Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2000 **7**(1-2) : 175–184
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

ANÁLISIS DIGITAL. UNA NUEVA TÉCNICA PARA LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES ACOTADAS QUE, EN UN INTERVALO FINITO, SATISFACEN LAS CONDICIONES DE DIRICHLET

Osvaldo Skliar *– Víctor Medina **– Tatiana Láscaris Comneno ***

Recibido: 21 Junio 2000

Resumen

Se presenta una nueva técnica para aproximar, con tanta precisión como se desee, cualquier función acotada de una variable –especificada en un intervalo finito en el cual puede tener a lo sumo un número finito de máximos y mínimos locales– mediante una suma de trenes de ondas cuadradas.

Palabras clave: Análisis Digital, Representación de Funciones, Procesamiento de Señales.

Abstract

A new technique is introduced for the approximation of any bounded function $f(t)$ that satisfies Dirichlet's conditions in a finite interval, with a precision as high as wanted. Such approximation is obtained by adding n trains of square waves. (Generally, n increases with the desired level of precision.)

Keywords: Digital Analysis, Fonction Representation, Signal Processing.

Mathematics Subject Classification: 65D15

*Escuela de Informática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. E-mail: oskliar@sol.racsa.co.cr. Dirección personal: Apdo. 582-3000, Heredia, Costa Rica.
**Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. E-mail: vmedinab@sol.racsa.co.cr. Dirección personal: Apdo. 258-2050, San José, Costa Rica.
***Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. E-mail: tlascari@una.ac.cr. Dirección personal: Apdo. 828-1100, San José, Costa Rica.

1. Introducción

Sea una función acotada cualquiera de una variable real –por ejemplo el tiempo– especificada en un intervalo finito en el cual puede tener a lo sumo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos locales. (Estas condiciones son conocidas en matemática como condiciones de Dirichlet.[1]) El objetivo de este trabajo es presentar una nueva técnica para la representación de dicha función. Como se probará, tal función puede ser aproximada, en ese intervalo, con tanta precisión como se desee, mediante la suma de n trenes de ondas cuadradas. Estos últimos serán denominados $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$.

Considérese, p. ej., que el intervalo en el cual se ha caracterizado la función $f(t)$ es el siguiente: $t_0 \le t \le t_1$. Entonces, según lo expresado, en dicho intervalo se podrá representar $f(t)$ como sigue:

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{n} S_i \ .$$

Supóngase que no se restringe la atención meramente al intervalo $t_0 \le t \le t_1$ y que interesa expresar, de manera general, cuál es el resultado de efectuar la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} S_i$. Es el siguiente: una función periódica –de periodo igual al mínimo común múltiplo de los períodos de los trenes de ondas cuadradas $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$ de amplitudes no nulas– que, en el mencionado intervalo, coincide con la aproximación lograda a $f(t)$.

La idea básica del Análisis Armónico fue la de representar funciones con ciertas propiedades –tales como las de satisfacer las condiciones de Dirichlet–, especificadas en ciertos intervalos, mediante series de senos y/o cosenos. La idea básica del Análisis Digital –que presentamos en este trabajo– es la de representar dicho tipo de funciones, especificadas en ciertos intervalos, mediante sumas de trenes de ondas cuadradas. Las funciones resultan aproximadas, en sus regiones de continuidad, con tanta precisión como se desee. En los puntos de discontinuidad, la técnica introducida no genera valores para las funciones consideradas ni da lugar a fenómenos del tipo "efecto Gibbs" o similares.

2. Fundamentos del Análisis Digital

Sea la siguiente función del tiempo $f(t)$, caracterizada en el intervalo $0 \le t \le 3$.

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ -3 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 5 & \text{si } 2 < t \le 3 \end{cases} \tag{1}$$

Dicha función puede representarse –como se demostrará–, en los intervalos en que la función es continua, mediante la suma de tres trenes de ondas cuadradas que serán denominados S_1, S_2 y S_3. T_1 –el período de S_1– es igual a 6. (O sea, $\dfrac{T_1}{2}$ es igual al lapso para el que se ha caracterizado la función.) T_2 –el período de S_2– es igual a 4 y T_3 –el período de

S_3– es igual a 2. Para determinar las amplitudes de S_1, S_2 y S_3 se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2 \\ A_1 + A_2 - A_3 &= -3 \\ A_1 - A_2 + A_3 &= 5 \end{aligned}$$

(A_1, A_2 y A_3 son las amplitudes de S_1, S_2 y S_3, respectivamente.) Si se resuelve el precedente sistema de ecuaciones, son obtenidos los siguientes valores para las incógnitas: $A_1 = 1$, $A_2 = -\frac{3}{2}$ y $A_3 = \frac{5}{2}$.

