Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2001 **8**(1) : 13–26
cimpa – ucr – ccss   issn: 1409-2433

FÓRMULAS APROXIMADAS DEL TIPO LÉVY-KHINTCHINE PARA LAS FUNCIONES CARACTERÍSTICAS DE PROCESOS PII EN CASI INTERVALOS

Jaime Lobo Segura*

Recibido: 9 Diciembre 1998

Resumen

Se estudia el problema de aproximar las funciones características definidas por un PII en casi intervalos. Se establecen propiedades generales de estas funciones y de las martingalas complejas asociadas que conjuntamente con los resultados de descomposición de [4], [5] conducen a fórmulas aproximadas del tipo Lévy-Khintchine. Como consecuencia se obtiene la ley exacta de los procesos PII de trayectorias continuas.

Palabras clave: PII en casi intervalos; descomposiciones aditivas; martingalas complejas; fórmulas aproximadas; teorema de las sombras continuas.

Abstract

The problem of approximation of the characteristic functions defined by a PII in near intervals is studied. We establish some general properties of these functions and of the associated complex matingales, which, with the aid of the decomposition results in [4] and [5], lead to approximate formula of the Lévy-Khintchine type. As a consequence, we obtain the exact law for PII processes in continuous time.

Keywords: PII in near intervals; additive decompositions; complex martingales; approximate formula; continuous shadow theorem.

Mathematics Subject Classification: 60J30

*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. E-Mail: jlobo@alfa.emate.ucr.ac.cr

1. Introducción

Los procesos de incrementos independientes (PII) en casi intervalos T han sido estudiados por el autor en [4], [5] en relación a los problemas llamados de descomposición. En este trabajo considero un tal proceso X y planteo el problema de aproximar las funciones características de los incrementos de X bajo supuestos que se precisarán más adelante. De una manera más precisa se trata de hallar funciones $f\,(u)_t$ de valores complejos en T, dependientes del parámetro u, para las cuales se cumplan $E(e^{iuX_t - X_a}) = f(u)_t$ para todo t en T, y de manera análoga para los incrementos de X. Se pondrá de manifiesto cómo las aproximaciones obtenidas se asemejan en su forma a las fórmulas clásicas de Lévy - Khintchine para los procesos de incremento independientes continuos en probabilidad (ver [7], [8]) razón por la cual las denomino *fórmulas aproximadas de tipo Lévy-Khintchine*. El problema tratado extiende de cierta manera otros estudios con los métodos de análisis no estándar sobre casos particulares de leyes de procesos de incrementos independientes en casi intervalos, como el de la caminata de Anderson o bien el de los procesos de Poisson en tiempo discreto ([6], [10], [2]).

En la siguiente sección se expone los resultados preliminares sobre la teoría de los PII en casi intervalos que se hallan en [4], [5]. En la última sección se obtendrá como corolario la ley exacta de los procesos de incrementos independientes de trayectorias continuas.

De la misma manera que se hizo en estudios anteriores en este trabajo, recurriré a la teoría de probabilidades en espacios finitos elaborada por Nelson en [1]. Nos situamos entonces en el marco de un espacio finito (Ω, P) de probabilidades, y de un *casi intervalo* T de la recta, es decir un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}$ $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ con la propiedad de que los puntos contiguos son infinitamente cercanos. Llamamos *longitud* de T al valor $b - a$. Si $t + dt$ denota el punto de T contiguo a t a la derecha, entonces para cualquier proceso $X = (X_t, t \in T)$ en (Ω, P) indexado por T llamamos el *incremento* en t a $dX_t = X_{t+dt} - X_t$. Se supone dada una *filtración* en (Ω, P), es decir una sucesión creciente $F = (F_t, t \in T)$ de álgebras de variables aleatorias. Si F_t denota el álgebra de variables generadas por $(X_u, u \leq t)$ decimos que es la *filtración natural* de X.

El proceso X es de *incrementos uniformes limitados* (IUL) si existe un real positivo limitado c tal que para todo (w, t) se cumple $\mid dX_t \mid \leq c$. Un punto t de T es una *discontinuidad fija* de X si X no es *c.s.* continua en t. Abreviamos por *d.f.* el término discontinuidad fija. Dada una función de variable real a valores complejos, adoptaremos la notación $S(f(dX))$ para designar el proceso cuyo valor en a es 0, y cuyos incrementos valen: $dS(f(dX))_t = f(dX_t)$. Dadas dos funciones f, g definidas en T, de valores complejos, decimos que son *próximas en* T si $f(t) \approx g(t)$ para todo t en T. En este caso denotamos $f \approx g$, donde se sobreentiende que la propiedad es referente al intervalo T considerado.

2. Preliminares sobre procesos PII en casi intervalos

Recuerdo las nociones de proceso PII en casi intervalo introducida en [4]. Nos situamos en el marco de espacios finitos indicados en la introducción. Decimos que un proceso X es de *F-incrementos independientes* (F-PII) si para cada t la variable X_t pertenece a F_t y el incremento dX_t es independiente de cualquier variable de F_t Si las variables

$(dX_t, t \in T, t < b)$ de un proceso X son independientes entre ellas entonces X es F-PII para la filtración natural F de X.

Se consideran los procesos $S(dX^{(\varepsilon)})$ y N_ε dependientes del parámetro $\varepsilon > 0$:

$$S(dX^{(\varepsilon)})_a = 0, dS(dX^{(\varepsilon)})_t = (dX_t)^{(\varepsilon)} = dX_t \mathbf{1}_{\{|dX_t|>\varepsilon\}}; N_{\varepsilon,a} = 0, dN_{\varepsilon,t} = \mathbf{1}_{\{|dXt|>\varepsilon\}}.$$

Se tiene $dX_t - dX_t^{(\varepsilon)} = dX_t dN_{\varepsilon,t}$ en todo t de T. Se probó lo siguiente:

R1 (teorema 3, [4]): Si X es F-PII, entonces para $\varepsilon > 0$ los procesos $S\left(dX^{(\varepsilon)}\right)$, N_ε son F-PII. Si X es además *c.s.* de fluctuación limitada y T es de longitud limitada el proceso N_ε es también *c.s* de fluctuación limitada en T y además $E(N_{\varepsilon,a}) \ll \infty$.

Llamamos *función esperanza* de X, a la función $E(X)$ en T definida por $E(X)_t = E(X_t)$ y por *función varianza* de X, denotada $\mathrm{Var}(X)$, a la función en T definida por $\mathrm{Var}(X)_t = \mathrm{Var}(X_t)$. La *parte previsible* de X es la función $E(X)$, mientras que su *parte martingala* es el proceso $X - E(X)$, denotado $X\hat{}$. Ambas componentes son PII si X lo es.

