Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1999 **6**(1) : 27–34
cimpa – ucr – ccss   issn: 1409-2433

CASI-ORTOGONALIDAD Y PROXIMIDAD EN L^2 DE MARTINGALAS PII EN CASI INTERVALOS

Jaime Lobo Segura*

Recibido: 14 Setiembre 1998

Resumen

El autor de este trabajo introdujo en [2] la noción de proceso de incrementos independientes en casi intervalos, del que se estudió una descomposición en componentes con ciertas propiedades de regularidad. En este trabajo se profundiza el estudio de la descomposición de una martingala PII en sus dos componentes martingalas, dependientes de un parámetro, en relación con las propiedades que denominamos de casi-ortogonalidad y de proximidad en L^2.

Palabras clave: Proceso PII, martingalas L^2- regulares, martingalas totalmente discontinuas, casi-ortogonalidad, proximidad en L^2.

Abstract

It was introduced in [2] the notion of process with independent increments in near-intervals (PII), establishing the existence of a decomposition into components with certain regularity properties. In this work we deepen the study of such decomposition for a PII martingale, the components being one-parameter martingales with almost-orthogonality and L^2-proximity properties.

Keywords: PII process, L^2-regular martingales, totally discontinuous martingales, almost-orthogonality, L^2-proximity.

AMS Subject Classification: 60G20, 60G44

1 Preliminares sobre procesos PII

Recuerdo las nociones y resultados sobre procesos PII en casi intervalos introducidos en [1] y [2]. Nos damos un espacio finito (Ω, P) de probabilidades, y un casi intervalo T

*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

de la recta de extremos a, b. La longitud de T es el valor $b - a$. Si $t + dt$ denota el punto de T contiguo a t a la derecha, entonces para cualquier proceso $X = (X_t, t \in T)$ en (Ω, P) indexado por T el incremento en t de X es $dX_t = X_{t+dt} - X_t$. Se supone dada una filtración en (Ω, P). Decimos que un proceso X es de F-incrementos independientes ($F-$PII) si para cada t la variable X_t pertenece a F_t y el incremento dX_t es independiente de cualquier variable de F_t.

Para cada $\varepsilon > 0$ asociamos al proceso X los procesos $S(dX^{(\varepsilon)})$, y N_ε tales que $S(dX^{(\varepsilon)})_a = 0, dS(dX^{(\varepsilon)})_t = (dX_t)^{(\varepsilon)} = dX_t 1_{\{|dXt| \leq \varepsilon\}}; N_{\varepsilon,a} = 0, dN_{\varepsilon,t} = 1_{\{|dXt| > \varepsilon\}}$.

Se tiene $dX_t - dX_t^{(\varepsilon)} = dX_t dN_{\varepsilon,t}$ en todo t de T. En [2] se probó lo siguiente:

R1 (Teorema 3, [2]): Si X es $F-$PII, entonces para $\varepsilon > 0$ los procesos $S(dX^{(\varepsilon)}), N_\varepsilon$ son $F-$PII. Si X es además c.s. de fluctuación limitada y T es de longitud limitada el proceso N_ε es también c.s. de fluctuación limitada en T y además $E(N_{\varepsilon,a}) \ll \infty$.

La función esperanza de X es la función denotada por $E(X)$, definida en T por $E(X)_t = E(X_t)$. La función varianza de X es la función denotada por $\mathrm{Var}(X)$, definida en T por $\mathrm{Var}(X)_t = \mathrm{Var}(X_t)$. El proceso $X - E(X)$ es una martingala $F-$PII.

Una martingala M $F-$PII es L^2-regular en T si, para todo t, M_t es L^2, c. s. es de fluctuación limitada y su función varianza es continua en T. La martingala M es de incrementos uniformemente limitados (IUL) si existe un real positivo limitado c tal que para todo (ω, t) se cumple $|dM_t| \leq c$ para todo t en T. Tenemos el resultado siguiente:

R2 (Teorema 8, [2]): Sea M una martingala $F-$PII con la propiedad IUL, sin discontinuidades fijas, y T un casi intervalo de longitud limitada. Se cumple:

a) M es L^2-regular en T.

b) Para todo $\varepsilon > 0$ las martingalas asociadas a $S(dM - dM^{(\varepsilon)})$ y $S(dM^{(\varepsilon)})$ son L^2-regulares y no poseen discontinuidades fijas.

c) Para $\varepsilon \approx 0$, la martingala asociada a $S(dM^{(\varepsilon)})$ es c. s. continua en todo T.