A continuación son representados los trenes de ondas cuadradas, en el intervalo $0 \leq t \leq 12$.

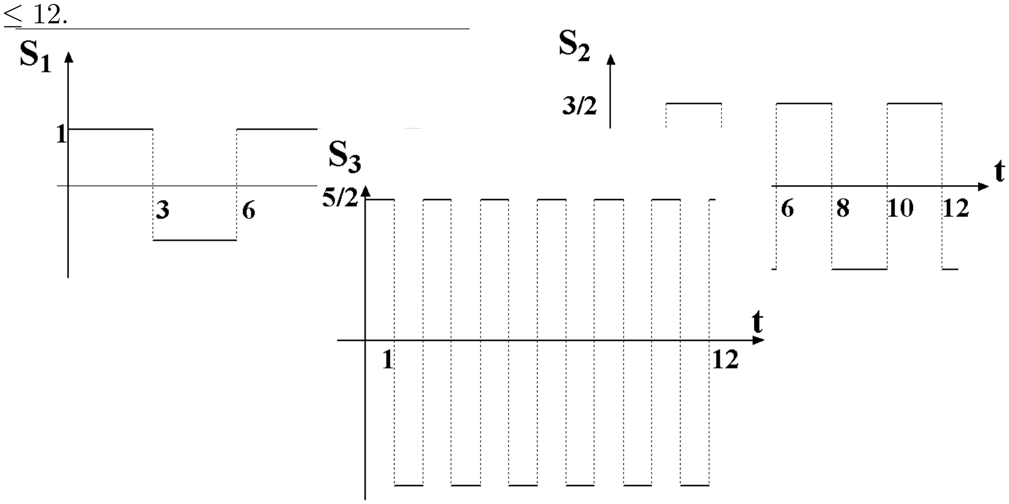

Figura 1: Trenes de ondas cuadradas en el intervalo $0 \leq t \leq 12$.

Al sumar S_1, S_2 y S_3 se obtiene una función periódica –de período $T = 12$– que, en el intervalo $0 \leq t \leq 3$, coincide con la función caracterizada en (1). (Esto se ilustra en la figura 2.)

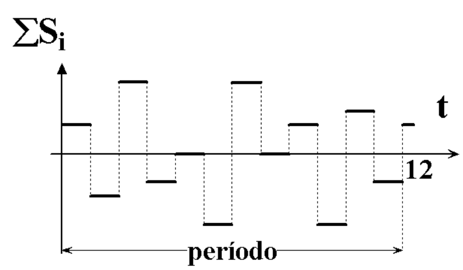

Figura 2: Suma de S_1, S_2 y S_3.

Sea una función $f(t)$ caracterizada en el intervalo $0 \leq t \leq t_4$ que presenta discontinuidades en ciertos puntos de dicho intervalo que serán denominados t_1, t_2 y t_3. Supóngase que los valores numéricos de t_1, t_2, t_3 y t_4 son números racionales. (En el caso de que fuesen números irracionales, para todos los fines prácticos que posibilita alcanzar el enfoque presentado en este trabajo, esos números podrían ser sustituídos por sendos números racionales, tan próximos a ellos como se desease.) Considérese, pues, que $t_1 = \frac{n_1}{m_1}$, $t_2 = \frac{n_2}{m_2}$, $t_3 = \frac{n_3}{m_3}$ y $t_4 = \frac{n_4}{m_4}$, siendo n_1, n_2 , n_3 y n_4 números enteros y m_1, m_2 , m_3 y m_4 enteros positivos. Puede subdividirse, entonces, el intervalo en el que se caracteriza la función, en subintervalos de longitud igual a $\frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4}$. Si se procede así, los puntos de discontinudad corresponderán a ciertos puntos de separación de intervalos vecinos. (P.ej., $t_1 = m_2 m_3 m_4 \frac{n_1}{m_1 m_2 m_3 m_4}$, $t_2 = m_1 m_3 m_4 \frac{n_2}{m_1 m_2 m_3 m_4}$, $t_3 = m_1 m_2 m_4 \frac{n_3}{m_1 m_2 m_3 m_4}$ y $t_4 = m_1 m_2 m_3 \frac{n_4}{m_1 m_2 m_3 m_4}$.)

