

ESTIMACIÓN DE MODELOS DE EQUILIBRIO
GENERAL EN ECONOMÍAS DINÁMICAS POR
MÉTODOS DE MONTE CARLO Y
CADENAS DE MARKOV

ESTIMATION OF GENERAL EQUILIBIUM MODEL
IN DYNAMIC ECONOMIES USING MARKOV
CHAIN MONTE CARLO METHODS

GLORIA ESTÉVEZ* SABA INFANTE[†] FRANCISCO SÁEZ[‡]

Received: 3-May-2010; Revised: 6-Nov-2011; Accepted: 7-Dec-2011

Resumen

En este trabajo se describe un procedimiento general para hacer inferencia bayesiana basados en la evaluación de la verosimilitud de los modelos de equilibrio general estocásticos (MEGE) a través de los métodos de Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC). La metodología propuesta requiere log linealizar los modelos, transformarlos en la forma espacio estado, luego utilizar el filtro

*Oficina de Investigaciones Económicas, Banco Central de Venezuela, Av. Urdaneta esq. Las Carmelitas, Caracas 1010 – Venezuela. E-Mail: gestevez@bcv.org.ve

[†]Centro de Análisis, Modelado y Tratamiento de Datos, y Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Valencia 2008, Venezuela. E-Mail: sinfante@uc.edu.ve

[‡]Misma dirección que/Same address as G. Estévez. E-Mail: fransaez@bcv.org.ve

de Kalman para evaluar la función de verosimilitud y finalmente aplicar el algoritmo Metropolis Hastings para estimar los parámetros de la distribución a posteriori. Se ilustra la técnica mediante el uso del modelo básico de crecimiento estocástico, considerando datos trimestrales de la economía venezolana comprendidos entre el primer trimestre de (1984) hasta el tercer trimestre de (2004). El análisis empírico realizado nos permite concluir que los algoritmos utilizados para estimar los parámetros del modelo trabajan de manera eficiente y a bajo costo computacional, las estimaciones obtenidas son consistentes, es decir, los estimados de las predicciones reflejan adecuadamente el comportamiento del producto, el empleo, el consumo y la inversión per capita del país. En las gráficas de los histogramas estimados se observa que tienen comportamientos bimodales y distribuciones asimétricas.

Palabras clave: modelos de equilibrio general, inferencia bayesiana, algoritmos recursivos.

Abstract

This paper describes a general procedure to do Bayesian inference based on the likelihood evaluation of the stochastic general equilibrium models (MEGE) through Markov Chain Monte Carlo methods (MCMC). The proposed methodology involves log linearizing the model, transformed into state space form, then use the Kalman filter to evaluate the likelihood function and finally apply the Metropolis Hastings algorithm to estimate the posterior distribution parameters. Technique is illustrated using the stochastic growth of basic model, considering quarterly data on the Venezuelan economy between the first quarter of (1984) through the third quarter of (2004). The empirical analysis made allows us to conclude that the algorithms used to estimate the model parameters work efficiently and low computational cost, the estimates obtained are consistent, that is, estimates of the predictions adequately reflect the behavior of the product, employment, consumption and investment per capita in the country. The graphs of the estimated histograms show bimodal and skewed distributions.

Keywords: General equilibrium models, Bayesian inference, recursive algorithms.

Mathematics Subject Classification: 91B50.

1 Introducción

En este artículo se utiliza la metodología estándar para la estimación bayesiana de los modelos de equilibrio general estocásticos (MEGE), tal

como se desarrollan en Smets y Wouters (2003), Schorfheide (2000), Fernández y Rubio (2004). El objetivo principal de este artículo es mostrar de manera comprensiva el uso de las técnicas y procedimientos Bayesianos utilizados para estimar los MEGE y hacer una aplicación con datos reales de la economía venezolana. La técnica se ilustra utilizando el modelo crecimiento neoclásico propuesto por Cass (1965) y Koopmans (1965), y se usan datos de la economía de Venezuela, comprendidos entre el primer trimestre de (1984) hasta el tercer trimestre del (2004). Si bien es cierto que el modelo básico de crecimiento deja de lado importantes aspectos relacionados con la modelización de una pequeña economía abierta, la estimación obtenida en este artículo puede servir como punto de partida para contrastar e interpretar los cambios que en la estimación de los parámetros podría ocasionar cuando se realizan modificaciones en las priori del modelo. Los MEGE tienen una gran importancia en el diseño y análisis de políticas para la macroeconomía. Los modelos se caracterizan por poseer expectativas racionales que están bien fundamentadas y son consistentes desde el punto de vista de los balances macroeconómicos. Bajo estas estructuras se analizan los fenómenos de la economía en donde todos los sectores que la conforman son considerados de manera simultánea. Frecuentemente los entes gubernamentales requieren de estudios sobre fenómenos económicos que tienen un comportamiento aleatorio y que necesitan ser determinados para poder implementar políticas económicas que permitan corregir tendencias no deseadas. Esta necesidad ha estimulado el uso de herramientas estadísticas para la estimación de parámetros y evaluación de modelos. Sin embargo, estos análisis se obstaculizan debido a la dificultad para evaluar la función de verosimilitud involucrada por la economía de equilibrio dinámico. En el artículo se describe la técnica para redefinir el modelo en la forma espacio estado, separando las variables observadas (ecuación de observación experimental) de las variables no observadas (ecuación de estados o parámetros desconocidos). Para reescribir el modelo se deben hallar las condiciones de optimalidad, el estado estacionario, la log linealización, y la resolución de las expectativas racionales del modelo usando el algoritmo de Uhlig (1995). Luego se utiliza el filtro de Kalman un método de predicción y corrección, para evaluar la función de verosimilitud. Finalmente se utiliza el algoritmo Metrópolis Hastings desarrollado por Metropolis et al. (1953) y generalizado por Hastings (1970), un poderoso procedimiento basado en los métodos de MCMC, el cual permite estimar los parámetros del modelo a partir del muestreo de la distribución a posteriori. Existen diversas propuestas metodológicas para estimar estos modelos. De Jong et al. (2000) utilizaron la técnica del muestreo de importancia para estimar modelos de ciclos de negocios reales. Geweke (1998) describe los principios

fundamentales de la inferencia bayesiana y la implementación de los métodos de simulación en modelos econométricos simples. Landon (1999) y Otrok (2001) utilizan los métodos MCMC en problemas econométricos. Landon ilustra dos modelos típicos de ciclo de negocio real, considera el caso donde no hay ninguna incertidumbre sobre las priori de los parámetros estructurales del modelo y luego considera el caso donde hay alguna incertidumbre a priori sobre los parámetros. Otrok estima el costo del bienestar de ciclos de negocio, donde la disciplina es colocada sobre la opción de parámetros de preferencia requiriendo que las preferencias sean compatible con las fluctuaciones observadas en un modelo de ciclos de negocio. Christiano et al. (2001) estiman economías de equilibrio dinámico usando la información en funciones impulso respuesta de soluciones linealizadas. Sargent (1989) implementa el filtro de Kalman para evaluar la función de verosimilitud de una economía de equilibrio dinámico lineal con shocks normales. Schorfheide (2000) propone funciones de pérdidas para la evaluación y comparación de modelos MEGE. Basdevant (2003) presenta la estructura general del modelo espacio estado y el filtro de Kalman y el modelaje de tendencias no observadas y fluctuaciones en la economía. Harvey (1989) describe la teoría general de modelos espacio estado y el funcionamiento del filtro de Kalman. Koopman y Bos (2004) utilizaron el muestreo de importancia y el filtro de Kalman en modelos de espacio estado lineales Gaussianos y modelos de volatilidad estocástica de la economía de los Estados Unidos. Fernández y Rubio (2004) estudian las propiedades de la aproximación bayesiana en la estimación y comparación de modelos de equilibrio dinámico. Fernández y Rubio (2004, 2005, 2006) muestran desarrollos teóricos y aplicaciones de los métodos basados en la verosimilitud de los modelos de equilibrio dinámicos no lineales usando métodos de Monte Carlo Secuenciales. Fernández et al. (2005) determinan un vector autoregresivo para un sistema espacio estado y verifican la invertibilidad de un modelo de vectores autoregresivo. Rabanal y Rubio (2005) proponen algunas priori para obtener la distribución a posteriori, utilizan el filtro de Kalman para evaluar la verosimilitud y el algoritmo Metropolis Hastings para muestrear de la distribución a posteriori.

Finalmente señalamos que la contribución de este artículo se fundamenta en la presentación unificada y coherente de los algoritmos de: Uhlig, Kalman y Metrópolis Hastings para resolver problemas aplicados de la macroeconomía. Otro aspecto importante es la deducción en detalle de los aspectos teóricos inherente a los modelos, estos desarrollos podrían servir como un tutorial para investigadores aplicados en esta área.

El artículo se organiza como sigue: En la Sección 2 se establece la metodología general, en la Sección 3 se analiza el modelo básico de crecimiento estocástico, en la Sección 4 se realiza una aplicación de la

teoría con datos reales, y en la Sección 5 se establecen unas discusiones y conclusiones.