2 Nociones de casi-ortogonalidad y proximidad en L^2

Siendo M una martingala que satisface las condiciones de **R2**, denotamos, para cada $\varepsilon > 0$, por $M^d(\varepsilon), M^c(\varepsilon)$ respectivamente a las martingalas asociadas a $S(dM - dM^{(\varepsilon)})$ y $S(dM^{(\varepsilon)})$. Ambas son martingalas dependientes del parámetro ε. El objetivo de este trabajo es estudiar más profundamente la estructura de las martingalas $M^d(\varepsilon)$ y $M^c(\varepsilon)$. Se examinarán condiciones sobre el parámetro ε que aseguran las propiedades de casi-ortogonalidad y de L^2-*proximidad* que se definen a continuación.

Dados dos procesos M, N indexados por el casi intervalo T, llamamos función covarianza de (M, N) a la función $\mathrm{Cov}(M, N)$ definida en cada t por $\mathrm{Cov}(M, N)_t = \mathrm{Cov}(M_t, N_t)$. Observemos que si M, N son $F-$martingalas entonces

$$\mathrm{Cov}(M, N)_t = \sum_{a \leq s < t} \mathrm{Cov}(dM_s, dN_s).$$

Decimos que M, N son *casi-ortogonales* si la función covarianza asociada es de valores infinitesimales en todo T. La casi-ortogonalidad es una noción no estándar y generaliza la noción clásica de ortogonalidad de procesos.

Una martingala M de F es llamada *totalmente discontinua* si para toda martingala de F c. s. continua, $F-$PII, con la propiedad L^2 , el par (M, N) es casi-ortogonal.

Decimos que las martingalas M, N son *próximas en* L^2 si $\text{Var}(M_b - N_b) \approx 0$, condición que equivale a $||M_b - N_b||_2 \approx 0$. Según la *desigualdad maximal de martingalas* (ver [1]) la proximidad en L^2 de M, N implica que $\max_{t \in T} |M_t - N_t|$ es una variable de norma en L^2 infinitesimal. En particular esto implica que c. s. se cumple la propiedad: $M_t \approx N_t$ para todo t en T.

Por convención diremos que una propiedad $P(\varepsilon)$ se cumple "para ε suficientemente grande" si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $P(\varepsilon)$ se cumple para todo $\varepsilon \geq \varepsilon_0$. Con esta convención podemos enunciar los teoremas principales:

Teorema 1 *Para ε infinitesimal suficientemente grande las martingalas $M^c(\varepsilon), M^d(\varepsilon)$ son casi-ortogonales.*

Teorema 2 *Para $\varepsilon, \varepsilon^1$ infinitesimales suficientemente grandes las martingalas $M^c(\varepsilon)$, $M^c(\varepsilon^1)$ (resp. $M^d(\varepsilon), M^d(\varepsilon^1)$) son próximas en L^2.*

Teorema 3 *Para ε infinitesimal suficientemente grande la martingala $M^d(\varepsilon)$ es totalmente discontinua.*

Corolario 1 *M admite una descomposición como la suma $N + D$ de dos martingalas L^2-regulares $F-$PII, una de ellas siendo c.s. continua y la otra totalmente discontinua. La descomposición es única en el sentido de que si $N' + D'$ es otra tal descomposición, N, N' (resp, D, D') son próximas en L^2.*

2.1 Prueba del teorema 1

Para aligerar la notación denotaremos por $\text{Cov}(\varepsilon)$ a la función $\text{Cov}(M^c(\varepsilon), M^d(\varepsilon))$. Introducimos antes un lema técnico.

