Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1999 **6**(2) : 107–124
cimpa – ucr – ccss   issn: 1409-2433

ultraproductos de f-anillos proyectables

Jorge I. Guier*

Recibido: 24 noviembre 1999

Resumen

Keimel representa en [7] los f-anillos proyectables como secciones continuas de haces Hausdorff de anillos totalmente ordenados. Aquí damos un resultado sobre la representación de los ultraproductos de f-anillos proyectables en términos de los espacios de representación y de las fibras de sus factores.

Palabras clave: productos Booleanos, clases elementales, ultraproductos de espacios compactos, secciones continuas.

Abstract

In [7], Keimel representes the projectable f-rings as continuous sections of Hausdorff sheaves of totally ordered rings. Here, we give a result about the representation of ultraproducts of projectable f-rings in terms of the representation spaces and the stalks of its factors.

Keywords: Boolean products, elementary class, ultracoproduct of compact spaces, continuous sections.

AMS Subject Classification: 03C20, 16S60, 13J25, 16G99.

1. Introducción

Los f-anillos proyectables forman una clase elemental en el lenguaje de anillos reticulados. Esta clase es cerrada bajo ultraproductos. Por tanto los ultraproductos de f-anillos proyectables admiten la representación dada en [7, 6.12]. No obstante, dicha representación no está dada en términos de los espacios de representación y de las fibras de los factores. Los trabajos de Bankston ([1]) permiten expresar el espacio de representación de un ultraproducto como un ultracoproducto de los espacios de representación de los factores (proposición 4.4). A grosso modo, mostramos que las fibras del ultraproducto son limites inductivos de ultraproductos de secciones continuas locales en las fibras de los factores (proposición 4.10).

Para justificar las etapas y los cálculos de la cuarta sección, estudiamos en la tercera sección el espacio de representación de Keimel bajo otros puntos de vista (proposición 3.11). En la segunda

* CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica; Equipe de Logique, Université Paris VII, Tour 45-55, 5-ème étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

sección, damos a conveniencia del lector las definiciones y nociones necesarias y conocidas de productos booleanos, haces de L-estructuras y f-anillos proyectables.

La tercera y cuarta sección de este trabajo provienen de las secciones 2.1 y 3.4 de [6] dirigida por Daniel Gluschankof hasta su trágico deceso en los Pirineos (Francia). Quisiera dedicar este trabajo a su memoria. A partir de ese momento, Max Dickmann y François Lucas se hicieron cargo de la dirección de esta tesis. Quisiera agradecerles por las sugerencias, observaciones e ideas en este trabajo.

2. Productos booleanos, f-anillos proyectables

Para las definiciones siguientes, sea L un lenguaje de primer orden.

Definición 2.1 • *Una L-estructura $\mathfrak{A}$ es un* **producto sub-directo** *de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ si $\mathfrak{A} \subseteq \prod_{x\in X} \mathfrak{A}_x$, como L-estructura, y $pr_x \colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}_x|$ es sobreyectiva para todo $x \in X$.*

• *Sea $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ una L-fórmula, $\mathfrak{A}$ un producto sub-directo de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ y $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Denotamos:*

$$\llbracket\, \Phi(a_1, \ldots, a_n)\,\rrbracket = \Big\{x \in X : \mathfrak{A}_x \models \Phi\big(a_1(x), \ldots, a_n(x)\big)\Big\}.$$

• *Decimos que una L-estructura $\mathfrak{A}$ es un* **producto booleano** *de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ en L si las siguientes condiciones son verificadas:*

(i) X es un espacio booleano (i.e.: un espacio topológico compacto y totalmente discontinuo.)

(ii) $\mathfrak{A}$ es un producto sub-directo de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$.

(iii) Para toda L-fórmula $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ atómica y para todo $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, tenemos que $\llbracket\, \Phi(a_1, \ldots, a_n)\,\rrbracket$ es un abierto-cerrado de X.

(iv) Propiedad de pegue: Si $a, b \in |\mathfrak{A}|$, $N \subseteq X$ un abierto-cerrado y

$$c(y) = \begin{cases} a(y) & si \quad y \in N \\ b(y) & si \quad y \in X \setminus N, \end{cases}$$

entonces $c = a_{\restriction N} \cup b_{\restriction X\setminus N} \in |\mathfrak{A}|$.

• *Designamos el conjunto de todos los productos booleanos de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ en L por:*

$$\Gamma^a_L\big(X, (\mathfrak{A}_x)_{x\in X}\big).$$

Los productos booleanos corresponden a las secciones continuas de haces Hausdorff de L-estructuras sobre espacios booleanos (cf. [3, Appendix]). Las siguientes definiciones y comentarios sobre las secciones continuas provienen de [8].

Definición 2.2 *Sean S y X dos espacios topológicos y $\pi \colon S \to X$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que $\langle S, X, \pi, \mu\rangle$ es un* **haz** *de L-estructuras si las siguientes condiciones se verifican:*

(i) π es un homeomorfismo local, i.e.: para cada $s \in S$, existe $\mathcal{O}_s$ un vecindario abierto de s, tal que $\pi_{\restriction \mathcal{O}_s} \colon \mathcal{O}_s \to \pi(\mathcal{O}_s) \subseteq X$ es un homeomorfismo sobre $\pi(\mathcal{O}_s)$, y este conjunto es un abierto de X.

(ii) $\mu(x)$ es una L-estructura con $\pi^{-1}(x)$ como conjunto de base, para todo $x \in X$.

(iii) Para cada símbolo de función f de L de aridad n, la aplicación

$$f_S \colon \bigcup_{x\in X} |\mu(x)|^n \to S, \quad (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto f_{\mu(x)}(s_1, \ldots, s_n)$$

es continua, en donde $\bigcup_{x\in X}|\mu(x)|^n$ *es considerado como sub-espacio topológico de* S^n.

(iv) Para cada símbolo de constante c de L, la aplicación

$$c_S\colon X\to S,\quad x\longmapsto c_{\mu(x)}$$

es continua.

(v) Para cada símbolo de relación n-ario R de L, la aplicación

$$\chi_{R,S}\colon\bigcup_{x\in X}|\mu(x)|^n\to\{0,1\},\quad (s_1,\ldots,s_n)\longmapsto\chi_{R_{\mu(x)}}(s_1,\ldots,s_n)$$

es continua, en donde, como en (iii), $\bigcup_{x\in X}|\mu(x)|^n$ *es considerado como sub-espacio topológico de* S^n, $\{0,1\}$ *es discreto y* χ_A *designa la función característica de un conjunto A.*

Definición 2.3 *Sea* $\langle S,X,\pi,\mu\rangle$ *un haz de L-estructuras y* $\mathcal{O}\subseteq X$ *un abierto. Designamos por:*

$$\Gamma(\mathcal{O},S)=\{\sigma\colon\mathcal{O}\to S:\sigma\text{ es continua y }\pi\circ\sigma=id_{\mathcal{O}}\},$$

el conjunto de todas las secciones (de la proyección π*) continuas sobre* $\mathcal{O}$.

Sea $\langle S,X,\pi,\mu\rangle$ un haz de L-estructuras; $\Gamma(X,S)$ es el conjunto de todas las secciones continuas globales. Para cada $\sigma\in\Gamma(X,S)$, $\sigma(x)\in\pi^{-1}(x)=|\mu(x)|$, para $x\in X$. Entonces $\Gamma(X,S)\subseteq\prod_{x\in X}|\mu(x)|$. Denotamos $P=\prod_{x\in X}\mu(x)$ y veamos que $\Gamma(X,S)$ es una L-sub-estructura de P.

Sea c un símbolo de constante; la interpretación de c en P es la aplicación $c_P\colon X\to\bigcup_{x\in X}\pi^{-1}(x)=S$ tal que $c_P(x)=c_{\mu(x)}$; es decir que $c_P=c_S$, que es continua por definición. Claramente, $\pi\circ c_P=id_X$, y entonces $c_P\in\Gamma(X,S)$.

Sea f un símbolo de función de aridad n y $\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\Gamma(X,S)$. Entonces:

$$f_P(\vec{\sigma})\colon X\to\bigcup_{x\in X}\pi^{-1}(x)=S,\quad x\longmapsto f_P(\vec{\sigma})(x)=f_{\mu(x)}(\sigma_1(x),\ldots,\sigma_n(x)).$$

Entonces $f_P(\vec{\sigma})$ es la composición de $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ y de f_S, lo que da su continuidad. Claramente $\pi\circ f_P(\vec{\sigma})=id_X$, lo que permite concluir que $f_P(\vec{\sigma})\in\Gamma(X,S)$.