2 Metodología general para estimar los MEGE

Los modelos de equilibrio general estocásticos dinámicos se caracterizan por poseer expectativas, están micro fundamentados y son consistentes desde el punto de vista de los balances macroeconómicos. Bajo ésta estructura se analiza los fenómenos de la economía en donde todos los sectores que la conforman son considerados de manera simultánea. El modelo del agente representativo tiene muchas propiedades deseables para el análisis económico y su adaptabilidad lo ha convertido en una herramienta útil en la economía financiera. La estimación de éstos modelos es el objetivo debido a la dificultad que se presenta al evaluar la función de verosimilitud. Existe una manera útil de redefinir un modelo, usando la forma espacio estado. Los modelos espacio estado permiten separar las variables observadas (ecuación de observación) de las variables no observadas (ecuación de estado) y luego utilizar filtro de Kalman, un método de predicción corrección para evaluar la función de verosimilitud. El proceso general para estimar un MEGE se resume así:

1. Planteamiento del modelo teórico.
2. Condiciones de optimalidad.
3. Cálculo del estado estacionario.
4. Log linealización del modelo.
5. Resolución del modelo de expectativas racionales.
6. Planteamiento del modelo en forma espacio estado.
7. Obtención de la función de verosimilitud asociada al modelo.
8. Algoritmo de filtro de Kalman para evaluar la verosimilitud.
9. Algoritmo Metrópolis Hastings para estimar los parámetros a posteriori del modelo.

3 Modelo básico de crecimiento estocástico

Considérese el modelo clásico de crecimiento propuesto por Cass (1965) y Koopman (1965), tratado en Fernández y Rubio (2004), dado en términos

de un agente representativo en la economía, cuyas preferencias sobre el consumo C_t y el ocio $(1 - L_t)$ están representados por la función de utilidad:

$$\max_{\{C,L\}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{[C_t^\theta (1 - L_t)^{1-\theta}]^{1-\tau}}{1 - \tau} \right] \right\} \quad (1)$$

sujeta a las restricciones:

$$C_t + I_t = Z_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (2)$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (3)$$

$$Z_t = Z_{ss}^{1-\rho} Z_t^\rho e^{\xi_{t+1}}, \quad \xi_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4)$$

donde:

- $\beta \in (0, 1)$ es el factor de descuento.
- $\theta \geq 0$ es el parámetro que controla la oferta de trabajo.
- $\tau \geq 1$ es la elasticidad de sustitución intertemporal.
- $\alpha \in [0, 1]$ es el factor de descuento.
- $\delta \geq 0$ es la tasa de depreciación.
- $\rho \in [0, 1]$ es la persistencia del shock tecnológico.
- L_t es la cantidad de trabajo agregado.
- I_t es la inversión.
- Z_t es el nivel de tecnología.
- K_t es el capital agregado.

Las variables del modelo son: C_t , L_t , I_t , K_t , Z_t , y los parámetros: $\gamma = \{\theta, \rho, \alpha, \tau, \delta, \beta, \sigma_\varepsilon\}$.

3.1 Condiciones de optimalidad

El problema puede ser planteado en forma lagrangiana como sigue:

$$\begin{aligned} \max f(C_t, L_t, K_{t+1}, \lambda_t) = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{[C_t^\theta (1 - L_t)^{1-\theta}]^{1-\tau}}{1 - \tau} \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda_t (C_t - Z_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t) \right] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial C_t} = 0 : \beta^t \theta C_t^{\theta-1} (1 - L_t)^{1-\theta} [C_t^\theta (1 - L_t)^{1-\theta}]^{-\tau} - \beta^t \lambda_t = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \theta C_t^{(1-\tau)\theta-1} (1 - L_t)^{(1-\tau)(1-\theta)} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial L_t} = 0 : & -\beta^t C_t^{(1-\tau)\theta} (1 - L_t)^{-\tau-(1-\tau)\theta} (1 - \theta) \\ & + \beta^t \lambda_t (1 - \alpha) Z_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K_{t+1}} = 0 : -\beta^t \lambda_t + E_t[\lambda_{t+1} \beta^{t+1} (\alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} (\alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_t} = 0 : \beta^t [-C_t + Z_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - K_{t+1} + (1 - \delta)K_t] = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \log(Z_t) &= (1 - \rho) \log(Z_{ss}) + \rho \log(Z_{t-1}) + \xi_t, \\ \xi_t &\sim N(0, \sigma^2), \quad |\rho| < 1. \end{aligned} \quad (12)$$

3.1.1 El sistema reducido

El modelo reducido, puede ser escrito como:

1. Condición de Euler (sustituyendo (7) en (10)):

$$\begin{aligned} \frac{[C_t^\theta (1 - L_t)^{1-\theta}]^{1-\tau}}{C_t} &= \beta E_t \left\{ \frac{[C_{t+1}^\theta (1 - L_{t+1})^{1-\theta}]^{1-\tau}}{C_{t+1}} \right. \\ &\quad \left. \times (1 + \alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} - \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Condición intra temporal (sustituyendo (7) en (8)):

$$\frac{1}{1 - L_t} = \frac{\theta}{(1 - \theta)} (1 - \alpha) \frac{Z_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha}}{C_t}. \quad (14)$$

3. Restricción agregada de recursos (por (9)):

$$C_t + K_{t+1} = Z_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t. \quad (15)$$

4. Shock tecnológico (por (12) asumiendo $Z_{ss} = 1$):

$$\log(Z_t) = \rho \log(Z_{t-1}) + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(0, \sigma^2), \quad |\rho| < 1. \quad (16)$$

3.2 Estado estacionario

En el estado estable, todas las variables son constantes:

$$\{C_t = C_{t+1}, K_t = K_{t+1}, L_t = L_{t+1}, Z_t = Z_{t+1}\},$$

el estado estacionario del modelo básico de crecimiento descrito en las ecuaciones (13), (14), (15) y (16), viene dado por:

1. Estado estacionario derivado a partir de la condición de Euler:

$$1 = \beta[(1 + \alpha K_{ss}^{\alpha-1} L_{ss}^{1-\alpha} - \delta)]. \quad (17)$$

2. Estado estacionario derivado a partir de la condición intra temporal:

$$\frac{1}{1 - L_{ss}} = \frac{\theta(1 - \alpha) K_{ss}^{\alpha} L_{ss}^{-\alpha}}{(1 - \theta) C_{ss}}. \quad (18)$$

3. Estado estacionario derivado a partir de la restricción agregada de recursos:

$$C_{ss} + K_{ss} = K_{ss}^{\alpha} L_{ss}^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_{ss}. \quad (19)$$

4. Estado estacionario derivado a partir del shock tecnológico:

$$Z_{ss} = 1, \quad (20)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$L_{ss} = \frac{1}{\Omega + 1} \quad (21)$$

$$K_{ss} = \Theta^{\frac{1}{\alpha-1}} L_{ss} \quad (22)$$

$$C_{ss} = (\Theta - \delta)K_{ss} \quad (23)$$

$$Y_{ss} = K_{ss}^{\alpha} L_{ss}^{1-\alpha} \quad (24)$$

donde:

$$\Theta = \frac{Y_{ss}}{K_{ss}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right) \quad (25)$$

$$\Omega = \frac{(1 - \theta)}{(1 - \alpha)\theta} \left(1 - \frac{\delta}{\Theta} \right). \quad (26)$$

3.3 Log linealización del modelo

Una vez dadas las condiciones de equilibrio y encontrado el estado estable, el siguiente paso es log linealizar el modelo. Esta técnica usa una aproximación de Taylor alrededor del estado estable y se reemplaza todas las ecuaciones por aproximaciones que son funciones lineales en las log desviaciones de las variables. Los pasos a seguir son los siguientes, usando el algoritmo de Uhlig (1995): sea \hat{X}_t la desviación logarítmica de X_t de su valor en estado estable X_{ss} ; es decir,

$$\hat{X}_t = \log(X_t) - \log(X_{ss}). \quad (27)$$

Entonces:

1. Se reemplaza cada variable X_t por $X_t = X_{ss} e^{\hat{X}_t}$, (condición de Euler), luego se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{[(C_{ss} e^{\hat{C}_t})^\theta (1 - L_{ss} e^{\hat{L}_t})^{1-\theta}]^{1-\tau}}{C_{ss} e^{\hat{C}_t}} = \\ & = \beta E_t \left\{ \frac{[(C_{ss} e^{\hat{C}_{t+1}})^\theta (1 - L_{ss} e^{\hat{L}_{t+1}})^{1-\theta}]^{1-\tau}}{C_{ss} e^{\hat{C}_{t+1}}} \times \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \alpha e^{\hat{Z}_{t+1}} (K_{ss} e^{\hat{K}_{t+1}})^{\alpha-1} (L_{ss} e^{\hat{L}_{t+1}})^{1-\alpha} - \delta) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

2. Tomando logaritmos y usando las siguientes aproximaciones, donde a es una constante:

- $e^{\hat{X}_t + a \hat{Y}_t} \approx 1 + \hat{X}_t + \hat{Y}_t$,
- $\hat{X}_t \hat{Y}_t \approx 0$,
- $E_t[a e^{\hat{X}_{t+1}}] \approx E_t[a e^{\hat{X}_{t+1}}]$,
- $a X_t \approx a X_{ss} \hat{X}_t$,
- $(X_t + a) Y_t \approx X_{ss} Y_{ss} \hat{X}_t + (X_{ss} + a) Y_{ss} \hat{Y}_t$,
- $\log(1 + \hat{X}_t) \approx \hat{X}_t$ para un \hat{X}_t pequeño.