Lema 1 *Para todo $\varepsilon \geq 0 : \text{Cov}(\varepsilon)_t = \Sigma_{a \leq s < t}(E(dM_s^{(\varepsilon)}))^2$. En particular la función covarianza $\text{Cov}(\varepsilon)$ es limitada en T por la función $\text{Var}(M)$ y por lo tanto limitada en T.*

PRUEBA: De la propiedad martingala de $M^c(\varepsilon)$ y $M^d(\varepsilon)$ se tiene:

$$d\text{Cov}(\varepsilon) = \text{Cov}(dM^c(\varepsilon), dM^d(\varepsilon)).$$

Por definición $dM^c(\varepsilon) = dM^{(\varepsilon)} - E(dM^{(\varepsilon)}), dM^d(\varepsilon) = dM - (dM^{(\varepsilon)} - E(dM^{(\varepsilon)}))$, y puesto que dM es centrada es fácil deducir que $\text{Cov}(dM^c(\varepsilon), dM^d(\varepsilon)) = (E(dM^{(\varepsilon)}))^2$, de donde la fórmula para $\text{Cov}(\varepsilon)$.

Puesto que $\text{Var}(M) = \text{Var}(M^c(\varepsilon)) + \text{Var}(M^d(\varepsilon)) + 2\text{Cov}(\varepsilon)$, de la identidad anterior se tiene entonces $\text{Var}(M) = \text{Cov}(\varepsilon) + (\text{Var}(M^c(\varepsilon)) + \text{Cov}(\varepsilon)) + \text{Var}(M^d(\varepsilon))$ es la suma de 3 términos positivos, por lo que $\mathrm{Var}(M) \geq \mathrm{Cov}(\varepsilon)$. El último aserto es consecuencia de la propiedad de L^2-regularidad de M(ver **R2**). $\square$

PRUEBA DEL TEOREMA 1: Las martingalas $M^c(\varepsilon), M^d(\varepsilon)$ son casi-ortogonales para todo ε no infinitesimal. En efecto, siendo M martingala, se tiene $\left|E(dM^{(\varepsilon)})\right| = \left|E(dM - dM_s^{(\varepsilon)})\right|$. Por otra parte $\left|E(dM - dM^{(\varepsilon)})\right| \leq E(\left|dM - dM^{(\varepsilon)}\right|) = E(|dM|\, dN_{\varepsilon,s}) \leq c\, E(dN_\varepsilon)$, donde c es el real limitado de la propiedad IUL. Entonces $\Sigma_{a\leq s<t}\left|E(dM^{(\varepsilon)})\right| \leq c\, E(N_{\varepsilon,t})$, y como el miembro derecho es limitado como producto de reales limitados (ver **R1**), se deduce que $\Sigma_{a\leq s<t}\left|E(dM_s^{(\varepsilon)})\right|$ es limitado para todo t. Por otra parte $\left|E(dM^{(\varepsilon)})\right|$ es infinitesimal pues $\left|dM^{(\varepsilon)}\right| \leq |dM|$ y la esperanza de $|dM|$ es infinitesimal por la propiedad de L^2 -regularidad. Entonces $\beta = \max_{s\in T}\left|E(dM_s^{(\varepsilon)})\right|$ es infinitesimal, ya que T es finito. Del lema 1 se tiene:

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon)_t \leq \beta \sum_{a\leq s<t} \left|E\left(dM_s^{(\varepsilon)}\right)\right|,$$

de donde se deduce que $\mathrm{Cov}(\varepsilon)_t$ es infinitesimal pues el segundo miembro es el producto de limitado por infinitesimal.

Consideramos ahora el conjunto $S = \{\varepsilon \geq 0 : \text{ para todo } \varepsilon' \geq \varepsilon : \mathrm{Cov}(\varepsilon') \leq \varepsilon' \text{ en } T\}$. En virtud del resultado anterior, S contiene a todos los reales positivos no infinitesimales. Por el principio de permanencia ("underspill"), contiene también a un infinitesimal, y éste responde a lo buscado. $\square$

2.2 Prueba del teorema 2

Establecemos primero un lema referente a funciones reales de variable real.

