Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2002 **9**(1) : 1–9
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

ANÁLOGOS A TEOREMAS TAUBERIANOS

María de los Angeles Mora M.*

Recibido: 30 Junio 1999; Versión revisada: 31 Agosto 2001

Resumen

Se obtienen resultados similares al Teorema Tauberino de W. Rudin, para integrales singulares definidas en intervalos acotadas. Así mismo, para casos en que el núcleo es una función oscilante.

Palabras clave: Teorema Tauberiano, integrales singulares.

Abstract

We obtain some results similar to W. Rudin's Tauberian Theorem, on singular integrals defined on bounded intervals. We also consider cases on which the Kernel is an oscillating function.

Keywords: Tauberian Theorem, singular integrals.

Mathematics Subject Classification: 42B20

1. Introducción

El principal resultado en [7] generaliza el teorema que W. Rudin obtuvo para el núcleo de Poisson, a una serie de núcleos definidos en $\mathbb{R}^n$. En detalle éste se presenta a continuación:

Teorema 1 *Sean $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ la bola abierta centrada en el origen de radio r, m medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ normalizada de tal manera que $m\left(B(0,r)\right) = r^n$. Además:*

- *μ la medida de Borel finita y positiva definida en $\mathbb{R}^n$,*
- *g función derivable y acotada en $[0, +\infty[$ que satisface*

*Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

i) $\displaystyle\int_0^\infty |g(r)|r^{n-1}\,dr < +\infty.$

ii) $\displaystyle\int_0^\infty r^n|g'(r)|\,dr < +\infty.$

iii) $g(0) \neq 0.$

- $\hat{\phi}(y) \neq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, *donde* $\hat{\phi}$ *denota la transformada de Melin de* $\phi(r) = -r^{n+1}g'(r)$.

$$\hat{\phi}(y) = \int_0^\infty \phi(u)u^{-iy}\frac{du}{u}, \qquad donde\ \phi(x) = g(|x|).$$

Entonces, si $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)d\mu = L$ *se tiene que* $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\mu\left(B(0,r)\right)}{r^n} = L.$

Este teorema da una caracterización de aquellas funciones g definidas en $[0,+\infty[$, para las cuales se cumple el teorema tauberiano.

En este trabajo se obtienen resultados similares a los teoremas tauberianos para núcleos definidos en los intervalos acotados o núcleos oscilantes. Integrales singulares como De la Vallée-Poussin $V_n(\mu) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,d\mu(t)$, Landau $L_n(\mu) = \sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,d\mu(t)$ en donde el núcleo está definido en un intervalo acotado. O bien la integral de Feier $\varphi(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2(s)}{s^2}d(\mu)(s)$ son objeto de análisis.

2. Integrales singulares definidas en intervalos acotados

Sea ψ una función par, continua en $(-a,a)$ creciente en $[0,a)$ y tal que $\displaystyle\lim_{t\to a}\psi(t) = +\infty$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ y $\psi''(0) = c > 0$.

Teorema 2 *Si μ es una medida finita de Borel en $(-a,a)$. Considere la integral*

$$I_n(\mu) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-n\psi_{(t)}}d\mu(t) \quad ysea \quad \lim_{n\to\infty} I_n(\mu) = L$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu([-r,r])}{r} = \sqrt{\frac{\psi''_{(0)}}{2}}\ L.$$

Demostración: Sea $v(t) = \sqrt{\psi(t)}\mathrm{sgn}(t), t \in (-a,a)$ entonces $v : (-a,a) \longrightarrow (-\infty,\infty)$ es estrictamente creciente. Además $v(t) = \sqrt{\frac{\psi''(0)}{2}}\,t(1+o(t))\ \ t \to 0.$

Sea w la inversa de v. Considérese ν definida en el sistema de subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que

$$\nu(E) = \mu(w(E)).$$

Entonces
$$I_n(\mu)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-n\psi(t)}d\mu(t)=\sqrt{\frac{\pi}{n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n\nu^2}d\nu(v).$$
Si $n=\frac{1}{\varepsilon^2}$ se tiene $I_n(\mu)=2\varepsilon\cdot\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-(\frac{\nu}{\varepsilon})^2}d\mu(v)$.