Dados dos procesos M, N indexados por el casi intervalo T, llamamos *función covarianza* de (M, N) a la función $\mathrm{Cov}(M, N)$ definida en cada t por $\mathrm{Cov}(M, N)_t = \mathrm{Cov}(M_t, N_t)$, y la función $\mathrm{Cov}f(M, N)$ como: $\mathrm{Cov}f(M, N) = S(|\mathrm{Cov}(dM, dN)|)$. Los procesos M, N son *casi-ortogonales* si la función covarianza asociada es de valores infinitesimales y *fuertemente casi-ortogonales* (fco) si $\mathrm{Cov}f(M, N)$ es de valores infinitesimales. Cuando M, N son F-martingalas se tiene $\mathrm{Cov}(M, N) = S(\mathrm{Cov}(dM, dN))$, y en este caso la casi ortogonalidad fuerte de (M, N) implica su casi ortogonalidad.

Una martingala X F-PII es *L^2-regular* en T si para todo t X_t es L^2 c.s., X es de fluctuación limitada y la función varianza de X es continua en T. Una martingala M de F es llamada *totalmente discontinua* si para toda martingala N de F c.s. continua, F-PII, con la propiedad L^2 el par (M, N) es casi-ortogonal. Las martingalas M, N son *próximas en* L^2 si $\mathrm{Var}(M_b - N_b) \approx 0$, lo que equivale a $\|M_b - N_b\|_2 = 0$. La martingala M PII admite una descomposición $C - D$ si se expresa como $M = C + D$, siendo C, D martingalas L^2-regulares F-PII, una de ellas siendo c.s. continua y la otra totalmente discontinua.

Sea M martingala PII sin d.f., con la propiedad lUL, T de longitud limitada. Se cumple:

R2 (teo. 8 de [4]): $M - M_a$ es L^2-regular en T y para $\varepsilon \approx 0$ la martingala $S(dM^{(\varepsilon)})$ es c.s. continua, L^2-regular y no posee d.f. en todo T.

R3 (corolario de [5]): $M - M_a$ admite una descomposición $C - D$. La descomposición es única en el sentido de que para cualesquiera dos descomposiciones (C, D), (C', D') $C - D$ de M el par C, C' (resp. D, D') son próximos en L^2. Una descomposición $C - D$ de M es dada por $C = S(dM^{(\varepsilon)})\hat{}$ para ε infinitesimal suficientemente grande.

R4 (corolario 2 de [4]): Sea X PII, sin d.f. de fluctuación casi siempre limitada. Entonces para todo real positivo ε, $0 \ll \varepsilon \ll \infty$, la función esperanza de $S(dX^{(\varepsilon)})$ es continua y limitada y la martingala asociada a $S(dX^{(\varepsilon)})$ es L^2-regular en T.

Consideremos un proceso X PII con respecto a la filtración F, de fluctuación c.s. limitada, sin d.f. Suponemos que T es de longitud limitada. Reuniendo los resultados R1,R2,R3,R4 resulta que para todo $\delta \gg 0$ podemos descomponer X en la forma

$$X - X_a = S(dX - dX^{(\delta)}) + C(\delta) + D(\delta) + B(\delta), \tag{1}$$

donde $C(\delta)+D(\delta)$ es una descomposisción $C-D$ de la martingala $M=E(S(dX^{(\delta)}))$ (Ver R3) y $B(\delta)$ es la función $E(S(dX^{(\delta)}))$, que es continua y limitada sobre T (Ver R4). La descomposición (1) será la clave para establecer las fórmulas de aproximación para las funciones características de X y de sus incrementos, es decir las funciones $u\to E(eiuX_T)$, $u\to E(eiu(X_t-X_s)), s<t$.

Para este fin complementamos los resultados R1,...,R4 con algunos otros que serán útiles en la resolución del problema planteado. Primeramente un lema sobre funciones de variable real que, aunque de forma no explícita, ya ha sido empleado en [4],[5]. Por convención decimos, dada una propiedad P sobre la variable real x, que "$P(X)$ se cumple a partir de un ε" si para todo $x\geq\varepsilon$ la propiedad $P(x)$ se cumple.

Lema 1 *Sea $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ tal que para todo $\varepsilon\gg 0$ se tiene $f(\varepsilon)=0$, entonces $f(\varepsilon)=0$ se cumple a partir de un infinitesimal ε_0.*

PRUEBA: Se considera el conjunto $S=\{\varepsilon:\varepsilon>0,\varepsilon'>\varepsilon\Longrightarrow f(\varepsilon')<\varepsilon'\}$. Por hipótesis S contiene a todos los reales estándar positivos estrictos. Por el principio del underspill debe contener un ε_0 infinitesimal. Si $\varepsilon'\geq\varepsilon_0$ y $\varepsilon'\gg 0$ se cumple $f(\varepsilon')\approx 0$ por hipótesis, y si $\varepsilon'\approx 0$ se cumple también $f(\varepsilon')\approx 0$ por definición de S. ∎

Sea una martingala PII de la forma $X\hat{}$, donde X es PII de fluctuación c.s. limitada y con la propiedad lUL sin d.f. En virtud de R4 $X\hat{}$ es una martingala L^2 regular y gracias a R3 posee una descomposición $C-D$. Mostraremos que en este caso es posible escoger una forma especial para la descomposición $C-D$ de $X\hat{}$, que complementa la de R3. Nos servimos primero de una propiedad en la que aplicamos el resultado del lema 1.

Lema 2 *Sea X un PII con la propiedad lUL, sin d.f., de fluctuación limitada c.s. y un infinitesimal positivo μ. Entonces la relación $\mu\sum_{a\leq s<b}E|dX-dX^{(\varepsilon)}|=0$ se cumple a partir de un infinitesimal ε_0.*

PRUEBA: Sea $f(\varepsilon)=\mu\sum_{a\leq s<b}E|dX-dX^{(\varepsilon)}|$. Como $|dX-dX^{(\varepsilon)}|=|dX|dN_\varepsilon$ hallamos: $f(\varepsilon)=\mu\sum_{a\leq s<b}|dX|dN_\varepsilon\leq\mu c\sum_{a\leq s<b}dN_\varepsilon=\mu cE(N_\varepsilon)$ donde c es la cota (limitada) de la propiedad lUL de X. Si $\varepsilon\gg 0$ la cantidad $\mu cE(N_\varepsilon)$ es infinitesimal (ver R1) y entonces $f(\varepsilon)$ lo es también. Basta ahora aplicar el lema 1 a esta función f. ∎

Teorema 1 *Sea X PII de fructuación c.s. limitada y con la propiedad lUL sin d.f. Para ε infinitesimal suficientemente grande las martingalas $C=S(dX^{(\varepsilon)})\hat{}$, $D=X\hat{}-S(dX^{(\varepsilon)})\hat{}$ constituye una descomposición $C-D$ de X, C es de incrementos infinitesimales por doquier y el par (C,D) es fco.*