La correspondencia entre productos booleanos y secciones continuas de haces está dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.4 ([3, Appendix]) *(i) Si* $\langle S,X,\pi,\mu\rangle$ *es un haz de L-estructuras en el cual S es Hausdorff y X es booleano, entonces*

$$\Gamma(X,S)\in\Gamma^a_{\mathcal{L}}\Big(X,\big(\mu(x)\big)_{x\in X}\Big).$$

(ii) Sea X un espacio booleano y $(\mathfrak{A}_x)_{x\in X}$ *una familia de L-estructuras tal que* $|\mathfrak{A}_x|$ *posea al menos dos elementos, para todo* $x\in X$. *Si* $\mathfrak{A}$ *es un L-estructura que pertenece a* $\Gamma^a_{\mathcal{L}}\big(X,(\mathfrak{A}_x)_{x\in X}\big)$, *entonces existe* $\langle S,X,\pi,\mu\rangle$ *un haz de L-estructuras Hausdorff (i.e.: S es Hausdorff), tal que* $\mathfrak{A}\cong\Gamma(X,S)$.

Las siguientes nociones son clásicas, ver por ejemplo [2]. De ahora en adelante, $(G,+,0)$ designa un grupo abeliano. Se dice que G es un **grupo ordenado** si G tiene una relación de orden parcial $\le$ tal que $a\le b$ implica $a+x\le b+x$ para todo $a,b,x\in G$. En tal caso, G_+ es el conjunto de los elementos positivos de G. Un grupo ordenado $(G,+,0,\le)$ es un **grupo reticulado** (o **l-grupo**) si $(G,\le)$ tiene una estructura de retículo; para $a,b\in G$ denotamos $a\wedge b$ la más grande cota inferior de a y b, y $a\vee b$ la más pequeña cota superior de a y b.

A continuación G es un grupo reticulado. La **parte positiva** de un elemento x en G es el elemento $x_+ = x \vee 0$ y la **parte negativa** de x es $x_- = -(x \wedge 0)$; el **valor absoluto** de x es el elemento $|x| = x \vee -x$. Dos elementos x e y en G se dicen ser **ortogonales** si $|x| \wedge |y| = 0$, en tal caso se escribe: $x \perp y$. Para $A \subseteq G$, la **polar** de A, que se denota por $A^\perp$, es el conjunto de los elementos de G que son ortogonales a todos los elementos de A; la **bipolar** de A, que se denota por $A^{\perp\perp}$, es $(A^\perp)^\perp$. Si $a \in G$, por convención se escribe $a^\perp = \{a\}^\perp$ y $a^{\perp\perp} = \{a\}^{\perp\perp}$.

Un sub-grupo C de G es un **l-sub-grupo** si C es un sub-retículo de G. Una parte C de G es **convexa** si cada vez que $a, b \in C$ y $x \in G$ tales que $a \leq x \leq b$, entonces $x \in C$. Una parte A de G es **sólida** si cada vez que $a \in A$ y $x \in G$ tales que $|x| \leq |a|$, entonces $x \in A$. De acuerdo con [2, p. 38], $S(B) = \big\{x \in G : \text{existe } b \in B \text{ tal que } |x| \leq |b|\big\}$ es la parte sólida generada por B en G. Decimos que un l-sub-grupo convexo N de G es un **sub-grupo primo** si cada vez que $a \wedge b = 0$ para $a, b \in G$, entonces $a \in N$ o $b \in N$.

Definición 2.5 • *Un* **anillo reticulado** *(o* **l-anillo***) es un anillo ordenado en retículo, i.e.: una estructura algebraica de la forma $(A, +, \cdot, 0, \leq)$ tal que:*

(i) $(A, +, \cdot, 0)$ es un anillo,

(ii) $(A, +, 0, \leq)$ es un grupo reticulado,

(iii) $(a \leq b$ y $0 \leq x) \Longrightarrow (ax \leq bx$ y $xa \leq xb)$, para todo $a, b, x \in A$.

• *Decimos que p es un* **l-ideal** *de un anillo reticulado A si p es un ideal de A y p es un l-sub-grupo convexo.*

• *En un anillo reticulado A, se denota por $\langle a \rangle$ el l-ideal generado por $a \in A$.*

Si A es un anillo reticulado y p un l-ideal de A entonces se puede definir un orden en A/p dado por $x + p \leq y + p$ si y solo si existe $c \in p$ tal que $x + c \leq y$. Este orden hace de A/p un anillo reticulado y $h \colon A \to A/p$, $x \longmapsto x + p$ es un homomorfismo de l-anillos (i.e., h es un homomorfismo de anillos, $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$ y $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ para todo $x, y \in A$) en donde $\ker h = p$ (cf. [2, 8.3.3]).

Definición 2.6 • *Se dice que un l-ideal p de un anillo reticulado A es* **irreducible** *si cada vez que $a \cap b = p$ para dos l-ideales a y b de A, entonces $a = p$ o $b = p$.*

• *Un anillo reticulado A es un* **f-anillo** *si A es isomorfo a un producto sub-directo de anillos totalmente ordenados.*

Se demuestra en [2, 9.1.2(ii)] que la clase de f-anillos es elemental en el lenguaje de anillos reticulados (ver [4] para definición de clase elemental) y en [2, 9.1.5] se demuestra que un anillo reticulado A es un f-anillo si y solo si A/p es totalmente ordenado para todo l-ideal irreducible p de A.

Definición 2.7 *Un f-anillo A es* **proyectable** *si $A = a^\perp + a^{\perp\perp}$, para todo $a \in A$.*

Nótese que un f-anillo es proyectable si y solo si $A \models \forall a, b\, \exists c, d\, \big(b = c + d \wedge c \in a^\perp \wedge d \in a^{\perp\perp}\big)$. Esto muestra que la noción de proyectabilidad es de primer orden en el lenguaje de anillos reticulados (o en el lenguaje de anillos ordenados puesto que $\wedge$ y $\vee$ son definibles a partir de $<$).

La siguiente definición fue introducida por Keimel en [7] para el estudio de las representaciones de anillos ordenados como secciones continuas de haces (de anillos con estructuras más simples).

Definición 2.8 *Para un f-anillo A, el* **espacio de representación de Keimel** *es $\pi A = \{p : p$ es un l-ideal irreducible minimal de $A\}$ y, para $a \in A$ sea $S_{\pi A}(a) = \{p \in \pi A : a \notin p\}$.*

Keimel demuestra en [7, 6.8] que para un f-anillo proyectable A, el conjunto $\{S_{\pi A}(a) : a \in A\}$ es una base de abiertos-cerrados para una topología en πA y en el caso en que A tenga unidad multiplicativa, πA es compacto (i.e.: πA es booleano).

De aquí en adelante suponemos que todos los anillos tienen unidad multiplicativa y que $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ es el lenguaje de anillos (unitarios) ordenados.

El segundo teorema de representación de Keimel representa los f-anillos proyectables como secciones continuas de un haz de anillos totalmente ordenados. Teniendo en cuenta la correspondencia [3, Appendix], dicho teorema se puede reformular de la siguiente manera:

Teorema 2.9 ([7, 6.12]) *Si A es un f-anillo proyectable, entonces:*

$$A \in \Gamma^a_{\mathcal{L}}\big(\pi A, (A/p)_{p \in \pi A}\big).$$

■

Además Keimel muestra que esta representación es única en el siguiente sentido:

Teorema 2.10 ([7, 6.13]) *Si $(A_x)_{x \in X}$ es una familia de anillos totalmente ordenados y $A \in \Gamma^a_{\mathcal{L}}\big(X, (A_x)_{x \in X}\big)$, entonces A es un f-anillo proyectable y existe un homeomorfismo $h\colon X \to \pi A$ tal que A_x es isomorfo a $A/h(x)$, como anillos ordenados, para todo $x \in X$.*

■

Para un espacio booleano X, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de Boole de abiertos-cerrados de X y para un álgebra de Boole B, designamos por $\mathcal{S}(B)$ el espacio de Stone de B. El siguiente lema se encuentra por ejemplo en [8] y muestra que el álgebra de Boole correspondiente al espacio de representación de un f-anillo proyectable es definible como el álgebra de Boole de idempotentes.

Lema 2.11 *Sea $(L_x)_{x \in X}$ una familia de anillos totalmente ordenados y R un anillo que pertenece a $\Gamma^a_{\mathcal{L}}\big(X, (L_x)_{x \in X}\big)$. Entonces $\mathcal{I}d\,(R) = \{e \in R : e^2 = e\}$ es un álgebra de Boole y $\delta\colon \mathcal{I}d\,(R) \to \mathcal{B}(X)$, $e \longmapsto [\![\, e = 1 \,]\!]$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.* ■

3. Espacios de representación

En el siguiente lema mostramos que, para un f-anillo A, los elementos de πA se pueden caracterizar usando solamente la estructura de grupo reticulado.