Se obtiene:

1. Log linealización de la condición de Euler:

$$(\theta(1-\tau) - 1)\hat{C}_t - (1-\tau)(1-\theta)\frac{L_{ss}}{1-L_{ss}}\hat{L}_t = \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & = E_t \left\{ (\theta(1-\tau) - 1)\hat{C}_{t+1} - (1-\tau)(1-\theta)\frac{L_{ss}}{1-L_{ss}}\hat{L}_{t+1} \right. \\ & \quad \left. + \alpha\beta K_{ss}^{\alpha-1} L_{ss}^{1-\alpha} (\hat{Z}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{L}_{t+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

2. Log linealización de la condición intra temporal:

$$\hat{C}_t + \frac{L_{ss}}{1 - L_{ss}} \hat{L}_t = \hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t - \alpha \hat{L}_t. \quad (31)$$

3. Log linealización de la restricción agregada de recursos:

$$C_{ss} \hat{C}_t + K_{ss} \hat{K}_{t+1} = K_{ss}^\alpha L_{ss}^{1-\alpha} (\hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1 - \alpha) \hat{L}_t) + (1 - \delta) K_{ss} \hat{K}_t. \quad (32)$$

4. Log linealización del shock tecnológico:

$$\hat{Z}_t = \rho \hat{Z}_{t-1} + \xi_t. \quad (33)$$

3.4 Resolución del modelo

El primer paso para resolver el modelo es reescribir las condiciones log linealizadas (29), (31), (32) y (33), respectivamente, como:

$$E_t \left\{ \alpha_1 \hat{C}_{t+1} + \alpha_2 \hat{L}_{t+1} + \alpha_3 \hat{Z}_{t+1} - \alpha_4 \hat{K}_{t+1} + \alpha_4 \hat{L}_{t+1} - \alpha_1 \hat{C}_t + \alpha_2 \hat{L}_t \right\} = 0, \quad (34)$$

$$\hat{C}_t + \alpha_5 \hat{L}_t - \hat{Z}_t - \alpha \hat{K}_t = 0, \quad (35)$$

$$C_{ss} \hat{C}_t + K_{ss} \hat{K}_{t+1} - Y_{ss} \hat{Z}_t - Y_{ss} \alpha \hat{K}_t - Y_{ss} (1 - \alpha) \hat{L}_t - (1 - \delta) K_{ss} \hat{K}_t = 0, \quad (36)$$

$$\hat{Z}_t = \rho \hat{Z}_{t-1} + \xi_t. \quad (37)$$

donde:

- $\alpha_1 = (\theta(1 - \tau) - 1).$
- $\alpha_2 = -(1 - \tau)(1 - \theta) \frac{L_{ss}}{1 - L_{ss}}.$
- $\alpha_3 = \alpha \beta K_{ss}^{\alpha-1} L_{ss}^{1-\alpha}.$
- $\alpha_4 = \alpha_3(1 - \alpha).$
- $\alpha_5 = \left(\frac{L_{ss}}{1 - L_{ss}} + \alpha \right).$
- $Y_{ss} = K_{ss}^\alpha L_{ss}^{1-\alpha}.$
- \hat{K}_{t+1} es un vector de estado endógeno de dimensión $m \times 1$.
- \hat{L}_t un vector de otras variables endógenas $n \times 1$.
- Z_t un vector de variables exógenas $k \times 1$.

Las relaciones de equilibrio entre éstas variables se representan por el siguiente sistema (Uhlig (1995)):

$$\mathbf{A}\hat{K}_{t+1} + \mathbf{B}\hat{K}_t + \mathbf{C}\hat{L}_t + \mathbf{D}\hat{Z}_t = 0, \quad (38)$$

$$E_t(\mathbf{G}\hat{K}_{t+1} + \mathbf{H}\hat{K}_t + \mathbf{J}\hat{L}_{t+1} + \mathbf{K}\hat{L}_t + \mathbf{M}\hat{Z}_t) = 0, \quad (39)$$

$$E_t(\hat{Z}_{t+1}) = \mathbf{N}\hat{Z}_t, \quad (40)$$

donde:

- $\mathbf{A} = K_{ss}$.
- $\mathbf{B} = \alpha(C_{ss} - Y_{ss}) - (1 - \delta)K_{ss}$.
- $\mathbf{C} = Y_{ss}(\alpha - 1) - \alpha_5 C_{ss}$.
- $\mathbf{D} = C_{ss} - Y_{ss}$.
- $\mathbf{G} = (\alpha_1 \alpha - \alpha_4)$.
- $\mathbf{H} = -\alpha_1 \alpha$.
- $\mathbf{J} = \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_5 - \alpha_2$.
- $\mathbf{K} = \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5$.
- $\mathbf{L} = \alpha_3 + \alpha_1$.
- $\mathbf{M} = -\alpha_1$.
- $\mathbf{N} = \rho$.

Se considera que \mathbf{C} es de dimensión $l \times n$, $l \geq n$ y de rango n , \mathbf{F} es de tamaño $(m + n - 1) \times n$ y que tiene N autovalores estables. La solución propuesta para el sistema de ecuaciones dado por (38), (39) y (40) es la ley de movimiento de equilibrio recursivo, usada en Uhlig (1995):

$$\hat{K}_{t+1} = \mathbf{P}\hat{K}_t + \mathbf{Q}\hat{Z}_t, \quad (41)$$

$$\hat{L}_t = \mathbf{R}\hat{K}_t + \mathbf{S}\hat{Z}_t. \quad (42)$$

Sustituyendo (41) y (42) en (38), (39) y (40) se obtiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}\hat{K}_t + \mathbf{Q}\hat{Z}_t) + \mathbf{B}\hat{K}_t + \mathbf{C}(\mathbf{R}\hat{K}_t + \mathbf{S}\hat{Z}_t) + \mathbf{D}\hat{Z}_t = 0, \quad (43)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}\hat{K}_t + \mathbf{Q}\hat{Z}_t) + \mathbf{H}\hat{K}_t + \mathbf{J}(\mathbf{R}(\mathbf{P}\hat{K}_t + \mathbf{Q}\hat{Z}_t) + \mathbf{S}\hat{Z}_t) + \mathbf{K}(\mathbf{R}\hat{K}_t + \mathbf{S}\hat{Z}_t) + (\mathbf{L}\mathbf{N} + \mathbf{M})\hat{Z}_t = 0 \quad (44)$$

$$E_t(\hat{Z}_{t+1}) = \mathbf{N}\hat{Z}_t. \quad (45)$$

Se tiene un sistema con igual cantidad de ecuaciones con expectativas y de variables de estado endógenas (2 ecuaciones con expectativas y 2 variables de estado endógenas). En el modelo básico de crecimiento, éstas ecuaciones necesitan mantenerse para cualquier valor de k_t ó z_t , por tanto es necesario igualar cada coeficiente a cero en k_t y en z_t , lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{R} = 0 \quad (46)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{P} + \mathbf{H} + \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{K} \mathbf{R} = 0 \quad (47)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{C} \mathbf{S} + \mathbf{D} = 0 \quad (48)$$

$$(\mathbf{G} + \mathbf{J} \mathbf{R}) \mathbf{Q} + \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{N} + \mathbf{K} \mathbf{S} + \mathbf{L} \mathbf{N} + \mathbf{M} = 0, \quad (49)$$

donde:

$$P = -\frac{1}{2} \left[-\left(\frac{B}{A} + \frac{K}{J} - \frac{GC}{JA} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{B}{A} + \frac{K}{J} - \frac{GC}{JA} \right)^2 - 4 \left(\frac{KB - HC}{JA} \right)} \right] \quad (50)$$

$$R = -\frac{1}{C}(AP + B) \quad (51)$$

$$Q = \frac{-D(JN + K) + CLN + CM}{AJN + AK - CG - CJR} \quad (52)$$

$$S = \frac{-ALN - AM + DG + DJR}{AJN + AK - CG - CJR}. \quad (53)$$

A partir de éstas soluciones se puede reescribir el modelo básico de crecimiento en forma espacio estado.