PRUEBA: Denotemos las martingalas $S(dX^{(\varepsilon)})\hat{}$, $X\hat{}-S(dX^{(\varepsilon)})\hat{}$ respectivamente por $X^c(\varepsilon),X^d(\varepsilon)$. De la relación $E(dX^c(\varepsilon)dX^d(\varepsilon)=-|E(dX^{(\varepsilon)})E(dX-dX^{(\varepsilon)})|$ se deduce $|E(dX^c(\varepsilon)dX^d(\varepsilon))\leq E(|dX|)E(|dX-dX^{(\varepsilon)}|)$. Ahora bien la función $E(|dX|)$ es de valores infinitesimales en ausencia de d.f. y de la hipótesis lUL, y en virtud del lema 2 deducimos que $S(E(|dX|)E(|dX-dX^{(\varepsilon)}|))=0$ a partir de un cierto infinitesimal, y gracias a la desigualdad que $X^c(\varepsilon)$, $X^d(\varepsilon)$ son fuertemente casi-ortogonales para ε infinitesimal suficientemente grande. En particular se cumple la relación $\mathrm{Var}(X\hat{})\approx\mathrm{Var}(X^c(\varepsilon))+\mathrm{Var}(X^d(\varepsilon))$

de donde deducimos que ambas martingalas $X^c(\varepsilon), X^d(\varepsilon)$ poseen función varianza limitada y continua. Por consiguiente son martingalas L^1, continuas en la métrica L^2, por lo tanto sin d.f. (teorema 11.4 [1]). Por hipótesis sobre X posee la propiedad lUL, y se deduce entonces de R2 que son L^2 regulares. Como además los incrementos de $X^c(\varepsilon)$ siendo infinitesimal por doquier, se deduce de 13.1 [1] que esta es *c.s.* continua.
Démosnos un par $(X^c(\varepsilon), X^d(\varepsilon))$ casi-ortogonal, una descomposición $C-D$ $C+D$ de $X\hat{}$ y supongamos que el par $(X^d(\varepsilon), C)$ es casi-ortogonal. Puesto que $X^d(\varepsilon)-D = C-X^c(\varepsilon)$, y que los cuatro pares de martingalas $(X^d(\varepsilon), C)$,$(X^d(\varepsilon), X^c(\varepsilon))$,$(D, C)$, $(X^c(\varepsilon), D)$ son caso-ortogonales, obtenemos que $X^d(\varepsilon), D$ son próximas en L^2. Se deduce que $X^c(\varepsilon) + X^d(\varepsilon)$ es una descomposición $C - D$ de X.
Basta entonces probar que $(X^d(\varepsilon), C)$ es casi ortogonal siendo C la parte continua de una descomposición $C - D$ de X.
En virtud de $R3$ C puede escogerse de incrementos infinitesimal por doquier: existe μ infinitesimal tal que $|dC| = \mu$. Ahora bien, dado que $E(dC.dX^d(\varepsilon)) = E(dC(dX - dX^{(\varepsilon)}))$ entonces

$$\left|E(dC.dX^d(\varepsilon))\right| \leq E(|dC||dX - dX^{(\varepsilon)}|) \leq \mu E(|dX - dX^{(\varepsilon)}|)$$

y del lema 2 concluimos que $(X^{d(\varepsilon)}, C)$ son casi ortogonales para ε infinitesimal suficientemente grande. ■

3. Propiedades generales de las funciones características de un PII en casi intervalos

Se considera un X F-PII en un casi intervalo T de longitud limitada, nulo en a. Se denotará por φ_X la función característica de X, función en T valores complejos dada por $\varphi_X(u)_t = E(e^{iuX_t})$. En esta sección se estudiarán algunas propiedades generales de estas funciones de las que nos serviremos en los problemas de aproximación. además se considerarán otros procesos asociadas a $\varphi_X(u)$:

- si la función $\varphi_X(u)$ no se anula en T definimos los procesos $Z_X(u), Z'_X(u)$ por:

$$Z_X(u) = e^{iuX}/\varphi X(u), Z'_X(u) = S(dZ_X(u)/Z_X(u)).$$

- los procesos $R_X(u), R'_X(u)$:

$$R_X(u) = S(e^{iudX} - 1 - iudX), R'_X(u) = S(e^{iudX} - 1 - iudX + u^2(dX)^2/2)$$

a partir de los restos de los desarrollos de orden 1 y 2 de la función e^{iuX}.

Es de notar que $R_X(u), R'_X(u)$ gozan claramente de la propiedad PII para cualquier X PII. En cambio no ocurre lo mismo para $Z_X(u)$. En lo que sigue se usará fuertemente la identidad $\varphi_X(u)_t = \prod_{s<t} E(e^{iudX_s})$, que resulta de la hipótesis PII de X y de las propiedades elementales de la exponencial compleja.

Primeramente daremos un resultado de aproximaciones para productos de números complejos.

Lema 3 *Si $(a_n)_{n\leq\mu}$ es sucesión de complejos infiniteimales tal que $\sum_{n\leq\mu}|a_n|$ es limitada, se tiene:*

$$\prod_{n\leq\mu}(1+a_n)\approx\exp\left(\sum_{n\leq\mu}a_n\right).$$

Prueba: En efecto, se tiene $\prod_{n\leq\mu}(1+a_n)=\exp(\sum_{n\leq\mu}\mathrm{Log}(1+\mathrm{a_n}))$, donde Log designa la determinación principal del logaritmo complejo. Usando el desarrollo de $\mathrm{Log}(1+\mathrm{z})$ alrededor de 0 obtenemos: $\mathrm{Log}(1{+}\mathrm{z})=\mathrm{z}{+}\mathrm{z}\varepsilon(\mathrm{z})$, donde $\varepsilon(z)$ es infinitesimal, y en particular para cada $n\leq\mu$: $\mathrm{Log}\ (1+a_n)=a_n+a_n\varepsilon_n$, donde ε_n es infinitesimal. Se obtiene: $\sum_{n\leq\mu}\mathrm{Log}(1+\mathrm{a_n})=\sum_{\mathrm{n}\leq\mu}\mathrm{a_n}+\sum_{\mathrm{n}\leq\mu}\mathrm{a_n}\varepsilon_\mathrm{n}$. El segundo miembro es acotado en módulo por: $\mathrm{máx}_{n\leq\mu}|\varepsilon_n|\sum_{n\leq\mu}|a_n|$, que es infinitesimal por hipótesis. Por lo tanto $\sum_{n\leq\mu}\mathrm{Log}(1+\mathrm{a_n})$ y $\sum_{n\leq\mu}a_n$ son complejos equivalentes y limitados, de donde la relación gracias a la continuidad de la función exponencial compleja. ∎