Esta última integral coincide con la integral de Weierstrass.

El núcleo de Weierstrass $g(r)=e^{-r^2}$ satisface las condiciones del teorema (1), esto es:
$$\text{si } \phi(r)=-r^{n+1}g'(r) \text{ se obtiene } \widehat{\phi}(y)=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-iy}\frac{dr}{r}.$$
Donde $\widehat{\phi}$ representa la transformada de Melin de ϕ.
$$\widehat{\phi}(y)=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-iy}\frac{dr}{r}=-\Gamma(\frac{n+2+iy}{2})\neq 0,\ \text{para todo } y\in\mathbb{R}$$
y por lo tanto se cumple la conclusión del teorema (1):
$$\lim_{b\to 0}\frac{\nu([-b,b])}{b}=L.$$
Sin embargo,
$$\nu([-b,b])=\mu(w([-b,b]))=\mu([w(-b),w(b)])$$
así
$$\lim_{r\to 0}\frac{\mu([-r,r])}{v(r)}\ =\ \lim_{r\to 0}\frac{\mu([-r,r])}{\sqrt{\frac{\psi''(0)}{2}}r(1+o(r))}=L,$$
por lo tanto
$$\lim_{r\to 0}\frac{\mu([-r,r])}{r(1+o(r))}=\sqrt{\frac{\psi''(0)}{2}}\cdot L.$$
Ilustremos este teorema en los ejemplos de las integrales de De la Vallée-Poussin y Landau.

2.1. Integral de De la Vallée-Poussin

Sea μ-medida de Borel finita en el intervalo $[-\pi,\pi]$. La integral de De la Vallée - Poussin esta definida por
$$\nu_n(\mu)=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}d\mu(t),$$
que se puede escribir en la forma
$$\nu_n(\mu)=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-n\log\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}}d\mu(t).$$
Denotamos $\psi(t)=\log\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}$. Es obvio que $\psi(t)=\frac{t^2}{4}+o(t^2)$, $t\to 0$, $\psi''(0)=\frac{1}{2}$. Por esto, si $\lim_{n\to\infty}\nu_n(\mu)=L$ entonces $\lim_{r\to 0}\frac{\mu([-r,r])}{r}=\frac{1}{2}L$.

2.2. Integral de Landau

La integral de Landau se escribe:

$$L_n(\mu) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n d\mu(t)$$

con μ la medida de Borel en $[-1,1]$. En este caso $\psi(t) = -\log(1-t^2), \psi''(0) = 2$ y de la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\mu) = L$ sigue que $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\mu[(-r,r)]}{r} = L$.

3. Núcleos Oscilantes

Hasta el momento solo hemos tenido relación con núcleos monótonos. Es de interés analizar los núcleos oscilantes. Un ejemplo importante de estos lo constituye el núcleo de Feier:

$$\varphi(s) = \frac{2\operatorname{sen}^2 s}{ns^2} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Para este ncleo no se pudo obtener una demostración directa mediante el esquema usado en [7] . A pesar de que la transformada de Melin de φ es diferente de cero $\forall \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\gamma) &= \tfrac{2}{\pi} \textstyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 s}{s^2} s^{i\gamma} ds \\ &= -\frac{\Gamma(1+i\gamma)\cdot(2-i\gamma)e^{-i\gamma\log 2}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\gamma}{\pi\gamma(1-i\gamma)}, \gamma \in \mathbb{R} \text{ (ver anexo).} \end{aligned}$$

El inconveniente se presenta porque $\phi(r) = r^{n+1}\cdot g(r)$ no es sumable en $(0,+\infty)$ con la medida $\frac{dr}{r}$. Sin embargo se cumple el un teorema similar al de Wiener.

Lema 1 *$\widehat{\mu}$ es la trasformada de Fourier de la medida de μ. Si*

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-a}^{a} \widehat{\mu}(u) du \right) da = L \tag{1}$$

entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{a} e^{-r|u|} \mu(u) du. \tag{2}$$

Demostración:
Sean $M(a) = \int_{-a}^{a} \widehat{\mu}(u)du$ y $N(A) = \frac{1}{A}\int_0^A M(a)da$.