3.5 Modelo espacio estado.

Una forma general de escribir un modelo espacio estado es:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N[0, \mathbf{V}_t] \quad (54)$$

$$\theta_t = \mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{h}_t + \mathbf{N}_t \omega_t, \quad \omega_t \sim N[0, \mathbf{W}_t] \quad (55)$$

donde: \mathbf{y}_t es un vector de observaciones $r \times 1$ y θ_t es el vector estados de dimensión $n \times 1$, \mathbf{d}_t y \mathbf{h}_t son vectores de constantes de tamaño $r \times 1$ y $n \times 1$, respectivamente. El modelo se define en términos de cuatro cantidades $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{V}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{W}_t\}$ las cuales se consideran conocidas, \mathbf{F}_t es una matriz de coeficientes de dimensión $n \times n$, \mathbf{V}_t es una matriz de varianza covarianza $r \times r$, \mathbf{G}_t es una matriz de coeficientes $n \times n$, y \mathbf{W}_t es una matriz de varianza covarianza de dimensión $n \times n$. La ecuación (54) se conoce como la ecuación de observación, la cual relaciona las observaciones \mathbf{y}_t con θ_t mediante una

regresión dinámica, y la ecuación (55) denota la ecuación de estado porque describe la evolución en el tiempo para el vector de parámetros θ_t . Los supuestos del modelo son:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{N}_t \omega_t] &= \mathbf{N}_t \mathbf{W}_t \mathbf{N}_t' \\ \mathbb{E}[\nu_t \omega_t'] &= 0, & D_t &= \{y_t, y_{t-1}, \dots, y_1\} \\ \mathbb{E}[\nu_t \theta_0] &= 0, & \text{Var}[\omega_t] &= \mathbf{W}_t, & \mathbb{E}[\nu_t] &= 0 \\ \mathbb{E}[\omega_t \theta_0] &= 0, & \text{Var}[\nu_t] &= \mathbf{V}_t, & \mathbb{E}[\omega_t] &= 0 \\ \mathbb{E}[\mathbf{N}_t \omega_t] &= 0, & \text{Var}[\theta_0] &= \mathbf{C}_0, & \mathbb{E}[\theta_0] &= \mathbf{m}_0. \end{aligned}$$

Para hallar la solución de un modelo en forma espacio estado se puede usar: filtro de Kalman, si las funciones \mathbf{F}_t y \mathbf{G}_t , descritas en (54) y (55), son lineales y los errores ν_t y ω_t son Gaussianos. Si \mathbf{F}_t y \mathbf{G}_t no son lineales se puede recurrir a técnicas de filtrado tales como: filtro de Kalman extendido, filtro de partículas, métodos de integración numérica, métodos MCMC.

3.5.1 Modelo básico de crecimiento en forma de espacio estado

Considérese que los datos del modelo están representado en escala logarítmica y están sujeto a un error de medida $V_t = (v_{1,t}, v_{2,t}, v_{3,t}) \sim N(0, \Lambda)$, con $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$. Obsérvese que por la ley de equilibrio se tienen las ecuaciones (41) y (42). Por otra parte, tomando logaritmo en la función de producción¹, y sustituyendo la ecuación (42) se obtiene:

$$\hat{Y}_t = [\alpha + (1 - \alpha)\mathbf{R}] \hat{K}_t + [1 + (1 - \alpha)\mathbf{S}] \hat{Z}_t \quad (56)$$

finalmente, sustituyendo (42) en (35) se tiene:

$$\hat{C}_t = (\alpha - \alpha_5\mathbf{R}) \hat{K}_t + (1 - \alpha_5\mathbf{S}) \hat{Z}_t. \quad (57)$$

Por consiguiente, se tiene:

$$\hat{K}_{t+1} = \mathbf{P} \hat{K}_t + \mathbf{Q} \hat{Z}_t \quad (58)$$

$$\hat{Z}_{t+1} = \rho \hat{Z}_t + \omega_t \quad (59)$$

$$\hat{L}_t = \mathbf{R} \hat{K}_t + \mathbf{S} \hat{Z}_t \quad (60)$$

$$\hat{Y}_t = [\alpha + (1 - \alpha)\mathbf{R}] \hat{K}_t + [1 + (1 - \alpha)\mathbf{S}] \hat{Z}_t \quad (61)$$

$$\hat{C}_t = (\alpha - \alpha_5\mathbf{R}) \hat{K}_t + (1 - \alpha_5\mathbf{S}) \hat{Z}_t. \quad (62)$$

¹Se tiene

$$\begin{aligned} Y_t &= Z_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}, \\ \log Y_t &= \log Z_t + \alpha \log K_t + (1 - \alpha) \log L_t, \\ \hat{Y}_t &= \hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1 - \alpha) \hat{L}_t. \end{aligned}$$

Así que:

1. **La ecuación de observación:** ($\mathbf{y}_t = \mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t + \nu_t$)

$$\begin{bmatrix} \log(Y_t) \\ \log(L_t) \\ \log(C_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + (1 - \alpha)\mathbf{R} & 1 + (1 - \alpha)\mathbf{S} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \alpha - \alpha_5\mathbf{R} & 1 - \alpha_5\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{Z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \\ v_{3,t} \end{bmatrix} \quad (63)$$

donde $\mathbf{d}_t = [0 \ 0 \ 0]^T$.

2. **La ecuación de estado:** ($\theta_t = \mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{h}_t + \mathbf{N}_t \omega_t$)

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ \hat{Z}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{Z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_t \quad (64)$$

donde $\mathbf{h}_t = [0 \ 0]^T$.

3.6 Verosimilitud del modelo

Las ecuaciones espacio estado dadas en (54) y (55) suponen que:

$$\omega_t \sim N(0, \mathbf{W}_t) \quad y \quad \nu_t \sim N(0, \mathbf{V}_t).$$

Entonces el filtro de Kalman permite recursivamente construir un pronóstico lineal de \mathbf{y}_t , usando $y_{t|t-1}$, basado en las observaciones anteriores. Además, implica que la diferencia de \mathbf{y}_t y su predicción $\mathbf{y}_{t|t-1}$ se distribuye normalmente con media cero y varianza $\mathbf{\Omega}_t$. La salida del filtro de Kalman puede ser usado para calcular la función de verosimilitud dada por:

$$L(\mathbf{y}^T | \gamma) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{\Omega}_t|}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1})' \mathbf{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1})}{2} \right\} \quad (65)$$

La log verosimilitud está dada por:

$$\ln L(\mathbf{y}^T | \gamma) = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{\Omega}_t(\gamma)| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{e}'_t(\gamma) \mathbf{\Omega}_t^{-1}(\gamma) \mathbf{e}_t(\gamma) \quad (66)$$

Usando (54), y definiendo $D_t = \{y_t, \dots, y_1\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1} = \mathbf{y}_t - \mathbf{F}_t \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1}) - \mathbf{d}_t \\ &= \mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t + \nu_t - \mathbf{F}_t \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1}) - \mathbf{d}_t \\ &= \mathbf{F}_t (\theta_t - \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1})) + \nu_t. \end{aligned} \quad (67)$$

La log verosimilitud para el modelo básico de crecimiento, queda como:

$$\log L = -\frac{3T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T e_t' \Omega_t^{-1} e_t \quad (68)$$

donde:

$$\begin{aligned} e_t &= y_t - y_{t|t-1} = y_t - F_t \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1}) \\ \Omega_t &= \mathbb{E}(e_t e_t') = F_t \mathbb{V}ar(\theta_t | D_{t-1}) F_t' + V_t, \end{aligned} \quad (69)$$

e_t representa el error de predicción y Ω_t es su matriz del error cuadrático medio.

3.7 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman permite mediante un método recursivo estimar la función de máxima verosimilitud. De acuerdo con Harvey (1989), el procedimiento de estimación del filtro es el siguiente: el modelo es formulado en espacio estado y para un conjunto inicial de parámetros dados, los errores de predicción del modelo son generados por el filtro, y éstos son utilizados para evaluar recursivamente la función de verosimilitud hasta maximizarla. El filtro tiene su origen en el documento de Kalman (1960), donde se describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos. La derivación del filtro de Kalman se desarrolló en el contexto de modelos espacio estado, en donde el núcleo es la estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos. Las ecuaciones que describen el filtro de Kalman se conocen como *ecuaciones de predicción*, las cuales son responsables de la proyección del estado al momento t tomando como referencia el estado en el momento $t - 1$ y de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado; y las *ecuaciones de actualización*, incorporan la nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado. Las ecuaciones son:

$$\mathbf{m}_{t|t-1} = \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1|t-1} + \mathbf{h}_t \quad (70)$$

$$\mathbf{V}_{t|t-1} = \mathbf{G}_t \mathbf{V}_{t-1|t-1} \mathbf{G}_t' + \mathbf{N}_t \mathbf{W}_t \mathbf{N}_t' \quad t = 1, \dots, T \quad (71)$$

$$\mathbf{m}_{t|t} = \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \Omega_t^{-1} (y_t - F_t \mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t) \quad (72)$$

$$\mathbf{V}_{t|t} = \mathbf{V}_{t|t-1} - \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \Omega_t^{-1} \mathbf{F}_t \mathbf{V}_{t|t-1}, \quad (73)$$

donde: $\mathbf{m}_{t|t-1} = \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1})$, $\mathbf{V}_{t|t-1} = \mathbb{V}ar(\theta_t | D_{t-1})$, $\mathbf{m}_{t|t} = \mathbb{E}(\theta_t | D_t)$ y $\mathbf{V}_{t|t} = \mathbb{V}ar(\theta_t | D_t)$. Las ecuaciones (70) y (71) son las ecuaciones de predicción y las ecuaciones (72) y (73) las ecuaciones de actualización.