Lema 4 *Para todo X PII se cumple:*

$\mathrm{Var}(dR_X(u))\leq u^4E(dX^4)/4, E(|dR_X(u)|\leq\mathrm{Var}(dX)u^2/2, E(|dR'_X(u)|)\leq|u|^3E(|dX|^3)/6.$

Prueba: De la desigualdad: $|e^{ix}-1-ix|\leq x^2/2,\ (x\in\mathbb{R})$, resulta $|dR_x(u)|\leq(dX)^2u^2/2$. La segunda es entonces inmediata y para la primera basta usar $\mathrm{Var}(dR_X(u))\leq E(|dR_X(u)|^2)$. Para la tercera usamos la desigualdad: $|e^{ix}-1-ix+x^2/2|\leq|x|^3/6, x\in\mathbb{R}$, de la cual resulta $E(|dR'_X(u)|)\leq|u|^3E(|dX|^3)/6$. ∎

Teorema 2 *Si X es sin d.f., u limitado, y la cantidad $\sum_{s<t}\left|E(e^{iudX_s}-1)\right|$ es limitada, entonces $\varphi_X(u)\approx\exp(\sum_{s<t}(E(e^{iudX_s}-1))$. Este resultado se cumple si X es además martingala de función varianza limitada.*

Prueba: Observamos primero que para u limitado y X sin d.f. la variable udX_s es c.s. infinitesimal, por lo que $e^{iudX_s}\approx1$ c.s., y siendo ambas variables de L^2 se concluye por el teorema de Lebesgue que $E(e^{iudX_s})\approx1$. Entonces las cantidades $\left|E(e^{iudX_s}-1)\right|$ son todas infinitesimales. Basta ahora aplicar el lema 3 a la sucesión de complejos $E(e^{iudX_s}-1), s<t$ y usar la identidad $\varphi_X(u)=\prod_{s<t}(1+E(e^{iudX_s}-1))$.
Si X es además martingala de función varianza limitada, por la propiedad martingala se tiene: $E(e^{iudX}-1)=E(dR_X(u))$, y de la desigualdad del lema 4 deducimos que $S(\left|E(e^{iudX}-1\right|)\leq u^2/2\ \mathrm{Var}(X)$. ∎

Teorema 3 *Si X es sin d.f., u limitado, entonces los procesos $Z_X(u), Z'_X(u)$ está bien definidos, son martingalas complejas con respecto a F, y $Z'_X(u)$ es además PII.*

Prueba: Puesto que $E(e^{iudX_s})\approx1$ y $\varphi_X(u)_t=\prod_{s<t}E(e^{iudX_s})$ se deduce que $\varphi_X(u)$ no se anula en T como producto de factores no nulos. Entonces $Z_X(u)$ está bien definida en T. Para la propiedad martingala se verifica fácilmente primero que

$$dZ_X(u)=Z_X(u)\cdot(e^{iudX}/E(e^{iudX})-1).$$

Tomando a ambos lados de esta identidad la esperanza condicional $E_t(\ )$ con respecto a F_t y aplicando la propiedad PII de X, obtenemos:

$$E_t(dZ_X(u)_t) = Z_X(u)_t E_t(e^{iudX_t}/E(e^{iudX_t}) - 1) = Z_X(u)_t \cdot E(e^{iudX_t}/E(e^{iudX_t}) - 1) = 0$$

lo que prueba la propiedad para $Z_X(u)$.
El proceso $Z'_X(u)$ está bien definido en virtud de lo anterior y del hecho de que el numerador de $Z_X(u)$ no es nulo. Por otra parte cada incremento es dado por $dZ'_X(u) = e^{iudX}/E(e^{iudX}) - 1$, que es una variable centrada y cuyo valor en cada t es independiente del álgebra F_t por la propiedad PII de X. El proceso es pues una martingala PII. ∎

Teorema 4 *Si X, Y son PII sin d.f., nulos en a, u limitado, entonces*

a) $E(Z_X(u) \cdot Z_Y(u)) = \prod_{s<t}(1 + E(dZ'_X(u)dZ'_Y(u)))$.

b) *Si las martingalas $Z'_X(u), Z'_Y(u)$ son fco entonces: $\varphi_{X+Y}(u) \approx \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$.*

PRUEBA: Abreviamos por Z_X, Z_Y respectivamente las martingalas $Z_X(u)$, $Z_Y(u)$, por Z'_X, Z'_Y las martingalas $Z'_X(u), Z'_Y(u)$.

a) De la identidad: $Z_X \cdot Z_Y = \sum_{s<t} dZ_X dZ_Y + \sum_{s<t} Z_X dZ_Y + \sum_{s<t} Z_Y dZ_X$, y de la propiedad martingala de Z_X, Z_Y obtenemos: $E(Z_X \cdot Z_Y) = E(\sum_{s<t} dZ_X dZ_Y)$.
De la propiedad PII de Z'_X y Z'_Y (teorema 3), sabemos que
$E(dZ_X dZ_Y) = E(Z_X Z_Y) E(dZ'_X dZ'_Y)$.
Entonces $dE(Z_X \cdot Z_Y) = E(Z_X Z_Y) E((dZ'_X dZ'_Y)$ y sumando obtenemos la fórmula buscada.

b) Puesto que las funciones características son de valores limitados, el resultado es cierto bajo la condición $E(Z_x \cdot Z_y) \approx 1$. Ahora bien, según la fórmula del teorema 4 para $E(Z_X Z_Y)$ y el resultado del lema 3 esta condición se cumple precisamente si las martingalas Z'_X, Z'_Y son fco, es decir el resultado buscado. ∎

Estudiamos ahora ciertas propiedades de los procesos $R_X(u), R'_X(u)$.

Lema 5 *Si X es martingala PII sin d.f., de función varianza limitada, u limitado. Se tiene:*

a) *Para X es de incrementos infinitesimales: $E(\sum_{s<.} |dR'_X(u)|) \approx 0$.*

b) *Para X IUL el proceso $R_X(u)\hat{}$ es de función varianza limitada y es IUL.*

PRUEBA: Abreviemos por R_X, R'_X respectivamente los procesos $R_X(u), R'_X(u)$.

a) Supongamos X de incrementos infinitesimales y sea ε un infinitesimal cota de los incrementos de X. De la desigualdad $E(|dR'_X|) \leq |u|^3 E(|dX|^3)/6$ del lema 4, y de $E(|dX|^3) \leq \varepsilon \mathrm{Var}(dX)$ se deduce $E(S(|dR'_X|)) \leq |u|^3 \varepsilon \mathrm{Var}(X_t)/6$, siendo el último miembro infinitesimal como producto de limitados por infinitesimal, de donde la conclusión.