Lema 2 *Sea $f : [u, v] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y limitada en un intervalo $[u, v]$ de longitud no infinitesimal. Entonces existe $s > u, s \approx u$ tal que f es continua a la derecha en s.*

PRUEBA: Es una consecuencia del siguiente resultado sobre sucesiones: si $a_1, ..., a_n$ es una sucesión finita de reales decreciente (o creciente) y limitada, entonces existe $m \leq n, m$ ilimitado tal que $a_1, ..., a_m$ converge (teorema 6.1 en [1]). La sucesión decreciente definida $a_p = u+1/p$ pertenece a $[u, v]$ a partir de un cierto p limitado. Tómese entonces n ilimitado. La sucesión de las imágenes $f(a_p), ..., f(a_n)$ es creciente ilimitada y por lo anterior existe $m \leq n, m$ ilimitado, tal que $f(a_p), ..., f(a_m)$ converge. Basta tomar entonces $s = a_m$. En efecto, si $s' \geq s, s' \approx s$, existe m' ilimitado menor que m tal que $s' \leq a_{m'}$, por lo que $f(s) \leq f(s') \leq f(a_{m'}) \approx f(a_{m'}) \approx f(s)$. $\square$

Lema 3 *Para ε infinitesimal suficientemente grande la función $V : \varepsilon \longrightarrow \mathrm{Var}(M^c(\varepsilon)_b)$ es continua en ε.*

PRUEBA: Según el teorema 1 existe un infinitesimal $\varepsilon_1 > 0$, tal que para todo $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ las martingalas $M^c(\varepsilon), M^d(\varepsilon)$ son casi-ortogonales. Definiendo $f(\varepsilon) = V(\varepsilon) + \mathrm{Cov}(\varepsilon)_b$, de la fórmula del lema 1 obtenemos $f(\varepsilon) = \sum_{a\leq s<b} E((dM_s^{(\varepsilon)})^2)$, y como además para todo s el valor $\left|dM_s^{(\varepsilon)}\right|$ crece con ε, la función f es creciente en ε. Es limitada en $[0,+\infty[$ según el lema 1. Aplicando el lema 2 a la función f y al intervalo $[\varepsilon_1, 1]$, deducimos que existe $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1, \varepsilon_0 \approx \varepsilon_1,$ tal que f es continua a la derecha en ε_0. Pero según la definición de ε_1 la función $\mathrm{Cov}(\varepsilon)$ es también continua a la derecha en ε_0 y como $V(\varepsilon) = f(\varepsilon) - \mathrm{Cov}(\varepsilon)$, lo mismo sucede para $V(\varepsilon)$. La función V es pues continua en todo infinitesimal mayor que ε_0. $\square$

PRUEBA DEL TEOREMA 2: Sea ε_0 un infinitesimal a partir del cual se cumple tanto el resultado del lema 3 como el del teorema 1. Se probará que para todo infinitesimal $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ las martingalas $M^c(\varepsilon_0)$ y $M^c(\varepsilon)$ son L^2-próximas, de donde el resultado correspondiente para $M^d(\varepsilon_0)$ y $M^d(\varepsilon)$ dado que $M^c(\varepsilon_0) - M^c(\varepsilon) = M^d(\varepsilon) - M^d(\varepsilon_0)$. Calculemos $\mathrm{Cov}\left(M^c(\varepsilon_0), M^c(\varepsilon)\right)_b$, denotando por $\mathrm{Cov}(\varepsilon_0,\varepsilon)$ a la función $\mathrm{Cov}(M^c(\varepsilon_0), M^c(\varepsilon))$ y siendo V la función del lema 3. Se tiene:

$$\begin{aligned} d\mathrm{Cov}(\varepsilon_0,\varepsilon) &= E(dM^{(\varepsilon)} \cdot dM^{(\varepsilon^0)}) - E(dM^{(\varepsilon)})E(dM^{(\varepsilon^0)}) \\ &= E((dM^{(\varepsilon^0)})^2) - E(dM^{(\varepsilon)})E(dM^{(\varepsilon^0)}) \\ &= d\mathrm{Var}(M^c(\varepsilon_0)) - E(dM^{(\varepsilon)})E(dM^{(\varepsilon^0)}) + d\mathrm{Cov}(\varepsilon_0) \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta del lema 1. Sumando sobre $s \leq b$ obtenemos:

