Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1998 **5**(2) : 177–185
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

DINMICA DE UNA HUELLA PLANA TURBULENTA ALEJADA

Vladimir N. Grebenev*

Recibido: 5 noviembre 1997

Resumen

A partir de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética de la turbulencia estudiada, la dimámica de una huella plana y turbulenta en un medio líquido incomprensible. Para el caso de una corriente líquida de una huella lejana se demuestra que el modelo considerado est bien planteado, y como se estudian las propiedades asintóticas de la solución.

Palabras clave: mecnica de fluidos, turbulencia, ecuacin parablica.

Abstract

From the conservation equation of the quantity of movement and the kinetic energy of the studied turbulence, the dynamics of flat and turbulent path in a non comprehensive liquid environment. In the case of a liquid flow of a far path, it is proved that the considered model is well formulated, and the asymptotic properties of the solution are studied.

Keywords: fluid mechanics, turbulence, parabolic equation.

AMS Subject Classification: 76F99, 76N15

1. Planteamiento del problema

Las huellas turbulentas son objetos clásicos de la hidrodinmica. A ellos esta dedicado un número suficientemente grande de publicaciones de carácter tanto experimental como terico-práctico [1], [6] (a su vez en ellos se resume una bibliografía más detallada). Del

*Laboratory of Computational Hydrodinamics, Institute of Computational Technologies, Siberian Division of Russian Academy of Sciences (SDRAS), Ac. Lavrentjev Ave. 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Phone +(383-2) 34.35.70, Fax: +(383-2) 34.13.42; E-mail: vova@lchd.ict.nsc.ru; Grant RFFI No. 970100768

anlisis de los trabajos conocidos sobre huellas turbulentas se deduce la ausencia de resultados que garanticen la condición de planteamiento correcto de los correspondientes problemas de valores iniciales-frontera. Este trabajo constituye un intento por llenar este vacío. Señalemos que se cuenta con resultados [7], [8] para el estudio de corrientes turbulentas con impulso inicial total, esto ltimo significa un decrecimiento más rápido del defecto de la componente horizontal de la velocidad U_1 en comparación con $c\sqrt{e}$ (e es la energa de turbulencia) [4], i.e., con la ausencia del sumando $\nu_T\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2$, relacionado con la aparición de la energía de turbulencia (ver la ecuación (2) más abajo). Los cálculos numéricos [6] fundamentan su influencia sustancial en las leyes de la expansin de la huella.

Para la descripción de la corriente en una huella turbulenta lejana se utiliza el siguiente modelo [1],[2]:

$$U_0\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle+\frac{\partial}{\partial x}(\langle u'^2\rangle-\langle v'^2\rangle), \tag{1}$$

donde U_0 es la velocidad del fluido de navegación, $U_1 = U_0 - U$ es el defecto de velocidad del movimiento promediado en la dirección del eje x, $\langle u'v'\rangle$, $\langle u'^2\rangle$, $\langle v'^2\rangle$ son los potenciales tangente y normal de Reynolds. Nosotros vamos a suponer que el nmero de turbulencia de Reynolds es suficientemente grande. El sistema de coordenadas está relacionado con el cuerpo de manera que su centro está sobre el eje y está dirigido hacia arriba, y la dirección del eje x coincide con la dirección de la velocidad del fluido fundamental.

La ecuación (1) no es cerrada; en el presente trabajo, al igual que en [3], se supone

$$\langle u'v'\rangle=\nu_T\frac{\partial U_1}{\partial y},\quad \langle u'^2\rangle=\langle v'^2\rangle=\frac{2}{3}E.$$

Como complemento a la ecuacin (1) se considera la ecuación de transformación de la energía de turbulencia

$$U_0\frac{\partial E}{\partial x}=\nu_T\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\nu_T\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}^2\right)-c\nu_T\frac{E^2}{L^2}. \tag{2}$$

En (1) y (2), c es una constante positiva empírica, ν_T es la viscosidad turbulenta, la que se determina de la relación $\nu_T = \chi U_{1\,\text{máx}}L$, donde χ es una constante empírica; $U_{1\,\text{máx}}(x)$ es el valor máximo de U_1 para cada valor fijo de la variable x; $L = L(x)$ es la escala de la turbulencia.