Observación 3.1 *Si p es un l-ideal irreducible de un f-anillo A, entonces p es un sub-grupo primo.*

Dm: Por definición p es un l-sub-grupo convexo. Sean $a, b \in A$ tales que $a \wedge b = 0$. Como A es un f-anillo, por [2, 9.1.8] tenemos que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \wedge b \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\} \subseteq p$. Como p es irreducible, por [2, 8.4.1] tenemos $a \in p$ o $b \in p$. ■

Lema 3.2 *En un f-anillo A, p es un sub-grupo primo minimal si y solo si p es un l-ideal irreducible minimal.*

Dm: ($\Rightarrow$) Como A es un f-anillo, por [2, 9.1.2(iv)] p es un l-ideal. Veamos que p es irreducible. Sean a, b dos l-ideales de A tales que $a \cap b \subseteq p$; en particular a y b son dos l-sub-grupos convexos y, por [2, 2.4.1 2)], tenemos que $a \subseteq p$ o $b \subseteq p$. Si q es un l-ideal irreducible de A tal que $q \subseteq p$, por la observación 3.1 q es un sub-grupo primo, y por la minimalidad de p tenemos $q = p$. Entonces p es un l-ideal irreducible minimal.

($\Leftarrow$) Si p es un l-ideal irreducible minimal, por la observación 3.1 p es un sub-grupo primo. Si p no es minimal en tanto que sub-grupo primo, existe q un sub-grupo primo minimal tal que $q \subset p$ y $q \neq p$. Por ($\Rightarrow$) tenemos que q es un l-ideal irreducible minimal, lo que contradice el hecho que $q \subset p$ y $q \neq p$. ■

El lema siguiente da de manera abstracta la noción de soporte (y de su complemento) de un elemento en los f-anillos proyectables. En el lema 3.4, justificamos entre otras cosas esta afirmación.

Lema 3.3 *Sea A un f-anillo proyectable. Para $a \in A$, existe $c(a), d(a) \in \mathcal{I}d\,(A)$ tales que $c(a) \in a^{\perp}, d(a) \in a^{\perp\perp}$ y $1 = c(a) + d(a)$. Además $c(a)$ y $d(a)$ son únicos con estas propiedades.*

Dm: Por la proyectabilidad de A, para $a \in A$, existe $c(a) \in a^{\perp}$ y $d(a) \in a^{\perp\perp}$ tales que $1 = c(a)+d(a)$. Entonces $c(a)$ y $d(a)$ son idempotentes, ya que $c(a)^2 = c(a)\cdot(1-d(a)) = c(a)-c(a)\cdot d(a)$; como $c(a) \perp d(a)$ se tiene que $c(a)d(a) = 0$ y luego $c(a)^2 = c(a)$. De igual manera $d(a)^2 = d(a)$. En particular $c(a), d(a) \in A_{+}$.

Para la unicidad, supongamos que existen idempotentes c, d tales que $c \in a^{\perp}$, $d \in a^{\perp\perp}$ y $1 = c + d$. Luego $0 = (c(a) - c) + (d(a) - d)$, $(c(a) - c) \in a^{\perp}$ y $(d(a) - d) \in a^{\perp\perp}$. Entonces $(c(a) - c)(d(a) - d) = 0$ y por consiguiente $(c(a) - c)^2 = 0$. Si $c(a) \neq c$, par el teorema 2.9, existe $p \in \pi A$ tal que $c(a)(p) \neq c(p)$. Como $c, c(a)$ son idempotentes, por [2, 9.4.16] se deduce que $c(p) = 1$ y $c(a)(p) = 0$ o lo contrario; esto contradice que $(c(a) - c)^2(p) = 0$. Luego $c(a) = c$ y $d(a) = 1 - c(a) = 1 - c = d$. ■

Lema 3.4 *Sea A un f-anillo proyectable. Para $a \in A$, $c(a)^{\perp\perp} = a^{\perp}$, $d(a)^{\perp\perp} = a^{\perp\perp}$, $S_{\pi A}(d(a)) = S_{\pi A}(a)$ y $S_{\pi A}(c(a)) = \pi A \setminus S_{\pi A}(a)$.*

Dm: Sea $a \in A$ fijo. Como $c(a) \in a^{\perp}$, entonces $a^{\perp\perp} \subseteq c(a)^{\perp}$ y luego $c(a)^{\perp\perp} \subseteq a^{\perp}$. Ahora sea $x \in a^{\perp}$. Sea $y \in c(a)^{\perp}$, entonces $y \perp c(a)$, es decir $|y| \wedge c(a) = 0$. Como $d(a) \in a^{\perp\perp}$ y $x \in a^{\perp}$, entonces $|x| \wedge d(a) = 0$. Por el lema 3.3, $c(a) \vee d(a) = 1$. Por las propiedades [2, 9.1.10] tenemos que:

$$\begin{aligned}
|x| \wedge |y| &= \big(|x| \wedge |y|\big)\big(c(a) \vee d(a)\big) \\
&= \Big(\big(|x| \wedge |y|\big)c(a)\Big) \vee \Big(\big(|x| \wedge |y|\big)d(a)\Big) \\
&= \Big(\big(|x|c(a)\big) \wedge \big(|y|c(a)\big)\Big) \vee \Big(\big(|x|d(a)\big) \wedge \big(|y|d(a)\big)\Big) \\
&= \big(|x|c(a) \wedge 0\big) \vee \big(0 \wedge |y|d(a)\big) \\
&= 0 \vee 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $x \perp y$, para todo $y \in c(a)^{\perp}$; es decir $x \in c(a)^{\perp\perp}$. Entonces $a^{\perp} \subseteq c(a)^{\perp\perp}$ y por consiguiente $c(a)^{\perp\perp} = a^{\perp}$.

Sabemos que $d(a) \in a^{\perp\perp}$, luego $d(a)^{\perp\perp} \subseteq a^{\perp\perp}$. Sea $x \in a^{\perp\perp}$ y $y \in d(a)^{\perp}$. Como $c(a) \in a^{\perp}$, se tiene que $x \perp c(a)$, en particular $|x|c(a) = 0$. Por otro lado, $y \perp d(a)$, luego $|y|d(a) = 0$. De la misma manera obtenemos que:

$$\begin{aligned}
|x| \wedge |y| &= \big(|x| \wedge |y|\big)\big(c(a) \vee d(a)\big) \\
&= \Big(\big(|x| \wedge |y|\big)c(a)\Big) \vee \Big(\big(|x| \wedge |y|\big)d(a)\Big) \\
&= \Big(\big(|x|c(a)\big) \wedge \big(|y|c(a)\big)\Big) \vee \Big(\big(|x|d(a)\big) \wedge \big(|y|d(a)\big)\Big) \\
&= \big(0 \wedge |y|c(a)\big) \vee \big(|x|d(a) \wedge 0\big) \\
&= 0 \vee 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $x \perp y$, para todo $y \in d(a)^{\perp}$; es decir $x \in d(a)^{\perp\perp}$. Entonces $a^{\perp\perp} \subseteq d(a)^{\perp\perp}$, finalmente obtenemos que $d(a)^{\perp\perp} = a^{\perp\perp}$.

Sea $p \in \pi A$. Si $a \notin p$, como $ad(a) = a(1 - c(a)) = a - ac(a) = a - 0 = a$, entonces $d(a) \notin p$. Si $a \in p$, por [2, 3.4.13 (iii)], y el lema 3.2, $a^{\perp} \nsubseteq p$; sea entonces $x_0 \in a^{\perp}$ tal que $x_0 \notin p$. Hemos demostrado que $a^{\perp\perp} = d(a)^{\perp\perp}$ y luego $a^{\perp} = d(a)^{\perp}$. Entonces $x_0 \in d(a)^{\perp}$ y por consiguiente $|x_0| \wedge d(a) = 0 \in p$; esto implica $d(a) \in p$, ya que p es irreducible. Hemos mostrado para $p \in \pi A$, que $a \notin p \Leftrightarrow d(a) \notin p$, lo que da $S_{\pi A}(d(a)) = S_{\pi A}(a)$.

Sea $p \in \pi A$. Si $d(a) \in p$, entonces $c(a) \notin p$, ya que $1 = c(a) + d(a)$ y $1 \notin p$. Recíprocamente si $c(a) \notin p$, como $c(a) \wedge d(a) = 0 \in p$ entonces $d(a) \in p$, ya que p es irreducible. Probamos que $d(a) \in p \Leftrightarrow c(a) \notin p$, para todo $p \in \pi A$; lo que da $S_{\pi A}(c(a)) = \pi A \setminus S_{\pi A}(d(a)) = \pi A \setminus S_{\pi A}(a)$. ■

Lema 3.5 *Sea A un f-anillo proyectable. Entonces $\delta\colon \mathcal{I}d\,(A) \to \mathcal{B}(\pi A)$, $e \longmapsto S_{\pi A}(e)$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.*

Dm: Como A es un f-anillo proyectable, por el teorema 2.9, $A \in \Gamma^{a}_{\mathcal{L}}\big(\pi A, (A/p)_{p\in\pi A}\big)$ en donde $a \in A$ puede ser visto como $\hat{a}\colon \pi A \to \dot{\bigcup}_{p\in\pi A} A/p$, $p \mapsto a + p$. Por el teorema [2, 9.1.5], A/p es totalmente ordenado para todo $p \in \pi A$. Por [2, 9.4.16], A/p solo tiene como idempotentes a 0 y 1, para todo $p \in \pi A$.