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_0,\varepsilon)_b = V(\varepsilon_0) - \sum_{a\leq s<b} E(dM_s^{(\varepsilon)})E(dM_s^{(\varepsilon^0)}) + \mathrm{Cov}(\varepsilon_0)_b.$$

El último término es ≈ 0 por definición de ε_0, y lo mismo sucede para el término bajo el signo de sumatoria pues su valor absoluto es menor que $\sqrt{\mathrm{Cov}(\varepsilon)_b}\sqrt{\mathrm{Cov}(\varepsilon_0)_b}$, producto de infinitesimales según el teorema 3. Así entonces $\mathrm{Cov}(\varepsilon_0,\varepsilon)_b - V(\varepsilon_0) \approx 0$ implica

$$\mathrm{Var}(M^c(\varepsilon_0) - M^c(\varepsilon))_b = V(\varepsilon_0) + V(\varepsilon) - 2\mathrm{Cov}(\varepsilon_0)_b \approx V(\varepsilon) - V(\varepsilon_0)$$

y siendo este último valor infinitesimal por hipótesis, concluimos. $\square$

2.3 Prueba del teorema 3 y corolario

Lema 4 *Si X, Y son martingalas de F, $F-PII$, con la propiedad L^2, entonces el proceso de incrementos $dXdY$ es L^1.*

PRUEBA: Probemos primero que las martingalas de incrementos XdY, YdX son L^1, lo que basta hacerlo para una de ellas. El incremento de la función varianza de $\sum XdY$ es $\mathrm{Var}(XdY) = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(dY)$, por hipótesis PII, y como $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X)_b$ es limitada y por tanto el resultado en virtud de la teoría L^1.

Ahora bien, en la igualdad: $XY = \sum dXdY + \sum XdY + \sum YdX$, el miembro izquierdo es L^1 por hipótesis, y los dos últimos términos del miembro derecho son L^1 por lo anterior, entonces $\sum dXdY$ es L^1. $\square$

Prueba del teorema 3: Probamos primero que para todo $\varepsilon \gg 0$ la martingala $M^d(\varepsilon)$ es totalmente discontinua. Sea N , martingala c.s. continua, L^2 y $F-$PII. Tenemos:

$$dNdM^d(\varepsilon) = dN\left(dM - dM^{(\varepsilon)} - E(dM^{(\varepsilon)})\right) = dN(dM - dM^{(\varepsilon)}) - dNE(dM^{(\varepsilon)}).$$

Notemos que en la última expresión el incremento $dNE(dM_s^{(\varepsilon)})$ es el de una martingala L^1 pues su varianza en b vale $\sum_{a\leq s<b} \mathrm{Var}(dN_s)(E(dM_s^{(\varepsilon)}))^2$ que es limitada por las propiedades L^2 de M, N. Por otra parte el proceso $\sum dN\, dM^d(\varepsilon)$ es L^1 en virtud del lema 4. Se sigue que el proceso Y cuyo incremento vale $dN(dM - dM^{(\varepsilon)})$ es a su vez L^1. Ahora bien

$$|Y_t| \leq C = c \sum_{a\leq s<b} |dN_s|\, dN_{\varepsilon,s}$$

donde c es la cota de la propiedad IUL de M y N_ε el proceso puntual definido en la introducción . Pero c. s. $|dN_s|$ es infinitesimal para todo s y el proceso de conteo N_ε es c. s. limitado (ver **R1**), lo que implica que C es c. s. infinitesimal como suma de un número limitado de infinitesimales. Así entonces Y es L^1 y c.s. infinitesimal en T, entonces por el teorema de Lebesgue $E(Y) \approx 0$ en T. Resulta entonces que $E(N\ M^d(\varepsilon)) \approx 0$ en T, es decir $N, M^d(\varepsilon)$ son casi-ortogonales.

Consideremos el conjunto $S = \{\varepsilon \geq 0 :$ para todo $\varepsilon' \geq \varepsilon : \mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon')) \leq \varepsilon'$ en $T\}$. De lo anterior sabemos que S contiene a todos los reales positivos estándar, y por "underspill" existe ε_1 infinitesimal en S.