En calidad de distribución de valores de U_1 y E se definen funciones que satisfacen los datos experimentales [1]. Para $x = x_0$ se supone:

$$U_1(y,x_0)=U_0(y),\quad E(y,x_0)=E_0(y), \tag{3}$$

donde $U_0(y)$, $E_0(y)$ son funciones positivas arbitrarias respecto a y y decrecientes, tales que: $U_0(y)\to 0$, $E_0(y)\to 0$ para $|\,y\,|\to\infty$.

Las variables conocidas son U_1, E, y la escala de turbulencia L, la cual se supone igual:

$$L=\frac{1}{2}\left(L_1+L_2\right), \tag{H1}$$

donde L_1 y L_2 se determinan de las igualdades $U_1(L_1(x),x) = \frac{1}{2}U_1(y_{\text{máx}}(x),x)$ para $L_1(x) < y_{\text{máx}}(x)$, y $U_1(L_2(x),x) = \frac{1}{2}U_1(y_{\text{máx}}(x),x)$ para $L_2(x) < y_{\text{máx}}(x)$. Aquí, con $y_{\text{máx}}(x)$ se está designando el valor de la variable sobre la que se alcanza el $\text{máx}_{y\in\mathbb{R}} U_1(y,x)$.

El modelo presentado para la corriente del líquido de la huella alejada, en correspondencia con los conocimientos que tenemos sobre los flujos libres turbulentos es simple, sin embargo hay algunos aspectos que todavía no se han estudiado. Vamos a estudiar la estabilidad y unicidad de soluciones del problema (1) – (3), as como el comportamiento asinttico de la solución cuando $x \to \infty$.

Comencemos por el estudio de la solución automodelada. El modelo matemtico con datos variables se estudia en el trabajo [3], en el cual la solución automodelada se busc en la forma:

$$F(\eta) = \frac{U_1}{\widetilde{U}_1}, \quad \eta = \frac{y}{\widetilde{L}}, \quad H(\eta) = \frac{E}{\widetilde{E}},$$

con la utilización de los valores catactersticos de la velocidad $\widetilde{U}_1$, la semiamplitud de la huella $\widetilde{L}$ de turbulencia $\widetilde{E}$. Más adelante planteamos la construcción de la solución automodelada del problema utilizando el enfoque convencional [9], para el caso de las ecuaciones parablicas, encontrando en este caso los valores numéricos de la constante c.

2. Solución automodelada

Introduzcamos una nueva variable $t = \theta(x) \equiv \int_{x_0}^{x} U_0^{-1}\nu_T(s)\,ds$. Entonces las ecuaciones (1) , (2) se pueden escribir

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \tag{1'}$$

$$e_t = \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - c\frac{e}{l^2}, \quad (y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \tag{2'}$$

donde $u(y,t) = U_1(y,\theta^{-1}(t))$, $e(y,t) = E(y,\theta^{-1}(t))$ y $l(t) = L(\theta^{-1}(t))$. Las condiciones (3) toman la forma:

$$u(y,0) \equiv u_0(y) = U_0(y), \quad e(y,0) \equiv e_0(y) = E_0(y). \tag{3'}$$

La ecuación (1′) tiene en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ una solución automodelada bien conocida:

$$u_a(y,t) = \frac{f_a(\xi)}{\sqrt{1+t}}, \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{1+t}}, \tag{4}$$

donde la $f_a(\xi) = \frac{F_0}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right), \xi \in \mathbb{R}$. La solución se alcanza cuando la función inicial $u_0 \equiv u_a(y,0) = \frac{F_0}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)$, donde F_0 es una constante positiva igual a $|u_a(y,o)|_{L^1(\mathbb{R})}$.