Entonces $M'(a) = \widehat{\mu}(a) + \widehat{\mu}(-a)$ y $M(A) = (AN(A))'$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r|u|}\mu(u)du &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{-ru}\widehat{\mu}(u)du + \int_\infty^0 e^{ru}\widehat{\mu}(u)du\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{-ru}\widehat{\mu}(u)du + \int_0^\infty e^{-ru}\mu(-u)du\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ru}(\widehat{\mu}(u) + \widehat{\mu}(-u))du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ru}M'(u)du \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_0^\infty M(u)e^{-ru}du \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_0^\infty (uN(u))'e^{-ru}du \\
&= \frac{r^2}{2\pi}\int_0^\infty uN(u)e^{-ru}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty ruN(u)e^{-ru}rdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty se^{-s}N(\frac{s}{r})ds
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{2\pi}N(\frac{s}{r}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r}{s}\int_0^{\frac{s}{r}} M(a)da = \frac{r}{s}\int_0^{\frac{s}{r}}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-a}^{a}\widehat{\mu}(u)du\right)da$$

y por hipótesis

$$\lim_{r\to 0}\frac{r}{s}\int_0^{\frac{s}{r}}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-a}^{a}\widehat{\mu}(u)du\right)da = L,$$

además la función N es obviamente acotada y $\lim_{A\to\infty} N(A)$ es finito.

Por el teorema de Lebesgue sobre el paso al límite bajo el signo de integral se tiene que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r|u|}\mu(u)du = L\int_0^\infty se^{-s}ds = L.$$

Teorema 3

Si μ es una medida finita en el sistema de conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ y se cumple que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2}{\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{s}{\epsilon}}{\frac{s^2}{\epsilon}}d\mu(s) = L \tag{3}$$

entonces

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mu([-r,r])}{r} = L$$

.

Demostración: La relación (3) significa que la integral impropia $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\mu}(u)d\mu$, donde $\widehat{\mu}$ es la transformada de Fourier de la medida μ, tiende a L en el sentido de Abel; i.e

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\widehat{\mu}(u)du\right)da = L$$

y según lo demostrado en el lema se tiene

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r|u|}\widehat{\mu}(u) = L$$

y esta última igualdad significa que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rd\mu(s)}{s^2+r^2}=L,$$

con lo que se puede aplicar el teorema de Rudin.

Anexo. Cálculo de la integral $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 s}{s^2}s^{iy}ds$.

Sea $\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$. La función $\varphi(t)t^{i\gamma}\in L^1(0,+\infty)$ es sumable por el método de Abel:

$$\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{i\gamma}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{i\gamma}e^{-\varepsilon t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty}\left(t^{i\gamma}e^{-\varepsilon t}\int_{-2}^{2}\psi(u)e^{itu}du\right)dt \tag{4}$$

donde $\psi(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}(2-|\xi|) & \text{si } |\xi|<2\\ 0 & \text{si } |\xi|\geq 2\end{cases}$

Luego, (4) es igual a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2}^{2}\psi(u)\left(\int_0^{\infty}e^{-(\varepsilon-iu)t}t^{i\gamma}dt\right)du. \tag{5}$$

Véase que

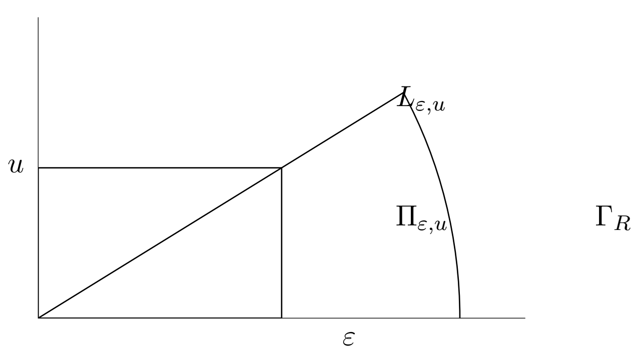
$$\int_0^{\infty}e^{-(\varepsilon-iu)t}t^{i\gamma}dt=\int_0^{\infty}((\varepsilon-iu)t)^{i\gamma}e^{-(\lambda-iu)L}\frac{dt}{(\varepsilon-iu)^{i\gamma}}=\int_{L_{\varepsilon,u}}^{e^{-z}}z^{i\gamma}dz$$

haciendo $z=(\varepsilon-iu)t, dz=(\varepsilon-iu)dt$.