Por el lema 2.11, $\delta\colon \mathcal{I}d\,(A) \to \mathcal{B}(\pi A)$, $e \mapsto \delta(\hat{e}) = [\![\, \hat{e} = \hat{1} \,]\!] = \big\{p \in \pi A : \hat{e}(p) = \hat{1}(p)\big\} = \{p \in \pi A : e + p = 1 + p\} = \{p \in \pi A : e - 1 \in p\} = \{p \in \pi A : e \notin p\} = S_{\pi A}(e)$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. ■

Definición 3.6 *Para un f-anillo A, denotamos* $\mathrm{PP}(A)$ *el conjunto de todas las bipolares principales de A, es decir* $\mathrm{PP}(A) = \{a^{\perp\perp} : a \in A\}$.

Proposición 3.7 *Sea A un f-anillo proyectable. Entonces* $\mathrm{PP}(A)$ *es un álgebra de Boole y $\gamma\colon \mathcal{I}d\,(A) \to$* $\mathrm{PP}(A)$*, $e \mapsto e^{\perp\perp}$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. La función recíproca esta dada por $\gamma^{-1}\colon \mathrm{PP}(A) \to \mathcal{I}d\,(A)$, $a^{\perp\perp} \mapsto d(a)$.*

Dm: Por [2, 3.3.2], se sabe que $\mathrm{PP}(A)$ es un sub-retículo del álgebra de Boole $\mathrm{P}(A)$ de las polares de A. Para ver que $\mathrm{PP}(A)$ es un álgebra de Boole, basta mostrar que $a^{\perp}$ es una bipolar, para todo $a \in A$, lo que está dado por el lema 3.4.

Trivialmente $\gamma(0) = 0^{\perp\perp} = \{0\}$ et $\gamma(1) = 1^{\perp\perp} = A$. Se sabe por [2, 3.3.2], que $\gamma(e_1 \wedge e_2) = (e_1 \wedge e_2)^{\perp\perp} = e_1{}^{\perp\perp} \cap e_2{}^{\perp\perp} = \gamma(e_1) \wedge \gamma(e_2)$ y que $\gamma(e_1 \vee e_2) = (e_1 \vee e_2)^{\perp\perp} = e_1{}^{\perp\perp} \vee e_2{}^{\perp\perp} = \gamma(e_1) \vee \gamma(e_2)$, para todo $e_1, e_2 \in A$, en particular para $e_1, e_2 \in \mathcal{I}d\,(A)$.

Sea $e \in \mathcal{I}d\,(A)$. Como $1 = (1 - e) + e$, $e \in e^{\perp\perp}$ y $(1 - e) \in e^{\perp}$ (ya que en cada fibra e es 0 o 1 (cf. [2, 9.4.16]) y entonces $(1 - e) \wedge e = 0$); por el lema 3.3, $c(e) = 1 - e$ y $d(e) = e$. Por el lema 3.4, $e^{\perp\perp} = c(e)^{\perp} = (1 - e)^{\perp}$ y entonces $(1 - e)^{\perp\perp} = e^{\perp\perp\perp}$, es decir $\gamma(\bar{e}) = \gamma(e)^{\perp}$ (la operación $^{\perp}$ es el complemento de $\mathrm{PP}(A)$). Tenemos que γ es un homomorfismo de álgebras de Boole.

Veamos que γ es sobreyectiva. Sea $a \in A$. Por el lema 3.4, $\gamma\big(d(a)\big) = a^{\perp\perp}$ y finalmente por 3.3, $d(a)$ es un idempotente.

Veamos que γ es inyectiva. Sea $e \in \mathcal{I}d\,(A)$ tal que $e \in \ker(\gamma)$, por lo tanto $\gamma(e) = e^{\perp\perp} = \{0\}$. Como $e \in e^{\perp\perp}$, tenemos $e = 0$. Entonces $\ker(\gamma) = \{0\}$. ■

Corolario 3.8 *Sea A un f-anillo proyectable, entonces $\varrho\colon \mathrm{PP}(A) \to \mathcal{B}(\pi A)$, $a^{\perp\perp} \mapsto S_{\pi A}(a)$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.*

Dm: Por la proposición 3.7 y el lema 3.5, $\delta \circ \gamma^{-1}\colon \mathrm{PP}(A) \to \mathcal{B}(\pi A)$, $a^{\perp\perp} \mapsto (\delta \circ \gamma^{-1})(a^{\perp\perp}) = \delta(d(a)) = S_{\pi A}(d(a))$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. Por el lema 3.4, $\varrho = \delta \circ \gamma^{-1}\colon \mathrm{PP}(A) \to \mathcal{B}(\pi A)$, $a^{\perp\perp} \mapsto S_{\pi A}(a)$ es el isomorfismo buscado. ■

Lema 3.9 *Sea T un retículo con un menor elemento $\perp$ y $\mathcal{U}$ un filtro de T. Entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de T si y solo si para todo $x \in T \setminus \mathcal{U}$, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $x \wedge u = \perp$.* ■

Sean dos álgebras de Boole B y C, y $\xi: B \to C$ un morfismo en la categoría de álgebras de Boole; designamos por $\mathcal{S}(\xi): \mathcal{S}(C) \to \mathcal{S}(B)$, $\mathcal{V} \mapsto \xi^{-1}(\mathcal{V})$, para un ultrafiltro $\mathcal{V}$ de C, el morfismo correspondiente en la categoría de espacios booleanos (y de funciones continuas), dado por la dualidad de Stone. Dado un espacio booleano X, designamos por $i_X: X \to \mathcal{S}(\mathcal{B}(X))$ el homeomorfismo canónico.

Definición 3.10 *Para un f-anillo A, denotamos $\mathcal{U}(A_+)$ el conjunto de los ultrafiltros de la estructura de retículo de A_+.*

Proposición 3.11 *Sea A un f-anillo proyectable. Entonces $\mathcal{U}(A_+)$ puede dotarse de una topología tal que $f: \pi A \to \mathcal{U}(A_+)$, $p \longmapsto A_+ \setminus p$, y $g: \mathcal{U}(A_+) \to \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$, $\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$, sean homeomorfismos. Además, existen homeomorfismos $k: \pi A \to \mathcal{S}(\mathrm{PP}(A))$ y $h: \mathcal{S}(\mathrm{PP}(A)) \to \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$ tales que $g \circ f = h \circ k$; es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
\pi A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{U}(A_+) \arrow[d, "g"] \\
\mathcal{S}(\mathrm{PP}(A)) \arrow[r, "h"'] & \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))
\end{tikzcd}
$$

Dm: Sabemos por el lema 3.2, que $p \in \pi A$ si y solo si p es un sub-grupo primo minimal. Por [2, 3.4.10. 1)], $f: \pi A \to \mathcal{U}(A_+)$, $p \longmapsto A_+ \setminus p$, es una biyección. La función recíproca es $f^{-1}: \mathcal{U}(A_+) \to \pi A$, $\mathcal{U} \longmapsto S(A_+ \setminus \mathcal{U})$, en donde $S(B) = \{x \in A : \text{existe } b \in B \text{ tal que } |x| \leq |b|\}$, para $B \subseteq A$.

Declarando $S_{\mathcal{U}(A_+)}(a) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+) : a \in \mathcal{U}\}$, para $a \in A_+$, se tiene que $\{S_{\mathcal{U}(A_+)}(a) : a \in A_+\}$ es una base para una topología de $\mathcal{U}(A_+)$:

(i) Evidentemente $\mathcal{U}(A_+) = \bigcup\{S_{\mathcal{U}(A_+)}(a) : a \in A_+\}$, y

(ii) Si $a_1, a_2 \in A_+$ son tales que $\mathcal{U}_0 \in S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_1) \cap S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_2)$, entonces $a_1, a_2 \in \mathcal{U}_0$, lo que implica que $a_1 \wedge a_2 \in \mathcal{U}_0$, por tanto $\mathcal{U}_0 \in S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_1 \wedge a_2)$; es claro entonces que $S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_1 \wedge a_2) = S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_1) \cap S_{\mathcal{U}(A_+)}(a_2)$.