3.7.1 Derivación de ecuaciones del filtro de Kalman

Dado el modelo espacio estado definido en (54) y (55). Considerando $\mathbf{m}_{t-1|t-1}$ y $\mathbf{V}_{t-1|t-1}$ conocidos, el estimador óptimo de θ_t está dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{t|t-1} &= \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1|t-1} + \mathbf{h}_t \\ \mathbf{V}_{t|t-1} &= \mathbf{G}_t \mathbf{V}_{t-1|t-1} \mathbf{G}'_t + \mathbf{N}_t \mathbf{W}_t \mathbf{N}'_t \quad t = 1, \dots, T.\end{aligned}\quad (74)$$

Para la justificación de las ecuaciones (74) considérese lo siguiente: Para alguna media $\mathbf{m}_{t-1|t-1}$ y matriz de covarianza $\mathbf{V}_{t-1|t-1}$, se tiene que $(\theta_{t-1} | D_{t-1}) \sim (\mathbf{m}_{t-1|t-1}, \mathbf{V}_{t-1|t-1})$; es decir,

$$\mathbb{E}(\theta_{t-1} | D_{t-1}) = \mathbf{m}_{t-1|t-1}, \quad \mathbb{V}ar(\theta_{t-1} | D_{t-1}) = \mathbf{V}_{t-1|t-1}$$

ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1}) &= \mathbb{E}[\mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{h}_t + \mathbf{N}_t \omega_t | D_{t-1}] \\ &= \mathbf{G}_t \mathbb{E}(\theta_{t-1} | D_{t-1}) + \mathbf{h}_t \\ &= \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1|t-1} + \mathbf{h}_t \\ &= \mathbf{m}_{t|t-1}\end{aligned}\quad (75)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(\theta_t | D_{t-1}) &= \mathbb{V}ar[\mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{h}_t + \mathbf{N}_t \omega_t | D_{t-1}] \\ &= \mathbb{V}ar(\mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{N}_t \omega_t | D_{t-1}) \\ &= \mathbf{G}_t \mathbb{V}ar(\theta_{t-1} | D_{t-1}) \mathbf{G}'_t + \mathbb{V}ar(\mathbf{N}_t \omega_t | D_{t-1}) \\ &= \mathbf{G}_t \mathbf{V}_{t-1|t-1} \mathbf{G}'_t + \mathbf{N}_t \mathbf{W}_t \mathbf{N}'_t \\ &= \mathbf{V}_{t|t-1}.\end{aligned}\quad (76)$$

Las ecuaciones (74) se conocen como *ecuaciones de predicción*. Las ecuaciones de actualización vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{t|t} &= \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}'_t \Omega_t^{-1} (y_t - F_t \mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t) \\ \mathbf{V}_{t|t} &= \mathbf{V}_{t|t-1} - \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t \Omega_t^{-1} \mathbf{F}'_t \mathbf{V}_{t|t-1}.\end{aligned}\quad (77)$$

Las *ecuaciones de actualización* (77) se obtienen a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{y}_t | D_{t-1}) &= \mathbb{E}[\mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t + \nu_t | D_{t-1}] \\ &= \mathbf{F}_t \mathbb{E}(\theta_t | D_{t-1}) + \mathbf{d}_t \\ &= \mathbf{F}_t \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t \\ &= \mathbf{y}_{t|t-1}\end{aligned}\quad (78)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(\mathbf{y}_t | D_{t-1}) &= \mathbb{V}ar[\mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t + \nu_t | D_{t-1}] \\ &= \mathbb{V}ar(\mathbf{F}_t \theta_t | D_{t-1}) + \mathbb{V}ar(\nu_t | D_{t-1}) \\ &= \mathbf{F}_t \mathbb{V}ar(\theta_t | D_{t-1}) \mathbf{F}'_t + \mathbf{V}_t \\ &= \mathbf{F}_t \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}'_t + \mathbf{V}_t \\ &= \Omega_t\end{aligned}\quad (79)$$

finalmente, se calcula la covarianza:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\theta_t, \mathbf{y}_t \mid D_{t-1}) &= \text{Cov}[\theta_t, \mathbb{E}[\mathbf{y}_t \mid \theta_t] \mid D_{t-1}] \\
&= \text{Cov}[\theta_t, \mathbf{F}_t \theta_t + \mathbf{d}_t \mid D_{t-1}] \\
&= \text{Cov}[\theta_t, \mathbf{F}_t \theta_t \mid D_{t-1}] + \text{Cov}[\theta_t, \mathbf{d}_t \mid D_{t-1}] \quad (80) \\
&= \text{Var}[\theta_t \mid D_{t-1}] \mathbf{F}_t' \\
&= \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t'.
\end{aligned}$$

Ahora, usando el Teorema de ajuste lineal de Bayes²:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta_t \mid D_t) &= \mathbb{E}(\theta_t \mid D_{t-1}) + \\
&\quad \text{Cov}(\theta_t, \mathbf{y}_t \mid D_{t-1}) \text{Var}(\mathbf{y}_t \mid D_{t-1})^{-1} [\mathbf{y}_t - \mathbb{E}(\mathbf{y}_t \mid D_{t-1})] \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\theta_t \mid D_t) &= \text{Var}(\theta_t \mid D_{t-1}) - \\
&\quad \text{Cov}(\theta_t, \mathbf{y}_t \mid D_{t-1}) \text{Var}(\mathbf{y}_t \mid D_{t-1})^{-1} (\text{Cov}(\theta_t, \mathbf{y}_t \mid D_{t-1}))' \quad (82)
\end{aligned}$$

se obtienen las ecuaciones de actualización:

$$\mathbf{m}_{t|t} = \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{F}_t \mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t) \quad (83)$$

$$\mathbf{V}_{t|t} = \mathbf{V}_{t|t-1} - \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{F}_t \mathbf{V}_{t|t-1} \quad (84)$$

tomando las ecuaciones (74) y (77) se obtiene el filtro de Kalman. Se puede escribir como un conjunto simple de recursiones pasando de $\mathbf{m}_{t-1|t-1}$ a $\mathbf{m}_{t|t}$ o alternativamente de $\mathbf{m}_{t|t-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{t+1|t} &= \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{m}_{t|t} + \mathbf{h}_{t+1} \\
&= \mathbf{G}_{t+1} [\mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{F}_t \mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t)] + \mathbf{h}_{t+1} \\
&= \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{y}_t \quad (85) \\
&\quad - \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{F}_t \mathbf{m}_{t|t-1} - \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{d}_t + \mathbf{h}_{t+1} \\
&= (\mathbf{G}_{t+1} - \mathbf{K}_t \mathbf{F}_t) \mathbf{m}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{y}_t + \mathbf{h}_{t+1} - \mathbf{K}_t \mathbf{d}_t
\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1}, \quad t = 1, \dots, T$$

y \mathbf{K}_t se conoce como la Ganancia de Kalman. La recursión para la matriz de covarianza es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{t+1|t} &= \mathbf{G}_{t+1} \mathbf{V}_{t|t} \mathbf{G}_{t+1}' + \mathbf{N}_{t+1} \mathbf{W}_{t+1} \mathbf{N}_{t+1}' \\
&= \mathbf{G}_{t+1} [\mathbf{V}_{t|t-1} - \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{F}_t' \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{F}_t \mathbf{V}_{t|t-1}] \mathbf{G}_{t+1}' + \\
&\quad \mathbf{N}_{t+1} \mathbf{W}_{t+1} \mathbf{N}_{t+1}', \quad t = 1, \dots, T.
\end{aligned}$$

²El Teorema 1: Ajuste lineal de Bayes, se encuentra en el Anexo A del presente artículo.

3.8 Inferencia bayesiana

La característica esencial de los métodos Bayesianos es el uso de la distribución a posteriori para cuantificar la incertidumbre en las inferencias basadas en el análisis estadístico de los datos. El paradigma bayesiano requiere de una densidad a priori $\pi(\gamma)$ para obtener una densidad a posteriori $\pi(\gamma | \mathbf{y})$ de la variable aleatoria γ dado el conjunto de datos \mathbf{y} . Cuando el modelo predictivo admite una representación en términos de modelos paramétricos y distribuciones a priori, el proceso puede ser identificado con la forma paramétrica estándar del Teorema de Bayes:

$$\pi(\gamma | \mathbf{y}) = \frac{L(\mathbf{y}|\gamma) \pi(\gamma)}{\int L(\mathbf{y}|\gamma) \pi(\gamma) d\gamma} \propto L(\mathbf{y}|\gamma) \pi(\gamma). \quad (86)$$

El resultado dado en (86) expresa la densidad a posteriori de γ dado los datos $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, en términos de la verosimilitud de los datos por la priori de los parámetros del modelo, según el Teorema de Bayes. Este teorema, publicado en (1763), permite la actualización continua de la información sobre los parámetros de la distribución conforme se generan más observaciones. El problema surge cuando se tiene que calcular la distribución a posteriori $\pi(\gamma | \mathbf{y})$; es decir, como se obtienen muestras de ésta distribución, cuando no se tiene una forma cerrada o una distribución conocida. Dado el desarrollo computacional reciente se recurre a los métodos MCMC, que permiten generar muestras de la distribución a posteriori a través de la simulación de variables obtenidas a partir de las densidades marginales o condicionales completas. Una de las técnicas más usadas para generar muestras de la distribución a posteriori es el algoritmo Metropolis Hastings.

