.* **20**(2): 199–222.
- [3] Benilan, Ph.; Vázquez, J.L. (1987) “Concavity of solutions of the porous medium equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299**: 81–99.
- [4] Aronson, D.G.; Vázquez, J.L. (1987) “Eventual C^∞ -regularity and concavity for flows in one dimensional porous media”, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **99**: 329–348.
- [5] Angenent, S.B. (1988) “Analyticity of the interface of the porous media equation after the waiting time”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102**(2): 129–336.
- [6] Knerr, B.F. (1977) “The porous medium equation in one dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234**(2): 381–415.