Veamos que f es continua; para $a \in A_+$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\big(S_{\mathcal{U}(A_+)}(a)\big) &= \{p \in \pi A : f(p) \in S_{\mathcal{U}(A_+)}(a)\} \\
&= \{p \in \pi A : a \in A_+ \setminus p\} \\
&= \{p \in \pi A : a \notin p\} \\
&= S_{\pi A}(a).
\end{aligned}
$$

Veamos que f es abierta: para $a \in A$, $S_{\pi A}(a) = S_{\pi A}(|a|)$ ya que todo $p \in \pi A$ es un sub-grupo solido y entonces $a \in p \Leftrightarrow |a| \in p$. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
f\big(S_{\pi A}(a)\big) &= f\big(S_{\pi A}(|a|)\big) \\
&= \{f(p) : |a| \notin p\} \\
&= \{A_+ \setminus p : |a| \in A_+ \setminus p\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+) : |a| \in \mathcal{U}\} \\
&= S_{\mathcal{U}(A_+)}(|a|),
\end{aligned}
$$

por consiguiente f es un homeomorfismo.

Para $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+)$ veamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A) \in \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$. Evidentemente $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$ es un filtro de $\mathcal{I}d\,(A)$. Basta mostrar que para todo $e \in \mathcal{I}d\,(A)$, $e \in \mathcal{U}$ o $\bar{e} \in \mathcal{U}$. Sino, existe $e \in \mathcal{I}d\,(A)$ tal que $e \in A_+ \setminus \mathcal{U}$ y $\bar{e} \in A_+ \setminus \mathcal{U}$. Por [2, 3.4.10], $A_+ \setminus \mathcal{U}$ es un sub-grupo primo de A y entonces $e+\bar{e} = 1 \in A_+ \setminus \mathcal{U}$, lo que da una contradicción. Por tanto $g{:}\,\mathcal{U}(A_+) \mapsto \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A)), \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$, está bien definida.

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$, entonces $\mathcal{U}_0$ es una base de un filtro de A_+. Entonces sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de A_+ tal que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$. En particular obtenemos que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$. Por lo que precede, $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$ es un ultrafiltro de $\mathcal{I}d\,(A)$ y por tanto $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A) = g(\mathcal{U})$.

Veamos que para $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+)$ y $a \in A_+$, tenemos $a \in \mathcal{U} \Leftrightarrow d(a) \in \mathcal{U}$. Si $a \in \mathcal{U}$, como $c(a) \in a^{\perp}$ (i.e.: $c(a) \wedge a = 0$) entonces $c(a) \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)$ es un ultrafiltro y $c(a) \in \mathcal{I}d\,(A)$, luego $\overline{c(a)} = 1 - c(a) = d(a) \in \mathcal{U}$. Recíprocamente, si $a \notin \mathcal{U}$, por el lema 3.9 existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $u \wedge a = 0$, entonces $u \in a^{\perp}$. Como $d(a) \in a^{\perp\perp}$, se tiene $u \wedge d(a) = 0$. Consecuentemente, $d(a) \notin \mathcal{U}$.

La inyectividad de g se deduce fácilmente del siguiente hecho: sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{U}(A_+)$ tales que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{I}d\,(A) = \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{I}d\,(A)$. Entonces para $a \in A_+$,

$$\begin{array}{rcl} a \in \mathcal{U}_1 & \Leftrightarrow & d(a) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{I}d\,(A) \\ & \Leftrightarrow & d(a) \in \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{I}d\,(A) \\ & \Leftrightarrow & a \in \mathcal{U}_2, \end{array}$$

esto quiere decir que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Veamos que g es continua; los abiertos de base de $\mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$ son de la forma $\langle e \rangle = \big\{\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A)) : e \in \mathcal{U}\big\}$, para $e \in \mathcal{I}d\,(A)$. Entonces $g^{-1}\big(\langle e \rangle\big) = \big\{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+) : g(\mathcal{U}) \in \langle e \rangle\big\} = \big\{\mathcal{U} \in \mathcal{U}(A_+) : e \in \mathcal{U}\big\} = S_{\mathcal{U}(A_+)}(e)$, que es un abierto de base n

Basta ver que g es abierta para ver que es un homeomorfismo. Para $a \in A_+$, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} g\big(S_{\mathcal{U}(A_+)}(a)\big) & = & \big\{g(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in S_{\mathcal{U}(A_+)}(a)\big\} \\ & = & \big\{\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A) : a \in \mathcal{U}\big\} \\ & = & \big\{\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A) : d(a) \in \mathcal{U}\big\} \\ & = & \big\{\mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A) : d(a) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{I}d\,(A)\big\} \\ & = & \big\{\mathcal{U} \in \mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A)) : d(a) \in \mathcal{U}\big\} \\ & = & \langle d(a) \rangle, \end{array}$$

que es abierto de base de $\mathcal{S}(\mathcal{I}d\,(A))$.

Por el teorema [2, 10.2.1] y el hecho que πA es compacto, todo abierto-cerrado de πA es de la forma $S_{\pi A}(a)$ para algún $a \in A$. Por tanto $\mathcal{B}(\pi A) = \{S_{\pi A}(a) : a \in A\}$. Entonces $i_{\pi A}{:}\,\pi A \to \mathcal{S}(\mathcal{B}(\pi A))$, $p \mapsto i(p) = \big\{S_{\pi A}(a) : p \in S_{\pi A}(a)\big\} = \big\{S_{\pi A}(a) : a \notin p\big\}$ es un homeomorfismo. Si ϱ es el isomorfismo descrito en el corolario 3.8, declaramos $k = \mathcal{S}(\varrho) \circ i_{\pi A}$. Entonces $k{:}\,\pi A \to \mathcal{S}(\mathrm{PP}(A))$ es un homeomorfismo tal que $k(p) = \mathcal{S}(\varrho)\big(i_{\pi A}(p)\big) = \mathcal{S}(\varrho)\big(\{S_{\pi A}(a) : a \notin p\}\big) = \big\{\varrho^{-1}(S_{\pi A}(a)) : a \notin p\big\} = \{a^{\perp\perp} : a \notin p\}$.

Si γ es el isomorfismo descrito en la proposición 3.7, decretamos $h = \mathcal{S}(\gamma)$ el homeomorfismo asociado. Para $p \in \pi A$, $(h \circ k)(p) = h\big(\{a^{\perp\perp} : a \notin p\}\big) = \big\{\gamma^{-1}(a^{\perp\perp}) : a \notin p\big\} = \{d(a) : a \notin p\} = \{d(a) : a \in A_+ \setminus p\}$, ya que $a \notin p \Leftrightarrow |a| \notin p$ y $d\big(a\big) = d\big(|a|\big)$, para $a \in A$. Además, es un ultrafiltro de $\mathcal{I}d\,(A)$.

Por otro lado, $(g \circ f)(p) = g(A_+ \setminus p) = (A_+ \setminus p) \cap \mathcal{I}d\,(A)$ es un ultrafiltro de $\mathcal{I}d\,(A)$. Se sabe por [2, 3.4.10] que $A_+ \setminus p \in \mathcal{U}(A_+)$ y por tanto $a \in A_+ \setminus p \Leftrightarrow d(a) \in A_+ \setminus p$ para $a \in A_+$. Esto demuestra que $h\big(k(p)\big) \subseteq (A_+ \setminus p) \cap \mathcal{I}d\,(A) = g\big(f(p)\big)$. Como los dos son ultrafiltros, entonces $h\big(k(p)\big) = g\big(f(p)\big)$. Finalmente, $h \circ k = g \circ f$.

■

4. Ultraproductos de f-anillos proyectables

Las siguientes nociones son clásicas en la teoría de anillos de funciones continuas a valores reales; seguimos de cerca la obra [5]. Para un espacio topológico X completamente regular se designa por $C(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, en donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales con la topología del orden. De ahora en adelante X será un espacio completamente regular.

Para $f \in C(X)$, $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ es el zero-set de f. Un sub-conjunto M de X es un cozero-set si $X \setminus M$ es un zero-set. El conjunto de zero-sets de X, $Z(X) = \big\{Z(f) : f \in C(X)\big\}$, es un retículo con las operaciones usuales de intersección y de union de conjuntos de X. Un ultrafiltro de $Z(X)$ se designa por un z-ultrafiltro.

Se declara $\beta X = \{A : A \text{ es un } z\text{-ultrafiltro de } X\}$, con la topología que tiene como base de abiertos los $U_{Z(f)} = \big\{A \in \beta X : Z(f) \notin A\big\}$, para $f \in C(X)$. Se puede ver βX como el conjunto de indices de z-ultrafiltros sobre X (super-indices, más bien), es decir $\beta X = (A^p)_{p\in\beta X}$, y la base de abiertos descrita anteriormente es $U_{Z(f)} = \{p \in \beta X : Z(f) \notin A^p\}$. Para $p \in X$, designamos por $A_p = \{Z \in Z(X) : p \in Z\}$ el z-ultrafiltro principal generado por p. Siguiendo la costumbre se escoge la indexación de βX de manera que $A^p = A_p$ cuando $p \in X$. Se tiene entonces una sumersión de X en βX, que hace de X un sub-espacio denso de βX. Se confunde usualmente p con A_p.