La función $l = l(t)$ se define tomando en cuenta la simetría u_a, de la igualdad $u_a(l(t),t) = \frac{1}{2}u_a(0,t)$. Por la forma de la solucin u_a es fácil encontrar l, la que representamos por l_a y

$$l_a(t) = 2\sqrt{\ln 2(1+t)}. \tag{5}$$

La solución automodelada de la ecuación $(2')$ se busca de la forma:

$$e_a(y,t) = (1+t)^\alpha \theta_a(\xi), \tag{6}$$

donde α es una constante arbitraria, y $\theta_\alpha(\xi) > 0$ es una función diferenciable. Sustituyendo (5),(6) y $u_{ay} = -\frac{F_0}{4\sqrt{\pi}}\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)(1+t)^{-1}$ en $(2')$, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}\alpha(1+t)^{\alpha-1}\theta_a - \frac{1}{2}(1+t)^{\alpha-1}\xi\theta_{a\xi} &= (1+t)^{\alpha-1}\theta_{a\xi\xi} + \\ &+\frac{F_0^2}{16\pi}\xi^2(1+t)^{-2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) - \frac{c}{4\ln 2}(1+t)^{\alpha-1}\theta_a.\end{aligned}$$

De aquí se deduce la necesidad de que $\alpha = -1$. En tal caso los factores temporales en la ecuación se pueden simplificar, y se obtiene:

$$\theta_{a\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi\theta_{a\xi} + (1 - \frac{c}{4\ln 2})\theta_a = -\frac{F_0^2}{16\pi}\xi^2 \exp(-\frac{\xi^2}{2}). \tag{7}$$

Tomando en cuenta la simetría es necesario exigir, que se cumpla la condición

$$\theta_a'(0) = 0. \tag{8}$$

Debido a las propiedades de $e_0(y)$ en infinito, suponemos que se cumplen las condiciones de frontera

$$\theta_a(\infty) = 0. \tag{9}$$

As, el problema de la construcción de la solución automodelada e_a se redujo al problema de frontera (7)—(9). La sustitución $z = \phi(\xi)\theta_a(\xi)$, donde $\phi(\xi) \neq 0$ es la solución de la ecuación homogénea (7), conduce a la ecuación:

$$z_{\xi\xi} + (\frac{2\phi_\xi}{\phi} + \frac{\xi}{2})z_\xi = -\frac{F_0^2}{16\pi\phi}\xi^2 \exp(-\frac{\xi^2}{2}),$$

la cual se integra fcilmente. Es conocido que la ecuación homogénea (7) tiene soluciones con diferente asínttica para $\xi \to \infty$ y que dependen del parámetro c. De esta manera, la construcción de $\theta_a(\xi)$ está relacionada con la escogencia del parámetro c, el cual se propone seleccionar de manera que la solución obtenida satisface los datos experimentales del trabajo [1]. Poniendo $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $c = 6\ln 2$, $D \equiv \frac{F_0^2}{4\pi}$, $h(\eta) = \theta_a(\sqrt{2}\eta)$, la ecuación (7) toma la siguiente forma

$$h_{\eta\eta} + \eta h_\eta - h = -D\eta^2 \exp(-\eta^2),$$

cuya solución en consonancia con las condiciones de frontera $h_\eta(0) = h(\infty) = 0$, es igual

$$h = \eta\{\frac{3}{2}D\sqrt{\pi}[1-\Phi(\eta\sqrt{2})] - \frac{(1+2D)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}[1-\Phi(\eta)]\} + (1+2D)\exp(-\frac{\eta^2}{2}) - 2D\exp(-\eta^2), \tag{10}$$

donde $\Phi(\rho) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds$, $D = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ (se define de la condición (8) y como se demuestra en [3], está cercana a los datos experimentales de [1]. Una propiedad interesante de la función h es la presencia del máximo ubicado en el punto $\eta^* > 0$. El valor numérico encontrado para la magnitud c en la forma $c = 6\ln 2$ será importante para el análisis de la estabilidad asintótica.

3. Construcción de la solución del problema para el caso de condiciones iniciales no simétricas

Consideremos las funciones positivas y continuas, y en general no simétricas, $u_0(y), e_0(y)$ las cuales además tienen integrales finitas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)dy < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} e_0(y)dy < \infty. \tag{H2}$$

Para u, e es fácil escribir las soluciones del problema en la forma de potenciales caloríficos utilizando la fórmula de Poisson; el problema fundamental en este caso será determinar la función $l(t)$.