b) Sea c cota limitada de los incrementos de X. Por el lema tenemos:

$$\mathrm{Var}(R_X) \leq u^4/4S(E(dX^4)) \leq cu^4/4S(E(dX^2)) = cu^4/4\mathrm{Var}(X)$$

siendo el último miembro limitado pues todos los factores lo son. De $|e^{ix} - 1 - ix| \leq x^2/2$, se deduce $|dR_X| \leq (dX)^2u^2$, de donde la propiedad IUL para $R_{X\hat{}}$. ∎

Lema 6 *Si X, Y son martingalas PII de varianza limitada y X es de incrementos infinitesimales en todas partes, son fco los pares $(R_X(u), Y), (R_Y(u), X)$.*

Prueba: Abreviemos por R_X, R_Y respectivamente los procesos $R_X(u), R_Y(u)$. Sea ε infinitesimal, cota de los incrementos de X. Probemos la propiedad fco de Y, R_X. Del lema 4 obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Cov}(dY, dR_x)|^2 &\leq \mathrm{Var}(dY)\mathrm{Var}(dR_X)\\
&\leq u^4/4\mathrm{Var}(dY)E(dX^4)\\
&\leq \varepsilon^2u^4/4\mathrm{Var}(dY)E(dX^2)\\
&= \varepsilon^2u^4/4\mathrm{Var}(dY)\mathrm{Var}(dX)
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
\mathrm{Covf}(Y, R_x) &\leq \varepsilon u^2/2S((\mathrm{Var}(dY))^{1/2}(\mathrm{Var}(dX))^{1/2})\\
&\leq \varepsilon u^2/2S(\mathrm{Var}(dY))^{1/2}(\mathrm{Var}(dX))^{1/2}\\
&= \varepsilon u^2/2(\mathrm{Var}(Y))^{1/2}(\mathrm{Var}(X))^{1/2}
\end{aligned}$$

y esta última expresión es ≈ 0 pues el factor $u^2/2(\mathrm{Var}(Y))^{1/2}(\mathrm{Var}(X))^{1/2}$ es limitado de donde el resultado.
Propiedad fco de R_Y, X : del lema 4 obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Cov}(dX, dR_Y)| &\leq E(|dX||dR_y\hat{}|\\
&\leq \varepsilon 2E(|dR_Y|)\\
&\leq \varepsilon 2\mathrm{Var}(dY)u^2/2\\
&= \varepsilon\mathrm{Var}(dY)u^2,
\end{aligned}$$

y por lo tanto: $\mathrm{Covf}(X, R_Y) \leq \varepsilon u^2 S(\mathrm{Var}(dY)) = \varepsilon u^2\mathrm{Var}(Y)$, donde $\varepsilon u^2\mathrm{Var}(Y) \approx 0$ siendo el producto de limitados por infinitesimal. ∎

4. Fómulas aproximadas del tipo Lévy-Khintchine

Retomando el enunciado del problema planteado en la sección, consideramos un X F-PII de fluctuación limitada sin d.f., en un casi intervalo T de longitud limitada. Para cada $\delta \gg 0$ se considera la descomposición

$$X - X_a = S(dX - dX^{(\delta)}) + C(\delta) + D(\delta) + B(\delta), \qquad (I)$$

donde $C(\delta) + D(\delta)$ es una descomposición $C - D$ de la martingala $M = E(S(dX^{(\delta)})\hat{}$ y $B(\delta) = E(S(dX^{(\delta)}))$. Se buscará una aproximación de la función $\varphi_{X-X_a}(u) = E(e^{iuX})$ definida en T en términos de las funciones características de cada uno de los términos de la descomposición (I) y luego aproximaciones para cada una de ellas. Se deduce luego la fórmula aproximada para la función característica de los incrementos de X.

Teorema 5 *Para todo u limitado se cumple:*

$$\varphi_{X-X_a}(u) \approx \varphi_{X-S(dX^{(\delta)})}(u)\varphi_{C(\delta)}(u)\varphi_{D(\delta)}(u)e^{iuE(S(dX^{(\delta)}))}$$

En esta relación los factores $\varphi_{C(\delta)}(u), \varphi_{D(\delta)}(u)$ son únicos en el sentido de proximidad.

PRUEBA: Establecemos las relaciones:

$$\varphi_{X-X_a}(u) \approx \varphi_{X-X_a-S(dX^{(\delta)})}(u)\varphi_{S(dX^{(\delta)}}(u), \varphi_{C(\delta)+D(\delta)}(u) \approx \varphi_{C(\delta)}(u)\varphi_{D(\delta)}(u)$$

de donde se deduce la fórmula multiplicando por la función compleja $e^{iuE(S(dX(\delta)))}$. Sea (X', X'') uno de los pares de procesos $(X - X_a - S(dX^{(\delta)}, S(dX^{(\delta)})), (C(\delta), D(\delta))$, y denotemos por $R_{X'}, R_{X''}$ los procesos $R_{X'}(u), R_{X''}(u)$, y por $Z'_{X'}, Z'_{X''}$ las martingalas $Z'_{X'-X'_a}(u), Z'_{X''-X''_a}$ que están bien definidas en virtud del teorema 3 y R4. En vista de b) del teorema 4 la relación $\varphi_{X'+X''}(u) = \varphi_{X'}(u)\varphi_{X''}(u)$ se cumple si las martingalas $Z'_{X'}$, $Z'_{X''}$ son fco, lo que conduce en cada caso a buscar cotas superiores convenientes para $|E(dZ'_{X'}dZ'_{X''})|$.
Escogemos en lo sucesivo la descomposición $C - D$ de $S(dX^{(\delta)})\hat{}$ descrita en el teorema 1.

a) Caso $(X', X'') = (X - X_a - S(dX^{(\delta)})), S(dX^{(\delta)}))$.
Escribimos: $dZ'_{X'}dZ'_{X''} = (e^{iuX'} - E(e^{iudX'}))(e^{iudX''} - E(e^{iudX''}))/E(e^{iudX'})E(e^{iudX''})$.
Desarrollando esta expresión y usando la relación $e^{iuX'}e^{iudX''} = e^{iuX'} + e^{iudX''} - 1$, deducimos

$$\begin{aligned} |E(dZ'_{X'}dZ'_{X''})| &= |E(e^{iuX'} - 1)E(e^{iudX''} - 1)|/|E(e^{iudX'})E(e^{iudX''})| \\ &\leq 2|E(e^{iuX'} - 1)E(e^{iudX''} - 1)|. \end{aligned}$$

Ahora bien, $|E(e^{iudX''} - 1)| \approx 0$, y $|E(e^{iudX'} - 1)| \leq 2P(|dX| \geq \delta) = 2E(dN_\delta)$.
Luego $S(|E(dZ'_{X'}dZ'_{X''})|) \leq 4\mu E(N_\delta)$ donde μ es infinitesimal. Pero la cantidad $4\mu E(N_\delta)$ es infinitesimal como producto de infinitesimal por limitado, de donde el resultado.