Este enfoque puede ser generalizado para cualquier número finito de discontinuidades presentes en el intervalo en el que se caracteriza la función considerada. Supóngase que el intervalo en el que se ha caracterizado una función $f(t)$ ha quedado dividido en n subintervalos que serán denominados I_1, I_2, I_3, $\cdots$, I_n. Se procede a “discretizar” la función considerada de la siguiente manera: se atribuye a todos los puntos interiores del subintervalo i-ésimo ($i = 1, 2, 3, \cdots, n$) un único valor de la función $f(t)$ que es igual al del valor de $f(t)$ correspondiente al punto medio de dicho subintervalo. Puede resolverse, a continuación, el sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas que resulta de sumar, para el intervalo de caracterización de la función, los trenes de ondas cuadradas S_1, S_2, S_3, $\cdots$ y S_n. Los períodos correspondientes a dichas ondas cuadradas son, respectivamente, $T_1 = 2n$, $T_2 = 2(n-1)$, $T_3 = 2(n-2)$, $\cdots$, y $T_n = 2$. Sean f_1, f_2, f_3, $\cdots$, y f_n las frecuencias correspondientes a S_1, S_2, S_3, $\cdots$ y S_n, respectivamente. (Las frecuencias, desde luego, son iguales a las inversas de los correspondientes períodos.) Nótese que para dichas frecuencias se cumple:

$$f_n = n\, f_1, \;\; f_n = (n-1)\, f_2, \;\; f_n = (n-2)\, f_3, \;\; \cdots, \;\; f_n = n\, f_{n-1}.$$

A título de ejemplo, se considerará, a continuación, el sistema de ecuaciones resultante si $n = 7$.

$$\begin{array}{rcl}
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 & = & C_1 \\
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A_7 & = & C_2 \\
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6 + A_7 & = & C_3 \\
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 - A_6 - A_7 & = & C_4 \\
A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 & = & C_5 \\
A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 - A_7 & = & C_6 \\
A_1 - A_2 - A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 & = & C_7
\end{array}$$

En las precedentes ecuaciones, A_1, A_2, A_3, $\cdots$ y A_7 son las amplitudes correspondientes, respectivamente, a los trenes de ondas cuadradas S_1, S_2, S_3, $\cdots$ y S_7. C_1, C_2, C_3, $\cdots$ y C_7 son los valores de $f(t)$ correspondientes a los puntos medios de los siete subintervalos considerados, en este caso, del intervalo temporal en que haya sido caracterizada la función tratada mediante la técnica que se describe en este trabajo.

Por supuesto, el intervalo temporal para el que se especifica la función a ser tratada puede ser cualquiera. (No hay ninguna razón para que uno de sus extremos deba ser, en todos los casos, el origen del eje temporal del sistema de coordenadas utilizado.)

A continuación se representa, mediante la técnica descripta, la función $f(t)$ especificada en el intervalo $-1 \leq t \leq 2$, salvo por sus discontinuidades (en $t = -\dfrac{1}{2}$ y en $t = \frac{1}{3}$) por la siguiente fórmula:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ -2 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{3} \\ e^t & \text{si } \frac{1}{3} < t \leq 2 \end{cases}$$

Considérese que el intervalo $-1 \leq t \leq 2$, se subdivide en seis subintervalos (de longitud $\dfrac{3}{6}$). A continuación se procede a aproximar la función $f(t)$ por la función escalonada $h(t)$ que, en cada uno de los seis subintervalos considerados, es constante y tal que su valor corresponde al valor de $f(t)$ en el punto medio de dichos subintervalos. Ahora, se procede a determinar las amplitudes correspondientes a los trenes de ondas cuadradas S_1, S_2, S_3, $\cdots$ y S_6, cuya suma aproxima la función $f(t)$ en el intervalo $-1 \leq t \leq 2$. Esto es equivalente a expresar la función escalonada $h(t)$ como una suma de seis trenes de ondas cuadradas. Para determinar las amplitudes de dichos trenes de ondas cuadradas debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcr} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 & = & 1{,}0000 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6 & = & -2{,}0000 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6 & = & -2{,}0000 \\ A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 - A_6 & = & 2{,}1170 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_4 + A_5 + A_6 & = & 3{,}4903 \\ A_1 - A_2 - A_3 - A_4 + A_5 - A_6 & = & 5{,}7546 \end{array}$$