Para el análisis de este problema supongamos que:

$$u_0 \in C^1(\mathbb{R}), u_{0y} > 0(< 0) \text{ y } y < y_{\text{máx}}(0)(> y_{\text{máx}}(0)). \tag{H3}$$

Para $p = u_y$, sea $N_p(t)$ el número de cambios de signos de la función $p(y,t)$ en la recta numrica $\mathbb{R}$ para t fijo. Respecto a $p(y,t)$, la cual satisface la ecuación:

$$p_t = \frac{\partial^2}{\partial y^2} p, \tag{11}$$

se sabe que para cada $t > 0$ fijo, verifica la desigualdad: $N_p(t) \leq N_p(0)$. Esta afirmación es una consecuencia del principio fuerte del máximo para ecuaciones parabólicas.

Mostremos que bajo ciertas condiciones sobre $u_0(y)$, $N_p(t)$ no cambia con el transcurso del tiempo, i.e. $N_p(t) = N_p(0)$. Observemos que en general esta afirmación es falsa. Por ejemplo, se puede considerar el caso donde la solución de la ecuación de la conducción térmica, que tiene inicialmente un cambio de signo, y luego se hace positiva. Esto sucede, por ejemplo, si $p(y,0) = M\delta(y+a) - \delta(y) + M\delta(y-a)$, donde δ denota la funcin delta, y la constante M se considera mayor que $1/2$.

En nuestro caso se cumple el siguiente lema:

Lema 1 *Supongamos que para la función u_0 se cumplen las condiciones* $(H2)$ *y* $(H3)$. *Entonces $N_p(t) = N_p(0) = 1$, para $t > 0$.*

DEMOSTRACIN: Supongamos que existe $t = t_0 > 0$ para el que $N_p(t_0) = 0$ y $p(y,t_0) > 0$, entonces se cumple la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y,t_0)\, dy > \int_a^{\infty} u(a,t_0)\, dy \equiv \text{const} \int_a^{\infty} dy = \infty,$$

donde $|a| < \infty$ lo que contradice la conservación del impulso total del defecto de velocidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y,t_0)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\, dy < \infty.$$

Análogamente se analiza el caso $p(y,t_0) < 0$. $\square$

Del lema se obtiene directamente la definición de la función $y_{\text{máx}} = y_{\text{máx}}(t)$, la cual asigna a cada $t > 0$ el valor $y_{\text{máx}}(t)$, sobre el que se toma el valor $\text{máx}_{y\in\mathbb{R}}\, u(y,t)$.

Lema 2 *La función $y_{\text{máx}}(t)$ es continua para $t \geq 0$, y analtica para $t > 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $p(y,t)$, así como los ceros de esta función. Supongamos que $p(y_0,t_0) = 0$ y al mismo tiempo, $\frac{\partial^n}{\partial y^n} p(y_0,t_0) = 0$ $n = 1,\ldots,k$ (o sea en el punto (y_0,t_0) la función p tiene un cero múltiple de orden k). Por la analiticidad de $p(y,t)$, el orden k de multiplicidad del cero es finito ($k < \infty$). Aún más, para las soluciones de la ecuación de conducción térmica, se sabe que para $t > 0$ los ceros de la solución son simples (esto es consecuencia de la representación de la solución por medio de polinomios hermitianos). De esta manera, $\frac{\partial}{\partial y} p \neq 0$ en los puntos donde $p = 0$. La aplicación del teorema sobre la función implcita da como solución de la ecuación $p(y,t) = 0$ a la función $y = y(t)$ (en general, solamente en una vecindad del punto (y_0,t_0)), la cual es analtica respecto a t. No es difcil verificar que $y = y(t)$ puede ser prolongada hasta $t = 0$; basta demostrar que no existe un punto $\tau \in [0,t_0)$ tal que $y(t) \to \pm\infty$ cuando $t \longrightarrow \tau$.

Supongamos $y(t) \to -\infty$ para $t \to \tau$. Representemos por D al dominio acotado inferiormente por la curva $y(t)$ y superiormente por la recta $t = t_0$. Entonces, aplicando el principio del máximo a la función p en el dominio D, llegamos a una contradicción.

Señalemos, que la función analtica $y(t)$ obtenida para $t > 0$, coincide con la función $y_{\text{máx}}$ definida en el lema 1.