Para una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios topológicos, $\dot\bigcup_{i\in I} X_i$ es la suma disjunta y se convierte en un espacio topológico si $\mathcal{O} \subseteq \dot\bigcup_{i\in I} X_i$ es abierto cuando $\mathcal{O} \cap X_i$ es abierto en X_i, para todo $i \in I$. Nótese que $\dot\bigcup_{i\in J} X_i$ es abierto-cerrado en $\dot\bigcup_{i\in I} X_i$ para todo $J \subseteq I$.

Lema 4.1 *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos; entonces Z es un zero-set de $\dot\bigcup_{i\in I} X_i$ si y solo si $Z = \dot\bigcup_{i\in I} Z_i$, en donde Z_i es un zero-set de X_i, para todo $i \in I$.*

Dm: ($\Rightarrow$) Sea $f \in C(\dot\bigcup_{i\in I} X_i)$ tal que $Z = Z(f)$. Declaramos $f_i = f_{\restriction X_i}$, para $i \in I$. Claramente $f_i \in C(X_i)$, para $i \in I$, y $Z(f) = \dot\bigcup_{i\in I} Z(f_i)$.

($\Leftarrow$) Sea $f_i \in C(X_i)$ tal que $Z_i = Z(f_i)$, para $i \in I$. Considérese $f = \dot\bigcup_{i\in I} f_i\colon \dot\bigcup_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}$, $(x,i) \mapsto f_i(x)$. Evidentemente $f^{-1}(\mathcal{O}) = \dot\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O})$, para cualquier abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$; esto prueba que $f \in C(\dot\bigcup_{i\in I} X_i)$. Es claro que $Z(f) = \dot\bigcup_{i\in I} Z(f_i) = \dot\bigcup_{i\in I} Z_i = Z$. ■

Observación 4.2 *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Para $J \subseteq I$:*

$$\begin{array}{rcl} f_J\colon \dot\bigcup_{i\in I} X_i & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,i) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i \in J \\ 1 & \text{si } i \notin J, \end{array} \right. \end{array}$$

es continua y $Z(f_J) = \dot\bigcup_{i\in J} X_i$.

Dm: f_J es 0 sobre el abierto-cerrado $\dot\bigcup_{i\in J} X_i$, y 1 en su complementario; es por tanto continua, y $Z(f_J) = \dot\bigcup_{i\in J} X_i$. ■

Pour una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios compactos y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I, el autor de [1] define el **ultracoproducto** (diremos **ultrasuma**) de la familia $(X_i)_{i\in I}$ sobre $\mathcal{D}$, como:

$$\sum_{\mathcal{D}} X_i = \Big\{p \in \beta\Big(\dot\bigcup_{i\in I} X_i\Big) : \dot\bigcup_{i\in J} X_i \in p, \text{ para todo } J \in \mathcal{D}\Big\},$$

con la topología inducida por $\beta(\dot\bigcup_{i\in I} X_i)$. La observación siguiente permite ver el efecto de la ultrasuma sobre los z-ultrafiltros principales.

Observación 4.3 *Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios compactos (no-vacíos) y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I. Entonces:*

$$\sum_{\mathcal{D}} X_i \subseteq \beta\left(\dot{\bigcup_{i\in I}} X_i\right) \setminus \dot{\bigcup_{i\in I}} X_i \iff \mathcal{D} \text{ es no principal.}$$

Dm: Las siguientes equivalencias se verifican fácilmente:

$$\begin{array}{rl}
 & \sum_{\mathcal{D}} X_i \subseteq \beta\big(\dot\bigcup_{i\in I} X_i\big) \setminus \dot\bigcup_{i\in I} X_i \\
\iff & \text{para todo } (x,i) \in \dot\bigcup_{i\in I} X_i,\ A_{(x,i)} \notin \sum_{\mathcal{D}} X_i \\
\iff & \text{para todo } (x,i) \in \dot\bigcup_{i\in I} X_i,\ \text{existe } J \in \mathcal{D} \text{ tal que } \dot\bigcup_{i\in J} X_i \notin A_{(x,i)} \\
\iff & \text{para todo } (x,i) \in \dot\bigcup_{i\in I} X_i,\ \text{existe } J \in \mathcal{D} \text{ tal que } Z(f_J) \notin A_{(x,i)} \\
\iff & \text{para todo } (x,i) \in \dot\bigcup_{i\in I} X_i,\ \text{existe } J \in \mathcal{D} \text{ tal que } f_J(x,i) \neq 0 \\
\dagger_1 \iff & \text{para todo } (x,i) \in \dot\bigcup_{i\in I} X_i,\ \text{existe } J \in \mathcal{D} \text{ tal que } i \notin J \\
\dagger_2 \iff & \text{para todo } i \in I,\ \text{existe } J \in \mathcal{D} \text{ tal que } i \notin J \\
\iff & \mathcal{D} \text{ es no principal.}
\end{array}$$

Para $\dagger_2 \Rightarrow \dagger_1$ se requiere que los X_i sean no vacíos. ■

Para una familia $(S_i)_{i\in I}$ de sub-conjuntos de $(X_i)_{i\in I}$ (i.e.: $S_i \subseteq X_i$, para $i \in I$), en [1] se declara:

$$\sigma_{\mathcal{D}}(S_i) = \Big\{p \in \sum_{\mathcal{D}} X_i : \dot{\bigcup_{i\in I}} S_i \text{ contiene un element de } p\Big\}.$$

En este trabajo, el autor demuestra que:

$$\big\{\sigma_{\mathcal{D}}(M_i) : (M_i)_{i\in I} \text{ es una familia de cozero-sets de } (X_i)_{i\in I}\big\},$$

es una base de abiertos para la topología de $\sum_{\mathcal{D}} X_i$.

El resultado que nos interesa (demostrado en [1]) es el siguiente: si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios booleanos, entonces $\sum_{\mathcal{D}} X_i$ es booleano y:

$$\begin{array}{rcl}
\eta\colon \prod_{i\in I} \mathcal{B}(X_i)/\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{B}\big(\sum_{\mathcal{D}} X_i\big) \\
(C_i)_{i\in I}/\mathcal{D} & \longmapsto & \sigma_{\mathcal{D}}(C_i),
\end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Boole.

La clase de f-anillos proyectables es cerrada bajo ultraproductos. El lema siguiente describe el espacio de representación de un ultraproducto en términos de la ultrasuma de los espacios de representación de sus factores. Recordamos que en un anillo reticulado A, $S(B) = \big\{x \in A : \text{existe } b \in B \text{ tal que } |x| \leq |b|\big\}$ es la parte sólida generada por B en A.

Proposición 4.4 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I. Entonces:*

$$\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i \simeq \pi\left(\prod_{i\in I} A_i \Big/ \mathcal{D}\right),$$

y el homeomorfismo está dado por:

$$p \longmapsto \tilde{p} = S\left(\left(\prod_{i\in I} A_i \Big/ \mathcal{D}\right)_+ \setminus \mathcal{U}_p\right),$$

en donde

$$\mathcal{U}_p = \Big\{(a_i)_{i\in I}/\mathcal{D} \in \left(\prod_{i\in I} A_i \Big/ \mathcal{D}\right)_+ : \dot{\bigcup_{i\in I}} S_{\pi A_i}(a_i) \in p\Big\}.$$

Dm: Por la proposición 3.11, tenemos que:

$$\pi\left(\prod_{i\in I} A_i \big/ \mathcal{D}\right) \simeq \mathcal{U}\left(\left(\prod_{i\in I} A_i \big/ \mathcal{D}\right)_+\right) \simeq \mathcal{S}\left(\mathcal{I}d\left(\prod_{i\in I} A_i \big/ \mathcal{D}\right)\right). \tag{1}$$

Por definisabilidad de $\mathcal{I}d\,(\cdot)$, obtenemos que:

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{I}d\left(\prod_{i\in I} A_i \big/ \mathcal{D}\right)\right) \simeq \mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{I}d\,(A_i) \big/ \mathcal{D}\right). \tag{2}$$

Del lema 3.5, deducimos que:

$$\mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{I}d\,(A_i) \big/ \mathcal{D}\right) \simeq \mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{B}(\pi A_i) \big/ \mathcal{D}\right). \tag{3}$$

Por el resultado de [1]:

$$\mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{B}(\pi A_i) \big/ \mathcal{D}\right) \simeq \mathcal{S}\left(\mathcal{B}\left(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i\right)\right). \tag{4}$$

Finalmente, por la dualidad de Stone:

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{B}\left(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i\right)\right) \simeq \sum_{\mathcal{D}} \pi A_i. \tag{5}$$