Obsérvese que

$$I=\int_{\pi_{\varepsilon,u}}\frac{e^{-z}z^{i\gamma}dz}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}$$

donde $\pi_{\varepsilon,u}$ es la región en la siguiente figura:



Se tiene

$$I=\frac{1}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}\left[\int_{L_{\varepsilon,u}}e^{-z}z^{i\gamma}dz+\int_0^\infty e^{-t}t^{i\gamma}dt+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{-z}z^{i\gamma}dz\right]=0.$$

Se sabe que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{i\gamma}dt=\Gamma(1+\gamma i)$.

Cálculo de $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{-z}z^{i\gamma}dz$.

Sean $-1\leq u\leq 1, \varepsilon>0$, u fijo.
Si $\theta\in\left[0,\arctan\frac{u}{\varepsilon}\right]$ entonces $0<\cos(\arctan\frac{u}{\lambda})\leq\cos\theta\leq 1$. Ahora,

$$\int_{\Gamma_R}e^{-z}z^{i\gamma}dz=\int_0^{\arctan\frac{u}{\varepsilon}}(Re^{i\theta})^{i\gamma}\cdot iRe^{i\theta}\ d\theta$$

y

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R}e^{-z}z^{i\gamma}dz\right| &= \int_0^{\arctan\frac{u}{\varepsilon}}e^{-R\cos\theta}e^{-\theta\gamma}Rd\theta\\ &\leq \max(1,e^{-\gamma\arctan\frac{u}{\varepsilon}})\cdot R\int_0^{\arctan\frac{u}{\varepsilon}}e^{-R\cos\theta}d\theta\\ &\leq K\cdot\frac{\pi R^2}{2}\max_{\Gamma_R}\left|e^{-R\cos\theta}\right|\\ &\leq KR^2e^{-R\gamma}\end{aligned}$$

Veáse que $KR^2e^{-R\gamma}\to 0$ cuando $R\to 0$, siendo $\delta>0$. Por lo tanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{-z}z^{i\gamma}dz=0$$

Luego,

$$\int_{L_{\varepsilon,u}}e^{-z}z^{i\gamma}dz=\frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}\neq 0.$$

Es decir $\int_0^\infty e^{-(\varepsilon-iu)t}t^{i\gamma}dt=-\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{(\varepsilon-iu)^{i+i\gamma}}$ y entonces la integral (5) es:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2\psi(u)\left[\int_0^\infty e^{-(\varepsilon-iu)t}t^{i\gamma}dt\right]du &= \int_{-2}^2\frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}\psi(u)du\\ &= \frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{2\pi}\int_{-2}^2\frac{2-|u|}{(\varepsilon-iu)1+i\gamma}du\\ &= \frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}\int_0^2\frac{2-u}{(\varepsilon+iu)^{1+i\gamma}}+\frac{2-u}{(\varepsilon-iu)^{1+i\gamma}}\\ &= \frac{-\Gamma(i+i\gamma)}{2\pi}\left[2\int_0^2(\varepsilon+iu)^{-1-i\gamma}+(\varepsilon-iu)^{-1-i\gamma}du\right.\\ &\qquad\left.-\int_0^2(u(\varepsilon+iu)^{-1-i\gamma}+(\varepsilon-iu)^{-1-i\gamma})du\right]\\ &= \frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{2\pi}[I+II].\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I=&\int_0^2 \left[(\varepsilon+iu)^{-1-i\gamma}+(\varepsilon-iu)^{-1-i\gamma}\right]du=\frac{2}{i\gamma}\left[\frac{1}{-i}(\varepsilon+iu)^{i\gamma}\Big|_0^2+\frac{1}{i}(\varepsilon-iu)^{-i\gamma}\Big|_0^2\right]\\
=&\tfrac{2}{\gamma}\left[(\varepsilon+2i)^{-i\gamma}-\varepsilon^{i\gamma}-(\varepsilon-2i)^{i\gamma}+2\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\tfrac{2}{\gamma}((2i)^{-i\gamma}-(-2i)^{-i\gamma})\\
=&\tfrac{2}{\gamma}\left[e^{-i\gamma\log 2+i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\gamma(\log 2-\frac{i\pi}{2})}\right]=\tfrac{2}{8}e^{-i\gamma\log 2}\left[e^{\frac{\gamma\pi}{2}}-e^{\frac{\gamma\pi}{2}}\right]\\
=&2\left(\tfrac{2}{\gamma}e^{-i\gamma\log 2}senh\tfrac{\pi\gamma}{2}\right).\\
II=&\int_0^2 u\left[(\varepsilon+iu)^{-1-i\gamma}+(\varepsilon-iu)^{-1-i\gamma}\right]du\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\int_0^2 u\left[\frac{(iu)^{-i\gamma}}{iu}+\frac{(-iu)^{-i\gamma}}{-iu}\right]du.
\end{aligned}
$$