b) Caso $(X', X'') = (C(\delta), D(\delta))$.
De la expresión obtenida en el teorema 3 para dZ'_X y por definición de $R_X(u)$, obtenemos en el caso de una martingala X: $e^{iudX} - E(e^{iudX}) = iudX + dR_{X\hat{}}$, y aplicando esta identidad a X', X'':

$$dZ'_{X'}dZ'_{X''} = (iudX' + dR_{X'\hat{}})(iudX'' + dR_{X''\hat{}})/E(e^{iudX'})E(e^{iudX''}).$$

Pero $E(e^{iudX'})E(e^{iudX''}) \approx 1$ implica $|E(dZ'_{X'}dZ'_{X''})|/|E((iudX' + dR_{X'\hat{}})(iudX'' + dR_{X''\hat{}}))| \approx 1$ cuando ambas cantidades no se anulan. Basta entonces probar que los procesos $S(iudX' + dR_{X'\hat{}}), S(udX'' + dR_{X''\hat{}})$ son fco. Como:

$$
\begin{aligned}
E((iudX' + dR_{X\hat{}})(iudX'' + dR_{X''\hat{}})) &= -u^2\mathrm{Cov}(dX', dX'') + iu\mathrm{Cov}(dX', dR_{X''}) \\
&\quad +\mathrm{Cov}(dR_{X'}, iudX'' + dR_{X''})
\end{aligned}
$$

y siendo u limitado, la propiedad fco queda establecida si se establece que los pares $(X', X''), (X', R_{X''}), (R_{X'}, iudX'' + R_{X''})$ son fco. El par (X', X'') es fco por escogencia de $(C(\delta), D(\delta))$ y del teorema 1. En cuanto a los otros pares basta aplicar el lema 6 ya que cada uno de ellos satisfacen las condiciones de este lema según los resultados R4 y las propiedades de $C(\delta)$ establecidas en el teorema 1.
Finalmente, en cuanto al último aserto, como para cualquier descomposición $C - D$ $C(\delta) + D(\delta)$ de $E(S(dX^{(\delta)}))\hat{}$ las martingalas $C(\delta), D(\delta)$ son únicas salvo L^2 -proximidad, y siendo u limitado, del teorema de Lebesgue deducimos que las funciones $\varphi_{C(\delta)}(u), \varphi_{D(\delta)}(u)$ son únicas en el sentido de proximidad de funciones en T. ∎

Estudiaremos ahora la aproximación de cada una de las funciones características que aparecen en la descomposición multiplicativa $\varphi_X(u)$ del teorema 5.

Teorema 6 *Para todo u limitado se cumple:*

a) $\varphi_{X-X_a-S(dX^{(\delta)})} \approx \exp(E(\sum_{a\leq s<.}(e^{iudX_s} - 1)dN_{\delta,s}))$

b) $\varphi_{D(\delta)}(u) \approx \exp(E(\sum_{a\leq s<.}(e^{iudX_s} - 1 - iudX_s)\mathbf{1}_{(|dXs|\leq\delta)}dN_{\varepsilon,s}))$,
para ε infinitesimal suficientemente grande;

c) $\varphi_{c(\delta)}(u) \approx \exp(-u^2/2\mathrm{Var}(C(\delta)))$.

Prueba: Si Y es uno de los procesos $X - X_a - S(dX^{(\delta)}), C(\delta), D(\delta)$, del teorema 2 basta mostrar que $S(|E(e^{iudY} - 1)|)$ es limitado para obtener $\varphi_Y(u) \approx \exp(S(E(e^{iudY} - 1)))$. Escogemos en lo sucesivo la descomposición $(C(\delta), D(\delta)$ de $S(dX^{(\delta)})\hat{}$ descrita en el teorema 1, que denotamos (C, D).

a) Caso de $\varphi_{X-X_a-S(dX^{(\delta)})}(u)$: Usando la relación $e^{iu(dX-dX^{(\delta)})} - 1 = (e^{iudX} - 1)dN_\delta$ tenemos pues $\left|E(e^{iu(dX-dX)^{(\delta)}})\right| = \left|E((e^{iudX} - 1)dN_\delta)\right|$, donde el segundo miembro es menor que $2E(dN_{\delta,s})$, por lo que $S(\left|E(e^{iu(dX-dX^{(\delta)})} - 1)\right|) \leq 2E(N_{\delta,s})$. Pero $E(N_{\delta,s})$ es limitado por R1, de donde concluimos.

b) Caso de $\varphi_{D(\delta)}(u)$: la condición "$S(\left|E(e^{iudD} - 1)\right|)$ es limitada" se cumple por las propiedades mismas de (C, D). Basta aproximar el exponente $S(E(e^{iudD} - 1))$. Denotemos $X' = S(dX^{(\delta)})$. Por escogencia de $(C(\delta), D(\delta))$ tenemos $dD = dX' - dX'(\varepsilon) - E(dX' - dX'^{(\varepsilon)})$ donde ε es infinitesimal suficientemente grande. Sean $N'_\varepsilon, N_\varepsilon$ resp. los procesos puntuales asociados a los procesos X', X. Observando que

$dDdN'_\varepsilon = (dX' - E(dX' - dX'^{(\varepsilon)}))dN'_\varepsilon$ y que la cantidad $E(iudD) = iuE(dX'dN'_\varepsilon) - iuE(dX' - dX'^{(\varepsilon)})$ es nula por ser D martingala, sumamos y restamos estas cantidades de $E(e^{iudD} - 1)$ para obtener:

$$E(e^{iudD} - 1) = E(dR_{X'}(u)dN'_\varepsilon) + E((e^{iudX'} - 1)(e^{iudh} - 1)dN'_\varepsilon) + dR_h(u)$$

donde h es la función en T: $h = -S(E(dX' - dX'^{(\varepsilon)}))$. Como $dN'_\varepsilon = dN_\varepsilon \mathbf{1}_{\{|dX| \leq \delta\}}$ se tiene $E(dR_{X'}(u)dN'_\varepsilon) = E(dR_X(u)\mathbf{1}_{\{|dX| \leq \delta\}}dN_\varepsilon)$, y de esta identidad vemos que la suma $S(E(dR_{X'}(u)dN'_\varepsilon))$ es el exponente de la fórmula buscada. De la continuidad de la función exponencial basta entonces mostrar que las funciones

$$S(E((e^{iudX'} - 1)(e^{iudh} - 1)dN'_\varepsilon), S(dR_h(u)),$$

son ≈ 0. Observemos que tanto la cantidad $\left|E((e^{iudX'} - 1)(e^{iudh} - 1)dN'_\varepsilon)\right|$ como $|dR_h(u)|$ están acotadas superiormente por $u^2 E|dX'||E(dX' - dX'^{(\varepsilon)})|$. Como la función $E|dX'|$ es de valores infinitesimales, del 2 se deduce que $S(E|dX'|\,|E(dX' - dX'^{(\varepsilon)})|)$ es infinitesimal para ε infinitesimal suficientemente grande, de donde concluimos, tomando en cuenta que u es limitado.