La figura 3 representa la aproximación a $f(t)$ por la suma de los seis trenes de ondas cuadradas S_1, S_2, S_3, $\cdots$ y S_6 en el intervalo $-1 \leq t \leq 2$.

Para este caso resulta $f(t) \simeq \displaystyle\sum_{i=1}^{6} S_i$; siendo cada S_i un tren de ondas cuadradas. Los valores de cada S_i son los siguientes: $S_1(t) = 1{,}8773$ (para $-1 < t < 2$), $S_1(t) = -1{,}8773$ (para $2 < t < 5$), $S_2(t) = -2{,}6321$ (para $-1 < t < 3/2$), $S_2(t) = 2{,}6321$ (para $3/2 < t < 4$), $S_3(t) = 2{,}3133$ (para $-1 < t < 1$), $S_3(t) = -2{,}3133$ (para $1 < t < 3$), $S_4(t) = -3{,}5585$ (para $-1 < t < 1/2$), $S_4(t) = 3{,}5585$ (para $1/2 < t < 2$), $S_5(t) = 1{,}5$ (para $-1 < t < 0$), $S_5(t) = -1{,}5$ (para $0 < t < 1$), $S_6(t) = 1{,}5$ (para $-1 < t < -1/2$) y $S_6(t) = -1{,}5$ (para $-1/2 < t < 0$). Los períodos correspondientes a S_1, S_2, $\cdots$, S_6 son los siguientes: $T_1 = 6$, $T_2 = 5$, $T_3 = 4$, $T_4 = 3$, $T_5 = 2$ y $T_6 = 1$.

Por supuesto, si se incrementa el número de trenes de ondas cuadradas que son sumados, 4 y 5 mejora la aproximación obtenida a la función dada. Así, por ejemplo, en las figuras son graficadas las aproximaciones obtenidas a dicha función al sumar 18 y 180 trenes de ondas cuadradas, respectivamente.

En la figura 5 no llega a distiguirse la diferencia entre la aproximación obtenida y la función dada.

