Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2001 **8**(2) : 79–83
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

# ESTABILIZACIÓN DEL MODELO POBLACIONAL DE MAY A TRAVÉS DE CONTROLES DIRECCIONALES*

Víctor Delgado Andrade**

*Recibido: 19 Noviembre 1999; versión revisada: 11 Diciembre 2000*

**Resumen**

El modelo poblacional de May considera un parámetro de saciedad en la especie predadora y tiene un estado de equilibrio inestable en torno al cual rota un ciclo límite. En este trabajo se establece una estrategia de control sobre el modelo, de modo que se perturbe el sistema original produciendo una nueva dinámica que, localmente, se acerca asintóticamente al estado de equilibrio. Tal efecto se logra a través de un proceso de linealización y la aplicación de un control direccional sobre el sistema lineal que se origina.

**Palabras clave:** Estabilidad, linealización, control direccional realimentado, sistemas linealmente equivalentes.

**Abstract**

The May population model consider a satiate parameter over the predators and has an unstable equilibrium state surrounded by a limit cycle. This work gives a control strategy driven to disturb the model in such way that the equilibrium state become locally asymptotically stable. The way to perform this objective is to consider a directional feedback control over the linearization of the model.

**Keywords:** stability, linearization, directional feedback control, linearly equivalent systems.

**Mathematics Subject Classification:** 93D15.

*proyecto S-98-25 Dirección de Investigación, UACH Valdivia, Chile.
**Instituto de Matemáticas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Casilla 567, Chile. E-Mail: vdelgado@uach.cl

# 1. Introducción

El problema de establecer condiciones de existencia de soluciones para un sistema de control con restricciones de estado de tipo poliédrico proporciona, además de su interés teórico, elementos de juicio con significativa incidencia en las aplicaciones.

En modelos poblacionales, por ejemplo, las variables de estado son no negativas y si se aisla la población, no permitiendo emigración ni inmigración de individuos, la suma de las variables de estado es constante. Tales situaciones se traducen en el hecho de que la dinámica del sistema queda inmersa en una región poliédrica.

Lo anterior motiva el estudio de los siguientes problemas:

1. Dado un sistema de contro lineal $x' = A(t)x + B(t)u$, $A(t)$ matriz $n \times n, B(t)$ matriz $n \times m$ y la variedad lineal $M$ de codimensión $k$, determinar condiciones sobre el control $u = u(t)$ que dependan de la codimensión y de modo que se produzcan soluciones del sistema que se deslicen sobre la variedad lineal. Tales controles se denominarán controles direccionales.

2. Dado un sistema de control $x' = f(t, x, u)$, con condiciones sobre $f$ que garanticen existencia y unicidad de soluciones para cada control admisible $u = u(t)$ y un punto estacionario aislado $x^*$del sistema $x' = f(t, x, 0)$, considerar su linealización en torno a ese punto y aplicarle, al sistema lineal que se obtiene, controles direccionales cuyas respectivas trayectorias alcancen $x^*$ en tiempo finito. Tales controles se activan en el sistema original y se estudia la nueva dinámica que se produce en cuanto a la eventualidad de estabilizar el sistema en torno al punto estacionario.

Para el primer problema se ha obtenido una condición necesaria para que un control realimentado produzca soluciones inmersas en una variedad lineal de codimensión $k$ dentro de la dinámica de un sistema de control lineal canónico ([3]).

Para el segundo problema se ha logrado perturbar un modelo predador presa de Volterra Lotka con un control de captura sobre la población predadora, de tal modo que transforma el estado de equilibrio estable en uno asintóticamente estable ([1]).

# 2. Resultados

Un sistema de control lineal en $\mathbb{R}^n$ $x' = Ax + Bu$, $A$ matriz $n \times n, B$ matriz $n \times m$,

$u$ en $\mathbb{R}^m$ se dice linealmente equivalente a un sistema lineal $x' = A^*x + B^*u$ si existe una matriz no singular $Q$ tal que $A^* = QAQ^{-1}, B^* = QB$ ([5], pág. 83).

En particular si $u$ es escalar, $B$ es matriz $nx1$ y la matriz $(A^{n-1}B, A^{n-2}B, \ldots, B)$ es no singular, entonces el sistema de control lineal es linealmente equivalente al siguiente:

$$x_1' = x_2, x_2' = x_3, \ldots, x_n' = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + u$$

Usando la metodología detallada en [2] se obtiene:

**Proposición 1** *Si* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *y* $b \neq 0$ *entonces el sistema de control*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*es linealmente equivalente al sistema*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\det(A) & tr(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

DEMOSTRACIÓN:

La matriz $\left( A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$ es no singular.

Ahora si se considera la matriz $Q = \begin{bmatrix} 1/b & 0 \\ a/b & 1 \end{bmatrix}$ resulta que:

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bc - ad & a + d \end{bmatrix} \qquad Q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y de allí se obtiene el resultado. ■

El modelo poblacional de May:

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1 - \frac{x}{b}\right) - \frac{cxy}{d+x} \\ y' &= py\left(1 - \frac{y}{qx}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

con $a, b, c, d, p, q$ parámetros positivos, tiene un estado estacionario no trivial $(x*, y*)$ en el primer cuadrante abierto que verifica:

$$y^* = qx^* \quad a\left(1 - \frac{x^*}{b}\right) = \frac{cy^*}{d + x^*}$$

El jacobiano de (1) en torno a tal estado origina la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \overline{p} & -\dfrac{cx^*}{d+x^*} \\ pq & p \end{bmatrix} \qquad \overline{p} = \frac{cqx^{*2}}{(d+x^*)^2} - \frac{ax^*}{b}.$$

Si la traza de $J$ es positiva entonces el estado estacionario es inestable en el sentido que la dinámica del sistema se aleja espiraleando en torno a un ciclo límite ([4], pág. 155–162).