3.9 Algoritmo Metropolis Hastings

El algoritmo Metropolis-Hastings es un poderoso método de cadenas de Markov, fue desarrollado por Metropolis et al. (1953) y generalizado por Hastings (1970). El algoritmo, siguiendo Chib y Greenberg (1995), es como sigue: se propone una distribución $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que sea fácil de muestrear, donde $\int q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$; es decir, $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una función de densidad de probabilidad condicionada a x . Esta distribución se conoce como probabilidad de transición. Cuando un proceso está en el punto x la densidad genera un valor y de $q(x, y)$. Ahora: si $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, satisface la siguiente condición, llamada de acuerdo con Chib y Greenberg (1995), condición de reversibilidad:

$$\pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (87)$$

se finaliza la búsqueda. Lo más frecuente es que el caso anterior no ocurra, y por tanto para algún \mathbf{x}, \mathbf{y} ,

$$\pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (88)$$

En este caso, se dice que el proceso de transición de \mathbf{x} a \mathbf{y} ocurre con más frecuencia que de \mathbf{y} a \mathbf{x} . Un camino conveniente es reducir el número de movimientos de \mathbf{x} a \mathbf{y} introduciendo una probabilidad:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 1. \quad (89)$$

Es la probabilidad de movimiento o de transición; es decir, la probabilidad de que el movimiento se realice. Si éste movimiento no se realiza entonces el proceso retorna \mathbf{x} como un valor de la distribución. Entonces la transición de \mathbf{x} a \mathbf{y} ($\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$) es realizada de acuerdo:

$$P_{MH}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv q(\mathbf{x}, \mathbf{y})\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (90)$$

donde: $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es determinada. Considerando de nuevo (89), se tiene que la transición de \mathbf{y} a \mathbf{x} no ocurre muy a menudo. Por lo tanto, se debe definir $\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ tan grande como sea posible, debido a que es una probabilidad, su límite superior es 1. Ahora, la probabilidad de transición $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es determinada de acuerdo a que P_{MH} satisfaga la condición de reversibilidad, porque entonces:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= \pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (91)$$

lo que implica:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \quad (92)$$

Es decir, la transición P_{MH} satisface la condición de reversibilidad. Si la desigualdad se invierte entonces se coloca $\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 1$ y se halla $\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ de la misma manera. De ésta manera, se ha probado que para ser reversible la transición P_{MH} , la probabilidad de transición debe ser:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \min \left[\frac{\pi(\mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, 1 \right] & \text{si } \pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0 \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (93)$$

El algoritmo genera una cadena de parámetros $\{\gamma_i\}_{i=1}^M$ de $\pi_j(\gamma | \mathbf{y}^T)$ de la siguiente manera:

Paso 1. Se inicializa el conjunto $i \rightsquigarrow 1$ y $\gamma_0 \sim P_1(\cdot)$. Se calculan las ecuaciones de estado $\theta_j = f_j(\gamma_{i-1}, \omega_i)$, $\omega_i \sim P_2(\cdot)$; y de observación $\mathbf{y}_j = g_j(\gamma_i, \nu_i)$, $\nu_0 \sim P_3(\cdot)$. Se evalúan $\pi(\gamma_i)$ y $L_j(\mathbf{y}^T | \gamma_i)$, y se hace $i \rightsquigarrow i+1$.

Paso 2. Se obtiene una muestra de una distribución propuesta dada por: $\gamma_i^p = \gamma_{i-1} + \xi_i$, donde $\xi_i \sim N(0, \psi)$.

Paso 3. Se actualizan las ecuaciones de estado y observación $f_j(\gamma_i^p, \omega_i)$ y $g_j(\gamma_i^p, \nu_i)$ en γ_i^p .

Paso 4. Se evalúan $\pi(\gamma_i^p)$ y $L_j(\mathbf{y}^T | \gamma_i^p)$, con los parámetros actualizados.

Paso 5. Se genera un $x_i \sim Unif(0, 1)$. Si $x_i \leq \min \left[\frac{\pi(\gamma_i^p) L_j(\mathbf{y}^T | \gamma_i^p)}{\pi(\gamma_{i-1}) L_j(\mathbf{y}^T | \gamma_{i-1})}, 1 \right]$ se hace $\gamma_i = \gamma_i^p$ en otro caso se hace $\gamma_i = \gamma_{i-1}$. Si $i < M$, se hace $i \rightsquigarrow i+1$ y se va al paso 2, en otro caso se para el proceso.

4 Aplicación a la economía venezolana

En esta sección se utilizan las técnicas descritas anteriormente para estimar el modelo neoclásico de crecimiento. Los datos de las variables observables son trimestrales y corresponden al producto real, empleo, consumo e inversión per capita. El primer paso para hacer inferencia bayesiana es especificar las distribuciones a priori para los parámetros del modelo, en éste caso se denotan por:

$$\gamma = \{\theta, \rho, \alpha, \tau, \delta, \beta, \sigma_\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}. \quad (94)$$

Las prioris del modelo, considerando independendencia entre los parámetros vienen dadas por:

$$\pi(\gamma) \propto \pi(\theta) \pi(\rho) \pi(\alpha) \pi(\tau) \pi(\delta) \pi(\beta) \pi(\sigma_\varepsilon) \pi(\sigma_1) \pi(\sigma_2) \pi(\sigma_3). \quad (95)$$

Se consideran priori suaves para los parámetros sujetos solamente a algunas restricciones para garantizar que sean propias. La elección de las priori suaves se debe a que se estimarán los parámetros basados en los datos y en una primera aproximación no se desea inclinar los resultados en favor de algún resultado particular. Usando distribuciones a priori suaves la distribución a posteriori es proporcional a la verosimilitud y en éste caso la estimación que se obtiene es un reflejo de la información de los datos y no las priori que se están introduciendo. La interpretación de los parámetros desde el punto de vista económico es la siguiente, de acuerdo con Fernández y Rubio (2004): el parámetro θ se relaciona con la oferta de trabajo en el modelo y sigue una distribución uniforme entre 0 y 1; éste rango incluye todos los valores posibles para el cual el ocio tiene una utilidad marginal positiva. La persistencia del choque de tecnología, ρ también se distribuye uniforme entre 0 y 1, ésta región implica una distribución estacionaria de

las variables del modelo con una cota inferior sobre la no persistencia. La priori para el parámetro α de la tecnología, también es uniforme entre 0 y 1, esto incluye todos los valores para los cuales la productividad marginal de capital y del trabajo son positivas. El parámetro τ es el que gobierna la elasticidad de sustitución y sigue una distribución uniforme entre 0 y 100, una preferencia lineal, ésta elección abarca todo el rango de los estimadores empíricos de los parámetros y solamente toma en cuenta los riesgos afectos y los riesgos no afectos que podrían predecir diferencias en las tasas de interés de grandes magnitudes que uno puede observar. La priori sobre la tasa de depreciación δ esta en un rango entre 0 y 0.05. El factor de descuento β , ésta en un rango entre 0.75 y 1, lo que significa que la tasa de interés anual del estado es estable entre 0% y 316%. La desviación estándar de la innovación de la productividad, σ_ε , sigue una distribución uniforme entre 0 y 0.1, una cota 15 veces más alta que el estimador usual. Las tres varianzas de los errores de la ecuación de observación se escogen igual que la priori elegida para el shock de la productividad. En el Cuadro 1 se observan las distribuciones a priori para cada parámetro del modelo.

Para obtener las distribuciones a posteriori de los parámetros, se usaron como base los programas de Fernández y Rubio (2004) elaborados en el paquete **MatLab(7.0)**, realizando las modificaciones convenientes para el caso de la economía venezolana. En el Cuadro 2 se observan los valores a priori y a posteriori de las variables del modelo en estado estable, para la economía de Venezuela. En el Cuadro 3 se observan las medias, las varianzas y los intervalos de confianza (95%) para los parámetros estimados considerando los datos del producto real, empleo, consumo e inversión per capita, para 100000 simulaciones. El producto total incluye los gastos en consumo del sector público y del sector privado, las horas de trabajo se aproximan mediante el empleo y la inversión incluye la formación bruta del capital fijo del sector público y del sector privado. En las Figuras (1), (2) y (3) (ver anexo B), se muestran los histogramas correspondientes a los parámetros θ , ρ , α y τ , δ , β , σ_ε , σ_1 , σ_2 y σ_3 , respectivamente. En las Figuras (4) y (5) (ver anexo B) se presentan los gráficos correspondientes a los datos reales graficados contra los datos estimados y sus ciclos considerando, el producto, el empleo, el consumo y la inversión per capita.