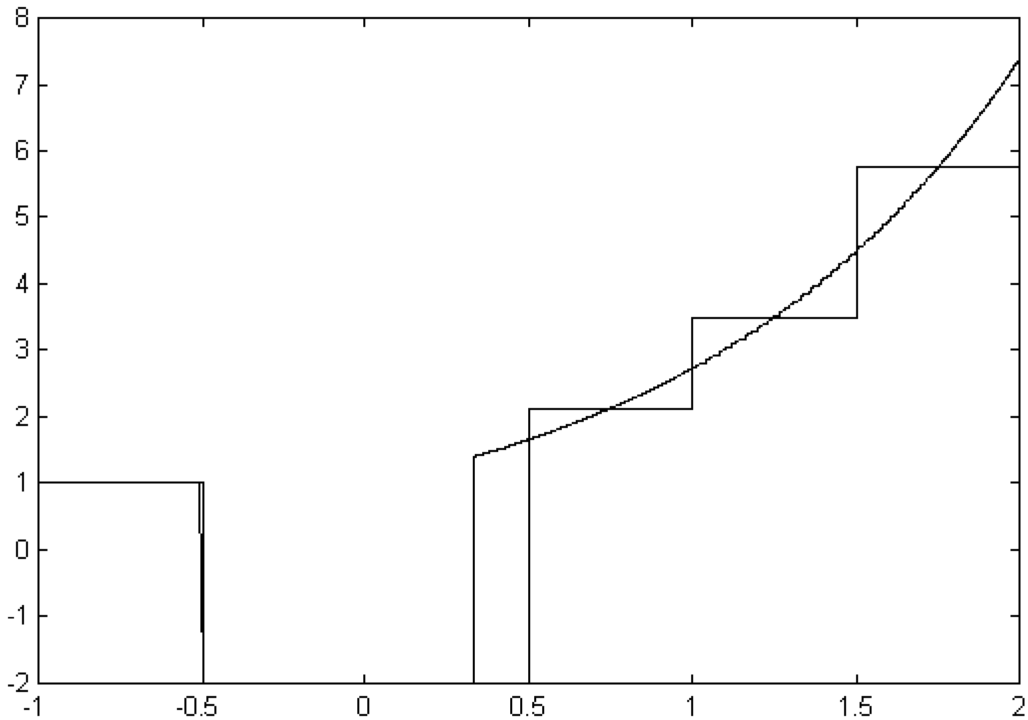

Figura 3: Aproximación de $f(t)$ por seis trenes de ondas cuadradas.

3. Justificación del método

Se demuestra a continuación la existencia de soluciones únicas para los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que resultan al aproximar una función $f(t)$ caracterizada en algún intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, por la suma de n trenes de ondas cuadradas.

Se divide el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ en n subintervalos de igual longitud y, como fue especificado antes, se asume que las discontinuidades de $f(t)$ coinciden con los puntos extremos de algunos de los subintervalos. Llamando C_i al valor de $f(t)$ en el punto medio del subintervalo i-ésimo $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$, para determinar las amplitudes de los distintos trenes de ondas cuadradas debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{array}{rcl}
A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n & = & C_1 \\
A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-2} + A_{n-1} - A_n & = & C_2 \\
A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-2} - A_{n-1} + A_n & = & C_3 \\
A_1 + A_2 + A_3 + \cdots - A_{n-2} - A_{n-1} - A_n & = & C_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{2}$$

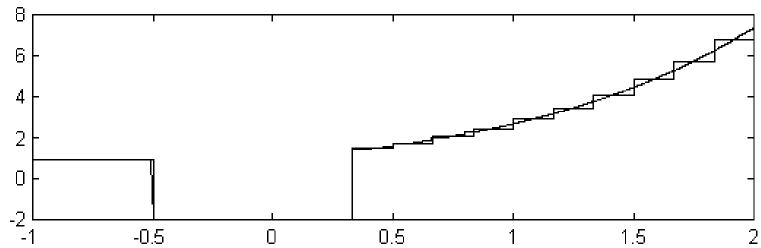

Figura 4: Aproximación de $f(t)$ por 18 trenes de ondas cuadradas.

Que puede, también, escribirse en la forma

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + A_{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} + A_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + A_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Se observa que los distintos trenes de ondas cuadradas se han ordenado a partir de aquel con la menor frecuencia, representado por el vector $(1, 1, \cdots, 1)^t$, al de mayor frecuencia, representado por el vector $(1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1})^t$. (El superíndice t indica “transpuesto”.)

Este sistema, escrito en forma matricial, queda representado por la ecuación

$$M(n) \cdot A = C\ ,$$

siendo $A = (A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n)^t$, $C = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n)^t$ y $M(n)$ la matriz de dimensión $n \times n$ que tiene por elemento–(i, j) a $(-1)^k$, donde k es la parte entera de $\dfrac{i-1}{n-j+1}$.

Considérense los siguientes ejemplos de este tipo de matrices:

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

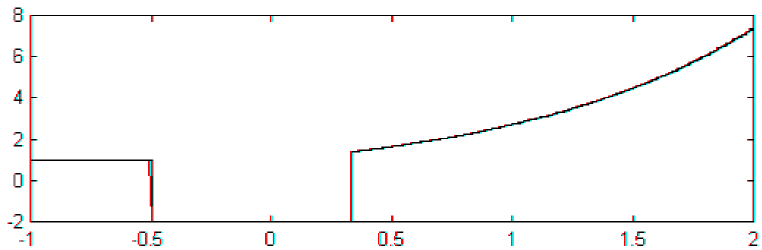

Figura 5: Aproximación de $f(t)$ por 180 trenes de ondas cuadradas.

$$M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & M(2) \\ 1 & & \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ 1 & & M(3) & \\ 1 & & & \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