El cambio de lugar del límite y la integral es posible según el teorema de Lebesgue ya que

$$
u[(\varepsilon+iu)^{-1-i\gamma}+(\varepsilon-iu)^{-1-i\gamma}]\leq\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^2+u^2}}\leq 1.
$$

Se deduce que

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\Gamma(i+i\gamma)}{2\pi}[I+II]=&\int_0^2\frac{(iu)^{i\gamma}}{-1}idu+\int_0^2\frac{(iu)^{1-i\gamma}-idu}{-1}\\
=&-i\left[\tfrac{(iu)^{1-i\gamma}}{1-i\gamma}-\tfrac{(-iu)^{1-i\gamma}}{1-i\gamma}\right]_0^2\\
=&\tfrac{-i}{1-i\gamma}[(2i)^{i\gamma}-(2i)^{-i\gamma}]\\
=&\tfrac{-2i}{(1-i\gamma)}e^{-i\gamma\log 2}sh\tfrac{\pi\gamma}{2},
\end{aligned}
$$

y así tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2}^2\psi(u)\left(\int_0^\infty e^{-(\varepsilon-iu)t}t^{i\gamma}dt\right)du &= \frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{2\pi}\left[\frac{4}{\gamma}+\frac{2i}{1-i\gamma}\right]e^{i\gamma\log 2}\cdot sh\frac{\pi}{2}\gamma\\
&= \frac{-\Gamma(1+i\gamma)}{\pi}\cdot\left(\frac{2-i\gamma}{\gamma(1-i\gamma)}\right)e^{-i\gamma\log 2}sh\frac{\pi}{2}\gamma.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}^2 s}{s^2}s^{i\gamma}ds=\frac{-\Gamma(1+i\gamma)e^{-i\gamma\log 2}sh\frac{\pi}{2}\gamma}{\pi\gamma(1-i\gamma)}
$$

Referencias

[1] Gehring, F.W. (1960) “Harmonic fuctions and tauberian theorems”, *London Math. Soc.* **10**(3): 88–166.

[2] Gehring, F.W. (1957) “The Fatou theorem and its converse”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **85**: 106–121.

[3] Hewitt, E.M. (1975) “Differentation of integrals in $\mathbb{R}^n$”, *Lecture Notes in Mathematics* **481**, Springer- Verlag.

[4] Hewitt, E.; Ross, K.A. (1963 y 1970) *Abstract Harmonic Analysis*, vols. I y II, Springer-Verlag.

[5] Loomis, L. H.; Widdner, D.V. (1942) *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* Van Nostrand, New York.

[6] Loomis, L.H.; Widdner, D.V. (1942) "The Poisson integral representation of fuctions wich are positive and harmonic in a half plane", *Duke Math. Journal* **9**: 643–645.

[7] Mora, M. (1996) "Sobre el teorema Tauberiano de W. Rudin", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **2**(2): 59–65.

[8] Rudin, W. (1979) "Tauberian theorems for positive harmonic fuctions", *Bull. Amer. Math. Soc.*

[9] Wiener, N. (1932) "Tauberian Theorems", *Ann. of Math.* **33**(2): 1–100, 787.