5 Discusiones y conclusiones

En el presente trabajo se ha mostrado una metodología para hacer inferencia en economías de equilibrio dinámico, desde una perspectiva bayesiana. Se ha utilizado un algoritmo MCMC, útil para simular de distribuciones a posteriori complicadas. Sin embargo, dada la no linealidad

Distribuciones a priori				
	Parámetros	Distribución	Media	Varianza
Parámetro de oferta de trabajo	θ	U(0,1)	0.500	0.08330
Persistencia del shock tecnológico	ρ	U(0,1)	0.500	0.08330
Participación del capital en el producto	α	U(0,1)	0.500	0.08330
Elasticidad de sustitución inter temporal	τ	U(0,100)	50.00	833.33
Tasa de depreciación	δ	U(0,0.05)	0.025	0.00020
Factor de descuento	β	U(0.75,1)	0.875	0.00520
Varianza del shock tecnológico	σ_ε	U(0,0.1)	0.050	0.00008
Varianza observacional y	σ_1	U(0,0.1)	0.050	0.00008
Varianza observacional l	σ_2	U(0,0.1)	0.050	0.00008
Varianza observacional c	σ_3	U(0,0.1)	0.050	0.00008

Cuadro 1: *Distribuciones a priori.*

Estado Estacionario			
VARIABLES	Venezuela (Observadas)	Venezuela (Priori)	Venezuela (Posteriori)
Empleo (L_{ss})	-	0.3063	0.2751
Capital (K_{ss})	-	20.467	11.734
Consumo (C_{ss})	-	1.2354	0.7551
Producto (Y_{ss})	-	1.6448	1.0001
Inversión (I_{ss})	-	0.4093	0.2449
Capital/Producto (K_{ss}/Y_{ss})	-	12.443	11.733
Consumo/Producto (C_{ss}/y_{ss})	0.7315	0.7511	0.7551
Inversión/Producto (I_{ss}/y_{ss})	0.2685	0.2488	0.2449

Cuadro 2: *Valores de las variables del modelo. Las medias no coinciden con los niveles de la serie porque $Z_{ss} = 1$.*

Estimación a Posteriori: Venezuela				
Parámetros	Media	Varianza	Limite Superior	Limite Inferior
θ	0.30401	0.06210	0.21104	0.41590
ρ	0.96539	0.00268	0.96061	0.97070
α	0.34387	0.05044	0.25165	0.45479
τ	2.00870	0.00090	2.00707	2.01048
δ	0.02087	0.00056	0.01959	0.02186
β	0.99164	0.00167	0.98866	0.99522
σ_ε	0.01636	0.01025	0.00266	0.03109
σ_1	0.01537	0.00056	0.01406	0.01609
σ_2	0.01147	0.00057	0.01059	0.01267
σ_3	0.08726	0.00046	0.08624	0.08800

Cuadro 3: *Medias, varianzas e intervalos de confianza a posteriori de los parámetros.*

de los MEGE, se tiene como consecuencia que la distribución a posteriori resultante no tiene una forma cerrada, razón por la cual se requieren varios pasos previos antes de implementar el algoritmo para generar las muestras. En primer lugar se tiene que linealizar la economía alrededor de un estado estable. La linealización se realiza siguiendo el algoritmo de Uhlig (1995). En segundo lugar se tiene que colocar el modelo en forma de espacio estado. En tercer lugar se utiliza el algoritmo del filtro de Kalman para actualizar los parámetros del modelo en forma recursiva y finalmente se utiliza el algoritmo MCMC para generar las muestras deseadas de la distribución a posteriori. Por otra parte, se ajustó el MEGE a los datos de la economía venezolana, de este análisis se puede concluir que los algoritmos utilizados para estimar los parámetros del modelo trabajan de manera eficiente y a bajo costo computacional, permitiendo obtener estimaciones consistentes, es decir, se obtienen estimados de las predicciones que reflejan adecuadamente el comportamiento del producto, el empleo, el consumo y la inversión per capita del país. En los histogramas estimados de los parámetros se observan comportamientos bimodales y distribuciones asimétricas. También se puede concluir que los parámetros estimados son muy similares a los obtenidos por Fernández y Rubio (2004) para la economía de los Estados Unidos aunque dichas economías son muy diferentes. Creemos que pueden estar sucediendo varias situaciones, una es que estos modelos son muy generales, otra situación que puede estar ocurriendo es que se están utilizando las priori con la misma calibración sugerida por Fernández y Rubio, sería interesante modificarlas y ajustar

nuevamente el modelo, pero se requiere de más información de expertos en la economía venezolana para poder incluirlas. Otra situación que pudiera estar afectando, es el equilibrio de la economía venezolana, que esta influenciada por la actividad petrolera, como es conocido, en los últimos años los precios del petróleo han estado por encima del promedio estimado, y la economía venezolana depende directamente del comportamiento de esta variable. Finalmente se puede señalar, que estos resultados son considerados como un punto de partida para investigaciones a posteriori, se requieren de estudios con mayor precisión sobre intereses específicos de la economía venezolana. Finalmente destacamos que uno de nuestros aportes fue proponer una metodología útil que permita construir modelos en base a nuestras realidades de manera tal que se pueda predecir con precisión eventos futuros y en tiempo real sobre el conocimiento del pasado y contribuir de manera más eficiente con el análisis de políticas macroeconómicas y financieras.

Agradecimientos

Los autores agradecen las revisiones y comentarios de Juan Rubio quién facilitó los programas base para la realización de éste documento y motivo a escribir este artículo. Cualquier error u omisión es exclusiva responsabilidad de los autores.

Referencias

- [1] Basdevant, O. (2003) “On applications of state-space modeling in macroeconomics”, *Discussion Paper Series, Reserve Bank of New Zealand*, DP2003/02 : 1–30.
- [2] Cass, D. (1965) “Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation”, *Review of Economic Studies* **32**(3): 233-240.
- [3] Chib, S.; Greenberg, E. (1995) “Understanding the Metropolis-Hasting algorithm”, *The American Statistical Association* **49**: 327–335.
- [4] Christiano, L.; Eichenbaum, M.; Evans, C. (2001) “Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to a monetary policy”, *Working Paper no. 8403, NBER, Cambridge, MA*.
- [5] Cooley, T.; Prescott, E. (1995) *Economic growth and business cycles*. In: T.F. Cooley (Ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*. Princeton University Press, Princeton NJ.

- [6] De Jong, D.; Ingram, B.; Whiteman, C. (2000) “A Bayesian approach to dynamic macroeconomics”, *Journal of Econometrics* **98**: 203–223.
- [7] Fernández-Villaverde, J.; Rubio-Ramírez, J.F. (2004) “Comparing dynamic equilibrium models to data: a Bayesian approach”, *Journal of Econometrics* **123**(1): 153–187.
- [8] Fernández-Villaverde, J.; Rubio-Ramírez, J.F. (2005) “Estimating dynamic equilibrium economies: linear versus nonlinear likelihood”, *Journal of Applied Econometrics* **20**(7): 891–910.
- [9] Fernández-Villaverde, J.; Rubio-Ramírez, J. (2006) “Solving DSGE models with perturbation methods and a change of variables”, *Journal of Economic Dynamics and Control* **30**(12): 2559–2531.
- [10] Fernández-Villaverde, J.; Rubio-Ramírez, J.; Sargent, T.; Watson, M. (2007) “A,B,C’s (and D)’s for understanding VARs”, *The American Economic Review* **97**(3): 1021–1026.
- [11] Geweke, J. (1998) “Using simulation methods for Bayesian econometrics models: inference, development and communication”, Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department Staff Report 249.
- [12] Hastings, W. (1970) “Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications”, *Biometrika* **57**(1): 97–109.
- [13] Harvey, A. (1989) *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] Kalman, R. (1960) “A new approach to linear filtering and prediction problems”, *J. Basic Engineering* **82** series D: 35–45.
- [15] Koopmans, T. (1965) *On the Concept of Optimal Economic Growth. The Econometric Approach to Development Planning*. North Holland, Amsterdam.
- [16] Koopman, S.; Bos, C. (2004) “State space models with a common stochastic variance”, *Journal of Business and Economic Statistics* **22**(3): 346–357.
- [17] Landon, L. (1999) *Bayesian Comparison of Dynamic Macroeconomic Models*. Ph.D Thesis, University of Minnesota.
- [18] Metropolis N.; Rosenbluth, A.; Rosenbluth, M.; Teller, A.; Teller, E. (1953) “Equation of state calculations by fast computing machines”, *The Journal of Chemical Physics* **21**(6): 1087–1092.