El homeomorfismo será descrito paso por paso (comenzando por abajo) gracias a la serie de homeomorfismos anteriores:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i & \overset{(5)}{\longrightarrow} & \mathcal{S}\Big(\mathcal{B}\big(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i\big)\Big) \\
p & \longmapsto & \mathcal{U}_p^1 = \big\{\mathcal{O} \in \mathcal{B}\big(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i\big) : p \in \mathcal{O}\big\} \\
 & & \quad = \big\{\sigma_{\mathcal{D}}(C_i) : (C_i)_{i\in I} \text{ es una familia de abiertos-cerrados} \\
 & & \qquad\qquad \text{de } (\pi A_i)_{i\in I} \text{ y } p \in \sigma_{\mathcal{D}}(C_i)\big\} \\
 & & \quad = \Big\{\sigma_{\mathcal{D}}\big(S_{\pi A_i}(a_i)\big) : (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \text{ y } \dot{\bigcup}_{i\in I} S_{\pi A_i}(a_i) \in p\Big\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{S}\Big(\mathcal{B}\big(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i\big)\Big) & \overset{(4)}{\longrightarrow} & \mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{B}(\pi A_i)/\mathcal{D}\right) \\
\mathcal{U}_p^1 & \longmapsto & \mathcal{U}_p^2 = \Big\{\big(S_{\pi A_i}(a_i)\big)_{i\in I}/\mathcal{D} : (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \text{ y} \\
 & & \qquad \dot{\bigcup}_{i\in I} S_{\pi A_i}(a_i) \in p\Big\}
\end{array}$$

Para el siguiente cálculo, basta ver la recíproca del isomorfismo dado por el lema 3.5 con los resultados del lema 3.4:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{S}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{B}(\pi A_i)/\mathcal{D}\right) & \overset{(3)}{\longrightarrow} & \mathcal{S}\big(\prod_{i\in I} \mathcal{I}d\,(A_i)/\mathcal{D}\big) \\
\mathcal{U}_p^2 & \longmapsto & \mathcal{U}_p^3 = \Big\{\big(d(a_i)\big)_{i\in I}/\mathcal{D} : (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \text{ y} \\
 & & \qquad \dot{\bigcup}_{i\in I} S_{\pi A_i}(a_i) \in p\Big\}
\end{array}$$

La etapa siguiente se justifica simplemente por el hecho que $d(\cdot)$ es definible (ver lema 3.4):

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{I}d\,(A_i)/\mathcal{D}\right) & \overset{(2)}{\longrightarrow} & \mathcal{S}\left(\mathcal{I}d\left(\prod_{i\in I}A_i/\mathcal{D}\right)\right) \\ \mathcal{U}_p^3 & \longmapsto & \mathcal{U}_p^4=\Big\{d\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big):(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i \text{ y } \\ & & \qquad \dot{\bigcup}_{i\in I}S_{\pi A_i}(a_i)\in p\Big\} \\ & & =\Big\{d\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big):(a_i)_{i\in I}\in\big(\prod_{i\in I}A_i\big)_+ \text{ y } \\ & & \qquad \dot{\bigcup}_{i\in I}S_{\pi A_i}(a_i)\in p\Big\} \end{array}$$

Usando la recíproca del homeomorfismo g dado en la proposición 3.11, obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}\left(\mathcal{I}d\left(\prod_{i\in I}A_i/\mathcal{D}\right)\right) & \overset{(1)}{\longrightarrow} & \mathcal{U}\left(\left(\prod_{i\in I}A_i\Big/\mathcal{D}\right)_+\right) \\ \mathcal{U}_p^4 & \longmapsto & \mathcal{U}_p^5=\big\{(a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}:(a_i)_{i\in I}\in\big(\prod_{i\in I}A_i\big)_+ \\ & & \qquad \text{y } \dot{\bigcup}_{i\in I}S_{\pi A_i}(a_i)\in p\big\} \\ & & =\big\{(a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\in\big(\prod_{i\in I}A_i/\mathcal{D}\big)_+:\dot{\bigcup}_{i\in I}S_{\pi A_i}(a_i)\in p\big\} \end{array}$$

Denotamos $\mathcal{U}_p=\mathcal{U}_p^5$, y el último paso está dado por la inversa de f en la proposición 3.11:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}\left(\left(\prod_{i\in I}A_i\Big/\mathcal{D}\right)_+\right) & \overset{(1)}{\longrightarrow} & \pi\left(\prod_{i\in I}A_i/\mathcal{D}\right) \\ \mathcal{U}_p & \longmapsto & S\left(\left(\prod_{i\in I}A_i\Big/\mathcal{D}\right)_+\setminus\mathcal{U}_p\right). \end{array}$$

La composición de las aplicaciones definidas en cada etapa da el homeomorfismo descrito en el enunciado. ■

Definición 4.5 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I. Para $p\in\sum_{\mathcal{D}}\pi A_i$ y $Z\in p$, definimos:*

$$I(Z)=\{i\in I:\ \textit{existe } q\in\pi A_i \textit{ tal que } (q,i)\in Z\}.$$

Para $i\in I(Z)$, definimos:

$$Q_i(Z)=\{q\in\pi A_i:(q,i)\in Z\}.$$

Nótese que simplemente $I(Z)=\big\{i\in I:\big(\pi A_i\times\{i\}\big)\cap Z\neq\emptyset\big\}$ y que $Q_i(Z)=\big(\pi A_i\times\{i\}\big)\cap Z$ es un cerrado de πA_i (via la identificación de $\pi A_i\times\{i\}$ con πA_i).

Lema 4.6 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I, $p\in\sum_{\mathcal{D}}\pi A_i$ y $Z\in p$. Entonces $I(Z)\in\mathcal{D}$, y por tanto tiene sentido considerar el ultrafiltro $\mathcal{D}$ restringido a $I(Z)$, que denotamos por $\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}$.*

Dm: Si $I(Z)\notin\mathcal{D}$, entonces $J=I\setminus I(Z)\in\mathcal{D}$. Por tanto $\dot{\bigcup}_{i\in J}\pi A_i\in p$. Consecuentemente $Z\cap\dot{\bigcup}_{i\in J}\pi A_i\in p$, y entonces $Z\cap\dot{\bigcup}_{i\in J}\pi A_i\neq\emptyset$. Sea $(q,i)\in Z$ tal que $(q,i)\in\dot{\bigcup}_{i\in J}\pi A_i$. Tenemos que $i\in I(Z)$ e $i\in J$. Esto da una contradicción. ■

En este contexto, si $Z,W\in p$ son tales que $Z\subseteq W$, entonces $I(W)\subseteq I(Z)$ y para $i\in I(W)$, trivialmente $Q_i(W)\subseteq Q_i(Z)$.

Definición 4.7 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I y $p \in \sum_{\mathcal{D}} \pi A_i$. Para $Z \in p$, definimos:*

$$L(Z) = \prod_{i\in I(Z)} \Gamma\left(Q_i(Z), \dot{\bigcup_{q\in Q_i(Z)}} A_i/q\right) \Big/ \mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}.$$

Para $Z, W \in p$ tales que $W \subseteq Z$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon_{Z,W}\colon & L(Z) & \longrightarrow & L(W) \\ & (\sigma_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}} & \longmapsto & \left(\sigma_{i\restriction_{Q_i(W)}}\right)_{i\in I(W)} \Big/ \mathcal{D}_{\restriction_{I(W)}}. \end{array}$$

Lema 4.8 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I y $p \in \sum_{\mathcal{D}} \pi A_i$. Entonces $\Upsilon_{Z,W}$ está bien definido y es un $\mathcal{L}$-homomorfismo sobreyectivo, para todo $Z, W \in p$ con $W \subseteq Z$.*

Dm: $\Upsilon_{Z,W}$ está bien definido: sean $(\sigma_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}, (\tau_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}} \in L(Z)$ tales que $(\sigma_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}} = (\tau_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}$. Entonces $\{i \in I(Z) : \sigma_i = \tau_i\} \in \mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}$. Como $I(W) \in \mathcal{D}$ (ver lema 4.6), tenemos que: $\{i \in I(W) : \sigma_i = \tau_i\} \in \mathcal{D}_{\restriction_{I(W)}}$. Consecuentemente $\{i \in I(W) : \sigma_{i\restriction_{Q_i(W)}} = \tau_{i\restriction_{Q_i(W)}}\} \in \mathcal{D}_{\restriction_{I(W)}}$.

Cálculos simples muestran que $\Upsilon_{Z,W}$ es un homomorfismo de anillos ordenados. $\Upsilon_{Z,W}$ es sobreyectivo ya que toda sección definida sobre un cerrado ($Q_i(W)$ es cerrado) puede extenderse a una sección global y en particular a $Q_i(Z)$ (cf. [9]). ■

Si para $Z, W \in p$, definimos $Z \preccurlyeq W \iff W \subseteq Z$, entonces $(p, \preccurlyeq)$ es un conjunto filtrante.