Sea ε_0 un infinitesimal a partir del cual se cumple el resultado del teorema 2. Para ε infinitesimal mayor que $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ se tiene $\mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon)) \approx 0$ en T por definición de ε_1, y $M^d(\varepsilon), M^d(\varepsilon_0)$ son L^2-próximas por definición de ε_0. Pero $\mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon)) = \mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon_0)) + \mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon) - M^d(\varepsilon_0))$, siendo el segundo término infinitesimal pues en la desigualdad:

$$\left|\mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon) - M^d(\varepsilon_0))\right| \leq ||N||_2 \left|\left|M^d(\varepsilon) - M^d(\varepsilon_0)\right|\right|_2$$

el segundo miembro es infinitesimal por la propiedad de L^2-proximidad. Se obtiene $\mathrm{Cov}(N, M^d(\varepsilon_0)) \approx 0$ en T, es decir $(N, M^d(\varepsilon_0))$ son casi-ortogonales. La martingala N siendo continua L^2, $F-$PII arbitraria, se concluye que $M^d(\varepsilon_0)$ es totalmente discontinua y lo mismo sucede para cualquier infinitesimal mayor que ε_0. □

prueba del corolario: Siendo ε_0 un infinitesimal a partir del cual se cumple el resultado del teorema 3, en virtud de este teorema y de **R2**, la descomposición $M = M^c(\varepsilon_0) + M^d(\varepsilon_0)$ expresa M como la suma de dos martingalas $F-$PII L^2-regulares, $M^c(\varepsilon_0)$ siendo c.s. continua y $M^d(\varepsilon_0)$ totalmente discontinua. Por otra parte si M se expresa como $N + D$, $N' + D'$, donde N, N', D, D' son martingalas $F-$PII L^2-regulares, N, N' siendo c. s. continuas y D, D' totalmente discontinuas, se tiene que $N - N' = D - D'$ es L^2-regular, $F-$PII, c.s. continua y totalmente discontinua al mismo tiempo, por lo tanto casi-ortogonal a ella misma y por ende de norma L^2 infinitesimal. En particular N y N' (resp. D y D') son L^2-próximas. □

3 Observaciones finales

Los resultados aquí obtenidos, sobre la estructura de la descomposición de ciertas martingalas PII, pueden relacionarse con los análogos en la teoría (clásica) del cálculo estocástico. En efecto, en esta última teoría se establece la existencia de una descomposición en parte "continua" y "discontinua" que se aproxima a los enunciados en el teorema 3 y su corolario (la noción de total discontinuidad es sin embargo algo diferente a la aquí presentada). Los razonamientos de la teoría clásica no son empero aplicables en el contexto nuestro. Así por ejemplo el argumento basado en la idea de una proyección ortogonal sobre espacios de Hilbert de martingalas (ver [3]) falla en nuestro caso pues por su naturaleza los conjuntos tratados aquí son "externos", en el sentido de la teoría IST.

A pesar de no existir una equivalencia estricta entre una y otra teoría, es de resaltar las ventajas de un planteamiento discreto de un problema que en la teoría clásica solo es posible tratar con las herramientas bastante intrincadas de la teoría general de procesos. Por otra parte en la literatura no estándar que estudia problemas de este tipo (ver [4] ó [5]) no existe un estudio del problema tratado en este trabajo.

El autor espera aprovechar el estudio realizado para proseguir la teoría de los procesos PII en casi intervalos, en especial uno sobre las leyes de los procesos y sus relaciones con las leyes de procesos clásicos.

References

[1] Nelson, E. (1987) *Radically Elementary Probability Theory.* Princeton University Pres, Princeton.

[2] Lobo, J. (1998) "Descomposición de procesos de incrementos independientes en casi intervalos", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **5**(2): 163–175.

[3] Jacod (1980) *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales.* Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin.

[4] Albeverio (1980) *Non Standard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, New York.

[5] Stroyan, B. (1986) *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.* North Holland, Amsterdam.