c) Caso de $\varphi_{C(\delta)}(u)$: la condición "$S(|E(e^{iudD} - 1)|)$ es limitada" se cumple por las propiedades mismas de (C, D). Para aproximar $S(E(e^{iudC} - 1))$ el miembro derecho en esta expresión consideremos el proceso $R'_C(u)$ definido en sección anterior, que denotamos por R'_C. Se suma y sustrae dR'_C en la expresión $E(e^{iudC} - 1)$ para obtener:

$$E(e^{iudC} - 1) = E(dR'_C) + E(iudC - u^2 dC^2/2)) = E(dR'_C) - u^2 E(dC^2)/2$$

donde la última igualdad es consecuencia de la propiedad martingala de C.
Puesto que el término $-u^2 E(dC^2)/2$ es real negativo y de la cantidad

$$-u^2 S(E(dC^2))/2 = -u^2/2\mathrm{Var}(C)$$

es limitada como producto de limitados, basta considerar el término $E(dR'_c)$. Pero la martingala C satisface la hipótesis del lema 5, del cual se deduce que $S(|E(dR'_C)|) \approx 0$ y concluimos. ■

Corolario 1 *Existe un ε infinitesimal suficientemente grande, tal que para todo $s < t$; s, t en T, y u limitado se tiene:*

$$\varphi_{X_t - X_s}(u) \approx \exp(E(\sum_{s \leq v < t}(e^{iudX_v} - 1 - iudX_v \mathbf{1}_{\{|dX_v| \leq \delta\}})dN_{\varepsilon,v}) - u^2/2(V_t - V_s) + iu(B_t - B_s))$$

donde $V = \mathrm{Var}(C(\delta)), B = E(S(dX^{(\delta)}))$.

PRUEBA: Si $s = a$ la relación para $\varphi_{X_t - X_a}(u)$ es consecuencia inmediata de las fórmulas aproximadas de los teoremas 5, 6. Para el caso general basta emplear la identidad $\varphi_{X_t - X_a}(u) = \varphi_{X_t - X_s}(u)\varphi_{X_s - X_a}(u)$, y puesto que $\varphi_{X - X_a}(u)$ no se anula en T entonces

$\varphi_{X_t-X_s}(u) = \varphi_{X_t-X_a}(u)(\varphi_{X_s-X_a}(u))^{-1}$, obteniendo así la fórmula gracias al caso anterior. ■

Podemos observar la semejanza evidente de la fórmula aproximada del corolario 1 con la clásica de Lévy-Kinchine para leyes infinitamente divisibles si identificamos la expresión tipo $E(\sum_{a\leq s<.})$ en el exponente con las integrales del tipo clásico de la forma $\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} f(s,u)d\mu(s,u)$ siendo μ una cierta medida positiva boreliana sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. La semejanza es más evidente con el término $-u^2/2V + iuB$ del exponente, donde reconocemos la forma típica del exponente de las leyes gaussianas.

Un caso particular pero importante se presenta con los PII de trayectorias continuas. En este caso la fórmula aproximada del corolario precedente adquiere claramente la forma gaussiana:

Corolario 2 *Sea X PII de trayectorias c.s. continuas. Entonces existen funciones C, B definidas en T, donde C es creciente positiva y limitada, B continua y limitada, tal que para u limitado, $s < t$:* $\varphi_{X_t-X_s}(u) \approx \exp(-u^2/2(V_t - V_s) + iu(B_t - B_s))$.

Prueba: Puesto que para cada $\varepsilon \gg 0$ el evento $A(\varepsilon) = \{\text{máx}_{t\in T} |dX_t| \geq \varepsilon\}$ es de probabilidad infinitesimal, en virtud del lema 1 aplicado a la función $f(\varepsilon) = P(A(\varepsilon))$, para ε infinitesimal suficientemente grande se tendrá también $P(A(\varepsilon)) \approx 0$. Sea ε un tal infinitesimal. Entonces $X - X_a = S(dX^{(\varepsilon)})$ c.s., y del teorema de Lebesgue obtenemos que $\varphi_{X-X_a}(u) \approx \varphi_{S(dX^{(\varepsilon)})}(u)$. Basta aproximar entonces $\varphi_{S(dX^{(\varepsilon)})}(u)$. Siendo $S(dX^{(\varepsilon)})$ de fluctuación c.s. limitada, pues es c.s. continuo y el casi intervalo de longitud limitada, en virtud de R4 sabemos que el proceso $S(dX^{(\varepsilon)})$ posee función esperanza limitada y continua en T. Los incrementos de $S(dX^{(\varepsilon)})$ siendo infinitesimales, de R4 obtenemos que $S(dX^{(\varepsilon)})\hat{}$ es una martingala PII *c.s.* continua, L^2 - regular. Por lo tanto una descomposición $C - D$ de esta martingala es $C = S(dX^{(\varepsilon)}), D = 0$, y en virtud de la fórmula aproximada del corolario 2 se obtiene el resultado tomando $V = \text{Var}(C), B = E(S(dX^{(\varepsilon)}))$. ■

5. Aplicación: leyes de los PII clásicos de trayectorias continuas

Habiendo obtenido en la sección anterior una fórmula aproximada para la función característica de un PII en un casi intervalo, bajo las hipótesis mencionadas, es de preguntarse qué tipo de resultado es posible obtener para los procesos PII en el sentido clásico. Para esto recurrimos a la noción de procesos nearby (ver [1]): dado un proceso estándar $Y_t, t \in I$, I intervalo de $\mathbb{R}$, definido en un espacio estándar (Ω, A, P), decimos que $Y'_t, t \in T$, T casi intervalo que contiene a los puntos estándar de I, definido en el espacio finito (Ω', P'), subespacio de (Ω, A, P), es nearby a Y si la relación $\sum_{t\in T} |Y_t - Y'_t| \approx 0$ se cumple salvo en un evento de probabilidad infinitesimal. En [4], teorema 11, se probó que si Y es un PII, entonces existe Y nearby con la misma probabilidad.

Cuando u es limitado es fácil ver, a partir de la definición de procesos nearby, que $\varphi_{Y't-Y's}(u) \approx \varphi_{Y_t-Y_s}(u)$, para todos los s, t en T, relación que permite en primera instancia aproximar las funciones características de los procesos clásicos.