Pasemos ahora a encontrar la función $l(t)$, para ello consideremos $v(y,t) = u(y,t) - \frac{1}{2}u(y_{\text{máx}}(t),t)$. Clculos directos muestran que v satisface a la ecuación de conducción del calor, y que el número de cambios de signo $N_v(0)$ para $v(y,0)$ es igual a 2. □

Lema 3 $N_v(t) \equiv N_v(0) = 2$ *para $t > 0$.*

La demostración se obtiene fácilmente de las propiedades de $u(y,t)$ establecidas anteriormente.

Del lema 3 se deduce, que para $y < y_{\text{máx}}(t)$ $(y > y_{\text{máx}}(t))$, para cada $t \geq 0$, está definida la función $l_1(t)$ (respectivamente $l_2(t)$), como solución de la ecuación $v(y,t) = 0$.

Aplicando el teorema sobre la función implícita a v, no es difícil demostrar que se cumple el siguiente lema.

Lema 4 *Para $i = 1,2$ las funciones $l_i(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y analticas para $t > 0$.*

De esta forma hemos establecido que se cumple el siguiente teorema.

Teorema 1 *Si en el problema $(1')-(3')$ se satisfacen las condiciones $(H2)$, $(H3)$, entonces existen funciones $e(y,t)$, $u(y,t)$, $l(t)$ analticas para $t > 0$ y continuas para $t \geq 0$, tales que e, u satisfacen las ecuaciones $(1')$, $(2')$, con las condiciones iniciales $(3')$ y $l(t)$ $(\equiv L(\theta^{-1}(t))$ con la condicin $(H1)$. Al mismo tiempo e, u, l están definidas de manera única.*

4. Estabilidad de la solución automodelada

Investiguemos el comportamiento asinttico de la solución del problema $(1') - (3')$.

Para las funciones u, l esta cuestión se resuelve fácilmente y es bien conocida de la representación de la función $u(y,t)$ como un potencial calrico. Recordemos solamente que el valor mínimo del defecto de velocidad $u_{\text{máx}}(t)$ varía para valores grandes de t según la ley

$$u_{max}(t) \simeq \frac{F_0}{2\sqrt{\pi(1+t)}}, \quad t \to \infty,$$

y correspondiente

$$l(t) \simeq 2\sqrt{\ln 2(1+t)}, \quad t \to \infty.$$

En lo que respecta al comportamiento asintótico de la función $e(y,t)$ ($\theta(\xi,t) = (1+t)e(\xi\sqrt{1+t})$ denota la representación automodelada de la solución) para $t \longrightarrow \infty$, se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2 *Es vlida la estimación*

$$(1+t)|e(\cdot,t) - \theta_a(\cdot)|_{\mathbb{R}_+} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty.$$

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por $w_0^+ = \text{máx}\{e_0(y), e_a(y,0)\}$, $w_0^-(y) = \text{mín}\{e_0(y), e_a(y,0)\}$ y por $w^\pm(y,t)$, denotemos las soluciones de la ecuación ($2'$) con los datos iniciales, $w^\pm(y,0) = w_0^\pm$. Aplicando el teorema de comparacin obtenemos $w^- \le u \le w^+$. Señalemos que

$$e_a(y,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}), \tag{12}$$

la cual se deduce de la igualdad (ver punto 2)

$$4\int_0^\infty h\,d\eta = D\int_0^\infty \exp(-\eta^2)d\eta.$$

Denotemos por $z^+ = w^+ - e_a$, entonces z^+ satisface a la ecuación

$$z_t^+ = \frac{\partial^2 z^+}{\partial y^2} + u_y^2 - u_{ay}^2 - c\frac{z^+}{l_a^2} + cw^+(\frac{1}{l_a^2} - \frac{1}{l^2}). \tag{13}$$