-
- [19] Ord, J.; Koehler, A.; Snyder, R. (1997) “Estimation and prediction for a class of dynamic nonlinear statistical models”, *Journal of the American Statistical Association* **92**(440): 1621–1629.
- [20] Otrok, C. (2001) “On measuring the welfare cost of business cycles”, *Journal of Monetary Economics* **47**(1): 61–92.
- [21] Rabanal, P.; Rubio, J. (2005) “Comparing new Keynesian models of the business cycle: a Bayesian approach”, *Journal of Monetary Economics* **52**(6): 1151–1166.
- [22] Sargent, T. (1989) “Two models of measurements and the investment accelerator”, *The Journal of Political Economy* **97**(2): 251–287.
- [23] Schorfheide, F. (2000) “Loss function-based evaluation of DSGE models”, *Journal of Applied Econometrics* **15**(6): 645–670.
- [24] Smets, F.; Wouters, R. (2003) *Shocks and frictions in US business cycles: a Bayesian DSGE approach*. Mimeo. European Central Bank, Frankfurt, 58 pages. In: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1687574.
- [25] Uhlig, H. (1995) *A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily*. Discussion Paper 1010, Institute for Empirical Macroeconomics, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 22 pages.

Anexo A: Ajuste lineal de Bayes

Teorema 1 (Ajuste Lineal de Bayes) Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} cantidades aleatorias sobre las cuales se tiene una estructura de covarianza y media inicialmente ajustada por D . La media de \mathbf{x} y la covarianza de \mathbf{x} e \mathbf{y} posteriormente ajustada por \mathbf{z} , son:

$$\mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{z}, D) = \mathbb{E}(\mathbf{x} | D) + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z} | D) \text{Var}(\mathbf{z} | D)^{-1} [\mathbf{z} - \mathbb{E}(\mathbf{z} | D)]$$

$$\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{z}, D) = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | D) - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z} | D) \text{Var}(\mathbf{z} | D)^{-1} \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{y} | D)$$

donde “|” en este contexto se interpreta como “ajustado por” (mejor que “condicionado sobre”).

La demostración del Teorema 1 se sigue a partir del siguiente corolario y proposiciones:

Corolario 1 Si \mathbf{x}, \mathbf{z} y D son cantidades aleatorias entonces la esperanza de $\mathbf{x} | D$ puede ser calculada introduciendo \mathbf{z} como:

$$\mathbb{E}(\mathbf{x} | D) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{z}, D) | D].$$

Prueba: Sea $f(x, y)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de x e y . Por definición de esperanza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \int \int x f(x, y) dx dy \\ &= \int \int x f(x | y) f_y(y) dx dy \\ &= \int f_y(y) \left[\int x f(x | y) dx \right] dy \\ &= \int f_y(y) \mathbb{E}(x | y) dy \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(x | y)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 1 Bajo las mismas condiciones del Corolario 1,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | D) = \text{Cov}[\mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{z}, D), \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{z}, D) | D] + \mathbb{E}[\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{z}, D) | D].$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov[x, y \mid D] &= \{\mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \mid D\} = \\
&= \{\mathbb{E}(\mathbb{E}(xy \mid z, D)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid z, D)) \mid D\} \\
&= \{\mathbb{E}(\mathbb{E}(xy \mid z, D)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid z, D)) \\
&\quad + \mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(y \mid z, D) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(y \mid z, D) \mid D\} \\
&= \{\mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(y \mid z, D) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(x \mid z, D))\mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid z, D)) \mid D\} \\
&\quad + \mathbb{E}\{\mathbb{E}(xy \mid z, D) - \mathbb{E}(x \mid z, D)\mathbb{E}(y \mid z, D) \mid D\} \\
&= \mathbb{C}ov[\mathbb{E}(x \mid z, D), \mathbb{E}(y \mid z, D) \mid D] + \mathbb{E}[\mathbb{C}ov(x, y \mid z, D) \mid D]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 2 *Bajo las mismas condiciones del Corolario 1,*

$$\mathbb{C}ov(\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid D) = \mathbb{C}ov[\mathbf{x}, \mathbb{E}(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}, D) \mid D].$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov[x, \mathbb{E}(y \mid x, D) \mid D] &= \\
&= \mathbb{E}\{\{[x - \mathbb{E}(x)] [\mathbb{E}(y \mid x, D) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid x, D))]^T\} \mid D\} \\
&= \mathbb{E}\{\{x \mathbb{E}(y \mid x, D)^T - x \mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid x, D))^T \\
&\quad - \mathbb{E}(x) \mathbb{E}(y \mid x, D)^T + \mathbb{E}(x) \mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid x, D))^T\} \mid D\} \\
&= \mathbb{E}\{\{[x - \mathbb{E}(x)] \mathbb{E}(y \mid x, D)^T - [x - \mathbb{E}(x)] \mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid x, D))^T\} \mid D\} \\
&= \mathbb{E}\{\{[x - \mathbb{E}(x)] [\mathbb{E}(y \mid x, D) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(y \mid x, D))]^T \mid D\} \\
&= \mathbb{E}\{\{[x - \mathbb{E}(x)] [y - \mathbb{E}(y)]^T \mid D\} \\
&= \mathbb{C}ov(x, y \mid D). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Anexo B: Histogramas

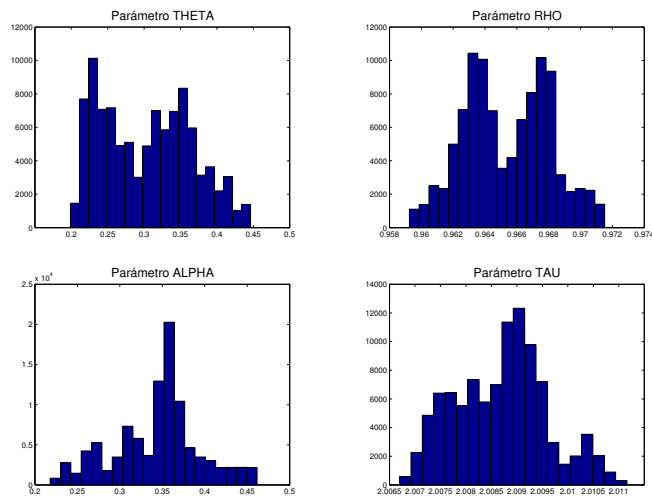


Figura 1: *Histogramas de los parámetros θ , ρ , α y τ .*

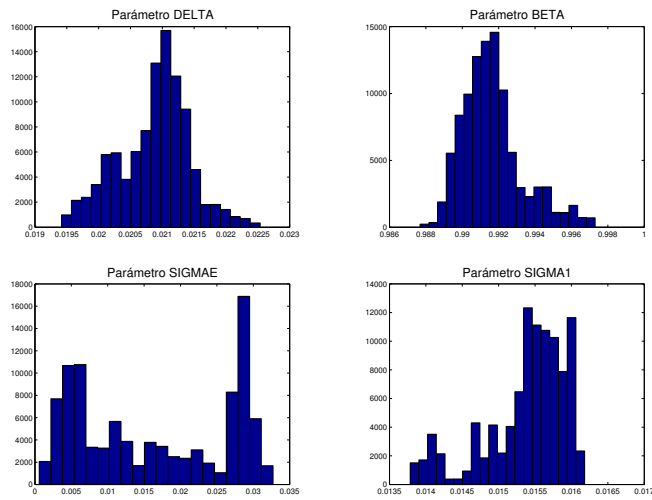


Figura 2: *Histogramas de los parámetros δ , β , σ_ε y σ_1 .*

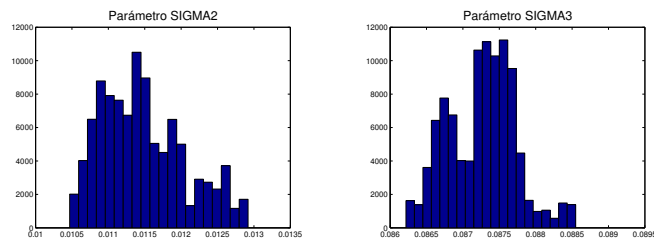


Figura 3: *Histogramas de los parámetros σ_2 y σ_3*

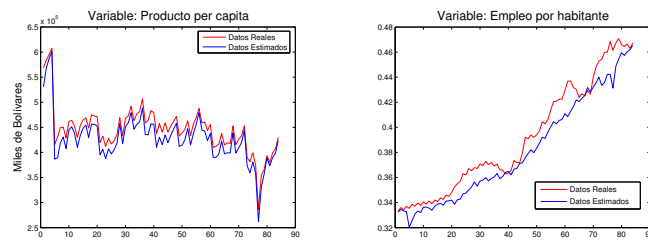


Figura 4: *Datos reales y datos estimados (producto y empleo per capita)*

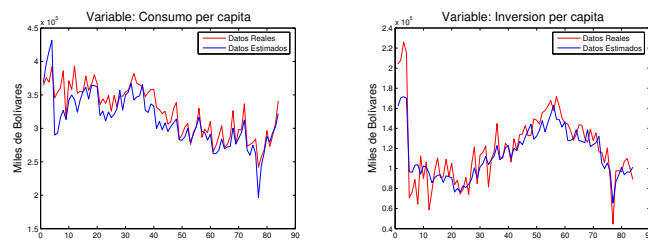


Figura 5: *Datos reales y datos estimados (consumo e inversión per capita)*