El objetivo entonces es aplicar un control de captura sobre la especie predadora de tal modo que perturbe el sistema (1) y se logre con ello una nueva dinámica que se acerque localmente al estado estacionario.

**Proposición 2** *Existe un control direccional que perturba el modelo poblacional de May de tal modo que su estado de equilibrio no trivial adquiere la propiedad de ser localmente asintóticamente estable.*

DEMOSTRACIÓN:

Al modelo de May se agrega un control sobre la especie predadora.
Esto es:

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1-\frac{x}{b}\right)-\frac{cxy}{d+x} \\ y' &= py\left(1-\frac{y}{qx}\right)+u \end{aligned}$$

cuya linealización en torno al estado de equilibrio $(x^*, y^*, u = 0)$ origina el sistema de control

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = J\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2}$$

Como la matriz $\left(J\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\dfrac{cx^*}{d+x^*} & 0 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$ es no singular, entonces por Proposición 1, el sistema (2) es linealmente equivalente al siguiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\det(J) & tr(J) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3}$$

a través del operador

$$Q = \begin{bmatrix} -\dfrac{d+x^*}{cx^*} & 0 \\ -\dfrac{\overline{p}(d+x^*)}{cx^*} & 1 \end{bmatrix}$$

que envía el estado estacionario $(x^*, y^*)$ al punto $(x_0, y_0)$ donde

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{d+x^*}{c} \\ y_0 &= \frac{(cq-\overline{p})x^*-d\overline{p}}{c} \end{aligned}$$

Usando la técnica detallada en [1] y [2] es posible escoger controles direccionales que originan trayectorias del sistema (3) que localmente se acercan al punto $(x_0, y_0)$, distinguiéndose los casos $y_0 > 0, y_0 = 0, y < 0$. Se analizará el primer caso, los otros dos se tratan de manera análoga.

Para que el sistema perturbado por el control direccional realimentado $u(x, y) = my + (\det J)x - (\mathrm{tr}\ J)y$ mantenga el mismo estado estacionario original es necesario que $u(x^*, y^*) = 0$, es decir $m = \mathrm{tr}\ J - (\det J/q)$. De allí se obtiene que es necesario escoger el control:

$$u(x, y) = (\det J)x - (\det J/q)y. \tag{4}$$

El sistema perturbado queda entonces de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1-\frac{x}{b}\right)-\frac{cxy}{d+x} \\ y' &= py\left(1-\frac{y}{qx}\right)+(\det J)x-\frac{\det J}{q}y \end{aligned}$$

cuyo jacobiano en torno al estado estacionario $(x^*, y^*)$ origina la matriz:

$$J^* = \begin{bmatrix} \overline{p} & -\dfrac{cx^*}{d+x^*} \\ pq + (\det J) & -p - \dfrac{\det J}{q} \end{bmatrix}$$

Notar que $\frac{cx^*}{d+x^*} - \frac{\overline{p}}{q} = \frac{cdx^*}{(d+x^*)^2} + \frac{ax^*}{bq} > 0$.

En consecuencia $\det J^* > 0$.

Finalmente $trJ^* < 0$ si y solo si

$$\frac{pcx^*}{d+x^*} + p > \overline{p}\left(1 + \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{cx^{*2}}{(d+x^*)^2}q - \frac{ax^*}{b}\right)\left(1 + \frac{p}{q}\right) = w(q)$$

Como $w(q)$ es continua y estrictamente creciente para valores positivos de $q$ resulta que existe un intervalo abierto en torno al punto

$$\frac{a(d+x^*)^2}{bx^{*2}}$$

tal que si $q$ pertenece a tal intervalo entonces

$$w(q) < \frac{pcx^*}{d+x^*} + p$$

Es decir, para esos valores de $q$ la traza de $J^*$ es negativa y, en consecuencia, el modelo poblacional de May perturbado por el control direccional (4) es localmente asintóticamente estable en torno al estado de equilibrio $(x^*, y^*)$. $\blacksquare$

## Referencias


[1] Delgado, V. (1997) "Controlabilidad direccional para sistemas no lineales en el plano a través de un proceso de linealización," in: J. Trejos (Ed.) *X Simposio Internacional de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias*, Liberia, Costa Rica: 107–111.

[2] Delgado, V. (1998) "Perturbations of Quadratic Population Models through Directional Feedback Controls." *Alcala First International Conference on Mathematical Ecology*, AICME, U. de Alcalá de Henares, España, pp.141.

[3] Delgado, V. (1992) "Trayectorias de un sistema de control sobre variedades lineales de codimensión 1 y $n-1$" *CUBO* **8**, UFRO, Chile: 71–74

[4] Beltrami, E. (1987) *Mathematics of Dynamic Modeling.* Academic Press, New York.

[5] Lee, E.B.; Markus, L. (1987) *Foundations of Optimal Control Theory.* John Wiley and Sons, New York.