Poniendo $z^+ = \exp\{-c\int_0^t l_a^{-2}(s)ds\}v^+ = \frac{v^+}{(1+t)^{3/2}}$, (la integral se calcula después de la satisfacción bajo el signo exponente de los valores $c = 6\ln 2$ y $l_a = 2\sqrt{\ln 2(1+t)}$), se obtiene

$$\begin{aligned} v^+(y,t) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty v_0^+(\xi+y)\exp(-\xi^2/4t)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^\infty [u_y^2(y+\xi,\tau) \\ & -u_{ay}^2(y+\xi,\tau)]\frac{(1+\tau)^{3/2}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\{-\xi^2/4(t-\tau)\}\,d\xi\,d\tau \\ & +\frac{c}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^\infty w^+(y+\xi,\tau)(\frac{l^2-l_a^2}{l_a^2 l^2})\frac{(1+\tau)^{3/2}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\{-\xi^2/4(t-\tau)\}\,d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Utilizando expresiones asintóticas exactas para $u_y(y,t)$ y $l(t)$ para $t \to \infty$, es fácil probar que se cumplen las fórmulas: $|u_y^2 - u_{ay}^2| = o(t^{-2})$, $|l^2 - l_a^2|(l_a l)^{-2} = o(t^{-1})$, $\sup_{y\in\mathbb{R}} w^+(y,t) = O(t^{-1})$, para $t \to \infty$. Entonces de (14) considerando (12) obtenemos que para $t \to \infty$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} z^+(y,t) \equiv \frac{1}{(1+t)^{3/2}}\sup_{y\in\mathbb{R}} v^+(y,t) \simeq \frac{1}{(1+t)^{3/2}}[\frac{M_1}{\sqrt{t}} + o(\sqrt{t})].$$

De aquí, después de la deducción de una estimación análoga para $z^- = e_a - w^-$, se deduce que $\sup_{y\in\mathbb{R}} |e(y,t) - e_a(y,t)| = o(t^{-1})$, $t \to \infty$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Es posible una convergencia ms rápida de e hacia la solución automodelada e_a en el caso cuando consideramos la estabilidad asintótica de la solución del problema automodelado ante solo la perturbación de la función inicial $e_a(y,0)$. A partir de (12) y de la representacin de v^+ en forma de un potencial calorífico $v^+(y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} v_0^+(\xi) \exp(-|y-\xi|^2/4t)\, d\xi$, de la solución de la ecuación de la conducción térmica

$$v_t^+ = v_{yy}^+,$$

obtenemos

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} v^+(y,t) = O(t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} v_0^+(\xi) \exp(-\xi^2/4t) d\xi),$$

y por eso $\sup_{y\in\mathbb{R}} z^+(y,t) = O(t^{-2})$. Una estimacin anloga se cumple para z^- y por consiguiente $\sup_{y\in\mathbb{R}} |e(y,t) - e_a(y,t)| = O(t^{-2}), t \to \infty$.

El autor agradece a G.G. Chernik por el planteamiento del problema.

Referencias

[1] Jintse, I.O. (1963) *Turbulencia*. Fizmatgiz, Mosc [en ruso].

[2] Towshend, A.A. (1959) *Estructura de un Flujo Turbulento con Desviacin Lateral*. I.L., Mosc [en ruso].

[3] Skurin, P. I. (1970) "Representacin analtica del perfil de energa de pulsacin de una huella", *Rev. de Ing. Fsica* **18**(5): 916–918 [en ruso].

[4] Sabelnikov, V.A. (1975) "Sobre algunas singularidades de las corrientes turbulentas con impulso total nulo", *Notas Cientficas del TSAGI* **6**(4): 71–74 [en ruso].

[5] Abramovich, G.N.; Hirshovich, T.A.; Krashennikov, C.Y.; Sekandov, A.N.; Cmirnova, I. P. (1984) *Teora de Jets Turbulentos*. Nauka, Mosc [en ruso].

[6] Fedrova, N.N.; Chernij, G.G. (1994) "Sobre la modelacin numrica de huellas turbulentas planas", *Modelacin Matemtica* **6**(10): 24–34 [en ruso].

[7] Kamin, S.; Vzquez, J. (1992) "The propagation of turbulent burst", *Euro. J. Appl. Math.*: 263–272.

[8] Grebenev, V.N. (1997) "Difusin de calor en una huella turbulenta plana sin impulso", *Revista de Matemtica Numrica y Fsica Matemtica* **37**(7): 878–886 [en ruso].

[9] Samarski, A.A.; Galaktionov, V.A.; Kurdiumov. S.P.; Mijailov, A.P. (1987) *Regmenes de Afinamiento en Problemas para Ecuaciones Cuasilineales Parablicas*. Nauka, Mosc [en ruso].