En general, se observa que el elemento (i, j) de la matriz $M(n-1)$ es igual al elemento $(i, j+1)$ de la matriz $M(n)$ puesto que $\dfrac{i-1}{(n-1)-j+1} = \dfrac{i-1}{n-(j+1)+1}$ por lo que siempre se podrá escribir (para $n > 2$):

$$M(n) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ & & & M(n-1) & \\ \vdots & & & & \\ \hline 1 & -1 & \star & \cdots & \star \end{array}\right)$$

Ahora, restándole a la primera columna de $M(n)$ la segunda, se obtiene una matriz G, equivalente a $M(n)$, que puede escribirse en la forma:

$$G = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & M(n-2) & \\ \hline 0 & 1 & \star & \cdots & \star \;\; \star \\ 2 & -1 & \star & \cdots & \star \;\; \star \end{array}\right)$$

Desde luego, esta matriz G es inversible si y sólo si la matriz $M(n)$ lo es. Nótese que G y $M(n)$ se diferencian sólo en la primera columna y también se obtiene que

$$G = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & M(n-1) & & \\ 0 & & & & \\ \hline 2 & -1 & \star & \cdots & \star \;\; \star \end{array}\right)$$

Resulta claro que G es inversible –y en consecuencia $M(n)$– si y sólo si $M(n-1)$ es inversible. (Se observa que $\det(G) = 2(-1)^{n+1}\det[M(n-1)]$).

Es fácil verificar que $M(2)$, y $M(3)$ son matrices inversibles. Luego, podemos concluir, por inducción, que las matrices $M(n)$ son inversibles cualquiera que sea $n > 1$. Por consiguiente, –como es bien sabido– el sistema de ecuaciones (2) tiene solución única.

Queda probado, así, que cualquier función con las características especificadas puede aproximarse, tanto como se desee, por la suma de n trenes de ondas cuadradas.

4. Discusión y perspectivas

Si bien algunas de las ideas fundamentales concernientes al Análisis Digital recuerdan ideas básicas del análisis Armónico([2],[3],[4]) –que constituye, seguramente, su más importante antecedente científico– no puede considerarse una rama de este último. En efecto, las ondas cuadradas utilizadas en el Análisis Digital no constituyen un conjunto de funciones ortogonales.

Dado, sin embargo, que muchos de los temas tratados mediante métodos propios del Análisis Armónico pueden ser abordados mediante la utilización del Análisis Digital, en artículos ulteriores serán consideradas diversas relaciones entre dichos dos enfoques. Por el momento, sólo se hará figurar, a continuación, un cuadro comparativo de las frecuencias correspondientes a los trenes de ondas cuadradas previamente considerados –f_1, f_2, f_3, $\cdots$ y f_n– y las frecuencias correspondientes a los términos de las series de Fourier –F_0, F_1, F_3, $\cdots$ y F_n–. Admítase que se toma T –el período– como unidad de tiempo.

Trenes de ondas cuadradas	Armónicos de Fourier
	$F_0 = 0$
$f_1 = \frac{1}{2}$	$F_1 = 1$
$f_2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{2}$	$F_2 = 2$
$f_3 = \frac{n}{n-2}\frac{1}{2}$	$F_3 = 3$
$f_4 = \frac{n}{n-3}\frac{1}{2}$	$F_4 = 4$
$f_5 = \frac{n}{n-4}\frac{1}{2}$	$F_5 = 5$
$\vdots$	$\vdots$
$f_n = \frac{n}{n-(n-1)}\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$	$F_n = n$

En un trabajo posterior se expondrá la generalización, para funciones de n variables, de los resultados presentados en este trabajo para funciones de una sola variable, así como los resultados del Análisis Digital para funciones de una variable son útiles para el análisis y el procesamiento de señales, los resultados obtenidos para funciones de dos variables son pertinentes y relevantes –como se mostrará– para el análisis y el procesamiento de imágenes.

Referencias

[1] Whittaker, E.T.; Watson, G.N. (1969) *A Course of Modern Analysis*, 4a edición. Cambridge University Press, Londres.

[2] Reed, M.; Simon, B. (1973) *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, New York.

[3] Hewitt, E.; Ross, K.A. (1970) *Abstract Harmonic Analysis*. Springer–Verlag, New York.

[4] Rudin, W. (1973) *Functional Analysis*. McGraw–Hill, New York.