Definición 4.9 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I y $p \in \sum_{\mathcal{D}} \pi A_i$. Definimos:*

$$L_p = \varinjlim \left(L(Z)_{Z\in p}, (\Upsilon_{Z,W})_{Z\preccurlyeq W}\right).$$

Proposición 4.10 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables, $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I y $p \in \sum_{\mathcal{D}} \pi A_i$. Sea $\tilde{p} \in \pi\big(\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}\big)$ el elemento asociado a p por la proposición 4.4. Entonces:*

$$\left(\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}\right)\Big/\tilde{p} \;\cong\; \varinjlim \left(L(Z)_{Z\in p}, (\Upsilon_{Z,W})_{Z\preccurlyeq W}\right) = L_p.$$

Dm: Para $Z \in p$, consideramos:

$$\begin{array}{rlcl} \Upsilon_Z\colon & L(Z) & \longrightarrow & L_p \\ & (\sigma_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}} & \longmapsto & (\sigma_i)_{i\in I(Z)}/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z)}}\Big/\backsim, \end{array}$$

la aplicación dada por la construcción del limite inductivo; tenemos que $\Upsilon_Z = \Upsilon_W \circ \Upsilon_{Z,W}$ para todo $Z, W \in p$ tales que $Z \preccurlyeq W$, y Υ_Z es un $\mathcal{L}$-homomorfismo sobreyectivo, para todo $Z \in p$.

Para $Z_0 = \dot\bigcup_{i\in I} \pi A_i$ tenemos $Z_0 \in p$, $I(Z_0) = I$, y:

$$\begin{array}{rlcl} \Upsilon = \Upsilon_{Z_0}\colon & \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D} & \longrightarrow & L_p \\ & (a_i)_{i\in I}/\mathcal{D} & \longmapsto & (a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\Big/\backsim, \end{array}$$

que es evidentemente un $\mathcal{L}$-homomorfismo sobreyectivo.

Mostremos que $\ker \Upsilon = \tilde{p}$. Sea $(a_i)_{i\in I}/\mathcal{D} \in \tilde{p}$, entonces $|a_i|_{i\in I}/\mathcal{D} \in \tilde{p}$. Sea $c \in \left(\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}\right)_+ \setminus \mathcal{U}_p$ tal que $|a_i|_{i\in I}/\mathcal{D} \leq c$ (cf. proposición 4.4). Como $\mathcal{U}_p$ es un ultrafiltro y $c \notin \mathcal{U}_p$, entonces $|a_i|_{i\in I}/\mathcal{D} \notin \mathcal{U}_p$. Entonces $\dot\bigcup_{i\in I} S_{\pi A_i}(|a_i|) \notin p$. Por tanto $X_{\bar{a}} = \dot\bigcup_{i\in I} \pi A_i \setminus \dot\bigcup_{i\in I} S_{\pi A_i}(|a_i|) = \dot\bigcup_{i\in I}\big(\pi A_i \setminus S_{\pi A_i}(|a_i|)\big) \in p$. Calculemos $\Upsilon\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big)$ pasando por $X_{\bar{a}}$, es decir:

$$\Upsilon = \Upsilon_{Z_0} = \Upsilon_{X_{\bar{a}}} \circ \Upsilon_{Z_0, X_{\bar{a}}}.$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \Upsilon\Big((a_i)_{i\in I}\big/\mathcal{D}\Big) &= \Upsilon_{X_{\bar{a}}}\left(\Big(a_{i\restriction_{Q_i(X_{\bar{a}})}}\Big)_{i\in I(X_{\bar{a}})}\Big/\mathcal{D}_{\restriction_{I(X_{\bar{a}})}}\right) \\ &= \Big(a_{i\restriction_{Q_i(X_{\bar{a}})}}\Big)_{i\in I(X_{\bar{a}})}\Big/\mathcal{D}_{\restriction_{I(X_{\bar{a}})}}\Big/\backsim . \end{aligned}$$

Para $i \in I(X_{\bar{a}})$, tenemos:

$$\begin{aligned} q \in Q_i(X_{\bar{a}}) &\iff (q,i) \in X_{\bar{a}} \\ &\iff q \in \pi A_i \setminus S_{\pi A_i}(|a_i|) \\ &\iff q \notin S_{\pi A_i}(|a_i|) \\ &\iff |a_i| \in q \\ &\iff a_i \in q \\ &\iff a_i(q) = a_i + q = 0. \end{aligned}$$

Por tanto para $i \in I(X_{\bar{a}})$, tenemos $a_{i\restriction_{Q_i(X_{\bar{a}})}} = 0$. Esto muestra que $\Upsilon\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big) = 0$. Consecuentemente $\tilde{p} \subseteq \ker \Upsilon$.

Sea $(a_i)_{i\in I}\big/\mathcal{D} \notin \tilde{p}$, entonces $|a_i|_{i\in I}\big/\mathcal{D} \notin \tilde{p}$, y por tanto $\dot\bigcup_{i\in I} S_{\pi A_i}(|a_i|) \in p$. Sea $Z_{\bar{a}} = \dot\bigcup_{i\in I} S_{\pi A_i}(|a_i|)$. De la misma manera vamos a calcular $\Upsilon\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big)$ en pasando por $Z_{\bar{a}}$. Es decir:

$$\Upsilon = \Upsilon_{Z_0} = \Upsilon_{Z_{\bar{a}}} \circ \Upsilon_{Z_0, Z_{\bar{a}}}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Upsilon\Big((a_i)_{i\in I}\big/\mathcal{D}\Big) &= \Upsilon_{Z_{\bar{a}}}\left(\Big(a_{i\restriction_{Q_i(Z_{\bar{a}})}}\Big)_{i\in I(Z_{\bar{a}})}\Big/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z_{\bar{a}})}}\right) \\ &= \Big(a_{i\restriction_{Q_i(Z_{\bar{a}})}}\Big)_{i\in I(Z_{\bar{a}})}\Big/\mathcal{D}_{\restriction_{I(Z_{\bar{a}})}}\Big/\backsim . \end{aligned}$$

Para $i \in I(Z_{\bar{a}})$, tenemos:

$$\begin{aligned} q \in Q_i(Z_{\bar{a}}) &\iff (q,i) \in Z_{\bar{a}} \\ &\iff q \in S_{\pi A_i}(|a_i|) \\ &\iff |a_i| \notin q \\ &\iff a_i \notin q \\ &\iff a_i(q) = a_i + q \neq 0. \end{aligned}$$

Por tanto para $i \in I(Z_{\bar{a}})$, obtenemos $a_{i\restriction_{Q_i(Z_{\bar{a}})}} \neq 0$. Esto dice que $\Upsilon\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{D}\big) \neq 0$, y por tanto $(a_i)_{i\in I}/\mathcal{D} \notin \ker \Upsilon$. Esto muestra que $\ker \Upsilon \subseteq \tilde{p}$ y termina la demostración. ■

Teorema 4.11 *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de f-anillos proyectables y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre I. Entonces:*

$$\prod_{i\in I} A_i\Big/\mathcal{D} \in \Gamma^a_{\mathcal{L}}\left(\sum_{\mathcal{D}} \pi A_i, \left(L_p\right)_{p\in\sum_{\mathcal{D}}\pi A_i}\right).$$

Dm: Basta usar el teorema 2.9, y las proposiciones 4.4 y 4.10. ■

Referencias

[1] Bankston, P. (1982) “Some obstacles to duality in topological algebra”, *Canadian Journal of Mathematics* **34**: 80–90.

[2] Bigard, A.; Keimel, K.; Wolfenstein, S. (1977) *Groupes et Anneaux Réticulés.* Lectures Notes in Mathematics **608**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[3] Burris, S.; Werner, H. (1979) “Sheaf constructions and their elementary properties”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **248**: 269–309.

[4] Chang, C.C.; Keisler, H.J. (1978) *Model Theory.* North-Holland, Amsterdam.

[5] Gillman, L.; Jerison, M. (1960) *Rings of Continuous Functions.* Van Nostrand, New York.

[6] Guier, J.I. (1999) *Produits Booléens de Corps et d'Anneaux de Valuations Réels Clos. Théorie des Modèles et Applications.* Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

[7] Keimel, K. (1971) *The representation of Lattice-Ordered Groups and Rings by Sections of Sheaves.* Lectures Notes in Mathematics **248**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg: 1–98.

[8] Macintyre, A. (1973) “Model-completeness for sheaves of structures”, *Fundamenta Mathematicae* **81**: 73–89.

[9] Volger, H. (1979) “Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures”, *Mathematische Zeitschrift* **166**: 27–53.

[10] Willard, S. (1970) *General Topology.* Addison-Wesley, Reading Massachusets.