En esta sección se estudiará la ley de un Y PII que es c.s. de trayectorias continuas. Reducimos el problema al caso de Y estándar y en este caso, como se señaló en [4] a partir de los llamados teoremas de equivalencia en [1], su proceso nearby Y es a su vez c.s. continuo. Para este efecto recurrimos a un resultado sobre funciones de variable real que echa mano del llamado teorema de las sombras continuas (ver [11]):

Lema 7 *Sea $f : T \to \mathbb{R}$, limitada y S-continua. Entonces existe $f : I \to \mathbb{R}$ continua estándar tal que $f(t) \approx f'(t)$ para todo $t \in T$.*

Prueba: Definamos g la función definida en I que interpola linealmente f' en cada intervalo $[t, t + dt], t \in T$: es decir g coincide en cada intervalo $[t, t + dt]$ con la única función afín tal que $g(t) = f'(t), g(t + dt) = f'(t + dt)$. La función es limitada en I, pues para cualquier $u \in I$, $g(u)$ se encuentra en un intervalo cuyos extremos son definidos por los valores de f' en dos puntos de T, que –como sabemos– son limitados. Por otra parte, si $u, u' \in I, u \approx u'$, por definición de los g, los valores de g en u, u' son infinitamente cercanos a los valores de f' en puntos de T infinitamente cercanos. Por lo tanto $g(u) \approx g(u')$ por la hipótesis de S-continuidad de f', es decir g es a su vez S-continua en I. Puesto que I es estándar podemos aplicar el teorema de las sombras continuas: existe f estándar continua definida en I tal $f(u) \approx g(u)$ para todo u en I, la cual responde al resultado buscado. ∎

Teorema 7 *Si Y es PII de trayectoria c.s. continuas, existen funciones V, B definidas en I, continuas, C creciente y positiva, tales de que para todo $s < t$ en I, la ley de $Y_t - Y_s$ es gaussiana de varianza $V_t - V_s$ y media $B_t - B_s$.*

Prueba: Por transfer basta suponer que Y, I son estándar, Sea $Y'_t, t \in T$, el proceso nearby a Y, PII en casi intervalos T, que es c.s. continuo. Según el corolario 2 existen funciones V', B' en T continuas y limitadas, V' creciente y positiva, tales que $\varphi_{Y'_t - Y'_s}(u) \approx \exp(-u^2/2(V'_t - V'_s) + iu(B'_t - B'_s))$ para todo u limitado, $s < t$. Sean V, B resp. las funciones asociadas a V', B' definidas en lema 7 y denotemos resp. por $f'(s, t, u), f(s, t, u), g'(s, t, u), g(s, t, u)$ las cantidades:

$$\varphi_{Y'_t - Y'_s}(u), \varphi_{Y_t - Y_s}(u), \exp(-u^2/2(V'_t - V'_s) + iu(B'_t - B'_s)), \exp(-u^2/2(V_t - V_s)) + iu(B_t - B_s)).$$

Entonces se tiene $f'(s, t, u) \approx g'(s, t, u)$ de donde $f'(s, t, u) \approx g(s, t, u)$, para todo u limitado, $s, t \in T$ de donde $f(s, t, u) \approx g(s, t, u)$ en todos los puntos s, t de T. Ahora bien si u es estándar la cantidad $f(s, t, u)$ es estándar en los puntos estándar s, t de I, y lo mismo sucede para $g(s, t, u)$. Siendo infinitamente cercanas deben ser iguales, por lo que para todo u estándar, para todo estándar $s, t \in I$: $f(s, t, u) = g(s, t, u)$. La fórmula "$f(s, t, u) = g(s, t, u)$"es estándar, y por el axioma del tranfer es cierta para todo $u \in \mathbb{R}$, $s, t \in I$, de donde se obtiene el resultado por la caracterización de las leyes gaussianas. ∎

6. Observaciones finales

Como se ha puesto de manifiesto en este trabajo la deducción de las fórmulas aproximadas de las funciones características de un PII en casi intervalos son tributarias en gran medida de los resultados previos obtenidos sobre la descomposición de estos procesos obtenidos en [4], [5]. Se sigue de cerca a este respecto el enfoque de Lévy, Doob, Skorohod, y otros en el marco de los procesos en tiempo continuo, teniendo a nuestro favor las ventajas que ofrece el punto de vista finitista. Un ejemplo de ello es la posibilidad de "compensar" todo proceso PII para obtener así una martingala (que hemos denotado por $X^{\hat{}}$), procedimiento imposible de realizar en la teoría clásica a menos que se establezcan las debidas propiedades de integralidad.

Por otra parte se han adoptado algunas ideas provenientes de la teoría de martingalas, por ejemplo con la introducción de las martingalas Z_X, Z'_X, que resultaron ser de gran importancia en la obtención de las fórmulas. Es de comparar con el enfoque del "cálculo estocástico" clásico, donde se ha tratado el estudio de los PII semimartingalas a partir de las técnicas que ofrece esta teoría ([9]) logrando en particular una prueba de la fórmula de Lévy-Khintchine. Sin embargo los resultados así expuestos son restrictivos a causa de la hipótesis semimartingala. El autor estudió en [3] la posibilidad de extender las técnicas del cálculo estocástico a PII sin condición semimartingala, y es el punto de vista que he retomado para tratar los procesos en casi intervalos realizado en este trabajo.

Un problema aún por resolver es el de hallar una versión del teorema 7 bajo hipótesis más generales (para procesos con discontinuidades).

Referencias

[1] Nelson, E. (1987) *Radically Elementary Probability Theory.* Princeton University Pres.

[2] Lobo, J. (1995) "Estudio en tiempo discreto de los procesos puntuales de incrementos condicionalmente independientes", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **2**(2): 9–16.

[3] Lobo, J. (1985) *Processus á Accroissements Indépendants et Méthode des Semimartingales.* Thèse de 3-ème Cycle, Université de Paris VI.

[4] Lobo, J. (1998) "Desccomposición de procesos de incrementos independientes en casi intervalos", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **5**(2): 163–176.

[5] Lobo, J. (1999) "Casi-ortogonalidad y proximidad en L^2 de martingalas PII en casi intervalos", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **6**(1): 27–33.

[6] Albeverio (1986) *Non Standard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, New York.

[7] Doob, J.L. (1954) *Stochastic Processes.* John Wiley and Sons, New York.

[8] Gihman, I.I.; Skorohod, A.V. (1980) *Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires.* Mir, Moscú.

[9] Jacod, J. (1980) *Calcul Stochastique et Problémes de Martingales.* Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.

[10] Stroyan, K.D.; Bayod, J.M. (1986) *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.* North Holland, Amsterdam.

[11] Diener, F.; Reeb, G. (1989) *Analyse Non Standard.* Hermann, Paris.